T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matrislerin Singüler Değer Eşitsizlikleri

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya – 2009

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matrislerin Singüler Değer Eşitsizlikleri

Akın KALE

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Konya – 2009

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matrislerin Singüler Değer Eşitsizlikleri

Akın KALE

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI

Sirkülant matrisler ve Singüler değerler, nümerik analiz, sayılar teorisi, geometri, fonksiyonel analiz ve lineer cebir gibi matematiğin çeşitli alanlarının yanısıra elektrik ve elektronik mühendisliği, makine mühendisliği ve genetik mühendisliği gibi çeşitli mühendislik alanlarında da kullanılmaktadır.

Bu çalışmada singüler değerler ile sirkülant matrisler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Singüler Değerler, Singüler Değerler Eşitsizlikleri, Sirkülant Matrisler, Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri

ABSTRACT

MS. THESIS

Singular Value Inequalities of Matrices

Akın KALE

Selcuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asist. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Jury: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Asist. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Asist. Prof. Dr. Ayşe NALLI

Not only have Circulant matrices and Singular values been used in various fields of mathematics such as numerical analysis, number theory, linear algebra, functional analysis, and geometry but also they have been used in various engineering fields, such as electrical and electronic engineering, mechanical engineering, and genetic engineering.

In this study, circulant matrices and singular values have been examined.

Key Words: Singular Value Inequalities, Singular Values, Fibonacci and Lucas Numbers, Circulant Matrices

ÖN SÖZ

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde matrisler ile ilgili genel özellikler verilmiştir. İkinci bölümde singüler değerler ve singüler değer eşitsizlikleri ile ilgili bazı özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde sirkülant matrisler ile ilgili genel özellikler verilmiştir. Dördüncü bölümde Fibonacci-Lucas sayıları ile ilgili bazı özellikler ve elemanları Fibonacci-Lucas sayıları olan sirkülant matrislerin özdeğerleri ile singüler değerleri incelenmiştir. Beşinci bölümde de sonuç ve öneriler verilmiştir.

Bu tezin oluşmasında büyük katkıları olan danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Ramazan Türkmen'e teşekkür ederim.

Akın KALE

Konya, 2009

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTACT	ii
ÖNSÖZ	iii
GİRİŞ	1
1.MATRİSLER	3
1.1 Matris Tipleri	3
1.2 Matrislerin Bloklara Ayrılması	5
1.3 Benzer Matrisler	6
1.4 Üniter Matrisler	7
1.5 Pozitif Yarı Tanımlı Matrisler	7
1.6 Fourier Matrisleri	8
1.7 Öz Değer ve Öz Vektörler	9
2. SİNGÜLER DEĞERLER	15
2.1 Bir Karesel Matrisin Köşegenleştirilmesi	16
3. SİRKÜLANT MATRİSLER	27
3.1 Sirkülantların Bloklara Ayrışımı	29
3.2 Sirkülant Matrislerin Köşegenleştirilmesi:	30
3.3 Ters Sirkülant Matrisler	34
3.4 Sirkülant Matrislerin Çarpımı	35
3.5 Sirkülant Matrislerin Rankı	35
3.6 Sirkülant Matrislerin İzi	36
4. FİBONACCİ ve LUCAS ELEMANLI SİRKÜLANT MATRİSLER	37
4.1 Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri	37
4.2 Fibonacci ve Lucas Elemanlı Sirkülant Matrislerin Öz Değerleri	40
4.3 Fibonacci ve Lucas Elemanlı Sirkülant Matrislerin Singüler Değerleri	48
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	51
KAYNAKLAR	52

GİRİŞ

R. Bhatia ve F. Kittaneh (1990) çalışmalarında, aritmetik-geometrik ortalama eiştsizliğini kullanarak, A, B herhangi iki matris olmak üzere

$$2s_j\left(AB^*\right) \le s_j\left(AA^*\right) + s_j\left(BB^*\right)$$

singüler değer eşitsizliğini ispatlamışlardır.

X. Zhan(2000) çalışmasında, A, B n-kare kompleks ve pozitif yarıtanımlı matrisler ve $A \oplus B$ blok köşegen matris olmak üzere,

$$s_j\left(A-B\right) \le s_j\left(A \oplus B\right)$$

singüler değer eşitsizliğini ispatlamıştır.

F. Kittaneh(2001) çalışmasında, A, n-kare kompleks ve $\|.\|$ spektral norm olmak üzere,

$$\left\|A^*A - AA^*\right\| \ge \|A\|^2 - \left\|A^2\right\|$$

eşitsizliğini ispatlamıştır.

X. Zhan(2004) çalışmasında, A_0 pozitif matris ve $A_1,\ldots,A_k$ pozitif yarı tanımlı matris olmak üzere

$$tr\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=0}^{j} A_i\right)^{-2} A_j < trA_0^{-1}$$

eşitsizliğinden yararlanarak,

$$2s_j\left(AB^*\right) \le s_j\left(AA^*\right) + s_j\left(BB^*\right)$$

$$s_j\left(A-B\right) \le s_j\left(A \oplus B\right)$$

singüler değer eşitsizlikleri için yeni çözüm yolları elde edilmiştir.

O. Hirzallah(2005) çalışmasında,

$$\sqrt{2}s_j\left(\left|A_1A_2^* + A_3A_4^*\right|^{1/2}\right) \le s_j\left(\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\right)$$

singüler değer eşitsizliğini ispatlamış ve bu eşitsizlikten yararlanarak bazı norm eşitsizlikleri ispatlamıştır.

Y. Tao (2006) çalışmasında, A, B n-kare pozitif yarı tanımlı matrisler olmak üzere

$$s_j\left(A^{\frac{1}{4}}B^{\frac{3}{4}}+A^{\frac{3}{4}}B^{\frac{1}{4}}\right)\le s_j\left(A+B\right),\ j=1,2,\ldots,n$$

singüler değer eşitsizliğini ispatlamıştır.

P. J. Davis(1979) kitabında, n. mertebeden,

$$C=circ(c_1,c_2,\ldots,c_n)=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{pmatrix}$$

sirkülant matrisi ile ilgili genel özellikleri incelemiştir.

1. MATRİSLER

Tanım 1.1. Herhangi bir F cisminin elemanlarından $m \times n$ tanesinin, m tane satır ve n tane sütun olarak dizilmesiyle elde edilen tabloya $m \times n$ tipinde matris denir.

Eğer burada $m=n$ ise matrise kare matris, $m \neq n$ ise matrise dikdörtgen matris denir. Böyle bir matrisi A ile gösterirsek, a_{ij} bu matrisin genel elemanı olmak üzere A'yı

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz.

1.1 Matris Tipleri

Tanım 1.2. Herhangi bir A kare matrisinin $a_{ii}\left(i = 1,2,3,...,n\right)$ elemanlarının bulunduğu doğrultuya bu matrisin esas köşegeni denir.

Tanım 1.3. Bir kare matrisin esas köşegeni üzerindeki elemanlarının dışındaki bütün elemanları sıfır ise bu matrise köşegen matris denir. Tanıma göre köşegen matrisi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = köş(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

şeklinde yazabiliriz.

Tanım 1.4. A kare matrisinde, $i - j \geq 1$ için her $a_{ij} = 0$ ise A matrisine üst üçgen, $j - i \geq 1$ için her $a_{ij} = 0$ ise A matrisine alt üçgen matris denir.

Tanım 1.5. A matrisi $m \times n$ tipinde bir matris olsun. A matrisinin satırlarının sütun, sütunlarının da satır yapılmasıyla elde edilen, yeni $n \times m$ mertebeli matrise A matrisinin transpozesi (evriği) denir ve A^T ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

olarak alınırsa A matrisinin transpozesi

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & . & . & . & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & . & . & . & a_{m2} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & . & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 1.6. Esas köşegen üzerindeki elemanlarının hepsi 1 olan köşegen matrise birim matris denir ve

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.7. A, n-kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise A matrisine simetrik matris (her i,j için $a_{ij} = a_{ji}$), eğer $A^T = -A$ ise A matrisine ters simetrik matris (her i,j için $a_{ij} = -a_{ji}$) denir. Ters simetrik matrislerde esas köşegen elemanları sıfırdır.

Tanım 1.8. A matrisi kompleks elemanlı bir matris olsun. $\overline{A}$, A matrisinin elemanlarının kompleks eşleniğini göstermek üzere $A^H = \overline{A}^T = A$ ise A matrisine hermityen matris denir.

Tanım 1.9. A $n \times n$ matrisi $A^H A = AA^H$ şartını sağlıyorsa A matrisine normal matris denir.

Tanım 1.10. P matrisi $P^H P = PP^H = I$ olacak şekilde bir matris ise P matrisine üniter matris, özel olarak P reel ve $P^T P = PP^T = I$ ise P matrisine ortogonal matris denir.

1.2 Matrislerin Bloklara Ayrılması

Tanım 1.11. A herhangi bir matris olsun. A matrisinin bir kısım satır ve sütunlarının silinmesiyle elde edilen matrise A matrisinin bir alt matrisi denir.

A, $m \times n$ matris olsun. Bu matrisi, yatay ve dikey çizgilerle çeşitli alt matrislere ayırabiliriz. Bunu

$$A = \left[\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{array}\right] \tag{1.1}$$

şeklinde basit bir örnekle gösterebiliriz. (1.1) ile verilen A matrisini,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

şeklinde yazılabilir.

Tanım 1.12. (1.1) veya (1.2) formülleriyle verilen işleme, A matrisini bloklara ayırma işlemi denir.

1.3 Benzer Matrisler

A ve B n-kare matrisler olmak üzere

$$A = S^{-1}BS \tag{1.3}$$

eşitliğini sağlayan terslenebilir bir S matrisi varsa, A matrisi B matrisine benzerdir. Eğer A, B ye benzerse, o zaman B de A ya benzerdir.

Özellik .1. Benzer matrislerin karakteristik denklemleri aynıdır ve dolayısıyla öz değerleri ve izleri de aynıdır.

Özellik .2. Eğer x, A'nın λ öz değerine karşılık gelen öz vektörü ve (1.3) sağlanıyorsa, o zaman $Y = Sx$; B nin aynı öz değerine karşılık gelen öz vektörüdür.

Teorem 1.1. Benzer matrislerin karakteristik denklemi ve öz değerleri aynıdır. Ayrıca $B = P^{-1}AP$ ve x, A matrisinin bir öz vektörü ise $P^{-1}x$ 'de B matrisinin bir öz vektörüdür.

