T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SAYI DİZİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Fatih YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA
2009

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SAYI DİZİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Fatih YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 13/08/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT	Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE	Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
(Danışman)	(Üye)	(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SAYI DİZİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Fatih YILMAZ
Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
2009, 48 sayfa

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde günümüz bilim insanlarının ilgisini çeken Fibonacci, Pell, Lucas ve Jacobsthal sayı dizilerinin tanımları ve bilinen bazı özellikleri verilip, bu dizilerle ilgili olarak tanımlanan genelleştirilmiş sayı dizileri incelenmiştir.

İkinci bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda Jacobsthal sayı dizisi genelleştirilmiş, ikinci ve üçüncü kısımda ise Fibonacci, Pell, Jacobsthal ve Lucas sayı dizilerini de kapsayacak şekilde sayı dizileri tanımlanarak, companion matrisler yardımıyla sayı dizileri matris teoriye taşınmış ve matrisler yardımıyla dizinin sağladığı özellikler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci Sayı Dizisi; Pell Sayı Dizisi; Jacobsthal Sayı Dizisi; Matris Metot; Companion Matris; Binet formülü.

ABSTRACT

Mc.S. Thesis

GENERALIZATION OF NUMBER SEQUENCES

Fatih YILMAZ
Selcuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
2009, 48 page

In this study, we investigate Fibonacci, Pell, Lucas and Jacobsthal number sequences which have huge interest in modern science. Initially, we give definitions and some known properties of these sequences. Then we defined new sequences which contain previous ones.

In the first section of second the chapter, we generalized Jacobsthal sequence and, also in the second and third sections of this chapter, we defined new sequences which contain Fibonacci, Pell and Jacobsthal sequences. By Companion Matrices, we combined matrix and number sequence concepts and give some properties of these sequences.

Keywords: Fibonacci Sequence; Pell Sequence; Jacobsthal Sequence; Matrix Method; Companion Matrix; Binet Formula.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam Prof. Dr. Durmuş BOZKURT yönetiminde hazırlanmış ve Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışma başlıca üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Fibonacci, Pell, Lucas ve Jacobsthal sayı dizilerinin tanımları ve bazı özellikleri verilmiş, bu sayı dizileriyle ilgili olarak daha önce yapılmış olan çalışmalar incelenmiştir.

Çalışmamızın esas kısmı olan ikinci bölümde ise bu sayı dizileri ile ilgili genelleştirmeler tanımlanmış ve tanımlanan dizilerin bazı özellikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde çalışmamızla ilgili sonuç ve öneriler paylaşılmıştır.

Çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Durmuş BOZKURT'a teşekkürlerimi sunarım.

SEMBOL TABLOSU

Kısaltmalar	Açıklamalar
F_n	*n*-inci Fibonacci Sayısı
P_n	*n*-inci Pell Sayısı
L_n	*n*-inci Lucas Sayısı
J_n	*n*-inci Jacobsthal Sayısı
P-J	Pell-Jacobsthal sayı dizisi
F-P-J	Fibonacci-Pell-Jacobsthal sayı dizisi
P_n^i	*i*-inci genelleştirilmiş *k*-mertebeli Pell dizisinin *n*-inci elemanı
g_n^i	*i*-inci genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci dizisinin *n*-inci elemanı
J_n^i	*i*-inci genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal dizisinin *n*-inci elemanı

İÇİNDEKİLER

Özet	İ
Abstract	İi
Önsöz	İii
Sembol Tablosu	İv
İçindekiler	V
1. GİRİŞ	1
2. SAYI DİZİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ	10
2.1. Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal Dizisi	10
2.1.1 Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal Dizisi İçin Binet Formülü	14
2.1.2 Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal Sayılarının Toplamları	18
2.2. Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Pell-Jacobsthal Dizisi	21
2.2.1 P-J Sayılarının Toplamları	27
2.2.2 Genelleştirilmiş P-J Sayılarının Toplamları İçin Kesin Bir Formül	29
2.3. Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci-Pell-Lucas Dizisi	33
2.3.1 Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci-Pell-Lucas Dizisi İçin Binet Formülü	37
2.3.2. Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci-Pell-Lucas Dizisi İçin Toplamlar	40
2.3.3. Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci-Pell-Lucas Dizisi İçin Bir Kesin (Explicit) Formül	43
3. SONUÇ	46
4. KAYNAKLAR	47

1. GİRİŞ

Düşünce tarihinin en önemli olaylarından biri olan ve matematiğin temelini oluşturan sayıların tarihi milattan önceki devirlere kadar gitmektedir. Sayıların yerine mağara duvarlarına çizilen çizgiler, ağaç dallarına atılan çentikler, bazen de ipe atılan düğümler veya çakıl taşları kullanılmıştır. Eski Mısır'da rakam ve sayılar bazı sembollerin yanyana gelmesiyle ifade edilmiştir. Zamanla sayı sistemleri tanımlanmış, bu tanımlar üzerinde çalışılarak daha da geliştirilmiş ve daha başka sayı sistemlerinin ortaya çıkması sağlanmıştır.

Son yıllarda bilim dünyasının ilgisini çeken, sanat ve mimari gibi bir çok alanda karşımıza çıkan Fibonacci sayıları, İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci tarafından tanımlanmıştır. Ünlü matematikçi 13. yüzyılda yaşamış, ilk ve en iyi bilinen kitabı Liber Abaci'yı 1202 yılında yazmıştır. Fibonacci ismi, Liber Abaci'de yer alan ve ilk bakıldığında matematikle pek ilgisi olmadığı düşünülen, tavşanların üremesi ile ilgili basit bir problemden dolayı günümüze kadar gelmiştir. Problem şunu sorgulamaktadır: Bir tavşan çifti her ay yeni bir çift yavru doğurursa ve yeni tavşan çifti kendi doğumundan iki ay sonra yavrulamaya başlarsa, bir yıl sonunda kaç çift tavşan elde edilir. Aylara göre tavşan sayılarındaki değişim Tablo 1 ile verilmiştir.

Birey\Aylar	O	Ş	M	N	M	H	T	A	E	E	K	A
Yetişkin	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Yavru	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
Toplam	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Tablo 1

Bu mantıkla düşünmeye devam edilirse, her terimi kendisinden önceki ardışık iki terimin toplamı olarak ifade edilebilecek olan bir sayı dizisi elde edilir ve bu dizi aşağıdaki rekürans formülüyle ifade edilmiştir.

Tanım 1.1. $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ olmak üzere $n>1$ için,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

şeklindeki rekürans bağıntısı ile tanımlanan sayılara Fibonacci sayıları denir.

Fibonacci sayıları, Binet formülü olarak da bilinen, α ve β dizinin rekürans bağıntısından elde edilen $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

formülüyle de ifade edilebilir.

Fibonacci sayı dizisi sadece sanat ve mimaride değil, aynı zamanda Öklit (Euclidean) algoritmasında en büyük ortak bölen hesaplaması, müziğin tonunu belirleme gibi diğer başka alanlarda da karşımıza çıkmaktadır.

Fibonacci sayılarının bilim dünyasında bu kadar ilgi görmesi üç nedenle ifade edilebilir. Bunlardan ilki, dizinin bazı terimleri doğada beklenmedik şekillerde ve yerlerde karşımıza çıkmasıdır. Örneğin papatyadaki yaprakların sayıları, ayçiçeğindeki sarmalların sayısı Fibonacci sayılarıdır. Yapılan çalışmalarda bu tür sıralanmanın güneşi en verimli şekilde kullanmayı sağladığı, polen taşıyan böceklerin bu tür bir düzeni tercih ettiği sonucuna varılmıştır.

İkinci olarak ise, ardışık iki Fibonacci sayısının oranının altın oran diye bilinen, sanat ve mimaride güzel sonuçlar veren 1.61803… sayısına yakınsamasıdır. Bu oranı şöyle ifade edebiliriz: Bir *AB* doğru parçası düşünelim. Bu doğru parçasını küçük parçanın büyük parçaya oranı, büyük parçanın bütüne oranını verecek şekilde ikiye bölelim. Öyleki büyük parça *a* birim ve küçük parça da 1 birim ise

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{a+1}$$

oranı bize altın oranı verir. Bu ifade düzenlenirse

$$a^2 - a - 1 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri $\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$ olup, pozitif kök altın oranı ifade etmektedir.

Üçüncüsü ise matematikte ve fizikteki uygulamalarıdır.

İtalyan matematikçi Edouardo Lucas (1842-1891) ise Fibonacci sayı sisteminde kullanılan son iki terimin toplamı bir sonraki terimi verir kuralını, başlangıç koşullarını değiştirerek uygulamış ve yeni bir sayı sistemi tanımlamıştır.

Tanım 1.2. $n>1$ için $L_1=1,\ L_2=3$ olmak üzere

$$L_{n+1}=L_n+L_{n-1}$$

rekürans bağıntısı ile verilen sayılara Lucas sayıları denir.

Lucas sayılarını $\alpha=(1+\sqrt{5})/2$ ve $\beta=(1-\sqrt{5})/2$ olmak üzere

$$L_n=\alpha^n+\beta^n$$

formülüyle de elde edebiliriz. Bu dizilere benzer olarak tanımlanan ve bilim dünyasının ilgisini çeken başka sayı dizileri de vardır.

Tanım 1.3. $P_1=1,\ P_2=2$ olmak üzere

$$P_n=2P_{n-1}+P_{n-2}$$

rekürans bağıntısı ile verilen sayılara Pell sayıları denir.

Pell sayıları aynı zamanda dizinin rekürans bağıntısından elde edilen $x^2-2x-1=0$ polinomunun kökleri olan $1\mp\sqrt{2}$ ile

$$P_n=\frac{(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Ardışık iki Pell sayısının oranının limiti, gümüş oran olarak da bilinen $1+\sqrt{2}$ sayısına yakınsamaktadır.

Alman matematikçi Ernst Jacobsthal (1882-1965) kendi adıyla anılan sayı dizisini aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 1.4. $n>1$ için $J_1=1,\ J_2=1$ olmak üzere

$$J_n=J_{n-1}+2J_{n-2}$$

rekürans bağıntısı ile elde edilen diziye Jacobsthal sayı dizisi denir.

Bu sayı dizisi aynı zamanda

$$J_n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$$

formülü ile de elde edilebilir.

Tanım 1.5. $j_0=2$ ve $j_1=1$ olmak üzere $n\geq 2$ için

$$j_n=j_{n-1}+2j_{n-2}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan diziye Jacobsthal-Lucas dizisi, bu dizinin terimlerine ise Jacobsthal-Lucas sayıları denir.

Jacobsthal-Lucas sayılarını

$$j_n = 2^n + (-1)^n$$

formülü ile de elde edebiliriz.

Fibonacci, Lucas, Pell, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları Tablo 2'de karşılaştırılmıştır.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	…
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	…
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	…
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	…
j_n	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025	…

Tablo 2

Fibonacci, Pell ve Jacobsthal sayı dizileri matris kuvvetleri ile de ifade edilebilmektedir. Charles H. King 1960 yılında tanımladığı

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin kuvvetlerini alarak, $n \geq 1$ olmak üzere

$$Q^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde Fibonacci sayılarını elde etmiştir. Ercolano, Pell sayı dizisini

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan matrisin kuvvetlerini alarak

$$M^n = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

olarak elde etmiştir. Köken ve Bozkurt Jacobsthal sayılarını

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin kuvvetini alarak

$$F^n = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}$$

elde etmiştir [Köken, Bozkurt; 2008].

Bilim insanları bu sayı dizilerinin daha genel olarak ifade edilmesi için çalışmışlar ve genelleştirilmiş sayı dizileri tanımlamışlardır.

Miles, genelleştirilmiş *k*-Fibonacci sayılarını $n > k \geq 2$ için

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_{k-2} = 0 \text{ ve } f_{k-1} = f_k = 1$$

başlangıç koşulları ile

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + \cdots + f_{n-k}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlamıştır [Miles; 1960]. Bu dizinin bazı elemanları Tablo 3'te verilmiştir.

$k \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	1	2	3	5	8	13	21
3	0	1	1	2	4	7	13	24
4	0	0	1	1	2	4	8	15

Tablo 3

Kılıç ve Taşçı genelleştirilmiş *k*-mertebeli Pell sayı dizisini P_n^i *i*-inci genelleştirilmiş *k*-mertebeli Pell dizisinin *n*-inci elemanı olmak üzere, $n > 0$ ve $1 \leq i \leq k$ için

$$P_n^i = \begin{cases} 1 & i = 1\text{-}n \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \quad 1 - k \leq n \leq 0$$

başlangıç koşulları ile

$$P_n^i = 2P_{n-1}^i + P_{n-2}^i + \cdots + P_{n-k}^i$$

olarak tanımlamıştır [Kılıç, Taşçı; 2006]. Dizinin katsayıları ile oluşturulan companion matris ile, sayı dizisini matris teoriye taşımıştır. Elde edilen companion matrisin öz değerlerinin katlılığını incelemiş ve katlı öz değerlere sahip olmadığını göstermiştir. Öz değerlere bağlı olarak verilen vandermonde matris yardımıyla da genelleştirilmiş Binet formülünü elde etmiştir [Kılıç, Taşçı; 2006].

Bazı genelleştirilmiş *k*-mertebeli Pell sayılarını Tablo 4 ile verelim:

	$k=2$		$k=3$			$k=4$			
$n \setminus i$	1	2	1	2	3	1	2	3	4
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	2	1	2	1	1	2	1	1	1
2	5	2	5	3	2	5	3	3	2
3	12	5	13	7	5	13	8	7	5
4	29	12	30	18	13	30	20	18	13

Tablo 4

Taşçı ve Kılıç, l_n^i i-inci dizinin n-inci terimi olmak üzere, genelleştirilmiş k-mertebeli Lucas sayılarını $n>0$ ve $1\le i\le k$ için $1-k\le n\le 0$ olmak üzere

$$l_n^i=\begin{cases}2 & i=2-n\\ -1 & i=1-n\\ 0 & \text{aksi halde}\end{cases}$$

başlangıç koşullarıyla

$$l_n^i=l_{n-1}^i+l_{n-2}^i+\cdots+l_{n-k}^i$$

olarak tanımlamışlardır [Taşçı, Kılıç; 2004].

Kılıç genelleştirilmiş k-mertebeli Fibonacci-Pell sayı dizisini, u_n^i i-inci dizinin n-inci terimi olmak üzere, $n>0$, $m>0$ ve $1\le i\le k$ için

$$u_n^i=\begin{cases}1 & i=1\text{-}n\\ 0 & \text{aksi halde}\end{cases},\ 1\text{-}k\le n\le 0$$

başlangıç koşullarıyla

$$u_n^i=2^m u_{n-1}^i+u_{n-2}^i+\cdots+u_{n-k}^i$$

şeklinde tanımlamıştır [Kılıç; 2007]. Bu dizinin Binet formülünü matris metotlarla elde etmiş, toplamları için bir formül vermiştir.

Er, genelleştirilmiş k-mertebeli Fibonacci sayılarının k dizilerini $n>0$ ve $1\le i\le k$ olmak üzere

$$g_n^i=\begin{cases}1, & i=1\text{-}n\\ 0, & \text{aksi halde}\end{cases},\ 1\text{-}k\le n\le 0$$

başlangıç koşullarıyla,

$$g_n^i=\sum_{j=1}^{k}c_j g_{n-j}^i$$

şeklinde tanımlamıştır [Er; 1984]. Ayrıca *k*-mertebeli Fibonacci dizisi için bir üreteç matris vermiştir.

Yukarıda tanımlanan dizilerin hepsi aslında Kalman tarafından tanımlanan, c_i 'ler sabit ve a_i 'ler dizinin elemanları olmak üzere

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1}$$

dizisinin özel bir halidir.

Örneğin Fibonacci dizisini, $a_0 = 0$ ve $a_1 = 1$ olmak üzere

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \tag{1.1}$$

olarak ifade etmiştir. (1.1)'deki gibi ifade edilen fark denklemi, sayı dizisinin katsayıları yardımıyla oluşturulan companion matrisle matris teoriye taşınabilmekte, matrislerin özelliklerinden de faydalanarak dizinin farklı özelliklerini incelenebilmektedir [Kalman; 1980].

Tanım 1.6. $c_k \neq 0$ olmak üzere $C(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1} x - c_k$ monik polinomu verilsin. Polinomun katsayılarına bağlı olarak ifade edilen

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklindeki matrise companion matris denir.

Tanım 1.7. $x_1, x_2, \ldots, x_k$ skalerler olmak üzere

$$V = \begin{bmatrix} x_1^{k-1} & x_1^{k-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{k-1} & x_2^{k-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_k^{k-1} & x_k^{k-2} & \cdots & x_k & 1 \end{bmatrix}$$

veya

$$V=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_k \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & x_3^{k-1} & \cdots & x_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

formundaki matrislere Vandermonde matrisi denir.

Aşağıda Fibonacci, Pell, Lucas ve Jacobsthal sayıları ile ilgili iyi bilinen ve çok kullanılan bazı özelikler verilmiştir. [Koshy, Vajda]

- $F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$ (Cassini Formülü)
- $\sum_{i=1}^{n} L_iL_{i-1}=\begin{cases} L_n^2-4 & n \text{ çift ise,} \\ L_n^2+1 & n \text{ tek ise,} \end{cases}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i}^2=\dfrac{3F_{2n+1}^2+2F_{2n+2}^2-6F_{2n}F_{2n+2}-2n-5}{5}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}^2=\dfrac{3F_{2n}^2+2F_{2n-1}^2-4F_{2n-2}F_{2n}+2n-2}{5}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i^3=\dfrac{F_{n+2}^3-3F_{n+1}^3+3(-1)^nF_n+2}{4}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_iF_{i+2}=F_{2n+1}F_{2n+2}-1$
- $\sum_{i=1}^{n} iF_i^2=nF_nF_{n+1}-F_n^2+[1+(-1)^{n-1}]/2$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}=F_{2n}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i}=F_{2n+1}-1$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i=F_{n+2}-1$
- $\sum_{j=0}^{k} F_{i+j}+F_{i+1}=F_{i+k+2}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i^2=F_nF_{n+1}$
- $F_{n+1}^2+F_n^2=F_{2n+1}$
- $F_{n+1}^2-F_{n-1}^2=F_{2n}$
- $F_n=F_mF_{n-m+1}+F_{m-1}F_{n-m}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i}F_{2i++}=\dfrac{F_{2n+2}^2+F_{2n+1}^2-n-2}{5}$
- $\sum_{i=1}^{2n} F_iF_{i+1}=F_{2n+1}^2-1$

- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}^3 = \frac{F_{2n}^3 + 3F_{2n}}{4}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i}^3 = \frac{F_{2n+1}^2 - 3F_{2n-1} + 2}{4}$
- $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$
- $\sum_{i=1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - 2$
- $\sum_{i=1}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} - 1$
- $L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$
- $\sum_{i=1}^{n} L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2$
- $L_n L_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n$
- $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$
- $L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$
- $F_{2n} = F_n L_n$
- $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$
- $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$
- $L_{4n} = 5F_{2n}^2 + 2$
- $L_{m+n}^2 - L_{m-n}^2 = 5L_{2m}F_{2n}$
- $F_m L_n + F_n L_m = 2F_{m+n}$
- $P_{m+n} = P_m P_{n+1} + P_{m-1} P_n$
- $\sum_{k=1}^{n} P_k^2 = \frac{P_n P_{n+1}}{2}$

- $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$
- $\sum_{i=1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - 2$
- $\sum_{i=1}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} - 1$
- $L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$
- $\sum_{i=1}^{n} L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2$
- $L_n L_{n+1} = L_{2n+1} + (-1)^n$
- $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$
- $L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$
- $F_{2n} = F_n L_n$
- $F_{n+2} - F_{n-2} = L_n$
- $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$
- $L_{4n} = 5F_{2n}^2 + 2$

- $j_n^2 - 9J_n^2 = (-1)^n 2^{n+2}$
- $\sum_{i=1}^{n} j_i = \frac{1}{2}(J_{n+2} - 5)$
- $j_m j_n - 9J_n J_m = (-1)^n 2^{n+1} j_{m-n}$
- $J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}$
- $J_m j_n - J_n j_m = (-1)^n 2^{n+1} J_{m-n}$
- $j_{n+1}j_{n-1} - j_n^2 = 9(-1)^{n-1}2^{n-1}$
- $j_{n+1} + j_n = 3(J_{n+1} + J_n) = 3.2^n$
- $J_n j_n = J_{2n}$
- $j_{n+1} - 2j_n = 3(2J_n - J_{n+1}) = 3.(-1)^{n+1}$
- $L_{4n} = 5F_{2n}^2 + 2$

2. SAYI DİZİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci, Pell, Lucas sayı dizileri ve Kalman'ın tanımladığı genel sayı dizisi birinci bölümde verildi. Bu bölümde tanımlanmış olan bu genelleştirilmiş sayı dizilerini temel alarak

- Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal dizisi,
- Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Pell-Jacobsthal dizisi,
- Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci-Pell-Lucas dizisi,

olmak üzere üç yeni sayı dizisi tanımladık. Tanımlanan dizilerin bazı özelliklerini inceledik. Companion matrisler yardımıyla, matrislerin de özelliklerinden faydalanarak, bu diziler için farklı özellikler elde ettik.

Öncelikle bu bölümde kullanılacak olan ve polinomların köklerinin katlılığını incelemeye yardımcı olacak, bilinen bir teorem verelim.

Teorem 2.1. T bir tamlık bölgesi ve $p(x) \in T[x]$ olsun. $\alpha \in T$ 'nin $p(x)$ 'in katlı kökü olması için gerek ve yeter şart $p(\alpha) = 0$ ve $p'(\alpha) = 0$ olmasıdır.

İspat.

$\Rightarrow$) α, $p(x)$ 'in katlı kökü olsun. Yani, $p(x) = (x-\alpha)^m q(x)$ olsun. Bu ifadenin birinci türevi alınırsa

$$p'(x) = m(x-\alpha)^{m-1} q(x) + (x-\alpha)^m q'(x)$$

olup $p'(\alpha) = 0$ elde edilir ki istenendir.

$\Leftarrow$) $p(\alpha) = 0$ ve $p'(\alpha) = 0$ olsun. $p(x) = (x-\alpha)q(x)$ olacak şekilde $q(x)$ polinomu vardır. α 'nın $q(x)$ 'in de bir kökü olduğunu göstermek istiyoruz. $p(x)$ 'in türevini alırsak

$$p'(x) = q(x) + (x-\alpha)q'(x)$$

olur. $p'(\alpha) = 0$ olduğundan $p'(\alpha) = q(\alpha) + (\alpha-\alpha)q'(\alpha) = 0$ elde edilir ki, istenendir [Bozkurt, Türen, Türkmen; 2006].

2.1 Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal Dizisi

Jacobsthal sayılar birinci bölümde tanımlanmıştı. Bu kısımda, Jacobsthal sayı dizisini genelleştirerek, genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal sayı dizisi olarak adlandıracağımız yeni bir sayı dizisini tanımladık.

Tanım 2.1.1. J_n^i *i*-inci dizinin *n*-inci terimi ve $n>0$ ve $1\le i\le k$ olmak üzere

$$J_n^i=\begin{cases}1 & i=1-n\\ 0 & \text{aksi halde}\end{cases} \quad 1\text{-}k\le n\le 0$$

başlangıç koşulları için

$$J_n^i=J_{n-1}^i+2J_{n-2}^i+J_{n-3}^i+\cdots+J_{n-k}^i \tag{2.1.1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan diziye *k*-mertebeli Jacobsthal sayı dizisi denir.
Bu sayı dizisine bazı örnekler verelim. *n*=3 ve *i*=2 seçilirse;

k=2 için

$$J_3^2=\underbrace{J_2^2}_{\downarrow}+2\underbrace{J_1^2}_{\downarrow}=6$$
$$\underbrace{J_1^2}_{\downarrow}+2\underbrace{J_0^2}_{0} \qquad \underbrace{J_0^2}_{0}+2\underbrace{J_{-1}^2}_{1}$$
$$\underbrace{J_0^2}_{0}+2\underbrace{J_{-1}^2}_{1}$$

k=3 için

$$J_3^2=\underbrace{J_2^2}_{\downarrow}+2\underbrace{J_1^2}_{\downarrow}+\underbrace{J_0^2}_{0}=7$$
$$\underbrace{J_1^2}_{\downarrow}+2\underbrace{J_0^2}_{0}+\underbrace{J_{-1}^2}_{1} \qquad \underbrace{J_0^2}_{0}+2\underbrace{J_{-1}^2}_{1}+\underbrace{J_{-2}^2}_{0}$$
$$\underbrace{J_1^2}_{2}$$

k=4 için

$$J_3^2=\underbrace{J_2^2}_{\downarrow}+2\underbrace{J_1^2}_{\downarrow}+\underbrace{J_0^2}_{\downarrow}+\underbrace{J_{-1}^2}_{\downarrow}=8$$
$$\underbrace{J_1^2}_{2}+2\underbrace{J_0^2}_{0}+\underbrace{J_{-1}^2}_{1}+\underbrace{J_{-2}^2}_{0} \qquad \underbrace{J_0^2}_{0}+2\underbrace{J_{-1}^2}_{1}+\underbrace{J_{-2}^2}_{0}+\underbrace{J_{-3}^2}_{0} \qquad \underbrace{J_{-1}^2}_{1}+2\underbrace{J_{-2}^2}_{0}+\underbrace{J_{-3}^2}_{0}+\underbrace{J_{-4}^2}_{0} \qquad \underbrace{J_{-2}^2}_{0}+2\underbrace{J_{-3}^2}_{0}+\underbrace{J_{-4}^2}_{0}+\underbrace{J_{-5}^2}_{0}$$

olarak elde edilir. Bu dizide $k=2$ ve $i=1$ alındığında dizi bilinen Jacobsthal sayı dizisine indirgenmektedir.