İspat.

$$\det(\lambda I - B) = \det\left(\lambda I - P^{-1}AP\right) = \det(\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP)$$

olur. Determinantların özelliklerinden $\det(P^{-1}P) = \det\left(P^{-1}\right)\det(P)$ olduğundan

$$\det(\lambda I - B) = \det(P^{-1}\left(\lambda I - A\right)P) = \det(P^{-1})\det\left(\lambda I - A\right)\det\left(P\right)$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - B) &= \det(P^{-1})\det\left(P\right)\det\left(\lambda I - A\right) = \det(P^{-1}P)\det\left(\lambda I - A\right)\\ &= \det\left(\lambda I - A\right)\end{aligned}$$

olur ki, A ile B nin karakteristik denklemleri aynıdır. Dolayısıyla öz değerleri de aynıdır. x, A matrisinin bir öz vektörü ise $Ax = \lambda x$ olur. O halde

$$\left(P^{-1}AP\right)\left(P^{-1}x\right) = B\left(P^{-1}x\right) = \lambda\left(P^{-1}x\right)$$

olur ki, $\left(P^{-1}x\right)$ vektörü B matrisinin bir öz vektörüdür.

1.4 Üniter Matrisler

Bir matrisin tersi, eşlenik transpozuna eşitse, bu matris üniterdir (ortogonaldir), yani eğer

$$U^{-1} = U^H = \overline{U}^T$$

ise U üniterdir. Üniter matrisler normaldir, çünkü

$$UU^H = UU^{-1} = I = U^{-1}U = U^HU$$

şeklindedir. Ayrıca, Üniter matrisler aşağıdaki özelliklere sahiptir.

Özellik 1. Aynı mertebeli üniter matrislerin çarpımı bir üniter matristir.

Özellik 2. Eğer U üniter ise, o zaman tüm uygun mertebelerdenki X ve Y vektörleri için

$$\langle UX, UY\rangle = \langle X, Y\rangle$$

eşitliği sağlanır.

Özellik 3. Bir üniter matrisin tüm öz değerlerinin mutlak değeri 1 dir.

Özellik 4. Bir üniter matrisin determinantının mutlak değeri 1 dir.

Üniter matrisler benzerlik dönüşümleri oluşturmada çok önemlidir, çünkü bunların tersi çok kolay bulunabilir.

Bir ortogonal matris, tüm elemanları reel olan bir üniter matristir. Eğer P ortogonal ise, o zaman

$$P^{-1} = P^T$$

olur.

1.5 Pozitif Yarı Tanımlı Matrisler

Tanım 1.13. *A, n*-kare kompleks matris olmak üzere

$$x^* Ax \geq 0\,, \quad x \in \mathbb{C}^n$$

ise A ya pozitif yarı tanımlı matris denir ve $A \geq 0$ ile gösterilir.

Tanım1.14. *A, n*-kare kompleks ve *U* üniter matris olsun.

$$A = U^* diag(\lambda_1, ..., \lambda_n) U$$

olmak üzere $\lambda_i \geq 0$ ler sıfırdan büyük ve eşit ise *A* ya pozitif yarı tanımlıdır denir.

Teorem 1.2 *A* matrisinin pozitif yarı tanımlı olması için gerek ve yeter şart *A* nın esas alt matrislerinin determinantı pozitif olmalıdır [Zhang F].

1.6 Fourier Matrisleri

n sabit tamsayı ve $n \geq 1$ olsun.

$$w = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \ , \ i = \sqrt{-1}$$

birimin *n.* dereceden herhangi bir köküdür.

Aşağıdaki özellikler vardır.

(a) $w^n = 1$

(b) $w\overline{w} = 1$

(c) $\overline{w} = w^{-1}$

(d) $(\overline{w})^k = w^{-k} = w^{n-k}$

(e) $1 + w + w^2 + ... + w^{n-1} = 0$

n. mertebeden $F = (F_n)$ matrisi

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}}(w^{(i-1)(j-1)})$$

şeklinde veya

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

dir.

w^k , $(k = 1, 2, ...,)$ periyodiktir. Burada F nin n tane farklı elemanı vardır. F ayrıca

$$F = n^{\frac{-1}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{(n-2)} & \cdots & w \end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir.

F ve F^* simetrik olduğundan

$$F = F^T \,,\; F^* = (F^*)^T = F \,,\; F = \left(F^*\right)^T$$

ifadeleri yazılabilir.

1.7 Öz Değerler ve Öz Vektörler

1.7.1 Karakteristik denklemler

A n-kare matris olmak üzere

$$AX = \lambda X \tag{1.4}$$

eşitliğini sağlayan λ skalerine A nın öz değeri ve X de λ öz değerine karşılık gelen öz vektör denir.

$A,\ n \times n$ matrisinin karakteristik denklemi,

$$\det(A - \lambda I)$$

determinantının açılımından elde edilen $n.$ dereceden bir monik polinomdur.

Karakteristik denklemin λ için çözümü, reel, kompleks veya birbirinin katları olabilen, A nın öz değerlerini verir. Bir öz değer belirlendiğinde, (1.4) de yerine konulabilir ve sonra bu denklem ilgili öz vektörler için çözülebilir. $\det(A - \lambda I) = 0$ denklemine A nın karakteristik denklemi denir.

Örnek. $A=\begin{bmatrix}2 & 5 & -5\\ 3 & 1 & -4\\ 5 & 6 & -9\end{bmatrix}$ matrisinin öz değer ve öz vektörlerini bulunuz.

Çözüm.

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}2 & 5 & -5\\ 3 & 1 & -4\\ 5 & 6 & -9\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2-\lambda & 5 & -5\\ 3 & 1-\lambda & -4\\ 5 & 6 & -9-\lambda\end{bmatrix}$$

Böylece,

$$\det\left(A-\lambda I\right)=\lambda^3+6\lambda^2+9\lambda=0$$

olup, $\lambda\left(\lambda^2+6\lambda+9\right)=0$ olur ve öz değereler, $\lambda_2=\lambda_3=-3$ olur.

Şimdi bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörleri bulalım. $\left(\lambda I-A\right)x=0$ denkleminde $\lambda_1=0$ koyarsak,

$$\begin{aligned}-2x_1-5x_2+5x_3&=0\\ -3x_1-x_2+4x_3&=0\\ -5x_1-6x_2+9x_3&=0\end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemden,

$$\begin{aligned}x_1-4x_2+x_3&=0\\ 13x_2-7x_3&=0\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin katsayılar matrisinin rankı 2 olduğundan bir tane değişkeni keyfi parametre olarak seçilir. $x_3=13a$ seçilirse $x_1=15a$ ve $x_2=7a$ çözümü bulunur. $a=1$ özel değeri için $x_1=15$, $x_2=7$, $x_3=13$ özel çözümü elde edilir. Bu durumda $\lambda_1=0$ öz değerine karşılık gelen öz vektör $v_1=\left[15,7,13\right]^T$ vektörüdür.

Benzer şekilde $(\lambda I - A)x = 0$ denkleminde $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ koyarsak,

$$\begin{aligned} -5x_1 - 5x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -5x_1 - 6x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

sistemini elde ederiz. Bu sistemden,

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin katsayılar matrisinin rankı 2 olduğundan bir tane değişkeni keyfi parametre olarak seçilir. b keyfi bir sabit olmak üzere $x_3 = b$ seçersek $x_1 = 0$, $x_2 = b$, $x_3 = b$ elde edilir. Özel olarak $b = 1$ ise $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ özel çözümü elde edilir. O halde A matrisinin $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ öz değerine karşılık gelen gelen öz vektör $v_2 = [0,1,1]^T$ vektörüdür.

1.7.2 Öz Değerlerin ve Öz Vektörlerin Özellikleri:

Özellik 1. Bir matrisin öz değerlerinin toplamı matrisin izine eşittir, bu da esas köşegen üzerindeki elemanların toplamıdır.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 6 & -9 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerinin toplamının matrisin izine eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm: A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ olduğunu biliyoruz. O halde $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 + (-3) + (-3) = -6$ ve $iz(A) = 1 + 2 + (-9) = -6$ olur.

Özellik 2. Farklı öz değerlere karşılık gelen öz vektörler lineer bağımsızdır.

İspat. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, A matrisinin birbirinden farklı özdeğerleri ve $X_1, X_2, \ldots, X_m$ bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler olsun.

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_m X_m = 0 \qquad (1.5)$$

denkleminin çözümünün $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$ olduğunu göstermeliyiz. (1.5) denklemini soldan A ile çarparsak,

$$c_1 AX_1 + c_2 AX_2 + \cdots + c_m AX_m = A0 = 0$$

olur. Burada her vektör öz vektör olduğundan, $AX = \lambda X$ ifadesini kullanarak

$$c_1\lambda_1 X_1 + c_2\lambda_2 X_2 + \cdots + c_m\lambda_m X_m = 0 \tag{1.6}$$

olarak yazlılabilir. (1.6) denklemi soldan A ile çarpılır ve $AX = \lambda X$ ifadesi kullanılırsa

$$c_1\lambda_1^2 X_1 + c_2\lambda_2^2 X_2 + \cdots + c_m\lambda_m^2 X_m = 0$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse,

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_m X_m = 0$$

$$c_1\lambda_1 X_1 + c_2\lambda_2 X_2 + \cdots + c_m\lambda_m X_m = 0$$

$$c_1\lambda_1^2 X_1 + c_2\lambda_2^2 X_2 + \cdots + c_m\lambda_m^2 X_m = 0$$

$$c_1\lambda_1^3 X_1 + c_2\lambda_2^3 X_2 + \cdots + c_m\lambda_m^3 X_m = 0$$

$$\vdots$$

$$c_1\lambda_1^{m-1} X_1 + c_2\lambda_2^{m-1} X_2 + \cdots + c_m\lambda_m^{m-1} X_m = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem matris biçiminde yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_m \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_m^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \lambda_3^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 X_1 \\ c_2 X_2 \\ c_3 X_3 \\ \vdots \\ c_m X_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

Soldaki ilk matris $m \times m$ tipinde Q matrisi olsun. Q matrisinin determinantına Vandermonde determinantı denir.

$$|Q| = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)\cdots(\lambda_m - \lambda_1)$$

olarak ifade edilir. $|Q| \neq 0$ biçimindedir, çünkü tüm özdeğerler farklıdır. Böylece Q tekil değildir. (1.7) sistemi,

$$\begin{bmatrix} c_1X_1 \\ c_2X_2 \\ c_3X_3 \\ \vdots \\ c_mX_{m-1} \end{bmatrix} = Q^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Böylece, $c_iX_i = 0 \ \ (i = 1,2,\ldots,m)$ olur. Fakat her bir $X_i \neq 0$ bir öz vektör olduğundan, sıfır değildir. Bu durumda her *i* için $c_i = 0$ bulunur.

Özellik 3. Bir matrisin en az bir özdeğeri sıfır ise o matris tekildir.

İspat. $\det(A - 0I) = 0$ ise, A matrisinin bir öz değeri sıfırdır, bu durumda $\det A = 0$ olmalıdır. A matrisi tekildir.