Tanımlanan dizinin katsayılarından oluşan ve genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal matrisi olarak adlandıracağımız k mertebeli companion matrisi

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

şeklinde tanımlayalım. Companion matris tanımından

$$\begin{bmatrix} J_{n+1}^{i} \\ J_{n}^{i} \\ J_{n-1}^{i} \\ \vdots \\ J_{n-k+2}^{i} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} J_{n}^{i} \\ J_{n-1}^{i} \\ J_{n-2}^{i} \\ \vdots \\ J_{n-k+1}^{i} \end{bmatrix} \tag{2.1.3}$$

ifadesi yazılabilir. Genelleştilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal sayı dizisini

$$B_n = \left[b_{ij} \right] = \begin{bmatrix} J_{n}^{1} & J_{n}^{2} & \cdots & J_{n}^{k} \\ J_{n-1}^{1} & J_{n-1}^{2} & \cdots & J_{n-1}^{k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n-k+1}^{1} & J_{n-k+1}^{2} & \cdots & J_{n-k+1}^{k} \end{bmatrix} \tag{2.1.4}$$

şeklinde matris formunda yazalım. (2.1.3) eşitliğini *k* sütun genişletirsek

$$B_n = CB_{n-1} \tag{2.1.5}$$

matris eşitliği elde edilir.

Lemma 2.1.1. C ve B_n sırasıyla (2.1.2) ve (2.1.4)'teki gibi matrisler olsun. $n \geq 0$ tamsayıları için

$$B_n = C^n$$

dir.

İspat. $B_n = CB_{n-1}$ olduğunu (2.1.5)'ten biliyoruz. İfade daha açık yazılırsa

$$\begin{aligned} B_2 &= CB_1 \\ B_3 &= CB_2 = C^2 B_1 \\ B_4 &= CB_3 = C^3 B_1 \\ &\vdots \\ B_m &= CB_{m-1} = C^{m-1} B_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal sayı dizisinin tanımından

$$B_1 = \begin{bmatrix} J_{1}^{1} & J_{1}^{2} & \cdots & J_{1}^{k} \\ J_{0}^{1} & J_{0}^{2} & \cdots & J_{0}^{k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{2-k}^{1} & J_{2-k}^{2} & \cdots & J_{2-k}^{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = C$$

olup

$$B_n = C^n$$

olarak elde edilir.

Sonuç 2.1.1. B_n, (2.1.4)'teki gibi bir matris olsun. $n \geq 1$ için

$$\det B_n = \begin{cases} -2 & k=2 \text{ ise} \\ 1 & k \text{ tek ise} \\ -1 & k \text{ çift ise } (k \neq 2) \end{cases}$$

dir.

İspat. $B_n = C^n$ olduğunu biliyoruz.

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$\det B_n = \det C^n = (\det C)^n$$

olup ispat kolayca görülür.

Lemma 2.1.2. J_n^i genelleştirilmiş k-mertebeli Jacobsthal sayı dizisi olmak üzere

$$\begin{aligned} J_{n+1}^1 &= J_n^1 + J_n^2 \\ J_{n+1}^2 &= 2J_n^1 + J_n^3 \\ J_{n+1}^i &= J_n^1 + J_n^{i+1}, \quad 3 \leq i \leq k-1 \\ J_n^1 &= J_{n+1}^k \end{aligned}$$

dir.

İspat. (2.1.5) ifadesinden $B_n = B_{n-1}B_1 = B_1 B_{n-1}$ olduğunu biliyoruz. Matris çarpım özellikleri kullanılarak

$$\begin{bmatrix} J_{n+1}^1 & J_{n+1}^2 & \cdots & J_{n+1}^k \\ J_n^1 & J_n^2 & \cdots & J_n^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n-k+2}^1 & J_{n-k+2}^2 & \cdots & J_{n-k+2}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_n^1 & J_n^2 & \cdots & J_n^k \\ J_{n-1}^1 & J_{n-1}^2 & \cdots & J_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n-k+1}^1 & J_{n-k+1}^2 & \cdots & J_{n-k+1}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ispat elde edilir.

2.1.1. Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal Dizisi için Binet Formülü

Bu kısımda genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal sayıları için Binet formülünü, Crammer metodu kullanarak elde ettik. Öncelikle tanımlanan dizinin katsayılarından oluşan matrisin öz değerlerinin katlılığını inceleyeceğiz.

Lemma 2.1.3. $k \geq 3$ için

$$x^{k+1} - 2x^k - x^{k-1} + x^{k-2} + 1 = 0$$

denkleminin katlı kökü yoktur.

İspat. Companion matrisin özelliklerinden, C matrisinin karakteristik polinomunun aynı zamanda genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal sayı dizisinin rekürans bağıntısına karşılık gelen polinom olduğu bilinmektedir. Yani

$$f(x) = x^k - x^{k-1} - 2x^{k-2} - x^{k-3} - \cdots - x - 1 = 0$$

ifadesi aynı zamanda genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal sayı dizisinin de karakteristik denklemidir. $k \geq 3$ için $x = 1$'in, $f(x)$ karakteristik polinomunun kökü olmadığı açıktır.

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-1) f(x) = (x-1)(x^k - x^{k-1} - 2x^{k-2} - x^{k-3} - \cdots - x - 1) \\ &= x^{k+1} - 2x^k - x^{k-1} + x^{k-2} + 1 \end{aligned}$$

olsun. 1, $g(x)$'in bir köküdür fakat $f(x)$'in kökü olmadığı için $g(x)$'in katlı kökü değildir. $\beta \neq 0$ ve $\beta \neq 1$ olmak üzere β, $g(x)$'in bir katlı kökü olsun. β'nın bir katlı kök olması için gerek ve yeter şartın $g(\beta) = 0$ ve $g'(\beta) = 0$ olduğunu Teorem 2.1'den biliyoruz. β katlı kök olduğu için

$$\begin{aligned} g(\beta) &= \beta^{k+1} - 2\beta^k - \beta^{k-1} + \beta^{k-2} + 1 \\ &= \beta^{k-2}[\beta^3 - 2\beta^2 - \beta + 1] + 1 = 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g'(\beta) &= (k+1)\beta^k - 2k\beta^{k-1} - (k-1)\beta^{k-2} + (k-2)\beta^{k-3} \\ &= \beta^{k-3}[(k+1)\beta^3 - 2k\beta^2 - (k-1)\beta + k - 2] = 0 \end{aligned}$$

olmalıdır. $\beta \neq 0$ olduğundan $[(k+1)\beta^3 - 2k\beta^2 - (k-1)\beta + k - 2] = 0$'dır. Bu ifadenin kökleri

$$a = 28k^3 - 432k^2 - 612k - 216$$

ve

$$b = -147k^4 + 126k^3 + 1149k^2 + 1164k + 336$$

olmak üzere

$$\beta_1 = \frac{1}{3(k+1)}\left[\frac{\left(a+12\sqrt{b}k+\sqrt{b}\right)^{1/3}}{2}+\frac{14k^2-6}{\left(a+12\sqrt{b}k+\sqrt{b}\right)^{1/3}}+2k\right]$$

$$\beta_{2,3} = -\frac{1}{3(k+1)}\left\{\frac{\left(a+12\sqrt{b}k+\sqrt{b}\right)^{1/3}}{4}-\frac{7k^2-3}{\left(a+12\sqrt{b}k+\sqrt{b}\right)^{1/3}}+2k\right.$$
$$\left.\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i\left[\frac{\left(a+12\sqrt{b}k+\sqrt{b}\right)^{1/3}}{2}-\frac{14k-6}{\left(a+12\sqrt{b}k+\sqrt{b}\right)^{1/3}}\right]\right\}$$

olarak elde edilir.

$$v_{i,k} = \beta_i^{k-2}[-\beta_i^3+2\beta_i^2+\beta_i-1],\ 1\le i\le 3$$

olmak üzere

$$-g(\beta) = v_{i,k}-1=0$$

olarak da yazılabilir.

β_1 için;

$$-g(\beta_1) = \beta_1^{k-2}[-\beta_1^3+2\beta_1^2+\beta_1-1]-1=0$$

dır. $k=3$ seçilirse $v_{1,3}=-0.8445476618\neq 1$ olup bu bir çelişkidir.

β_2 için;

$$-g(\beta_2) = \beta_2^{k-2}[-\beta_2^3+2\beta_2^2+\beta_2-1]-1=0\,.$$

olup $k=3$ için $v_{2,3}=-1.172273831+0.3253556687i\neq 1$ dir ki, bu da bir çelişkidir.

β_3 için de benzer işlemler yapılırsa

$$-g(\beta_3) = \beta_3^{k-2}[-\beta_3^3+2\beta_3^2+\beta_3-1]-1=0$$

olur. $k=3$ seçilirse $v_{3,3}=-1.172273831-0.3253556687i\neq 1$ olup bir çelişki elde edilir ki, $g(x)$ katlı köke sahip değildir.

Genelleştirilmiş *k*-mertebeli C matrisinin karakteristik polinomu $f(\lambda)$ olsun. Lemma 2.1.3'ten C matrisinin farklı öz değerlere sahip olduğunu biliyoruz.

Öz değerlere bağlı Vandermonde matrisi

$$V=\begin{bmatrix} \lambda_1^{k-1} & \lambda_1^{k-2} & \cdots & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^{k-1} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_k^{k-1} & \lambda_k^{k-2} & \cdots & \lambda_k & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

$$c_k^i=\begin{bmatrix} \lambda_1^{n+k-i} \\ \lambda_2^{n+k-i} \\ \vdots \\ \lambda_k^{n+k-i} \end{bmatrix}$$

şeklinde bir vektör olsun. V matrisinin j-inci sütununun c_k^i ile değiştirilmesiyle elde edilen matris $V_j^{(i)}$ olsun.

Genelleştirillmiş k-mertebeli Jacobsthal sayıları için genelleştirilmiş Binet formülü aşağıdaki teoremle ifade edilebilir.

Teorem 2.1.1. J_n^i i-inci Jacobsthal sayı dizisinin n-inci elemanı olmak üzere $1 \le i \le k$ için

$$J_{n-i+1}^j=\frac{\det(V_j^{(i)})}{\det(V)}$$

dir.

İspat. C'nin öz değerleri birbirlerinden farklı olduğu için C matrisi köşegenleştirilebilirdir. $V^T=Q$ olmak üzere Q'nun tersi vardır. O halde

$$Q^{-1}CQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k)=D$$

dir. Yani, C ile D benzer matrislerdir. Buradan $C^nQ=QD^n$ elde edilir. Lemma 2.1.1'den $B_n=C^n$ olduğunu biliyoruz. Bu ifade yardımıyla

$$B_nQ=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2k} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} & \cdots & b_{kk} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \lambda_3^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \lambda_3^{k-2} & \cdots & \lambda_k^{k-2} \\ \lambda_1^{k-3} & \lambda_2^{k-3} & \lambda_3^{k-3} & \cdots & \lambda_k^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \lambda_3^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \lambda_3^{k-2} & \cdots & \lambda_k^{k-2} \\ \lambda_1^{k-3} & \lambda_2^{k-3} & \lambda_3^{k-3} & \cdots & \lambda_k^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1^{n} & & & & 0 \\ & \lambda_2^{n} & & & \\ & & \lambda_3^{n} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_k^{n} \end{bmatrix}=QD^n$$

matris çarpımından

$$\begin{bmatrix} b_{11}\lambda_1^{k-1}+b_{12}\lambda_1^{k-2}+\cdots+b_{1k} & \cdots & b_{11}\lambda_k^{k-1}+b_{12}\lambda_k^{k-2}+\cdots+b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1}\lambda_1^{k-1}+b_{k2}\lambda_1^{k-2}+\cdots+b_{kk} & \cdots & b_{k1}\lambda_k^{k-1}+b_{k2}\lambda_k^{k-2}+\cdots+b_{kk} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1^{n+k-i} \\ \vdots \\ \lambda_k^{n+k-i} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan, $i=1,2,\ldots,k$ için

$$\begin{aligned} b_{i1}\lambda_1^{k-1}+b_{i2}\lambda_1^{k-2}+\cdots+b_{ik}&=\lambda_1^{n+k-1} \\ b_{i1}\lambda_2^{k-1}+b_{i2}\lambda_2^{k-2}+\cdots+b_{ik}&=\lambda_2^{n+k-1} \\ &\vdots \\ b_{i1}\lambda_k^{k-1}+b_{i2}\lambda_k^{k-2}+\cdots+b_{ik}&=\lambda_k^{n+k-1} \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini elde ederiz. Böylece her $j=1,2,\ldots,k$ için

$$J_{n-i+1}^{j}=\frac{\det(V_j^{(i)})}{\det(V)}$$

dir.

Örneğin, $k=2$ için J_3^2 ve J_4^2 Jacobsthal sayılarını genelleştirilmiş Binet formülünü kullanarak hesaplayalım.

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Companion matrisinin özdeğerleri $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$ olarak elde edilir. $1\le i\le k$ için, Vandermonde matris

$$V=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$c_k^i = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+k-i} \\ \lambda_2^{n+k-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{n+2-i} \\ (-1)^{n+2-i} \end{bmatrix}$$

dir. $j=2$, $i=1$ olmak üzere

$n=3$ için

$$J_3^2 = \frac{\det(V_2^{(1)})}{\det(V)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2^4 \\ -1 & (-1)^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{18}{3} = 6$$

$n=4$ için

$$J_4^2 = \frac{\det(V_2^{(1)})}{\det(V)} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2^{4+2-1} \\ -1 & (-1)^{4+2-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{30}{3} = 10$$

olarak elde edilir ki değerler Tablo 5'teki değerlerle aynıdır.

2.1.2. Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal Sayılarının Toplamları

Bu kısımda matris özellikleri kullanarak genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal sayılarının toplamlarını elde ettik. Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal sayılarının

$$T_n = \sum_{i=0}^{n-1} J_i^1$$

şeklinde tanımlanan kısmi toplamlarını Lemma 2.2.1'de bilinen $J_n^1 = J_{n+1}^k$ eşitliğinden

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} J_i^k$$

olarak da yazabiliriz. C ve B_n, (2.1.2) ve (2.1.4)'teki gibi matrisler olmak üzere E ve W_n matrislerini sırasıyla

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & & C & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$$

ve

$$W_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_n & J_n^1 & J_n^2 & \cdots & J_n^k \\ T_{n-1} & J_{n-1}^1 & J_{n-1}^2 & \cdots & J_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n-k+1} & J_{n-k+1}^1 & J_{n-k+1}^2 & \cdots & J_{n-k+1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_n & & & & \\ T_{n-1} & & & B_n & \\ \vdots & & & & \\ T_{n-k+1} & & & & \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. $J_n^1 = J_{n+1}^k$ eşitliğini kullanırsak

$$T_n = J_{n-1}^1 + T_{n-1}$$

olur. Böylece

$$W_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_{n-1} & J_{n-1}^1 & J_{n-1}^2 & \cdots & J_{n-1}^k \\ T_{n-2} & J_{n-2}^1 & J_{n-2}^2 & \cdots & J_{n-2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n-k} & J_{n-k}^1 & J_{n-k}^2 & \cdots & J_{n-k}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = W_{n-1}E$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade diğer bir şekilde

$$W_n = W_1 E^{n-1}$$

olarak da yazılabilir. $1 \le i \le k$ için $T_{-i} = 0$ olduğundan ve genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal sayılarının tanımından

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_1 & J_1^1 & J_1^2 & \cdots & J_1^k \\ T_0 & J_0^1 & J_0^2 & \cdots & J_0^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{2-k} & J_{2-k}^1 & J_{2-k}^2 & \cdots & J_{2-k}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = E$$

dir. O halde yukarıdaki ifade $W_n = E^n$ olarak yazılabilir. Böylece genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal sayıları için üreteç matrisi elde edilmiş olur. $W_n = E^n$ olduğundan

$$W_{n+1} = W_n W_1 = W_1 W_n \tag{2.1.6}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_n & J_n^1 & J_n^2 & \cdots & J_n^k \\ T_{n-1} & J_{n-1}^1 & J_{n-1}^2 & \cdots & J_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n-k+1} & J_{n-k+1}^1 & J_{n-k+1}^2 & \cdots & J_{n-k+1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_{n-1} & J_{n-1}^1 & J_{n-1}^2 & \cdots & J_{n-1}^k \\ T_{n-2} & J_{n-2}^1 & J_{n-2}^2 & \cdots & J_{n-2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n-k} & J_{n-k}^1 & J_{n-k}^2 & \cdots & J_{n-k}^k \end{bmatrix}$$

olur ki bu bize W_1'in, W_n ile matris çarpımının değişmeli olduğunu gösterir. (2.1.6) ifadesindeki matris çarpımı ile

$$T_n = 1 + T_{n-1} + 2T_{n-2} + \sum_{i=3}^{k} T_{n-i} \tag{2.1.7}$$

şeklinde genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal sayı dizisi için bir toplam elde edilir. $k = 2$ ve i=1 için dizi bilinen Jacobsthal sayı dizisine indirgeniyordu. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{i=0}^{n-1} J_i^1 = 1 + \underbrace{T_{n-1}}_{J_{n-2}^1 + T_{n-2}} + 2T_{n-2} \\ &= 1 + J_{n-2}^1 + 3 \underbrace{T_{n-2}}_{T_n - J_{n-1}^1 - J_{n-2}^1} \\ &= 1 + J_{n-2}^1 + 3T_n - 3J_{n-1}^1 - J_{n-2}^1 \\ &= \frac{3J_{n-1}^1 + 2J_{n-2}^1 - 1}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Tablo 5'te bazı genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal sayılarını verelim:

	k=2		k=3			k=4			
$n \setminus i$	1	2	1	2	3	1	2	3	4
-2	0	0	0	0	1	0	0	1	0
-1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	2	1	2	1	1	2	1	1
2	3	2	3	3	1	3	3	2	1
3	5	6	6	7	3	6	8	4	3
4	11	10	13	15	6	14	16	9	6
5	21	22	28	32	13	30	37	20	14

Tablo 5

2.2. Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Pell-Jacobsthal Dizisi

Bu kısımda ilk iki teriminin katsayısı genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci sayıları olan yeni bir sayı dizisi tanımlayıp, bu dizinin bazı özelliklerini inceledik.

Karaduman, birinci bölümde, M. C. Er'in tanımladığı genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci sayılarının *k* dizilerini *n>0* durumunu ihmal ederek incelemiş, g_n^i *i*-inci dizinin *n*-inci terimi olmak üzere

$$g_n^i = \begin{cases} 1 & i = 1\text{-}n \text{ ise}, \\ 0 & \text{aksi halde}, \end{cases} \quad 1-k \le n \le 0$$

sınır koşullarıyla

$$g_n^i = \sum_{j=1}^{k} g_{n-j}^i, \ 1 \le i \le k$$

sayı dizisinin elemanlarını

$$G_n = \begin{bmatrix} g_n^1 & g_n^2 & \cdots & g_n^k \\ g_{n-1}^1 & g_{n-1}^2 & \cdots & g_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n-k+1}^1 & g_{n-k+1}^2 & \cdots & g_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

şeklinde bir kare matris olarak ifade etmiştir [Karaduman; 2004]. Yazar bu çalışmada $n=1$ özel durumunu inceleyerek

$$G_1 = \begin{bmatrix} g_1^1 & g_1^2 & \cdots & g_1^k \\ g_0^1 & g_0^2 & \cdots & g_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{2-k}^1 & g_{2-k}^2 & \cdots & g_{2-k}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^0 & 2^1 & 2^2 & \cdots & 2^{k-2} & 2^{k-1} \\ 2^0 & 2^0 & 2^1 & \cdots & 2^{k-3} & 2^{k-2} \\ 0 & 2^0 & 2^0 & \cdots & 2^{k-4} & 2^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^0 & 2^1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2^0 & 2^0 \end{bmatrix} = B$$

olacak şekilde bir *B* matrisi tanımlamıştır [Karaduman; 2004].

Tanım 2.2.1. $m \ge 1$, $1 \le l \le k$ ve *i,n* tam sayılar olmak üzere

$$u_m^l = \begin{cases} 1 & m+l=1 \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases}, \quad 1-k \le m \le 0$$

başlangıç koşulu ile

$$u_m^l = g_n^{i+n} u_{m-1}^l + g_n^i u_{m-2}^l + u_{m-3}^l + \cdots + u_{m-k}^l \qquad (2.2.1)$$

şeklinde tanımlanan diziye Pell-Jacobsthal sayı dizisi denir. Bu diziyi kısaca P-J sayı dizisi olarak sembolize edeceğiz.

Özel olarak $n=-2$, $i=5$ ve $k=2$ seçilirse dizi bilinen Jacobsthal sayı dizisine, $n=i=1$ seçilirse k-mertebeli Pell dizisine indirgenmektedir.

Genelleştirilmiş k-mertebeli P-J sayı dizisinin elemanları B_m, $k\times k$ kare matris olmak üzere

$$B_m=\begin{bmatrix} u_m^1 & u_m^2 & \cdots & u_m^k \\ u_{m-1}^1 & u_{m-1}^2 & \cdots & u_{m-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m-k+1}^1 & u_{m-k+1}^2 & \cdots & u_{m-k+1}^k \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

şeklinde ifade edilebilir. (2.2.1)'de tanımlanan dizinin katsayılarından oluşan Companion matris de

$$C=\begin{bmatrix} g_n^{i+n} & g_n^i & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2.3}$$

olacaktır. Companion matris tanımından $B_m=CB_{m-1}$ ifadesi her zaman doğrudur.

Lemma 2.2.1. B_m ve C, (2.2.2) ve (2.2.3)'teki gibi matrisler olsun. $m\geq 1$ için

$$B_m=C^m$$

dir.

İspat. $B_m=CB_{m-1}$ olduğunu biliyoruz. Bu ifadeyi

$$\begin{aligned} B_2&=CB_1 \\ B_3&=CB_2=C^2B_1 \\ B_4&=CB_3=C^3B_1 \\ &\vdots \\ B_m&=CB_{m-1}=C^{m-1}B_1 \end{aligned}$$

olup genelleştirilmiş k-mertebeli P-J sayılarının tanımından

$$B_1=\begin{bmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \cdots & u_1^k \\ u_0^1 & u_0^2 & \cdots & u_0^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2-k}^1 & u_{2-k}^2 & \cdots & u_{2-k}^k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g_n^{i+n} & g_n^i & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}=C$$

dir. Sonuçta $B_m=C^m$ olarak elde edilir.

Sonuç 2.2.1. B_m, (2.2.2)'deki gibi bir matris ve $m\geq 1$ için *k*, matrisin mertebesi olmak üzere

$$\det B_m=\begin{cases} -g_n^i & k=2 \text{ ise} \\ 1 & k \text{ tek ise} \\ -1 & k \text{ çift ise } (k\neq 2) \end{cases}$$

dir.

İspat. $B_m=C^m$ olduğunu Lemma 2.2.1'den biliyoruz.

$$\det B_m=\det C^m=(\det C)^m$$

olup istenen elde edilir.

Teorem 2.2.1. u_m^l, *l*-inci genelleştirilmiş *k*-mertebeli P-J sayı dizisinin *m*-inci elemanı olsun. $1\leq l\leq k$, $m\geq 1$ ve $r\geq 0$ olmak üzere

$$u_{m+r}^l=\sum_{j=1}^{k}u_m^j u_{r-j+1}^l$$

dir.

İspat. $B_m=C^m$ olduğunu Lemma 2.2.1'den biliyoruz. Buna göre

$$B_m=B_{m-1}B_1=B_1B_{m-1} \tag{2.2.4}$$

yazılabilir. Bu ifadeyi genel olarak

$$B_{m+r}=B_mB_r=B_rB_m$$

olarak yazabiliriz. Bu matris çarpımını daha açık olarak yazarsak

$$B_{m+r} = B_m B_r = \begin{bmatrix} u_m^1 & u_m^2 & \cdots & u_m^k \\ u_{m-1}^1 & u_{m-1}^2 & \cdots & u_{m-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m-k+1}^1 & u_{m-k+1}^2 & \cdots & u_{m-k+1}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r^1 & u_r^2 & \cdots & u_r^k \\ u_{r-1}^1 & u_{r-1}^2 & \cdots & u_{r-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{r-k+1}^1 & u_{r-k+1}^2 & \cdots & u_{r-k+1}^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_m^1 u_r^1 + u_m^2 u_{r-1}^1 + \cdots + u_m^k u_{r-k+1}^1 & \cdots & u_m^1 u_r^k + u_m^2 u_{r-1}^k + \cdots + u_m^k u_{r-k+1}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m-k+1}^1 u_r^1 + u_{m-k+1}^2 u_{r-1}^1 + \cdots + u_{m-k+1}^k u_{r-k+1}^1 & \cdots & u_{m-k+1}^1 u_r^k + u_{m-k+1}^2 u_{r-1}^k + \cdots + u_{m-k+1}^k u_{r-k+1}^k \end{bmatrix}$$

elde edilir ki, matrisin elemanları istenen formdadır.

Lemma 2.2.2. u_m^l genelleştirilmiş P-J sayısı olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} u_{m+1}^1 &= g_n^{i+n} u_m^1 + u_m^2 \\ u_{m+1}^k &= u_m^1 \\ u_{m+1}^i &= u_m^1 + u_m^{i+1}, \quad 3 \le i \le k-1 \\ u_{m+1}^2 &= g_n^i u_m^1 + u_m^3 \end{aligned}$$

dir.