Özellik 4. Eğer X, A matrisinin $\lambda \neq 0$ öz değerine karşılık gelen öz vektörü ve A nın tersi var ise, o zaman X, A^{-1} in $\frac{1}{\lambda}$ öz değerine karşılık öz vektördür.

İspat. Özellik 3 ten, $\lambda \neq 0$ olur. $AX = \lambda X$ ifadesinde eşitliğini soldan A^{-1} ile çarparsak

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(\lambda X)$$

olarak yazılabilir. Buradan,

$$X = \lambda(A^{-1}X)$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafı λ ile bölünürse

$$A^{-1}X = \left(\frac{1}{\lambda}\right)X$$

bulunur. Bu da istenen sonuçtur.

Özellik 5. Bir matrisin ve transpozunun öz değerleri aynıdır.

İspat. Eğer A bir kare matris ise, $\det A^T = \det A$ olduğu biliniyor. Buradan,

$$0 = \det\left(A - \lambda I\right) = \det\left\{\left(A^T\right)^T - \lambda I^T\right\} = \det\left(A^T - \lambda I\right)^T = \det\left(A^T - \lambda I\right)$$

olur. Böylece λ, A^T matrisinin öz değeri olur.

Özellik 6. Bir matrisin determinantı öz değerlerinin çarpımına eşittir.

İspat. λ_i ler $\left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$, karakteristik denklemin kökü olduklarından

$$\det\left(\lambda I - A\right) = \left(\lambda - \lambda_1\right)\left(\lambda - \lambda_2\right)\ldots\left(\lambda - \lambda_n\right)$$

olacaktır. Burada $\lambda = 0$ yazılırsa $\left(-1\right)^n \det\left(A\right) = \left(-1\right)^n \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$ olur. Bu da istenendir.

2. SİNGÜLER DEĞERLER

Tanım 2.1. Eğer $A \in M_n(C)$ ise, o zaman A^*A 'nın öz değerleri $\lambda_j(A^*A)$ olmak üzere

$$\sqrt{\lambda_j(A^*A)}$$

sayılarına A matrisinin singüler değerleri denir ve σ_j ile gösterilir. Yani

$$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j(A^*A)}$$

dır.

A^*A nın maksimum öz değerinin karekköküne A matrisinin spektral normu denir. Bunu

$$\begin{aligned} \|A\|_s &= \left\{A^*A \text{ nın maksimum özdeğeri}\right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\max \lambda_j(A^*A)} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Özellik 1. Eğer $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin öz değerleri λ_i $(i = 1,2,...,n)$ ve singüler değerleri $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_n$ ise, bu durumda

$$\sigma_n \leq |\lambda_i| \leq \sigma_1$$

dir.

İspat. A matrisinin λ_i öz değerine karşılık gelen birim uzunluğundaki bir vektör (yani normu 1 olan bir vektör) x olsun. Bu durumda

$$Ax = \lambda_i x$$

öz değer denklemini yazarız. Bundan dolayı

$$\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \lambda_i \overline{\lambda}_i \langle x, x\rangle = |\lambda_i|^2$$

ifadesini yazabiliriz. Diğer taraftan A^*A hermityen olup A^*A matrisinin en büyük ve en küçük öz değerleri sırasıyla σ_1^2 ve σ_n^2 dir. Buradan istenilen görülür.

2.1 Bir Karesel Matrisin Köşegenleştirilmesi

Λ bir $n \times n$ tipinde köşegen matris olmak üzere,

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

olacak şekilde düzgün bir n-kare P matrisi varsa, o zaman A matrisine köşegenleştirilebilir denir.

Özellik 2. Düzgün n-kare P matrisi için, bir $n \times n$ A matrisinin

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

olacak şekilde bir Λ köşegen matrisine benzer olması için gerek ve yeter şart A matrisinin n tane lineer bağımsız öz vektöre sahip olmasıdır.

Örnek. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin spektral ayrışımı; A matrisinin karakteristik polinomu,

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 5\lambda$$

olup, matrisin öz değerleri $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ ve $\lambda_3 = 5$ olur. Bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler sırasıyla, $v_1 = \left[1, -\frac{3}{2}, 1\right]^T$, $v_2 = [1,1,-3]^T$ ve $v_3 = [1,1,1]^T$ dir.

Tanım 2.2. A herhangi bir kare matris olsun ve P pozitif yarıtanımlı matris ve U da üniter matris olsun. Bu taktirde

$$A = PU$$

ifadesine A nın polar ayrışımı denir.

Verilen $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ reel vektörünün bileşenlerini $x_{[1]}\geq x_{[2]}\geq ...\geq x_{[n]}$ olarak düzenleyelim.

Tanım 2.3. $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ ve $y=(y_1,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$ için

$$\sum_{i=1}^{k}x_{[i]}\leq\sum_{i=1}^{k}y_{[i]}\,,\quad k=1,2,\ldots,n$$

ise *x, y* tarafından zayıf majorize ediliyor denir ve $x\prec_w y$ ile gösterilir. Eğer

$$\sum_{i=1}^{n}x_{[i]}=\sum_{i=1}^{n}y_{[i]}$$

ise *x, y* tarafından majorize edilir denir ve $x\prec y$ ile gösterilir.

Örneğin, $a_i\geq 0$, $\sum_1^n a_i=1$ buradan

$$(\frac{1}{n},...,\frac{1}{n})\prec(a_1,...,a_n)\prec(1,0,...,0)$$

dır.

Tanım 2.4. *A* ve *E* $n\times n$ tipinde hermityen matrisler ve *E* pozitif yarı tanımlı olsun. Bu durumda $|\lambda_1|\leq|\lambda_2|\leq...\leq|\lambda_n|$ olmak üzere

$$\lambda_i(A)\leq\lambda_i(A+E)$$

eşitsizliğine Weyl eşitsizliği denir.

Teorem 2.1 (Yunxing, 2006) $\begin{bmatrix}M & K\\ K^* & N\end{bmatrix}$ pozitif yarıtanımlı herhangi bir blok matris olsun. $M\in M_m, N\in M_n$, $r\equiv\min\{m,n\}$ olsun. Buradan

$$2s_j(K)\leq s_j\begin{bmatrix}M & K\\ K^* & N\end{bmatrix}\,,\quad j=1,...,r$$

dir.

İspat 1 $Q=\begin{bmatrix} 0 & K \\ K^* & 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix}$ matrisleri tanımlı olsun. Bu taktirde; $\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}$ matrisinin pozitif yarı tanımlılığından

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} \geq 0$$

ifadesi yazılır.

Buradan

$$0 \leq \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & -K \\ -K^* & N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix} - 2Q$$

olur.

Böylece $2Q \leq \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}$ sonucunu elde ederiz. Weyl'in monotonluk prensibinden

$$2\lambda_j \begin{bmatrix} 0 & K \\ K^* & 0 \end{bmatrix} = 2\lambda_j(Q) \leq \lambda_j \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}, \quad j = 1,\ldots,m+n \tag{2.1}$$

eşitsizliği yazılır.Matrislerin singüler değer ayrışımından

$$\lambda(Q) = \left(s_1(K),\ldots,s_r(K),\ldots,\overbrace{0,\ldots,0}^{m+n-2r},-s_r(K),\ldots,-s_1(K) \right)^T \tag{2.2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Böylece (2.1) ve (2.2) den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$2s_j(K) \leq s_j \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}, \quad j = 1,\ldots,r$$

İspat 2 $U=\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix}$ ve $P=\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}$ matrisleri tanımlansın. Böylece,

$$UPU^*=\begin{bmatrix} M & -K \\ -K^* & N \end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix} 0 & K \\ K^* & 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}(P-UPU^*)$$

olacaktır. P nin Jordan Ayrışımından

$$\lambda_j(Q^+)\le\frac{1}{2}\lambda_j(P) \tag{2.3}$$

$$\lambda_j(Q^-)\le\frac{1}{2}\lambda_j(UPU^*)=\frac{1}{2}\lambda_j(P),\quad j=1,\dots,r \tag{2.4}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

$$\lambda_j(Q^+)=\lambda_j(Q^-)=s_j(K),\ j=1,\dots,r$$

olmak üzere (2.2) ve (2.3) eşitsizliğinden,

$$2s_j(K)\le s_j\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix},\ j=1,\dots,r$$

elde edilir.

Teorem 2.2 (Yunxing, 2006). Aşağıdaki bağıntılar denktir.

i) $A,B\in M_n$ pozitif yarıtanımlı olsun. Buradan

$$s_j(A-B)\le s_j\left(A\oplus B\right),\ j=1,\dots,n$$

ii) Her $X,Y\in M_n$ için,

$$2s_j(XY^*)\le s_j\left(X^*X+Y^*Y\right),\ j=1,\dots,n$$

iii) Her $\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}$ pozitif yarıtanımlı matrisi $M,N\in M_n$ için,

$$2s_j(K)\le s_j\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix},\ j=1,\dots,n$$

dir.

İspat.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Herhangi iki $X, Y \in M_n$ matrislerini ele alalım. $C = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ ve $D = \begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}$ matrisleri tanımlı olsun. (i) nin varlığını kabul ettiğimizden,

$$\begin{aligned} 2s_j \begin{bmatrix} YX^* & 0 \\ 0 & XY^* \end{bmatrix} = 2s_j \begin{bmatrix} 0 & XY^* \\ YX^* & 0 \end{bmatrix} &= s_j(CC^* - DD^*) \\ &\leq s_j \begin{bmatrix} CC^* & 0 \\ 0 & DD^* \end{bmatrix} = s_j \begin{bmatrix} C^*C & 0 \\ 0 & D^*D \end{bmatrix} \\ &= s_j \begin{bmatrix} X^*X + Y^*Y & 0 \\ 0 & X^*X + Y^*Y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan da

$$2s_j(XY^*) \leq s_j\left(X^*X + Y^*Y\right)$$

olduğu görülür.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ $\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix} \geq 0$ olduğunu biliyoruz. Burada $S, T \in M_{2n,n}$ ve

$(S,T)^*(S,T) = \begin{bmatrix} S^*S & S^*T \\ T^*S & T^*T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}$ tanımlı olsun. $\begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix} \geq 0$ dan

$$(S,T)^*(S,T) = \begin{bmatrix} S^*S & S^*T \\ T^*S & T^*T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (2.5)$$

dır.

$S = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} X \\ -Y \end{bmatrix}$ olmak üzere (ii) ve (2.5) denklemlerinden

$$2s_j(K) = 2s_j(S^*T) \leq s_j\left(SS^* + TT^*\right) = s_j \begin{bmatrix} S^*S & S^*T \\ T^*S & T^*T \end{bmatrix} = s_j \begin{bmatrix} M & K \\ K^* & N \end{bmatrix}, \; j = 1, \ldots, n$$

elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$ $A, B \in M_n$ pozitif yarıtanımlı herhangi iki matris olsun.