İspat. (2.2.4) ifadesinden $B_{m+1} = B_m B_1 = B_1 B_m$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\begin{bmatrix} u_{m+1}^1 & u_{m+1}^2 & \cdots & u_{m+1}^k \\ u_m^1 & u_m^2 & \cdots & u_m^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m-k+2}^1 & u_{m-k+2}^2 & \cdots & u_{m-k+2}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_n^{i+n} & g_n^i & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_m^1 & u_m^2 & \cdots & u_m^k \\ u_{m-1}^1 & u_{m-1}^2 & \cdots & u_{m-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m-k+1}^1 & u_{m-k+1}^2 & \cdots & u_{m-k+1}^k \end{bmatrix}$$

olup matris çarpım özelliklerini kullanırsak istenen elde edilir.

C companion matrisinin karakteristik denklemi

$$x^k - g_n^{i+n} x^{k-1} - g_n^i x^{k-2} - x^{k-3} - \cdots - x - 1 = 0$$

olup bu denklem aynı zamanda genelleştirilmiş *k*-mertebeli P-J sayılarının rekürans bağıntısının da karakteristik denklemidir. Bu denklemin köklerinin (öz değerlerinin) katlı olup olmadığını inceleyelim.

Lemma 2.2.3. $k \ge 3$ için

$$x^{k+1} - (g_n^{i+n} + 1)x^k + (g_n^{i+n} - g_n^i)x^{k-1} - (1 - g_n^i)x^{k-2} + 1 = 0$$

ifadesinin katlı kökü yoktur.

İspat. $f(x)=x^k-g_n^{i+n}x^{k-1}-g_n^i x^{k-2}-x^{k-3}-\cdots-x-1$ olsun. $f(x)$, hem C companion matrisinin karakteristik denklemi, hem de genelleştirilmiş k-mertebeli P-J sayı dizisinin rekürans bağıntısına karşılık gelen karakteristik denklemdir. 1, $f(x)$'in kökü değildir.

$$\begin{aligned} h(x)&=(x-1)f(x)=(x-1)(x^k-g_n^{i+n}x^{k-1}-g_n^i x^{k-2}-x^{k-3}-\cdots-x-1)\\ &=x^{k+1}-(g_n^{i+n}+1)x^k+(g_n^{i+n}-g_n^i)x^{k-1}-(1-g_n^i)x^{k-2}+1 \end{aligned}$$

dir. 1, $f(x)$'in kökü olmadığından, $h(x)$'in de katlı kökü değildir. $\beta\neq 0$ ve $\beta\neq 1$ olmak üzere, β sayısı $h(x)$'in bir katlı kökü olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} h(\beta)&=\beta^{k+1}-(g_n^{i+n}+1)\beta^k+(g_n^{i+n}-g_n^i)\beta^{k-1}-(1-g_n^i)\beta^{k-2}+1\\ &=\beta^{k-2}[\beta^3-(g_n^{i+n}+1)\beta^2+(g_n^{i+n}-g_n^i)\beta-(1-g_n^i)]+1 \qquad (2.2.5)\\ &=0 \end{aligned}$$

ve Teorem 2.1'den

$$\begin{aligned} h'(\beta)&=(k+1)\beta^k-(g_n^{i+n}+1)k\beta^{k-1}+(g_n^{i+n}-g_n^i)(k-1)\beta^{k-2}-(1-g_n^i)(k-2)\beta^{k-3}\\ &=\beta^{k-3}[(k+1)\beta^3-(g_n^{i+n}+1)k\beta^2+(g_n^{i+n}-g_n^i)(k-1)\beta-(1-g_n^i)(k-2)] \qquad (2.2.6)\\ &=0 \end{aligned}$$

dır. $\beta\neq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} u=&-12k^3(g_n^{i+n})^2-120g_n^{i+n}k^3+36(g_n^{i+n})^2k+360g_n^{i+n}k+36g_n^ik^3g_n^{i+n}+36g_n^ik^3-36g_n^ikg_n^{i+n}\\ &-36g_n^ik+116k^3-324k-216+216g_n^{i+n}+8k^3(g_n^{i+n})^3 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} v=&324-648g_n^{i+n}+324k-12g_n^ik^3g_n^{i+n}+72kg_n^{i+n}(g_n^i)^2-756g_n^{i+n}k+108g_n^ik+6k^3(g_n^i)^2(g_n^{i+n})^2\\ &-246k^2(g_n^{i+n})^2-243k^2+324(g_n^{i+n})^2-54g_n^ik^2+540g_n^{i+n}k^2+6g_n^ik^2g_n^{i+n}+324(g_n^{i+n})^2k\\ &-156k^3(g_n^{i+n})^2+384g_n^{i+n}k^3-108g_n^ik^3-186k^3-12(g_n^{i+n})^3-72k^3(g_n^{i+n})^3-192g_n^{i+n}k^4\\ &+36(g_n^{i+n})^3k^4+78(g_n^{i+n})^2k^4-3(g_n^i)^2k^4-3(g_n^i)^2k^2+54g_n^ik^4-60k^2(g_n^{i+n})^3+6g_n^{i+n}k^4g_n^i\\ &-78g_n^ik^4(g_n^{i+n})^2+66g_n^ik^2(g_n^{i+n})^2+30g_n^{i+n}k^4(g_n^i)^2-6g_n^{i+n}k^2(g_n^i)^2+6(g_n^{i+n})^3k^4g_n^i\\ &+6g_n^ik^2(g_n^{i+n})^3-3(g_n^i)^2k^2(g_n^{i+n})^2+93k^4+12(g_n^i)^3-15k^4(g_n^{i+n})^4+36g_n^i(g_n^{i+n})^2\\ &-36g_n^{i+n}(g_n^i)^2-3k^2(g_n^{i+n})^4-12(g_n^i)^3k^4+132(g_n^{i+n})^3k+30k^3(g_n^{i+n})^4+156g_n^ik^3(g_n^{i+n})^2\\ &-180g_n^ik(g_n^{i+n})^2-60k^3g_n^{i+n}(g_n^i)^2-12k^3g_n^{i+n}(g_n^i)^3+6k^3(g_n^i)^2+24k^3(g_n^i)^3-24k(g_n^i)^3 \end{aligned}$$

olmak üzere (2.2.6) ifadesinde köşeli parantez içerisindeki polinomun kökleri

$$\beta_1 = \frac{(u+12v^{1/2}k+12v^{1/2})^{1/3}}{6(k+1)} + \frac{2(-g_n^{i+n}k^2+3g_n^{i+n}+3g_n^ik^2-3g_n^i+k^2(g_n^{i+n})^2+k^2)}{(u+12v^{1/2}k+12v^{1/2})^{1/3}} + \frac{k(g_n^{i+n}+1)}{3(k+1)}$$

$$\beta_{2,3} = -\frac{(u+12v^{1/2}k+12v^{1/2})^{1/3}}{12(k+1)} - \frac{(-g_n^{i+n}k^2+3g_n^{i+n}+3g_n^ik^2-3g_n^i+k^2(g_n^{i+n})^2+k^2)}{3(k+1)(u+12v^{1/2}k+12v^{1/2})^{1/3}} + \frac{k(g_n^{i+n}+1)}{3(k+1)}$$
$$\mp\frac{1}{2}i\sqrt{3}[\frac{(u+12v^{1/2}k+12v^{1/2})^{1/3}}{6(k+1)} - 2\frac{(-g_n^{i+n}k^2+3g_n^{i+n}+3g_n^ik^2-3g_n^i+k^2(g_n^{i+n})^2+k^2)}{3(k+1)(u+12v^{1/2}k+12v^{1/2})^{1/3}}]$$

olarak elde edilir. (2.2.6) ifadesindeki köşeli parantez içerisinde bulunan polinomun kökleri, Teorem 2.1 gereği, aynı zamanda (2.2.5) polinomunun da kökleri olacağından

$$t_j = \beta_j^{k-2}[-\beta_j^3 + (g_n^{i+n}+1)\beta_j^2 - (g_n^{i+n}-g_n^i)\beta_j + (1-g_n^i)], \quad 1 \le j \le 3$$

olmak üzere, 2.2.5 ifadesi

$$-h(\beta_j) = t_j - 1 = 0$$

şeklinde de ifade edilebilir. Özel olarak $i = 4$, $n = -1$ ve $k = 3$ seçilirse

$$\beta_1 = -\frac{1}{2},\ \beta_2 = 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ve } \beta_3 = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

bu kökler $h(x)$ polinomunda yazılırsa

$$\begin{aligned} -h(\beta_1) &= t_1 - 1 \\ &= \frac{7}{16} - 1 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -h(\beta_2) &= t_2 - 1 \\ &= \frac{5}{4} + \sqrt{2} - 1 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -h(\beta_3) &= t_3 - 1 \\ &= \frac{5}{4} - \sqrt{2} - 1 \neq 0 \end{aligned}$$

olup bir çelişki elde edilir ki, $h(x)$ katlı köke sahip değildir.

C companion matrisinin farklı öz değerlere sahip olduğunu Lemma 2.2.3'ten biliyoruz. *C* matrisinin öz değerlerine bağlı vandermonde matrisi

$$V = \begin{bmatrix} \lambda_1^{k-1} & \lambda_1^{k-2} & \cdots & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^{k-1} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_k^{k-1} & \lambda_k^{k-2} & \cdots & \lambda_k & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. e_k^i matrisi

$$e_k^i = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+k-i} \\ \lambda_2^{n+k-i} \\ \vdots \\ \lambda_k^{n+k-i} \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. V matrisinin j-inci sütununun e_k^i ile değiştirilmesi ile elde edilen matris $V_j^{(i)}$ olsun. Aşağıdaki teoremde k-mertebeli P-J sayılarının genelleştirimiş Binet formülü elde edilmiştir.

Teorem 2.2.2. u_m^l**,** l-inci P-J sayısının m-inci terimi olmak üzere $1 \le l \le k$ için

$$u_{m-l+1}^j = \frac{\det(V_j^{(i)})}{\det(V)}$$

dir.

İspat. C matrisinin öz değerleri birbirinden farklı olduğundan, C köşegenleştirilebilirdir. $V^T = D$ olmak üzere, D matrisinin tersi hesaplanabilir olup $D^{-1}CD = \Lambda = diag(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$'dır. Yani, C ile Λ benzerdir. Buradan, $C^m D = D\Lambda^m$ yazılabilir. Lemma 2.2.2'den $B_m = C^m$ olduğu bilinmektedir. O halde

$$\begin{aligned} b_{i1}\alpha_1^{k-1} + b_{i2}\alpha_1^{k-2} + \cdots + b_{ik} &= \alpha_1^{m+k-i} \\ b_{i1}\alpha_2^{k-1} + b_{i2}\alpha_2^{k-2} + \cdots + b_{ik} &= \alpha_2^{m+k-i} \\ &\vdots \\ b_{i1}\alpha_k^{k-1} + b_{i2}\alpha_k^{k-2} + \cdots + b_{ik} &= \alpha_k^{m+k-i} \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi yazılabilir. Böylece $b_{ij} = u_{m-l+1}^j$ olmak üzere her $j = 1, 2, \ldots, k$ için

$$b_{ij} = \frac{\det(V_j^{(i)})}{\det(V)}$$

dir.

2.2.1. P-J Sayılarının Toplamları

Genelleştirilmiş k-mertebeli P-J sayılarının 1'den n'ye kadar olan toplamları

$$S_m = \sum_{l=0}^{m-1} u_l^1$$

olsun. Lemma 2.2.2'den $u_{m+1}^k = u_m^1$ bilinmektedir. O halde yukarıdaki eşitlik

$$S_m = \sum_{l=1}^{m} u_l^k$$

olarak da yazılabilir. B_m ve C sırasıyla (2.2.2) ve (2.2.3)'teki gibi matrisler olsun.

$$W_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_m & & & & \\ S_{m-1} & & B_m & & \\ \vdots & & & & \\ S_{m-k+1} & & & & \end{bmatrix}$$

ve

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & C & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \tag{2.2.7}$$

şeklinde $(k+1)\times(k+1)$-kare matrisler olsun. $u_{m+1}^k = u_m^1$ olduğundan

$$S_m = u_{m-1}^1 + S_{m-1} \tag{2.2.8}$$

dir. Buradan $W_m = W_{m-1}U$ eşitliği yazılabilir. İfade biraz daha genel yazılırsa

$$W_m = W_1 U^{m-1}$$

elde edilir. Dizinin tanımından $1 \le l \le k$ için $S_{-l} = 0$'dır. W_m ve U matrislerinin tanımından $W_1 = U$ olduğu kolayca görülür. O halde

$$W_m = U^m \tag{2.2.9}$$

dir. (2.2.9) eşitliğinden

$$W_{m+1} = W_m W_1 = W_1 W_m \tag{2.2.10}$$

$$W_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_m & u_m^1 & u_m^2 & \cdots & u_m^k \\ S_{m-1} & u_{m-1}^1 & u_{m-1}^2 & \cdots & u_{m-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m-k+1} & u_{m-k+1}^1 & u_{m-k+1}^2 & \cdots & u_{m-k+1}^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & g_n^{i+n} & g_n^i & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{m-1} & u_{m-1}^1 & u_{m-1}^2 & \cdots & u_{m-1}^k \\ S_{m-2} & u_{m-2}^1 & u_{m-2}^2 & \cdots & u_{m-2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m-k} & u_{m-k}^1 & u_{m-k}^2 & \cdots & u_{m-k}^k \end{bmatrix}$$

yazılabilir. (2.2.10) eşitliğinden genelleştirilmiş *k*-mertebeli Jacobsthal sayıları

$$S_m = 1 + g_n^{i+n} S_{m-1} + g_n^i S_{m-2} + \sum_{l=3}^{k} S_{m-l} \tag{2.2.11}$$

rekürans bağıntısını sağlar.