$\begin{bmatrix} \frac{A+B}{2} & \frac{A-B}{2} \\ \frac{A-B}{2} & \frac{A+B}{2} \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix}$ matrisleri pozitif yarı tanımlı olarak tanımlansın.

Matrislerin benzerliğinden

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{A+B}{2} & \frac{A-B}{2} \\ \frac{A-B}{2} & \frac{A+B}{2} \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & I \\ -I & I \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Buradan da

$$\begin{bmatrix} \frac{A+B}{2} & \frac{A-B}{2} \\ \frac{A-B}{2} & \frac{A+B}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} \frac{A+B}{2} & \frac{A-B}{2} \\ \frac{A-B}{2} & \frac{A+B}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\geq 0$$

dir.

(iii) deki eşitsizlikten

$$s_j\left(A-B\right)\leq s_j\begin{bmatrix} \frac{A+B}{2} & \frac{A-B}{2} \\ \frac{A-B}{2} & \frac{A+B}{2} \end{bmatrix}=s_j\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},\quad j=1,\ldots,n$$

olur.

Teorem 2.3 (Yunxing, 2006). $A, B \in M_n$ ve m pozitif tamsayı olsun.Buradan,

$$2s_j(A^{\frac{1}{2}}(A+B)^{m-1}B^{\frac{1}{2}}) \le s_j\left((A+B)^m\right), j=1,\ldots,n$$

ve

$$s_j(A^{\frac{1}{4}}B^{\frac{3}{4}} + A^{\frac{3}{4}}B^{\frac{1}{4}}) \le s_j\left(A+B\right),\ j=1,\ldots,n$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat. $X = \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ B^{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$ olarak tanımlansın. Buradan,

$$\left(X^*X\right)^m = \begin{bmatrix} (A+B)^m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

$$(XX^*)^m = X\left(X^*X\right)^{m-1}X^* = \begin{bmatrix} A^{\frac{1}{2}}\left(A+B\right)^{m-1}A^{\frac{1}{2}} & A^{\frac{1}{2}}\left(A+B\right)^{m-1}B^{\frac{1}{2}} \\ B^{\frac{1}{2}}\left(A+B\right)^{m-1}A^{\frac{1}{2}} & B^{\frac{1}{2}}\left(A+B\right)^{m-1}B^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

olur. Teorem 2.2 (iii) den

$$2s_j(A^{\frac{1}{2}}\left(A+B\right)^{m-1}B^{\frac{1}{2}}) \le s_j((XX^*)^m) = s_j\left(((X^*X)^m\right) = s_j\left((A+B)^m\right),\ j=1,\ldots,n$$

elde edilir. $m=2$ için,

$$2s_j(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}} + A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}) \le s_j\left((A+B)^2\right),\ j=1,\ldots,n$$

$0 \le A^2 + B^2 + AB - BA = \left(A-B\right)^2$ den $\left(A+B\right)^2 \le 2(A^2+B^2)$ yazılabilir.

Buradan,

$$2s_j(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{3}{2}} + A^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{2}}) \le s_j\left((A+B)^2\right) \le 2s_j\left(A^2+B^2\right)$$

dir. Şimdi A yerine $A^{\frac{1}{2}}$, B yerine $B^{\frac{1}{2}}$ koyarsak,

$$s_j(A^{\frac{1}{4}}B^{\frac{3}{4}} + A^{\frac{3}{4}}B^{\frac{1}{4}}) \le s_j\left(A+B\right),\ j=1,\ldots,n$$

olur.

Teorem 2.4 (Zhan, 2003). A ve B $n\times n$ tipinde herhangi iki kompleks matris olmak üzere,

$$2s_j\left(AB^*\right)\le s_j\left(AA^*+BB^*\right)\quad j=1,2,\ldots,n$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.

$$X=\begin{pmatrix}A & 0\\ B & 0\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}0 & AB^*\\ BA^* & 0\end{pmatrix}$$

olsun.

Bu durumda,

$$X^*X=\begin{pmatrix}AA^*+BB^* & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\text{ ve }XX^*=\begin{pmatrix}AA^* & AB^*\\ BA^* & BB^*\end{pmatrix}$$

olur ve

$$0\le\begin{pmatrix}A & 0\\ -B & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ -B & 0\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}AA^* & -AB^*\\ -BA^* & BB^*\end{pmatrix}=XX^*-2Y$$

olur. Böylece,

$$2Y\le XX^*$$

olur. Weyl'in monotonluk prensibinden,

$$2\lambda_j\left(Y\right)\le\lambda_j\left(XX^*\right),\ j=1,2,\ldots,2n$$

olur. Y matrisinin ilk n özdeğeri $s_j\left(AB^*\right),\ j=1,\ldots,n$ iken, XX^* matrisinin ilk n özdeğeri, yani X^*X in özdeğerleri, $s_j\left(AA^*+BB^*\right),\ j=1,\ldots,n$ şeklinde olur.

$2\lambda_j\left(Y\right)\le\lambda_j\left(XX^*\right)$ eşitsizliğinden,

$$2s_j\left(AB^*\right)\le s_j\left(AA^*+BB^*\right),\ j=1,2,\ldots,2n$$

olur.

Lemma (Zhan, 2003). M_n, $n \times n$ tipindeki kompleks matrislerin uzayı olsun. $H \in M_n$, hermityen olsun. Bu durumda

$$s_j(H) = \lambda_j(H \oplus -H)$$

olur.

Teorem 2.5 (Zhan, 2003). A ve B $n \times n$ tipinde herhangi iki kompleks matris olmak üzere,

$$s_j(A-B) \le s_j(A \oplus B),\ j = 1,\ldots,n$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. $s_j(H) = \lambda_j(H \oplus -H)$ eşitliğinden,

$$s_j(A-B) = \lambda_j\left[(A-B) \oplus (B-A)\right],\ j = 1,\ldots,n$$

olarak yazılır.

$(A-B) \oplus (B-A) \le (A \oplus B)$ olduğundan, Weyl monotonluk prensibine göre,

$$\lambda_j\left[(A-B) \oplus (B-A)\right] \le \lambda_j(A \oplus B),\ j = 1,2,\ldots,2n$$

olur. $\lambda_j(A \oplus B) = s_j(A \oplus B),\ j = 1,2,\ldots,2n$, olduğundan,

$$s_j(A-B) \le s_j(A \oplus B),\ j = 1,\ldots,n$$

olur.

Teorem 2.6 (Zhan, 2003). A_0 pozitif matris ve $A_1,\ldots,A_k$ pozitif yarı tanımlı matris olmak üzere

$$tr\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=0}^{j} A_i\right)^{-2} A_j < trA_0^{-1}$$

dir.

İspat.

$$tr\left(\sum_{i=0}^{j} A_i\right)^{-2} A_j \le tr\left\{\left(\sum_{i=0}^{j-1} A_i\right)^{-1} - \left(\sum_{i=0}^{j} A_i\right)^{-1}\right\},\ 1 \le j \le k$$

biçimindedir. X ve Y pozitif yarı tanımlı matrisler ise, $2s_j\left(AB^*\right) \le s_j\left(AA^* + BB^*\right)$, eşitsizliğinden,

$$2s_j\left(X\right) = 2s_j\left[Y^{1/2}\left(XY^{-1/2}\right)^*\right] \le s_j\left(Y + Y^{-1/2}X^2Y^{-1/2}\right)$$

olur. Böylece,

$$2tr\left(X\right) \le tr\left(Y + X^2Y^{-1}\right)$$

olur. Burada,

$$X = \left(\sum_{i=0}^{j} A_i\right)^{-1} \text{ ve } Y = \left(\sum_{i=0}^{j-1} A_i\right)^{-1}$$

alınırsa,

$$tr\left\{\left(\sum_{i=0}^{j} A_i\right)^{-1} - \left(\sum_{i=0}^{j} A_i\right)^{-2}\left(\sum_{i=0}^{j-1} A_i\right)\right\} \le tr\left\{\left(\sum_{i=0}^{j-1} A_i\right)^{-1} - \left(\sum_{i=0}^{j} A_i\right)^{-1}\right\}$$

elde edilir. $tr\left(\sum_{i=0}^{j} A_i\right)^{-2} A_j \le tr\left\{\left(\sum_{i=0}^{j-1} A_i\right)^{-1} - \left(\sum_{i=0}^{j} A_i\right)^{-1}\right\}$ ifadesinin $j = 1,\ldots,k$ olan toplamı,

$$tr\sum_{j=1}^{k} tr\left(\sum_{i=0}^{j} A_i\right)^{-2} A_j \le trA_0^{-1} - tr\left(\sum_{i=0}^{k} A_i\right)^{-1} < trA_0^{-1}$$

olur.

Lemma (Kittaneh, 2001). $X, Y \in M_n$ pozitif yarı tanımlı matrisler ve $\|.\|$ spektral norm olsun. Buradan,

$$\|X + Y\| \le \max\left(\|X\|, \|Y\|\right) + \left\|X^{1/2}Y^{1/2}\right\|$$

dir.

Teorem 2.7 (Zhan, 2003). $A, B \in M_n$ olsun. Buradan,

$$\left\| A^*A - B^*B \right\| \geq \left\| A^*A \oplus B^*B \right\| - \|AB\| \tag{2.6}$$

dir.

İspat. $A = UP$ ve $B = QV$ polar ayrışımlar olsun. P, Q pozitif yarı tanımlı ve U, V üniter matrisler olsun. Bu durumda (2.6) ifadesi

$$\left\| P^2 - Q^2 \right\| \geq \left\| P^2 \oplus Q^2 \right\| - \|PQ\| \tag{2.7}$$

biçimine indirgenir. $\left\|P^2\right\| \geq \left\|Q^2\right\|$ olsun. Üçgen eşitsizliği ve Lemma (Kittaneh, 2001) den,

$$\begin{aligned} \left\| P^2 - Q^2 \right\| = \left\| 2P^2 - \left(P^2 + Q^2 \right) \right\| &\geq 2\left\|P^2\right\| - \left\|P^2 + Q^2\right\| \\ &\geq 2\left\|P^2\right\| - \left(\left\|P^2\right\| + \left\|Q^2\right\|\right) = \left\|P^2\right\| - \left\|Q^2\right\| \end{aligned}$$

olur. Böylece (2.7) ve (2.6) ispatlanmış olur.

3. SİRKÜLANT MATRİSLER

$$C = circ(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{pmatrix}$$

şeklindeki matrislere sirkülant matris denir.

$$C = (c_{jk}) = (c_{k-j+1(\mathrm{mod}\, n)})$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} &circ(a_1, a_2, \ldots, a_n) + circ(b_1, b_2, \ldots, b_n) = cir(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \\ &\alpha circ(a_1, a_2, \ldots, a_n) = circ(\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n) \end{aligned} \tag{3.1}$$

olduğu için Sirkülant matrisler, *n.* mertebeden matrislerin lineer altuzayıdır.

Teorem 3.1 (Davis Philip J.). A $n \times n$ tipinde bir matris olsun. A matrisinin sirkülant olması için gerek ve yeter şart

$$A\pi = \pi A$$

olacak şekilde bir $\pi = circ(0,1,0,\ldots,0)$ matrisinin bulunmasıdır.

İspat. $A = (a_{ij})$ ve σ permütasyonu $\sigma = (1,2,\ldots,n)$ olsun. Permütasyon matrislerden

$$P_\sigma A P_\sigma^* = (a_{\sigma(i),\sigma(j)})$$

olarak yazıldığı biliniyor. Burada $P_\sigma = \pi$ şeklinde aldığımızda, A matrisinin sirkülant olması için $a_{ij} = a_{\sigma(i),\sigma(j)}$ olmalıdır. Yani, $A\pi = \pi A$ ise $\pi A \pi^* = A$ dır.

Sonuç. A sirkülanttır $\Leftrightarrow$ A^* sirkülant olmasıdır.

İspat. $\Rightarrow$: A sirkülant ise $A\pi = \pi A$ olur. Bu durumda $\pi A\pi^* = A$ olur. Bu durumda

$$\pi A\pi^* = A \Rightarrow \left(\pi A\pi^*\right)^* = \pi A^*\pi^* = A^* \Rightarrow \pi A^* = A^*\pi$$

olur. Böylece A^* sirkülanttır.

$\Leftarrow$: A^* sirkülant ise $\pi A^* = A^*\pi$ dir. Yukarıdaki işlemlere benzer işlemler yapıldığında A nın sirkülant olduğu görülüyor.

Sirkülant matrisleri başka bir biçimde de gösterebiliriz.

$$\pi^k \ (k = 1,2,\ldots,n-1)$$

permütasyon matrisi olsun.

$$circ(c_1, c_2, \ldots, c_n) = c_1 I + c_2\pi + \ldots + c_n\pi^{n-1}$$

şeklindedir. Böylece, (3.1) den, C sirkülanttır diyebilmemiz için gerek ve yeter şart, herhangibir $p(z)$ polinomu için, $C = p(\pi)$ olmalıdır. $\gamma = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ve

$$p_\gamma(z) = c_1 + c_2 z + \ldots + c_n z^{n-1}$$

biçimindedir ve $p_\gamma(z)$ polinomuna sirkülant matrisin temsili gösterimi denir.

Ayrıca

$$\phi(\theta) = \phi_\gamma(\theta) = c_1 + c_2 e^{i\theta} + \ldots + c_n e^{i(n-1)\theta}$$

sirkülant matrislerin temsili gösterimidir. Böylece,

$$C = circ\gamma = p_\gamma(\pi)$$

şeklindedir.

Polinomlar aynı değişmeli matrisin içinde olduğundan dolayı aynı mertebeden bütün sirkülant matrisler değişmelidir. Eğer C sirkülant matris ise C^* da sirkülanttır. Buradan C ve C^* değişmeli ve bütün sirkülant matrisler normal matrislerdir.

3.1 Sirkülantların Bloklara Ayrışımı;Toeplitz Matrisler

n. mertebeden $T=(t_{ij})$ kare matrisinde

$$t_{ij}=t_{i-j} \quad i,j=1,2,\ldots,n$$

ise T ye Toeplitz matrisi denir.

Örnek: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & a & b \\ e & d & a \end{pmatrix}$ toeplitz matristir.

Her sirkülant matris Toeplitzdir ama tersi doğru değildir. $n=pq$ mertebeden bir C sirkülant matrisi otomatik olarak her bir bloğu Toeplitz olan bir blok sirkülant matristir. Blok matris $q.$ mertebeden ise elemanlar $p\times p$ biçiminde düzenlenir.

Örnek: $6.$ mertebeden sirkülant matris, 3×3 tipinde blok matis ve elemanları da 2×2 tipinde sıralanır.

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & a & b & c & d & e \\ e & f & a & b & c & d \\ d & e & f & a & b & c \\ c & d & e & f & a & b \\ b & c & d & e & f & a \end{pmatrix}$$

ve burada

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ f & a \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} c & d \\ b & c \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} e & f \\ d & e \end{pmatrix}$$

şeklide yazılırsa bu sirkülant maris

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}$$

biçiminde yazılır.

Bir blok sirkülant matris, sirkülant matris olmak zorunda değildir.
Bu sirkülant matris

$$I_3\otimes\begin{pmatrix} a & b \\ f & a \end{pmatrix}+\pi_3\begin{pmatrix} c & d \\ b & c \end{pmatrix}+\pi_3^2\begin{pmatrix} e & f \\ d & e \end{pmatrix}$$

gibi yazılabilir.

Eğer sirkülant matris $n = pq$ mertebeden ise

$$C = I_p \otimes A_0 + \pi_p \otimes A_1 + \ldots + \pi_p^{p-1} \otimes A_{p-1}$$

şeklinde yazılabilir ve burada I_p, π_p^j $p.$ mertebeden ve A_j $q.$mertebeden Toeplitz matrislerdir.

3.2. Sirkülant Matrislerin Köşegenleştirilmesi

Tanım 3.1. $n \geq 1$ olmak üzere,

$$w = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n}),\ i = \sqrt{-1}$$

için,

$$\Omega = (\Omega_n) = diag(1, w, w^2, \ldots, w^{n-1})$$

olsun.

Not: $\Omega^k = diag(1, w^k, w^{2k}, \ldots, w^{(n-1)k})$ olduğuna dikkat ediniz.

Teorem 3.2 (Davis Philip J.).

$$\pi = F^* \Omega F$$

dir.

İspat.

F^* matrisi Fourier matrisidir ve Fourier matrisinin özelliğinden dolayı F^* matrisinin $j.$satırı

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(w^{(j-1)0}, w^{(j-1)1}, \ldots, w^{(j-1)(n-1)})$$

şeklindedir. Buradan $F^*\Omega$ nın $j.$satırı

$$(\frac{1}{\sqrt{n}})(w^{(j-1)r} w^r) = (\frac{1}{\sqrt{n}})(w^{jr}),\ r = 0,1,\ldots,n-1$$

biçimindedir. F Fourier matrisinin $k.$sütunu

$$(\frac{1}{\sqrt{n}})(\overline{w}^{(k-1)r}),\ r = 0,1,\ldots,n-1$$

şeklindedir.

Böylece $F^*\Omega F$ in $(j,k).$ satırı

$$\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1} w^{jr}\overline{w}^{(k-1)r} = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1} w^{r(j-k+1)} = \begin{cases} 1 & j = k-1 \ \ ise \\ & \\ 0 & j \neq k-1 \ \ ise \end{cases} \quad \bmod n$$

olur. Böylece

$$C = circ\gamma = p_\gamma(\pi) = p_\gamma(F^*\Omega F) = F^* diag(p_\gamma(1), p_\gamma(w), \ldots, p_\gamma(w^{n-1}))F$$

ifadesini yazabiliriz.

Teorem 3.3 (Davis Philip J.). C sirkülant ise F Fourier matrisi tarafından köşegenleştirilebilir. Daha açık bir şekilde belirtirsek,

$$C = F^*\Lambda F$$

biçiminde yazılır ve burada Λ köşegen matrisi,

$$\Lambda = \Lambda_c = diag(p_\gamma(1), p_\gamma(w), \ldots, p_\gamma(w^{n-1}))$$

biçimindedir.

Böylece C sirkülant matrisinin özdeğerleri,

$$\lambda_j = p_\gamma(w^{j-1}) = \phi(\frac{2\pi(j-1)}{n}),\ j = 1,2,\ldots,n$$

olur.

Not: Özdeğerler farklı olmak zorunda değildir.

Teorem 3.4 (Davis Philip J.). C $n \times n$ tipinde sirkülant matris olmak üzere, C matrisinin

özdeğerleri

$$\lambda_m = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w^{-mk},\ w = e^{\frac{2\pi i}{n}},\ m = 0,\ldots,n-1$$

olarak yazılır.

İspat. C sirkülant matrisinin özdeğerleri ve özvektörleri,

$$Cy = \lambda y$$

denkleminin ya da

$$\sum_{k=0}^{m-1} c_{n-m+k} y_k + \sum_{k=m}^{n-1} c_{k-m} y_k = \lambda y_m,\ m = 0,1,\ldots,n-1$$

fark denkleminin kökleridir. Burada toplamların sınırlarında değişiklik yapılırsa

$$\sum_{k=0}^{n-m-1} c_k y_{k+m} + \sum_{k=m}^{n-1} c_k y_{k-(n-m)} = \lambda y_m,\ m = 0,1,\ldots,n-1$$

elde edilir. Bu denklem sabit katsayılı lineer bir denklem olduğu için $y_k = \rho^k$ dir. Bu denklemde $y_k = \rho^k$ yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n-1-m} c_k \rho^k + \rho^{-n} \sum_{k=n-m}^{n-1} c_k \rho^k = \lambda$$

elde edilir. ρ birimin n. dereceden primitif kökü olup, C sirkülant matrisinin özdeğerleri

$$\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \rho^k$$

ve bu özdeğerlere karşlık gelen özvektörler ise

$$y = n^{-\frac{1}{2}} \left(1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}\right)$$

dir. $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ birimin n. dereceden primitif kökü olmak üzere $\rho_m = e^{-\frac{2\pi i m}{n}} = w^{-m}$ olarak yazılırsa $m = 0,1,\ldots,n-1$ için C sirkülant matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_m = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{-\frac{2\pi i m k}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w^{-mk}$$

ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler

$$y^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1, w^{-m}, \ldots, w^{-m(n-1)}\right)$$

olur.

Teorem 3.5 (Davis Philip J.). A ve B , $n.$ mertebeden sirkülant matrisler ve α_k skaler olsun. Buradan

$$A^T , A^* , \alpha_1 A + \alpha_2 B , AB , \sum_{k=0}^{r} \alpha_k A^k$$

matrisleri sirkülanttır. Ayrıca, A ve B değişmelidir.

A matrisi singüler değilse, A^{-1} matrisi de sirkülanttır.

$$A = F^* \Lambda F , \Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

olmak üzere,

$$A^{-1} = F^* \Lambda^{-1} F$$

şeklinde yazılır.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

permütasyon matrisi olsun,

$$(circ(c_1, c_2, \ldots, c_n))^T = circ(c_1, c_n, c_{n-1}, \ldots, c_2) = \Gamma(c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$$

olduğundan dolayı

$$\Lambda^{-1} = diag(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1})$$

eşitliği yazılır.

$$\gamma = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

ise

$$(circ\gamma)^T = circ(\Gamma\gamma^T)$$

olarak yazılır.