$n = i = 1$ ve $k = 2$ seçilirse, bilinen Pell sayı dizisine indirgeniyordu.

$$S_m = \sum_{l=0}^{m-1} u_l^1 = 1 + 2S_{m-1} + \underbrace{S_{m-2}}_{S_{m-1} - u_{m-2}^1}$$

$$= 1 + 3\underbrace{S_{m-1}}_{S_m - u_{m-1}^1} - u_{m-2}^1$$

$$= \frac{3u_{m-1}^1 + u_{m-2}^1 - 1}{2}$$

olarak Pell dizisi için bir toplam elde edilir.

2.2.2. Genelleştirilmiş P-J Sayılarının Toplamları İçin Kesin (Explicit) Bir Formül

Bu kısımda genelleştirilmiş *k*-mertebelli P-J sayıları için matris metotlarla bir kesin formül elde edilecektir.

U, (2.2.7)'teki gibi bir matris ve bu matrisin karakteristik polinomuna karşılık gelen companion matris C de (2.2.3)'teki gibi bir matris olmak üzere,

$$K_u(\alpha)=\begin{vmatrix} 1-\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & C-\alpha I & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{vmatrix}$$

dır. İlk satıra göre determinantı açarsak

$$K_u(\alpha)=(1-\alpha)\left|C-\alpha I\right| \tag{2.2.12}$$

olarak elde edilir. C matrisinin karakteristik polinomunu daha önce hesaplamıştık. Buna göre (2.2.7)'te verilen U matrisinin karakteristik polinomu

$$x^{k+1}-(g_n^{i+n}+1)x^k+(g_n^{i+n}-g_n^i)x^{k-1}-(1-g_n^i)x^{k-2}+1=0$$

olarak elde edilir ve bu polinomun katlı kökünün olmadığını daha önce göstermiştik. Dolayısıyla U köşegenleştirilebilir. C'nin öz değerleri $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ ise U'nun öz değerleri $1,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$'dır ve birbirlerinden farklıdır. D, V vandermonde matrisinin transpozesi olmak üzere

$$G=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dfrac{-1}{g_n^{i+n}+g_n^i+k-3} & & & & & \\ \dfrac{-1}{g_n^{i+n}+g_n^i+k-3} & & & & & \\ \vdots & & & D & & \\ \dfrac{-1}{g_n^{i+n}+g_n^i+k-3} & & & & & \\ \dfrac{-1}{g_n^{i+n}+g_n^i+k-3} & & & & & \end{bmatrix} \tag{2.2.13}$$

şeklinde bir matris tanımlayalım. Genelleştirilmiş *k*-mertebeli P-J sayıları için kesin formül aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.2.3. u_m^r *r*-inci genelleştirilmiş *k*-mertebeli P-J dizisinin *m*-inci terimi olmak üzere, u_m^l dizisinin toplamını S_m ile gösterelim. O halde

$$S_m=\frac{1}{(g_n^{i+n}+g_n^i+k-3)}\left(\sum_{r=1}^{k}u_m^r-1\right)$$

dir.

İspat. U ve G sırasıyla (2.2.7) ve (2.2.13)'teki gibi matrisler, $N = diag(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ olmak üzere

$$UG = GN \tag{2.2.14}$$

dır. G'nin determinantını birinci satıra göre açarak hesaplarsak $\det G = \det V$'dir. V Vandermonde matrisinin bütün öz değerleri birbirinden farklı olduğundan $\det V \neq 0$'dır. Dolayısıyla G'nin tersi hesaplanabilir. (2.2.14) eşitliği $G^{-1}UG = N$ olarak yazılabilir. U ve N matrisleri benzer matrislerdir. O halde

$$G^{-1}U^m G = N^m \tag{2.2.15}$$

eşitliği de doğrudur. $W_m = U^m$ olduğundan (2.2.15) eşitliğini $W_m G = GN^m$ olarak da yazabiliriz. Matris çarpımı ile sonuç kolayca görülür.

Bazı genelleştirilmiş k-mertebeli P-J sayıları Tablo 6 ile verilmiştir.

	$k=2$	
$m \setminus l$	1	2
0	1	0
1	g_n^{i+n}	g_n^i
2	$(g_n^{i+n})^2 + g_n^i$	$g_n^{i+n} g_n^i$
3	$(g_n^{i+n})^3 + 2g_n^{i+n} g_n^i$	$(g_n^{i+n})^2 g_n^i + (g_n^i)^2$
4	$(g_n^{i+n})^4 + 3(g_n^{i+n})^2 g_n^i + (g_n^i)^2$	$(g_n^{i+n})^3 g_n^i + 2g_n^{i+n}(g_n^i)^2$
5	$(g_n^{i+n})^5 + 4(g_n^{i+n})^3 g_n^i + g_n^{i+n}(g_n^i)^2 + 2g_n^{i+n}(g_n^i)^2$	$(g_n^{i+n})^4 g_n^i + 3(g_n^{i+n})^2 (g_n^i)^2 + (g_n^i)^3$

Tablo 6

Tanım 2.2.1 ile verilen P-J sayı dizisinin ilk iki teriminin katsayısı, Kılıç ve Taşçı'nın tanımladığı genelleştirilmiş k-mertebeli Pell sayı dizisinin elemanları şeklinde seçilerek yeni bir sayı dizisi tanımlanabilir. Kılıç ve Taşçı genelleştirilmiş k-mertebeli Pell sayı dizisinin üreteç matrisini

$$R=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

formunda verip

$$E_n=\begin{bmatrix} P_n^1 & P_n^2 & \cdots & P_n^k \\ P_{n-1}^1 & P_{n-1}^2 & \cdots & P_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n-k+1}^1 & P_{n-k+1}^2 & \cdots & P_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

şeklindeki Pell sayılarından oluşan *k*-mertebeli matrisi için $E_n = R^n$ eşitliğinin doğru olduğunu göstermişlerdir [Kılıç, Taşçı, 2006].

u_m^l *l*-inci dizinin *m*-inci elemanı olmak üzere $1 \le i,l \le k$ ve $m \ge 1$ için

$$u_m^l=\begin{cases} 1 & m+l=1 \text{ ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases},\ 1-k \le n \le 0$$

başlangıç koşulu ile

$$u_m^l = P_{i-n}^i u_{m-1}^l + P_n^i u_{m-2}^l + \cdots + u_{m-k}^l$$

şeklinde yeni bir sayı dizisi tanımlanabilir.

Bu dizide özel olarak,

- $n=1$ ve $i=2$ alınırsa dizi genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci dizisine;
- $n=i=1$ ve $k=2$ alınırsa bilinen Jacobsthal sayı dizisine;
- $n=0$ ve $i=1$ için ise genelleştirilmiş *k*-mertebeli Pell sayı dizisine

dönüşmektedir. Böylece Fibonacci, Pell ve Jacobsthal sayı dizilerini içeren daha genel bir dizi tanımlanabilir. Bu sayı dizisi genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci-Pell-Jacobsthal sayı dizisi olarak adlandırılabilir. Tanımlanan bu yeni sayı dizisinin özellikleri incelenebilir.

2.3 Genelleştirilmiş *k*-Mertebeli Fibonacci-Pell-Lucas Dizisi

Bu kısımda, genelleştirilmiş *k*-merebeli Fibonacci-Pell-Lucas sayı dizisi olarak adlandıracağımız bir dizi tanımlayıp, bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım 2.3.1: v_n^i, *i*-inci dizinin *n*-inci terimi olmak üzere, $n > 0$, $m, p \geq 0$, $1 \leq i \leq k$ ve $1-k \leq n \leq 0$ olmak üzere

$$v_n^i = \begin{cases} 1 & i = 1-n \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \tag{I}$$

veya

$$v_n^i = \begin{cases} 2 & i = 2-n \\ -1 & i = 1-n \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \tag{II}$$

başlangıç koşullarıyla

$$v_n^i = 2^m v_{n-1}^i + 2^p v_{n-2}^i + v_{n-3}^i + \cdots + v_{n-k}^i \tag{2.3.1}$$

olarak tanımlanan diziye genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci-Pell-Lucas sayı dizisi denir. Bu diziyi kısaca genelleştirilmiş *k*-mertebeli F-P-L dizisi olarak adlandıracağız.

Bu dizide,

- $p = 0$ ve (I) başlangıç koşulları alınırsa, dizi genelleştirilmiş *k*-mertebeli F-P dizisine,
- $m = 0,\ p = 1,\ k = 2$ ve (I) başlangıç koşulları alınırsa, bilinen Jacobsthal sayı dizisine
- $p = 0$ ve (II) başlangıç koşulları alınırsa, genelleştirilmiş *k*-mertebeli Lucas dizisine,
- $p = 1,\ k = 2$ ve (II) başlangıç koşullarıyla dizi bilinen Jacobsthal-Lucas dizisine,
- *k*=2, *m*=1, *p*=0 ve (I) başlangıç koşullarıyla da bilinen Pell sayı dizisine indirgenmektedir.

$$M = \begin{bmatrix} 2^m & 2^p & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3.2}$$

Companion matris olmak üzere, v_n^i dizisinin tanımından

$$\begin{bmatrix} v_{n+1}^i \\ v_n^i \\ v_{n-1}^i \\ \vdots \\ v_{n-k+2}^i \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} v_n^i \\ v_{n-1}^i \\ v_{n-2}^i \\ \vdots \\ v_{n-k+1}^i \end{bmatrix} \tag{2.3.3}$$

eşitliği yazılabilir. Genelleştirilmiş *k*-mertebeli F-P-L sayı dizisinin elemanlarından oluşan

$$E_n = \begin{bmatrix} v_n^1 & v_n^2 & v_n^3 & \cdots & v_n^k \\ v_{n-1}^1 & v_{n-1}^2 & v_{n-1}^3 & \cdots & v_{n-1}^k \\ v_{n-2}^1 & v_{n-2}^2 & v_{n-2}^3 & \cdots & v_{n-2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-k+1}^1 & v_{n-k+1}^2 & v_{n-k+1}^3 & \cdots & v_{n-k+1}^k \end{bmatrix}. \tag{2.3.4}$$

matrisini tanımlayalım. (2.3.3) eşitliğinin daha genel ifadesi olarak

$$E_n = ME_{n-1}$$

eşitliği yazılabilir.

Lemma 2.3.1 *M ve E_n*, (2.3.2) ve (2.3.4)'teki gibi matrisler olsun. $n \geq 1$ için

$$E_n = M^n$$

dir.

İspat: $E_n = ME_{n-1}$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$E_n = M(ME_{n-2}) = M^2(ME_{n-3}) = \cdots = M^{n-1}(ME_1)$$

dir. Dizinin tanımından

$$E_1 = \begin{bmatrix} v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 & \cdots & v_1^k \\ v_0^1 & v_0^2 & v_0^3 & \cdots & v_0^k \\ v_{-1}^1 & v_{-1}^2 & v_{-1}^3 & \cdots & v_{-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{2-k}^1 & v_{2-k}^2 & v_{2-k}^3 & \cdots & v_{2-k}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^m & 2^p & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = M$$

olup sonuçta

$$E_n = M^n$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.3.1 v_n^i genelleştirilmiş *k*-mertebeli *i*-inci F-P-L sayı dizisinin *n*-inci terimi olmak üzere, $1 \le i \le k$, *n* ve *q* pozitif tam sayıları için

$$v_{n+q}^i = \sum_{j=1}^{k} v_n^j v_{q-j+1}^i$$

dir.