3.3 Ters Sirkülant Matrisler

$$scirc(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -d & a & b & c \\ -c & -d & a & b \\ -b & -c & -d & a \end{pmatrix}$$

biçimindeki matrislere ters sirkülant matris denir.

Sirkülant matrisler teorisi π matrisi ile ilgiliydi, ters sirkülant matris teorisinde,

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ -I_1 & 0 \end{pmatrix} = \pi \begin{pmatrix} -I_1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

matrisi ile ilgilidir.

Ayrıca ters sirkülantlar , negacyclic matrisler olarak bilinir. Bu kavram

$$\eta_k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ kI_1 & 0 \end{pmatrix}, \ |k| = 1$$

matrisini kullanarak biraz genişletilebilir.Bir ters $\{k\}-$sirkülant, η_k ile değişmeli sirkülanttır. $k = 1$ ve $k = -1$ için sırasıyla sirkülant ve ters sirkülantlar elde edilir.

Teorem 3.6 (Davis Philip J.).

$$G = (G)_{pq} = \frac{1}{\sqrt{n}} w^{p\left(q+\frac{1}{2}\right)}, \ p = 0,1,\ldots,n-1, \ q = 0,1,\ldots,n-1$$

olsun. S matrisinin özdeğerleri

$$\mu_m = \sum_{k=0}^{n-1} s_k w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)k}, \ m = 0,1,\ldots,n-1$$

olmak üzere

S ters sirkülant matrisi

$$S = G^H diag\left(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}\right) G$$

olarak yazılılabilir.

3.4 Sirkülant Matrislerin Çarpımı

Burada sirkülant matrislerin çarpımına biraz daha yakından bakalım. $k = 1, 2, \ldots, p$ için C_k sirkülant ve Λ_k, köşegen matris olmak üzere

C_k nın köşegenleştirilmesi,

$$C_k = F^* \Lambda_k F$$

olsun. Buradan,

$$\prod_{k=1}^{p} C_k = \prod_{k=1}^{p} F^* \Lambda_k F = F^* \left(\prod_{k=1}^{p} \Lambda_k \right) F$$

biçimindedir. Buradan,

$C_1 C_2 \ldots C_p$ çarpımının özdeğeri,özdeğerlerin çarpımıdır.

$$\prod_{k=1}^{p} C_k = \prod_{k=1}^{p} F^* \Lambda_k F = F^* \left(\prod_{k=1}^{p} \Lambda_k \right) F$$

ifadesinin özel bir hali

$$C^k = F^* \Lambda^k F \tag{3.2}$$

olarak ifade edilebilir.

3.5 Sirkülant Matrislerin Rankı

Köşegenleştirilebilir bir matrisin rankı, sıfırdan farklı özdeğerlerin sayısına eşittir. Böylece, $C = F^* \Lambda F$ ve $\Lambda = diag\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$ ise, $r\left(C\right)$, sıfırdan farklı λ özdeğerlerinin sayısına eşittir. Ayrıca, (3.2) ifadesinden

$$r\left(C^k\right)=r\left(C\right) \qquad k=1,2,3\ldots$$

olarak yazılabilir.

3.6 Sirkülant Matrislerin İzi

$C=circ\left(c_1,c_2,\ldots,c_n\right)=F^*\Lambda F$, $\Lambda=diag\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$ olsun.Buradan,

$$tr\,C=nc_1=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$$

$$tr\,C^2=n\left(c_1^2+c_2c_n+c_3c_{n-1}+\cdots+c_nc_2\right)=n\gamma\Gamma\gamma^T=\sum_{k=1}^{n}\lambda^2$$

olarak yazılır ve burada $\gamma=\left(c_1,c_2,\ldots,c_n\right)$ biçimimdedir.

$$tr\left(AA^*\right)=tr\left(A^*A\right)=\sum\nolimits_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned}tr\left(CC^*\right)&=tr\left(F^*\left(\Lambda\overline{\Lambda}\right)F\right)=tr\left(\Lambda\overline{\Lambda}\right)\\&=\left|\lambda_1\right|^2+\left|\lambda_2\right|^2+\cdots+\left|\lambda_n\right|^2\\&=n\sum_{k=1}^{n}\left|c_k\right|^2\end{aligned}$$

olur.

4. FİBONACCİ ve LUCAS ELEMANLI SİRKÜLANT MATRİSLER

4.1 Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri

Tanım 4.1. $F_1 = 1$ ve $F_2 = 1$ olmak üzere;

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 3$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayılar dizisine Fibonacci sayı dizisi denir.

$n = 1, 2, 3, \ldots$ için Fibonacci sayıları $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ dır.

Ayrıca F_n dizisinin, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere, Binet formülü,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

biçiminde verilmiştir.

Tanım 4.2. $L_1 = 1$ ve $L_2 = 3$ olmak üzere,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n \geq 3$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayılar dizisine Lucas sayı dizisi denir.

$n = 1, 2, 3, \ldots$ için Lucas sayıları 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ... dır.

Ayrıca L_n dizisinin, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere, Binet formülü,

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

biçiminde verilmiştir. Şimdi de Fibonacci ve Lucas sayıları ile ilgili bazı özellikler verelim.

Özellik 1 (Lucas, 1876).

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

İspat: Fibonacci rekürans bağıntısından,

$$F_1 = F_3 - F_2$$

$$F_2 = F_4 - F_3$$

$$F_3 = F_5 - F_4$$

$$\vdots$$

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

olur. Bu ifadeler taraf tarafa toplandığında,

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

olarak bulunur.

Özellik 2 (Lucas, 1876).

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

İspat: İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

$n = 1$ için,

$$\sum_{i=1}^{1} F_i^2 = F_1^2 = 1 = 1.1 = F_1 F_2$$

$n = k$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\sum_{i=1}^{k} F_i^2 = F_k F_{k+1}$$

olsun. $n = k+1$ için doğru olduğunu gösterelim,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} F_i^2 &= \sum_{i=1}^{k} F_i^2 + F_{k+1}^2 \\ &= F_k F_{k+1} + F_{k+1}^2 \\ &= F_{k+1}\left(F_k + F_{k+1}\right) \\ &= F_{k+1} F_{k+2} \end{aligned}$$

olur.

Özellik 3 (Lucas, 1876).

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$$

İspat: Lucas sayılarının rekürans bağıntsından

$$L_1 = L_3 - L_2$$

$$L_2 = L_4 - L_3$$

$$L_3 = L_5 - L_4$$

$$\vdots$$

$$L_{n-1} = L_{n+1} - L_n$$

$$L_n = L_{n+2} - L_{n+1}$$

olur. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa,

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - L_2 = L_{n+2} - 3$$

olur.

Özellik 4 (Lucas, 1876).

$$\sum_{i=1}^{n} L_i^2 = L_n L_{n+1} - 2$$

İspat: İspatı tümevarım yöntemiyle yapalım.

$n = 1$ için,

$$\sum_{i=1}^{1} L_1^2 = 1 = L_1 L_2 - 2$$

$n = k$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\sum_{i=1}^{k} L_i^2 = L_k L_{k+1} - 2$$

olsun. $n = k+1$ için doğru olduğunu gösterelim,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} L_i^2 = \sum_{i=1}^{k} L_i^2 + L_{k+1}^2 &= L_k L_{k+1} + L_{k+1}^2 - 2 \\ &= L_{k+1}\left(L_k + L_{k+1}\right) - 2 \\ &= L_{k+1} L_{k+2} - 2\end{aligned}$$

olur.

4.2 Fibonacci ve Lucas Elemanlı Sirkülant Matrislerin Özdeğerleri

Teorem 4.1. $C(F)$ elemanları Fibonacci sayıları olan $n\times n$ tipinde Sirkülant matris olsun. Yani,

$$C(F)=\begin{pmatrix} F_0 & F_1 & \cdots & F_n \\ F_n & F_0 & \cdots & F_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_1 & F_2 & \cdots & F_0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

$C(F)$ sirkülant matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_m\left(C(F)\right)=\frac{1}{w^{-2m}+w^{-m}-1}\left[F_{n-1}w^{-m}+F_n-w^{-m}\right],\ m=0,1,\ldots,n-1$$

olur. Burada F_n $n.$Fibonacci sayısı ve w birimin $n.$ dereceden primitif köküdür.

İspat. İspat için, Teorem 3.4 ve Fibonacci sayıları için Binet formülünü kullanalım. Yani, $\lambda_m=\sum_{k=0}^{n-1}F_k w^{-mk}$ v e $F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}$ olarak seçelim. Böylece

$$\begin{aligned}
\lambda_m\left(C(F)\right)&=\sum_{k=0}^{n-1}F_k w^{-mk}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\sqrt{5}}\right)w^{-mk}=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k w^{-mk}-\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n-1}\beta^k w^{-mk}\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha w^{-m}\right)^k-\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\beta w^{-m}\right)^k\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\left(\alpha w^{-m}\right)^n-1}{\alpha w^{-m}-1}-\frac{\left(\beta w^{-m}\right)^n-1}{\beta w^{-m}-1}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^n-1}{\alpha w^{-m}-1}-\frac{\beta^n-1}{\beta w^{-m}-1}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\left(\alpha^n\beta w^{-m}-\alpha^n-\beta w^{-m}+1\right)-\left(\beta^n\alpha w^{-m}-\beta^n-\alpha w^{-m}+1\right)}{\alpha\beta w^{-2m}-\alpha w^{-m}-\beta w^{-m}+1}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-\alpha^{n-1}w^{-m}-\alpha^n-\beta w^{-m}+1+\beta^{n-1}w^{-m}+\beta^n+\alpha w^{-m}-1}{-w^{-2m}-w^{-m}+1}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{n-1}w^{-m} + \alpha^n + \beta w^{-m} - 1 - \beta^{n-1}w^{-m} - \beta^n - \alpha w^{-m} + 1}{w^{-2m} + w^{-m} - 1} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\left(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}\right)w^{-m} + \left(\alpha^n - \beta^n\right) - \left(\alpha - \beta\right)w^{-m}}{w^{-2m} + w^{-m} - 1} \right)$$

$$= \frac{1}{w^{-2m} + w^{-m} - 1}\left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{5}}w^{-m} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{5}}w^{-m} \right)$$

$$= \frac{1}{w^{-2m} + w^{-m} - 1}\left[F_{n-1}w^{-m} + F_n - w^{-m} \right]$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2. (4.1) ifadesindeki sirkülant matrisin determinantı,

$$\det\left(C\left(F\right)\right) = \left(-1\right)^{n+1}\frac{\left(1 - F_{n-1}\right)^n - F_n^n}{\left(-1\right)^n - \left(F_{n-1} + F_{n+1}\right) + 1}$$

olur. Burada F_n, $n.$ Fibonacci sayısı ve w birimin $n.$ dereceden primitif köküdür.