İspat: Lemma 2.3.1'den $E_n = M^n$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu ifade

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= M^{n+1} = M^n M = MM^n \\ &= E_n E_1 = E_1 E_n \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

olarak da yazılabilir. (2.3.5) ifadesini genelleştirerek, *n* ve *q* pozitif tam sayıları için

$$E_{n+q} = E_n E_q = E_q E_n$$

eşitliği yazılabilir. Bu matris çarpımı daha açık yazılırsa

$$E_n E_q = \begin{bmatrix} v_n^1 & v_n^2 & v_n^3 & \cdots & v_n^k \\ v_{n-1}^1 & v_{n-1}^2 & v_{n-1}^3 & \cdots & v_{n-1}^k \\ v_{n-2}^1 & v_{n-2}^2 & v_{n-2}^3 & \cdots & v_{n-2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-k+1}^1 & v_{n-k+1}^2 & v_{n-k+1}^3 & \cdots & v_{n-k+1}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_q^1 & v_q^2 & v_q^3 & \cdots & v_q^k \\ v_{q-1}^1 & v_{q-1}^2 & v_{q-1}^3 & \cdots & v_{q-1}^k \\ v_{q-2}^1 & v_{q-2}^2 & v_{q-2}^3 & \cdots & v_{q-2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{q-k+1}^1 & v_{q-k+1}^2 & v_{q-k+1}^3 & \cdots & v_{q-k+1}^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} v_n^1 v_q^1 + v_n^2 v_{q-1}^1 + \cdots + v_n^k v_{q-k+1}^1 & \cdots & v_n^1 v_q^k + v_n^2 v_{q-1}^k + \cdots + v_n^k v_{q-k+1}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-k+1}^1 v_q^1 + v_{n-k+1}^2 v_{q-1}^1 + \cdots + v_{n-k+1}^k v_{q-k+1}^1 & \cdots & v_{n-k+1}^1 v_q^k + v_{n-k+1}^2 v_{q-1}^k + \cdots + v_{n-k+1}^k v_{q-k+1}^k \end{bmatrix}$$

E_n'in bir satırı ile E_q'nun bir sütununun çarpımı sonucunda

$$v_{n+q}^i = \sum_{j=1}^{k} v_n^j v_{q-j+1}^i \tag{2.3.6}$$

elde edilir ki istenendir.

$m = p = 0$ ve $k = 2$ için dizi bilinen Fibonacci sayı dizisine indirgenmekteydi. Bu değerler (2.3.6) eşitliğnde yazılırsa

$$\begin{aligned} F_{n+q}^{i} &= \sum_{j=1}^{2} F_n^{\,j} F_{q-j+1}^{i} \\ &= F_n^{1} F_q^{i} + F_n^{2} F_{q-1}^{i} \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

eşitliği elde edilir. Her pozitif n tam sayısı için $F_n^1 = F_{n+1}^2$ dir ve (2.3.7) eşitliğinde $i = 2$ yazılırsa, F_n^2 n-ici bilinen Fibonacci sayısı olmak üzere

$$F_{n+q}^{2} = F_{n+1}^{2} F_q^{2} + F_n^{2} F_{q-1}^{2}$$

elde edilir. Dolayısıyla Fibonacci sayıları için bilinen

$$F_{n+q} = F_{n+1} F_q + F_n F_{q-1}$$

eşitliğini elde ederiz.

(2.3.7) ifadesinde $m = 1,\ \ p = 0$ ve $k = 2$ alınırsa, benzer işlemlerle Pell sayı dizisi için bilinen

$$P_{n+q} = P_{n+1} P_q + P_n P_{q-1}$$

ifadesi elde edilir.

Lemma 2.3.2 v_n^i genelleştirilmiş k-mertebeli F-P-L sayı dizisinin n-inci terimi olmak üzere $1 \le i \le k$ için

$$\begin{aligned} v_{n+1}^{1} &= 2^m v_n^{1} + v_n^{2} \\ v_{n+1}^{2} &= 2^p v_n^{1} + v_n^{3} \\ v_{n+1}^{r} &= v_n^{1} + v_n^{r+1}, \quad 3 \le r \le k-1 \text{ için} \\ v_{n+1}^{k} &= v_n^{1} \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

dir.

İspat: $E_{n+1} = E_n E_1$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca dizinin tanımından $E_1 = M$ olup matris çarpımı

$$E_n E_1 = \begin{bmatrix} v_n^1 & v_n^2 & v_n^3 & \cdots & v_n^k \\ v_{n-1}^1 & v_{n-1}^2 & v_{n-1}^3 & \cdots & v_{n-1}^k \\ v_{n-2}^1 & v_{n-2}^2 & v_{n-2}^3 & \cdots & v_{n-2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n-k+1}^1 & v_{n-k+1}^2 & v_{n-k+1}^3 & \cdots & v_{n-k+1}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^m & 2^p & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ile (2.3.8) eşitliği elde edilir.

2.3.1Genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci-Pell-Lucas Dizisi İçin Binet Formülü

Fibonacci, Pell ve Lucas sayıları için Binet formülü birinci bölümde verilmişti. Bu kısımda ise genelleştirilmiş *k*-mertebeli F-P-L dizisi için Binet formülü elde edilecektir. *M* companion matrisinin karakteristik polinomunun aynı zamanda genelleştirilmiş *k*-mertebeli F-P-L dizisinin rekürans bağıntısına karşılık gelen polinom olduğu bilinmektedir. (2.3.2)'de verilen *M* companion matrisinin karakteristik denklemi

$$x^k - 2^m x^{k-1} - 2^p x^{k-2} - x^{k-3} - \cdots - x - 1 = 0$$

olup aşağıdaki lemma ile bu denklemin köklerinin katlılığı incelenecektir.

Lemma 2.3.3 $k \geq 3$ ve $m, p \geq 0$ olmak üzere

$$h(x) = x^{k+1} - (2^m + 1)x^k + (2^m - 2^p)x^{k-1} + (2^p - 1)x^{k-2} + 1 = 0$$

denkleminin katlı kökü yoktur.

İspat: $k \geq 3$ ve $m, p \geq 0$ için

$$f(x) = x^k - 2^m x^{k-1} - 2^p x^{k-2} - x^{k-3} - \cdots - x - 1$$

olmak üzere $f(1) \neq 0$ olduğu olduğu kolayca görülebilir.

$$\begin{aligned} h(x) &= (x-1) f(x) \\ &= (x-1)(x^k - 2^m x^{k-1} - 2^p x^{k-2} - x^{k-3} - \cdots - x - 1) \\ &= x^{k+1} - (2^m + 1)x^k + (2^m - 2^p)x^{k-1} + (2^p - 1)x^{k-2} + 1 \end{aligned}$$

olmak üzere 1, *h*(*x*)'in bir köküdür fakat *f*(*x*)'in kökü olmadığından, *h*(*x*)'in katlı kökü değildir. $\alpha \neq 0$ ve $\alpha \neq 1$ olmak üzere α, *h*(*x*)'in bir katlı kökü olsun. O halde

$$h(\alpha) = \alpha^{k+1} - (2^m + 1)\alpha^k + (2^m - 2^p)\alpha^{k-1} + (2^p - 1)\alpha^{k-2} + 1 = 0$$

ve

$$\begin{aligned} h'(\alpha) &= (k+1)\alpha^k - (2^m + 1)k\alpha^{k-1} + (2^m - 2^p)(k-1)\alpha^{k-2} + (2^p - 1)(k-2)\alpha^{k-3} \\ &= \alpha^{k-3}[(k+1)\alpha^3 - (2^m + 1)k\alpha^2 + (2^m - 2^p)(k-1)\alpha + (2^p - 1)(k-2)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ifadeleri yazılabilir. $\alpha \neq 0$ olduğundan

$$[(k+1)\alpha^3 - (2^m+1)k\alpha^2 + (2^m - 2^p)(k-1)\alpha + (2^p - 1)(k-2)] = 0$$

olmalıdır.

Özel olarak $m = 0, p = 1$ ve $k = 3$ seçilirse

$$4\alpha^3 - 6\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$

olup, bu ifadenin kökleri

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2},\ \alpha_2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ve } \alpha_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

olarak elde edilir. Bu α 'nın *h*(*x*)'in katlı kökü olmasıyla çelişir. Sonuç olarak, $k \geq 3$ ve $m, p \geq 0$ için

$$x^k - 2^m x^{k-1} - 2^p x^{k-2} - x^{k-3} - \cdots - x - 1 = 0$$

katlı köke sahip değildir.

M matrisinin karakteristik denklemi

$$f(\lambda) = \lambda^k - 2^m \lambda^{k-1} - 2^p \lambda^{k-2} - \lambda^{k-3} - \cdots - \lambda - 1 = 0 \qquad (2.3.9)$$

olmak üzere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ da *M* matrisinin özdeğerleri olsun. Lemma 2.3.3'den bu öz değerlerin birbirinden farklı olduğunu biliyoruz. V vandermonde matrisi

$$V = \begin{bmatrix} \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tipinde bir kare matris ve

$$c_k(i) = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+k-i} \\ \lambda_2^{n+k-i} \\ \vdots \\ \lambda_k^{n+k-i} \end{bmatrix}$$

olmak üzere $V_j^{c_k(i)}$, *V*'nin *j*'inci sütununun $c_k(i)$ ile değiştirilmesi ile elde edilen bir kare matrisi olsun.

Aşağıdaki teorem genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci-Pell-Lucas dizisinin Binet formülünü ifade etmektedir.

Teorem 2.3.2 v_n^i, genelleştirilmiş *k*-mertebeli F-P-L sayı dizisinin *n*-inci terimi olmak üzere $1 \le i \le k$ için,

$$v_{n-i+1}^i = \frac{\det(V_j^{c_k(i)})}{\det(V)}$$

dir.

İspat: M matrisinin öz değerleri birbirinden farklı olduğundan, M köşegenleştirilebilirdir. V tersinir olup $V^{-1}MV = \Lambda = diag(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ dır. Yani, M ile Λ benzer matrislerdir. Buradan, $M^m V = V\Lambda^m$ yazılabilir. Lemma 2.3.1'den $E_n = M^n$ olduğu bilinmektedir. O halde

$$E_n V = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & \cdots & e_{1k} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & \cdots & e_{2k} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & \cdots & e_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{k1} & e_{k2} & e_{k3} & \cdots & e_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \lambda_3^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \lambda_3^{k-2} & \cdots & \lambda_k^{k-2} \\ \lambda_1^{k-3} & \lambda_2^{k-3} & \lambda_3^{k-3} & \cdots & \lambda_k^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \lambda_3^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \lambda_3^{k-2} & \cdots & \lambda_k^{k-2} \\ \lambda_1^{k-3} & \lambda_2^{k-3} & \lambda_3^{k-3} & \cdots & \lambda_k^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & & & 0 \\ & \lambda_2^n & & & \\ & & \lambda_3^n & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_k^n \end{bmatrix} = V\Lambda^n$$

matris çarpımı yapılırsa

$$\begin{bmatrix} e_{11}\lambda_1^{k-1} + e_{12}\lambda_1^{k-2} + \cdots + e_{1k} & \cdots & e_{11}\lambda_k^{k-1} + e_{12}\lambda_k^{k-2} + \cdots + e_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{k1}\lambda_1^{k-1} + e_{k2}\lambda_1^{k-2} + \cdots + e_{kk} & \cdots & e_{k1}\lambda_k^{k-1} + e_{k2}\lambda_k^{k-2} + \cdots + e_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+k-i} \\ \vdots \\ \lambda_k^{n+k-i} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} e_{i1}\lambda_1^{k-1} + e_{i2}\lambda_1^{k-2} + \cdots + e_{ik} &= \lambda_1^{n+k-i} \\ e_{i1}\lambda_2^{k-1} + e_{i2}\lambda_2^{k-2} + \cdots + e_{ik} &= \lambda_2^{n+k-i} \\ &\vdots \\ e_{i1}\lambda_k^{k-1} + e_{i2}\lambda_k^{k-2} + \cdots + e_{ik} &= \lambda_k^{n+k-i} \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi yazılabilir. Bu denklem sistemi Crammer metodu ile çözülürse

$$e_{ij} = v_{n-i+1}^i = \frac{\det(V_j^{c_k(i)})}{\det(V)}$$

olarak elde edilir.