İspat. Bir matrisin determinantı matrisin özdeğerlerinin çarpımıydı. Buna göre $C\left(F\right)$ sirkülant matrisinin determinantı,

$$\det\left(C\left(F\right)\right) = \prod_{m=0}^{n-1}\lambda_m\left(C\left(F\right)\right)$$

$$= \prod_{m=0}^{n-1}\frac{\left(1 - F_{n-1}\right)w^{-m} - F_n}{\left(\alpha w^{-m} - 1\right)\left(\beta w^{-m} - 1\right)}$$

olacaktır. Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\prod_{m=0}^{n-1}\left(x - yw^m\right) = y^n\prod_{m=0}^{n-1}\left(\frac{x}{y} - w^m\right) = y^n\left(\frac{x^n}{y^n} - 1\right) = x^n - y^n$$

elde edilir. Burada $y = 1 - F_{n-1}$, $x = F_n$ olarak seçersek,

$$\prod_{m=0}^{n-1}\left(\left(1 - F_{n-1}\right)w^{-m} - F_n\right) = \left(1 - F_{n-1}\right)^n - F_n^n$$

olur.

$$\prod_{m=0}^{n-1}\left(\alpha w^{-m} - 1\right)\left(\beta w^{-m} - 1\right) = \left(-1\right)^n - \left(\alpha^n + \beta^n\right) + 1$$

olur.

Bu durumda,

$$\det\left(C\left(F\right)\right)=\prod_{m=0}^{n-1}\frac{\left(1-F_{n-1}\right)w^{-m}-F_n}{\left(\alpha w^{-m}-1\right)\left(\beta w^{-m}-1\right)}$$
$$=\left(-1\right)^{n+1}\frac{\left(1-F_{n-1}\right)^n-F_n^n}{\left(-1\right)^n-\left(\alpha^n+\beta^n\right)+1}$$

olarak elde edilir. $L_n=\alpha^n+\beta^n$ ve $L_n=F_{n-1}+F_{n+1}$ eşitliklerini kullandığımızda,

$$\det\left(C\left(F\right)\right)=\left(-1\right)^{n+1}\frac{\left(1-F_{n-1}\right)^n-F_n^n}{\left(-1\right)^n-\left(\alpha^n+\beta^n\right)+1}$$
$$=\left(-1\right)^{n+1}\frac{\left(1-F_{n-1}\right)^n-F_n^n}{\left(-1\right)^n-L_n+1}$$
$$=\left(-1\right)^{n+1}\frac{\left(1-F_{n-1}\right)^n-F_n^n}{\left(-1\right)^n-\left(F_{n-1}+F_{n+1}\right)+1}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.3. $C\left(L\right)$ elemanları Lucas sayıları olan $n\times n$ tipinde Sirkülant matris olsun.

$$C\left(L\right)=\begin{pmatrix}L_0 & L_1 & \cdots & L_n\\ L_n & L_0 & \cdots & L_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ L_1 & L_2 & \cdots & L_0\end{pmatrix} \tag{4.2}$$

$C\left(L\right)$ sirkülant matrisinin özdeğerleri,

$$\lambda_m\left(C\left(L\right)\right)=\frac{\left(L_{n-1}+1\right)w^{-m}+L_n-2}{w^{-2m}+w^{-m}-1},\ m=0,1,\ldots,n-1$$

olur. Burada L_n, $n.$Lucas sayısı ve w birimin $n.$ dereceden primitif köküdür.

İspat. İspat için, Teorem 3.4 ve Lucas sayıları için Binet formülünü kullanalım. Yani, $\lambda_m=\sum_{k=0}^{n-1}L_k w^{-mk}$ v e $L_n=\alpha^n+\beta^n$ olarak seçelim.

Böylece,

$$\begin{aligned}\lambda_m = \sum_{k=0}^{n-1} L_k w^{-mk} &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha^k + \beta^k\right) w^{-mk} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha w^{-m}\right)^k + \sum_{k=0}^{n-1}\left(\beta w^{-m}\right)^k \\ &= \frac{\alpha^n - 1}{\alpha w^{-m} - 1} + \frac{\beta^n - 1}{\beta w^{-m} - 1} \\ &= \frac{\alpha^n \beta w^{-m} - \alpha^n - \beta w^{-m} + 1 + \beta^n \alpha w^{-m} - \beta^n - \alpha w^{-m} + 1}{\alpha\beta w^{-2m} - \alpha w^{-m} - \beta w^{-m} + 1} \\ &= \frac{-\alpha^{n-1} w^{-m} - \alpha^n - \beta w^{-m} + 1 - \beta^{n-1} w^{-m} - \beta^n - \alpha w^{-m} + 1}{-w^{-2m} - w^{-m} + 1} \\ &= \frac{-\left(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}\right) w^{-m} - \left(\alpha + \beta\right) w^{-m} - \left(\alpha^n + \beta^n\right) + 2}{-w^{-2m} - w^{-m} + 1} \\ &= \frac{-L_{n-1} w^{-m} - w^{-m} - L_n + 2}{-w^{-2m} - w^{-m} + 1} = \frac{L_{n-1} w^{-m} + w^{-m} + L_n - 2}{w^{-2m} + w^{-m} - 1} \\ &= \frac{\left(L_{n-1} + 1\right) w^{-m} + L_n - 2}{w^{-2m} + w^{-m} - 1}\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4. (4.2) ifadesindeki sirkülant matrisin determinantı,

$$\det\left(C\left(L\right)\right) = \frac{\left(2 - L_n\right)^n - \left(L_{n-1} + 1\right)}{\left(-1\right)^n - L_n + 1}$$

olur. Burada L_n, $n.$ Lucas sayısı ve w birimin $n.$ dereceden primitif köküdür.

İspat. Bir matrisin determinantı matrisin özdeğerlerinin çarpımıydı. Buradan $C\left(L\right)$ sirkülant matrisinin determinantı,

$$\begin{aligned}\det\left(C\left(L\right)\right) &= \prod_{m=0}^{n-1} \lambda_m\left(C\left(L\right)\right) \\ &= \prod_{m=0}^{n-1} \frac{\left(2 - L_n\right) - \left(L_{n-1} + 1\right) w^{-m}}{\left(\alpha w^{-m} - 1\right)\left(\beta w^{-m} - 1\right)}\end{aligned}$$

olarak yazılır.

Her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$\prod_{m=0}^{n-1}\left(x - yw^m\right) = x^n - y^n$$

olduğunu biliyoruz. Burada $x = 2 - L_n$ ve $y = L_{n-1} + 1$ olarak seçildiğinde,

$$\begin{aligned}\det\left(C\left(L\right)\right) &= \prod_{m=0}^{n-1}\frac{\left(2-L_n\right)-\left(L_{n-1}+1\right)w^{-m}}{\left(\alpha w^{-m}-1\right)\left(\beta w^{-m}-1\right)} \\ &= \frac{\left(2-L_n\right)^n-\left(L_{n-2}+1\right)^n}{\left(\alpha^n-1\right)\left(\beta^n-1\right)} = \frac{\left(2-L_n\right)^n-\left(L_{n-1}+1\right)^n}{\alpha^n\beta^n-\alpha^n-\beta^n+1} \\ &= \frac{\left(2-L_n\right)^n-\left(L_{n-1}+1\right)^n}{\left(-1\right)^n-L_n+1}\end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.5. $S\left(F\right)$ elemanları Fibonacci sayıları olan $n \times n$ tipinde ters sirkülant matris olsun. Yani,

$$S\left(F\right) = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & \cdots & F_n \\ -F_n & F_0 & \cdots & F_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -F_1 & -F_2 & \cdots & F_0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

$S\left(F\right)$ ters sirkülant matrisinin özdeğerleri

$$\mu\left(S\left(F\right)\right) = \frac{1}{-w^{2m+1} - w^{m+\frac{1}{2}} + 1}\left[F_{n-1}w^{m+\frac{1}{2}} + F_n + w^{m+\frac{1}{2}}\right],\ m = 0,1,\ldots,n-1$$

olur. Burada F_n, $n.$ Fibonacci sayısı ve w birimin $n.$ dereceden primitif köküdür.

İspat. İspat için, Teorem 3.6 ve fibonacci sayıları için Binet formülünü kullanalım.

Yani $\lambda_m = \sum_{k=0}^{n-1} F_k w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)k}$ v e $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ olarak seçeriz. Böylece $S(F)$ matrisinin özdeğerleri,

$$\mu\left(S(F)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} F_k w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)k} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}\right) w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)k}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)k} - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n-1} \beta^k w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)k}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}\right)^k - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\beta w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}\right)^k\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^n w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)n} - 1}{\alpha w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)} - 1} - \frac{\beta^n w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)n} - 1}{\beta w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)} - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-\alpha^n - 1}{\alpha w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)} - 1} - \frac{-\beta^n - 1}{\beta w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)} - 1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\left(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}\right) w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)} + \alpha^n - \beta^n + \left(\alpha - \beta\right) w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)}}{-w^{2m+1} - w^{m+\frac{1}{2}} + 1}\right)$$

$$= \frac{F_{n-1} w^{m+\frac{1}{2}} + F_n + w^{m+\frac{1}{2}}}{-w^{2m+1} - w^{m+\frac{1}{2}} + 1}$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.6. (4.3) ifadesindeki sirkülant matrisin determinantı,

$$\det\left(S(F)\right) = \frac{\left(-1 - F_{n-1}\right)^n + F_n^n}{\left(-1\right)^n + F_{n-1} + F_{n+1} + 1}$$

olur. Burada F_n $n.$ fibonacci sayısı ve w birimin $n.$ dereceden primitif köküdür.

İspat. $S(F)$, ters sirkülant matrisinin determinantı,

$$\det\left(S(F)\right)=\prod_{m=0}^{n-1}\mu_m\left(S(F)\right)$$

$$=\prod_{m=0}^{n-1}\frac{F_n-\left(-F_{n-1}-1\right)w^{m+\frac{1}{2}}}{\left(\alpha w^{m+\frac{1}{2}}-1\right)\left(\beta w^{m+\frac{1}{2}}-1\right)}$$

$$=\frac{F_n^n+\left(-F_{n-1}-1\right)^n}{\left(-\alpha^n-1\right)\left(-\beta^n-1\right)}=\frac{F_n^n+\left(-F_{n-1}-1\right)^n}{\left(-1\right)^n+L_n+1}$$

$$=\frac{F_n^n+\left(-F_{n-1}-1\right)^n}{\left(-1\right)^n+F_{n-1}+F_{n+1}+1}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.7. $S(L)$ elemanları Lucas sayıları olan $n\times n$ tipinde ters sirkülant matris olsun.

$$S(L)=\begin{pmatrix} L_0 & L_1 & \cdots & L_n \\ -L_n & L_0 & \cdots & L_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -L_1 & -L_2 & \cdots & L_0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

$S(L)$ ters sirkülant matrisinin özdeğerleri,

$$\mu_m\left(S(L)\right)=\frac{2+L_n-\left(1-L_{n-1}\right)w^{m+\frac{1}{2}}}{-w^{2m+1}-w^{m+\frac{1}{2}}+1},\ m=0,1,\ldots,n-1$$

dir. Burada L_n, $n.$ Lucas sayısı ve w birimin $n.$ dereceden primitif köküdür.