2.3.2 Genelleştirilmiş *k*-Mertebeli Fibonacci-Pell-Lucas Dizisi İçin Toplamlar

Genelleştirilmiş *k*-mertebeli F-P-L dizisinin toplamları $n \geq 0$ ve *i*=1 için

$$S_n = \sum_{r=0}^{n} v_r^1 \tag{2.3.10}$$

olsun. Bu toplam Lemma 2.3.2'deki $v_r^1 = v_{r+1}^k$ ifadesi yardımıyla

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} v_r^k \tag{2.3.11}$$

olarak da yazılabilir. *M,* (2.3.2)'deki gibi *k* mertebeli bir matris olmak üzere *Q* ve T_n kare matrislerini

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2^m & 2^p & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & M & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \tag{2.3.12}$$

ve

$$T_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_n & v_n^1 & v_n^2 & \cdots & v_n^k \\ S_{n-1} & v_{n-1}^1 & v_{n-1}^2 & \cdots & v_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n-k+1} & v_{n-k+1}^1 & v_{n-k+1}^2 & \cdots & v_{n-k+1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_n & & & & \\ S_{n-1} & & & E_n & \\ \vdots & & & & \\ S_{n-k+1} & & & & \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. (2.3.8) eşitliğini kullanırsak

$$S_n = v_n^1 + S_{n-1}$$

olur. Böylece

$$T_{n+1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{n+1} & v_{n+!}^{1} & v_{n+1}^{2} & \cdots & v_{n+1}^{k} \\ S_{n} & v_{n}^{1} & v_{n}^{2} & \cdots & v_{n}^{k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n-k+2} & v_{n-k+2}^{1} & v_{n-k+2}^{2} & \cdots & v_{n-k+2}^{k} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{n} & v_{n}^{1} & v_{n}^{2} & \cdots & v_{n}^{k} \\ S_{n-1} & v_{n-1}^{1} & v_{n-1}^{2} & \cdots & v_{n-1}^{k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n-k+1} & v_{n-k+1}^{1} & v_{n-k+1}^{2} & \cdots & v_{n-k+1}^{k} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2^{m} & 2^{p} & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}=T_{n}Q$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade diğer bir şekilde

$$T_{n+1}=T_{1}Q^{n} \tag{2.3.13}$$

olarak da yazılabilir. $1\le i\le k$ için $T_{-i}=0$ olduğundan ve genelleştirilmiş *k*-mertebeli F-P-L dizisinin tanımından

$$T_{1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{1} & v_{1}^{1} & v_{1}^{2} & \cdots & v_{1}^{k} \\ S_{0} & v_{0}^{1} & v_{0}^{2} & \cdots & v_{0}^{k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{2-k} & v_{2-k}^{1} & v_{2-k}^{2} & \cdots & v_{2-k}^{k} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2^{m} & 2^{p} & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}=Q$$

dir. O halde (2.3.13) ifadesi $T_{n}=Q^{n}$ olarak da yazılabilir. Böylece genelleştirilmiş *k*-mertebeli F-P-L dizisi için

$$T_{n+1}=T_{n}T_{1}=T_{1}T_{n} \tag{2.3.14}$$

eşitliği yazılabilir. Bu matris çarpımı daha açık yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{n} & v_{n}^{1} & v_{n}^{2} & \cdots & v_{n}^{k} \\ S_{n-1} & v_{n-1}^{1} & v_{n-1}^{2} & \cdots & v_{n-1}^{k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n-k+1} & v_{n-k+1}^{1} & v_{n-k+1}^{2} & \cdots & v_{n-k+1}^{k} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2^{m} & 2^{p} & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_{n-1} & v_{n-1}^{1} & v_{n-1}^{2} & \cdots & v_{n-1}^{k} \\ S_{n-2} & v_{n-2}^{1} & v_{n-2}^{2} & \cdots & v_{n-2}^{k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n-k} & v_{n-k}^{1} & v_{n-k}^{2} & \cdots & v_{n-k}^{k} \end{bmatrix}$$

olur. Matris çarpımı ile (2.3.10)'deki toplam

$$S_n = 1 + 2^m S_{n-1} + 2^p S_{n-2} + \sum_{r=3}^{k} S_{n-r} \tag{2.3.15}$$

olarak da yazılabilir.

k=3 seçilirse,

$$S_n = 1 + 2^m S_{n-1} + 2^p S_{n-2} + S_{n-3} \tag{2.3.16}$$

elde edilir. (2.3.16)'da her iki tarafa da $2^m v_n^1 + 2^p (v_n^1 + v_{n-1}^1)$ eklenirse

$$S_n + 2^m v_n^1 + 2^p (v_n^1 + v_{n-1}^1) = 1 + 2^m S_{n-1} + 2^p S_{n-2} + S_{n-3} + 2^m v_n^1 + 2^p (v_n^1 + v_{n-1}^1)$$

olup $S_n = v_n^1 + S_{n-1}$ ifadesinden

$$\underbrace{(v_n^1 + v_{n-1}^1 + v_{n-2}^1 + S_{n-3})}_{S_n} + 2^m v_n^1 + 2^p (v_n^1 + v_{n-1}^1) = 1 + 2^m \underbrace{(S_n - v_n^1)}_{S_{n-1}} + 2^p \underbrace{(S_n - v_n^1 - v_{n-1}^1)}_{S_{n-2}} + S_{n-3} + 2^m v_n^1 + 2^p (v_n^1 + v_{n-1}^1)$$

ifadesindeki gerekli sadeleşmeler sonucunda genelleştirilmiş *k*-mertebeli F- P-L dizisi için

$$S_n = \frac{1}{2^m + 2^p} [v_n^1 (2^m + 2^p + 1) + v_{n-1}^1 (2^p + 1) + v_{n-2}^1 - 1]$$

şeklinde bir toplam elde ettik.

(2.3.15) ifadesinde *p*=0 ve *k*=3 alırsak,

$$S_n = 1 + 2^m S_{n-1} + S_{n-3} \tag{2.3.17}$$

ifadesini

$$\underbrace{v_n^1 + v_{n-1}^1 + v_{n-2}^1 + S_{n-3}}_{S_n} = 1 + 2^m (\underbrace{S_n - v_n^1}_{S_{n-1}}) + S_{n-3}$$

şeklinde düzenlemeler sonucunda

$$S_n = \frac{1}{2^m} [(2^m + 1) v_n^1 + v_{n-1}^1 + v_{n-2}^1 - 1]$$

bir toplam formülü elde ettik.

2.3.3 Genelleştirilmiş *k*-Mertebeli Fibonacci-Pell-Lucas Dizisi İçin Bir Kesin (Explicit) Formül

Bu kısımda genelleştirilmiş *k*-mertebeli Fibonacci-Pell-Lucas dizisi için bir kesin (explicit) formül elde ettik.

Q (2.3.12)'deki gibi bir matris olmak üzere, Q matrisinin karakteristik polinomu

$$C_Q(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & & & \\ 0 & & \lambda I-M & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{vmatrix}$$

dur. (2.3.9)'dan M companion matrisinin karakteristik polinomunu biliyoruz. O halde

$$\begin{aligned} C_Q(\lambda) &= (\lambda-1)\left|\lambda I-M\right| \\ &= (\lambda-1)(\lambda^k-2^m\lambda^{k-1}-2^p\lambda^{k-2}-\lambda^{k-3}-\cdots-\lambda-1) \\ &= \lambda^{k+1}-(2^m+1)\lambda^k+(2^m-2^p)\lambda^{k-1}+(2^p-1)\lambda^{k-2}+1 \end{aligned} \qquad (2.3.18)$$

dır. Lemma 2.3.3'den (2.3.18) eşitliğinin katlı kökü yoktur. Dolayısıyla Q matrisini köşegenleştirebiliriz. M matrisinin öz değerleri $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ ise Q matrisinin öz değerleri de $1,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ olup birbirlerinden farklıdırlar.

$$Z=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.3.19)$$

olsun.

Teorem 2.3.3 S_n**,** (2.3.11)'deki gibi bir toplam ve v_n^i genelleştirilmiş k-mertebeli Fibonacci-Pell-Lucas sayı dizisinin n-inci terimi olmak üzere

$$S_n=\frac{1}{(2^m+2^p+k-3)}\left(\sum_{i=1}^{k}v_n^i-1\right)$$

dur.

İspat: Q ve Z, sırasıyla (2.3.12) ve (2.3.19)'deki gibi matrisler, $K=diag(1,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
QZ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2^m & 2^p & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \\
&= ZK
\end{aligned}
\tag{2.3.20}
$$

dır. Z matrisinin determinantını Laplace açılımı ile ilk satıra göre açarak hesaplarsak

$$\det Z = \det V$$

olarak elde edilir. M matrisinin öz değerleri birbirlerinden farklı olduğundan $\det Z \neq 0$'dır. Dolayısıyla Z tersinirdir. (2.3.20) ifadesinden

$$Z^{-1}QZ = K$$

yazılabilir ki buradan K ve Q matrisleri benzer matrislerdir. O halde

$$Z^{-1}Q^nZ = K^n \tag{2.3.21}$$

eşitliği de doğrudur. $T_n = Q^n$ olduğundan (2.3.21) eşitliğini $T_nZ = ZK^n$ olarak da yazabiliriz. Matris çarpımı açık olarak yazılırsa

$$T_nZ=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_n & v_n^1 & v_n^2 & \cdots & v_n^k \\ S_{n-1} & v_{n-1}^1 & v_{n-1}^2 & \cdots & v_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n-k+1} & v_{n-k+1}^1 & v_{n-k+1}^2 & \cdots & v_{n-k+1}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \dfrac{-1}{2^m+2^p+k-3} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{k-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k^n \end{bmatrix}$$

$$= ZK^n$$

sonuç kolayca görülür.

3. SONUÇ

Bu çalışmada Jacobsthal sayı dizisi genelleştirilmiş; Fibonacci, Pell ve Jacobsthal sayı dizilerini içeren genel bir sayı dizisi tanımlanmış, tanımlanan dizinin rekürans bağıntısı Companion matrisler ile matris teoriye taşınmış ve matrislerin de özellikleri kullanılarak dizinin özellikleri incelenmiştir.

Bu çalışmada yapılan genelleştirmeler Fermat, Mersenne, Catalan, Motzkin, Bell ve Happy gibi başka sayı dizileri için de uygulanabilir. Ayrıca tanımlanan dizilerin rekürans bağıntısından elde edilen Companion matrisin ve Companion matrisin özdeğerlerine bağlı olarak ifade edilen Vandermonde matrisin normu ve kuvvetleri incelenebilir.

Kaynaklar

Koshy, T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Wiley-Interscience Publication, 2001.

R. A. Dunlap, The Golden Ratio and Fibonacci Numbers, Dalhousie University, 1997 Canada.

E. Kılıç, *The Generalized order-k Fibonacci-Pell sequence by matrix methos*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 209 (2007) 133 – 145.

E. Kılıç, D. Taşçı, *The generalized Binet formula, representation and sums of the generalized order-k Pell numbers*, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 10, No. 6, Pp. 1661-1670, 2006.

E. Kılıç, B. Altunkaynak, D. Taşçı, *On the computing of the generalized order-k Pell numbers in log time*, Applied Mathematics and computation, 181 (2006) 511-515.

D. Taşçı, E. Kılıç, *On the order-k generalized Lucas numbers*, Applied Mathematics and Computation, 155 (2004) 637-641.

M. C. Er, *Sums of Fibonacci numbers by matrix methods*, Fibonacci Quarterly. v22 i3. 204-207, 1984.

D. Kalman, *Generalized Fibonacci numbers by matrix methods*, Fibonacci Quarterly. 20 (1) (1982) 73-76.

S. Falcon, A. Plaza, *On k-Fibonacci sequences and polynomials and their derivatives*, Chaos, Solitons and Fractals, 39 (2009) 1005–1019.

S. Falcon, A. Plaza, *k-Fibonacci sequences modulo m*, Chaos, Solitons and Fractals, 10.1016/j.chaos.2008.02.014.

S. Falcon, A. Plaza, *The k-Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle*, Chaos, Solitons and Fractals, 33 (2007) 38-49.

S. Falcon, A. Plaza, *On the Fibonacci k-numbers*, Chaos, Solitons and Fractals, 32 (2007) 1615-1624.

E. Kılıç, A. P. Stakhov, *On the Fibonacci and Lucas p-numbers, their sums, families of bipartite graphs and permanents of certain matrices*, Chaos, Solitons and Fractals, 10.1016/j.chaos.2007.10.007.

A. Stakhov, B. Rozin, *Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers*, Chaos, Solitons and Fractals, 27 (2006) 1162-1177.

A. P. Stakhov, *The generalized principle of the golden section and its applications in mathematics*, Chaos, Solitons and Fractals, 26 (2005) 263–289.

E. Karaduman, *On determinants of matrices with general Fibonacci numbers entries*, Applied Mathematics and Computation, 167 (2005) 670–676.

E. Karaduman, *An application of Fibonacci numbers in matrices*, Applied Mathematics and Computation, 147 (2004) 903–908.

E. P. Miles, *Generalized Fibonacci numbers and associated matrices*, Amer. Math. Monthly, 67 (1960) 745-752.

E. Kılıç, D. Taşçı, *On the generalized order-k Fibonacci and Lucas numbers*, Rocky Mountain J. Math., to appear.

Şamil AKÇAĞIL, Fibonacci Sayıları ve Altın Oran, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, 2005.

F. Köken, D. Bozkurt, *On the Jachobsthal Numbers by Matrix Methods*, Int. J. Math. Sciences, Vol. 3, 2008, no. 13, 605-614.

V. Caferov, Anadolu Üniversitesi Açık Öğretim Fakültesi Yayınları No: 600, Eskişehir, 1999.

D. Bozkurt, B. Türen, R.Türkmen, Dizgi Ofset Matbaacılık, İkinci Baskı, 2006, Konya.