İspat. İspat için, Teorem 3.6 ve Lucas sayıları için Binet formülünü kullanalım. Böylece, $S(L)$ ters sirkülant matrisinin özdeğeri,

$$\mu_m\left(S(L)\right)=\sum_{k=0}^{n-1}F_k w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)k}=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha^k+\beta^k\right)w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)k}+\sum_{k=0}^{n-1}\beta^k w^{\left(m+\frac{1}{2}\right)k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\alpha w^{m+\frac{1}{2}}\right)^k+\sum_{k=0}^{n-1}\left(\beta w^{m+\frac{1}{2}}\right)^k$$

$$=\frac{-\alpha^n-1}{\alpha w^{m+\frac{1}{2}}-1}-\frac{-\beta^n-1}{\beta w^{m+\frac{1}{2}}-1}$$

$$=\frac{\alpha^{n-1}w^{m+\frac{1}{2}}+\alpha^n-\beta w^{m+\frac{1}{2}}+1+\beta^{n-1}w^{m+\frac{1}{2}}+\beta^n-\alpha w^{m+\frac{1}{2}}+1}{\left(\alpha w^{m+\frac{1}{2}}-1\right)\left(\beta w^{m+\frac{1}{2}}-1\right)}$$

$$=\frac{\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)w^{m+\frac{1}{2}}+\alpha^n+\beta^n-\left(\alpha+\beta\right)w^{m+\frac{1}{2}}+2}{\left(\alpha w^{m+\frac{1}{2}}-1\right)\left(\beta w^{m+\frac{1}{2}}-1\right)}$$

$$=\frac{L_{n-1}w^{m+\frac{1}{2}}+L_n-w^{m+\frac{1}{2}}+2}{-w^{2m+1}-w^{m+\frac{1}{2}}+1}$$

$$=\frac{2+L_n-\left(1-L_{n-1}\right)w^{m+\frac{1}{2}}}{-w^{2m+1}-w^{m+\frac{1}{2}}+1}$$

olarak bulunur.

Teorem 4.8. (4.4) ifadesindeki ters sirkülant matrisin determinantı,

$$\det\left(S(L)\right)=\frac{\left(L_n+2\right)^n+\left(1-L_{n-1}\right)^n}{\left(-1\right)^n+L_n+1}$$

olur.

İspat. $S(L)$ ters sirkülant matrisinin determinantı,

$$\det\left(S\left(L\right)\right)=\prod_{m=0}^{n-1}\mu_m\left(S\left(L\right)\right)$$

$$=\prod_{m=0}^{n-1}\frac{\left(2+L_n\right)-\left(1-L_{n-1}\right)w^{m+\frac{1}{2}}}{\left(\alpha w^{m+\frac{1}{2}}-1\right)\left(\beta w^{m+\frac{1}{2}}-1\right)}$$

$$=\frac{\left(2+L_n\right)^n+\left(1-L_{n-1}\right)^n}{\left(-1\right)^n+L_n+1}$$

olarak bulunur.

4.3 Fibonacci ve Lucas Elemanlı Sirkülant Matrislerin Singüler Değerleri

Sirkülant matrisler normal matris olduklarından singüler değerleri, mutlak değerce öz değerlerine eşittir. Yani, C sirkülant matrisi için, $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ olmak üzere

$$s_j\left(C\right)=\left|\lambda_j\left(C\right)\right|=\sqrt{\lambda_j\left(C^*C\right)}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1 den elemanları Fibonacci sayıları olan $C\left(F\right)$ sirkülant matrislerinin öz değerlerinin

$$\lambda_m\left(C\left(F\right)\right)=\frac{1}{w^{-2m}+w^{-m}-1}\left[F_{n-1}w^{-m}+F_n-w^{-m}\right],\ m=0,1,\ldots,n-1$$

olduğunu biliyoruz. Sirkülant matris, normal matris olduğundan $C\left(F\right)$ Fibonacci sirkülant matrislerinin singüler değerleri

$$s_m\left(C\left(F\right)\right)=\left|\lambda_m\left(C\left(F\right)\right)\right|$$

olur.

Teorem 4.3 den elemanları Lucas sayıları olan $C\left(L\right)$ sirkülant matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_m\left(C\left(L\right)\right)=\frac{\left(L_{n-1}+1\right)w^{-m}+L_n-2}{w^{-2m}+w^{-m}-1}$$

olduğuna göre $C\left(L\right)$ sirkülant matrisinin singüler değerleri

$$s_m\left(C(L)\right)=\left|\lambda_m\left(C(L)\right)\right|$$

şeklide yazılır.

Teorem 4.9. (Schur Eşitsizliği). $A=\left(a_{ij}\right)$ $n\times n$ tipinde kompleks kare matris ve özdeğerleri $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i\right|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2$$

eşitliğinin olması için gerek ve yeter şart A matrisinin normal matris olmasıdır.

İspat: U üniter matris ve T üst üçgen matris olmak üzere A matrisinin Schur köşegenleştirmesi $A=U^*TU$ olsun. O halde $A^*A=U^*T^*TU$ olur. Böylece $tr\left(A^*A\right)=tr\left(T^*T\right)$ olarak yazılabilir. Buradan,

$$tr\left(A^*A\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2$$

ve

$$tr\left(T^*T\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i\right|^2+\sum_{i<j}\left|t_{ij}\right|^2$$

olur. Böylece

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i\right|^2\le\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2$$

olur. Ayrıca, T matrisi köşegen matris ise $i<j$ için $t_{ij}=0$ olur. Böylece köşegenleştirilebilir. Bu durumda A normal matristir. Aksi yönün ispatı açıktır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi Schur eşitsizliğini sirkülant matrislere uygulayalım.

$F=\frac{1}{\sqrt{n}}(w^{(i-1)(j-1)})$, $\Lambda=\left(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\right)$ olmak üzere

$$C=F^*\Lambda F$$

$$C^*=F^*\Lambda^*F$$

olarak yazılabilir.

Bu durumda,

$$tr\left(C^{*}C\right)=tr\left(F^{*}\left(\Lambda\overline{\Lambda}\right)F\right)=tr\left(\Lambda\overline{\Lambda}\right)$$
$$=\left|\lambda_1\right|^2+\left|\lambda_2\right|^2+\cdots+\left|\lambda_n\right|^2=\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i\right|^2=n\sum_{i=1}^{n}\left|c_i\right|^2$$

olur. Ayrıca

$$C^{*}C=F^{*}\Lambda^{*}FF^{*}\Lambda F=F^{*}\Lambda^{*}\Lambda F$$

olur. Bu durumda

$$tr\left(C^{*}C\right)=tr\left(\overline{\Lambda}\Lambda\right)$$

olur. Şimdi Schur eşitsizliğini kullanırsak,

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i\right|^2\le n\sum_{i=1}^{n}\left|c_i\right|^2$$

olur. Bu ifadede $c_i=F_i$ Fibonacci sayısı olarak aldığımızda,

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i\left(C\left(F\right)\right)\right|^2\le n\sum_{i=1}^{n}\left|F_i\right|^2=nF_nF_{n+1}$$

olur. Sirkülant matrislerde singüler değer, özdeğerin mutlak değerine eşit olduğundan,

$$\sum_{i=1}^{n}s_i^{\,2}\left(C\left(F\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i\left(C\left(F\right)\right)\right|^2\le n\sum_{i=1}^{n}\left|F_i\right|^2=nF_nF_{n+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}s_i^{\,2}\left(C\left(F\right)\right)\le nF_nF_{n+1}$$

olur. $c_i=L_i$ Lucas sayısını alırsak

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i\left(C\left(L\right)\right)\right|^2\le n\sum_{i=1}^{n}\left|L_i\right|^2=n\left(L_nL_{n+1}-2\right)$$

olur. Elemanları Lucas sayıları olan sirkülant matrislerinin singüler değerleri için

$$\sum_{i=1}^{n}s_i^{\,2}\left(C\left(L\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i\left(C\left(L\right)\right)\right|^2\le n\sum_{i=1}^{n}\left|L_i\right|^2=n\left(L_nL_{n+1}-2\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}s_i^{\,2}\left(C\left(L\right)\right)\le n\left(L_nL_{n+1}-2\right)$$

ifadesi yazılabilir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada Fibonacci-Lucas elemanlı Sirkülant matrislerin özdeğerleri ve singüler değerleri ile ilgili bazı sonuçlar bulunmuştur.

Sirkülant matrisler, normal matris olduklarından özdeğerleri ile singüler değerlerinin eşit olduğu görülmüştür. Sonuç olarak özdeğerler veya singüler değerler, bazı eşitsizliklerde kullanılarak singüler değer eşitsizlikleri bulunabilir.

KAYNAKLAR

Anderson T. W. and Taylor J. B. , 1980, An inequality for a sum of quadratic forms with applications to probablity theory, Linear Algebra Appl., 30, 93-99

Bhatia R., Matrix Analysis, 1997, GTM 169, Springer-Verlag, New York,

Bhatia R. and Kittaneh F. , 1990, On the singular values of a product of operators, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 11, 272-277

Bhatia R. , Kittaneh F. , 2000, Notes on matrix arithmetic-geometric mean inequalities, Linear Algebra Appl. 308, 203-211

Bozkurt D, Türen B, 2003, Lineer, Cebir, Dizgi Ofset Matbaacılık, Konya,

Bronson R, 1989, Matrix Operations,Schaum's Outline Series, Çevirenler:H Hilmi Hacısalihoğlu,A Köksal

Davis Philip J. , 1979, Circulant Matrices, John Wiley and Sons, Inc., New York, Chichester, Brisbane, Toronto

Gray Robert M. , Teoplitz and Circulant Matrices: A review, Department of Electrical Engineering Stanford University, Stanford 94305, USA

Hirzallah O. , 2005, Inequalities for sums and products of operators, Linear Algebra Appl. 407, 32-42

Kittaneh F. , 2001, Commutator inequalities associated with the polar decomposition, Proc. Amer. Math. , 13, no.5, 1279-1283

Koshy T. , 2001, Fibonacci and Lucas Numbers With Applications, John Wiley and Sons, Inc., New York, Chichester, Brisbane, Toronto

Yunxing T. , 2006, More results on singular value inequalities of matrices, Lineer Algebra and its Appl.416, 724-729

Zhan X. , 2000, Singular values of differences of positive semidefinite matrices, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 22, no.3, 819-823

Zhang F., Matrix Theory Basic Results and Techniques, 1999, USA