T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BULANIK REGRESYONDA KULLANILAN YÖNTEMLER

Saniye Serap YANARTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI

Konya, 2009

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BULANIK REGRESYONDA KULLANILAN YÖNTEMLER

Saniye Serap YANARTAŞ

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Ana Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nimet YAPICI PEHLİVAN

2009, 62 sayfa

Bu çalışmada, bulanık doğrusal regresyon analiz yöntemleri ele alınmıştır. Bu yöntemler doğrusal programlama temeline dayalı yöntemler ve bulanık en küçük kareler yöntemi olmak üzere iki ana başlık altında incelenecektir.

Çalışma, beş bölümden oluşmaktadır. Birinci Bölüm, giriş ve önceki çalışmaları içeren bölümdür.

İkinci Bölüm'de, bulanık mantık ve bulanık kümeye ilişkin genel bilgiler verilmiştir.

Üçüncü Bölüm'de, bulanık regresyon analizinde kullanılan yöntemler girdisi kesin-çıktısı bulanık sayı olan regresyon analizi ve girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan regresyon analizi olmak üzere iki başlık altında ayrıntılı biçimde verilmiştir.

Dördüncü Bölüm'de, bulanık regresyon analizi yöntemleri sayısal örneklerle çözümlenmiştir.

Beşinci Bölüm'de, çalışmanın sonuçları özetlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bulanık Mantık, Bulanık Küme, Bulanık Regresyon Analizi, Bulanık En Küçük Kareler Yöntemi, Lineer Programlama Temeline Dayalı Yöntemler

ABSTRACT

Ms Thesis

THE METHODS USED in FUZZY REGRESSİON

Saniye Serap YANARTAŞ

Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Nimet YAPICI PEHLİVAN

2009, 62 page

In this study, the methods of fuzzy linear regression analysis are studied. We consider two main methods. These are fuzzy least-square method and linear programming method.

Organization of this thesis is as follows. The first chapter gives an introduction and explains the previous studies.

In the second chapter, describes the fuzzy logic and fuzzy set.

In the third chapter, A fairly detailed investigation is made for the methods used in the fuzzy regression anaylsis that is a crisp input- fuzzy output relation and a fuzzy input-fuzzy output numbers.

In the fourth chapter, the methods of fuzzy regression analysis are being analyzed with numerical examples

In the fifth chapter, the results of study summarized.

Key Words: Fuzzy Logic, Fuzzy Set, Fuzzy Regression Analysis, Fuzzy Least-Squares Methods, Linear Programming Methods

ÖNSÖZ

Bulanık regresyonda kullanılan yöntemler adlı tez çalışmamın seçiminde ve bu çalışmada bana araştırma olanağı sağlayan, çalışmamın her aşamasında bilgileriyle bana yardımcı olan değerli danışmanım Yrd. Doç. Dr. Nimet YAPICI PEHLİVAN'a teşekkür ederim.

Ayrıca hayatım boyunca beni destekleyen, bana sevgi ve yardımlarını esirgemeyen sevgili aileme ve Göksel TURAN'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET…….....…...i
ABSTRACT …….....ii
ÖNSÖZ …….....iii
İÇİNDEKİLER…….....……...iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....vii

1. GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....1

1.1. Giriş…….....…….1
1.2. Önceki Çalışmalar……..…….....2

2. BULANIK MANTIK ve BULANIK KÜME.....4

2.1. Bulanık Mantık.....4
2.2. Üyelik Fonksiyonu.....5
2.3. Bulanık Küme.....6
2.4. Bulanık Küme Kavramları ve İşlemleri.....8
2.4.1. Bulanık küme kavramları.....8
2.4.2. Bulanık küme işlemleri 9
2.5. Bulanık Sayı.....11
2.5.1. Üçgensel bulanık sayı.....11
2.5.2. Yamuksal bulanık sayı.....13

3. BULANIK REGRESYON ANALİZİ ve BULANIK REGRESYON ANALİZİNDE KULLANILAN YÖNTEMLER.....15
3.1. Girdisi Kesin-Çıktısı Bulanık Sayı Olan Bulanık Regresyon Yöntemleri.....15
3.1.1. Tanaka yöntemi.....16
3.1.2. Özelkan yöntemi.....18
3.1.3. Hojati-Bector-Smimou yöntemi.....19
3.1.4. Diamond yöntemi.....20
3.2. Girdisi Bulanık-Çıktısı Bulanık Sayı Olan Bulanık Regresyon Yöntemleri.....21
3.2.1. Sakawa ve Yano yöntemi.....21

3.2.2. Hojati-Bector-Smimou yöntemi.....24
3.2.3. Yang-Lin yöntemi.....25
3.2.4. Diamond yöntemi.....27
3.2.5. Ming-Friedman-Kandel modeli.....29

4. SAYISAL ÖRNEKLER.....32
4.1. Girdisi Kesin-Çıktısı Bulanık Sayı Olan Verilere İlişkin Sayısal Örnekler.....32
Örnek 4.1.1.....31
Örnek 4.1.2.....37
Örnek 4.1.3.....39
Örnek 4.1.4.....41
Örnek 4.1.5.....44
Örnek 4.1.6.....47
Örnek 4.1.7.....49
4.2. Girdisi Bulanık-Çıktısı Bulanık Sayı Olan Verilere İlişkin Sayısal Örnekler.....51
Örnek 4.2.1.....51
Örnek 4.2.2.....55
Örnek 4.2.3.....57
5. SONUÇ ve ÖNERİLER 59

KAYNAKLAR.....61

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1. Klasik ve bulanık kümeler için üyelik fonksiyonlarının grafik gösterimi 6
Şekil 2.2. Klasik küme gösterimi 7
Şekil 2.3. Bulanık küme gösterimi 8
Şekil 2.4. Simetrik üçgensel bulanık sayı 12
Şekil 2.5. Yamuksal Bulanık Sayı 14
Şekil 3.1. A_j Üçgensel bulanık regresyon katsayısı 16

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1. Girdisi kesin-çıktısı bulanık veriler (Tanaka 1987) 32

Çizelge 4.2. Tanaka (1987) verilerine ait bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri 36

Çizelge 4.3. Girdisi kesin-çıktısı bulanık veriler **(**Tanaka ve ark. 1989) 37

Çizelge 4.4. Tanaka ve ark. (1989) verilerine ait bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri 38

Çizelge 4.5. Girdisi kesin-çıktısı bulanık veriler (Terano ve ark. 1992) 39

Çizelge 4.6. Terano ve ark. (1992) verilerine ait bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri 40

Çizelge 4.7. Girdisi kesin-çıktısı bulanık veriler (Bardossy 1990) 41

Çizelge 4.8. Bardossy (1990) verilerine ait bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri 43

Çizelge 4.9. Girdisi kesin-çıktısı bulanık veriler (Tanaka ve Ark. 1982) 44

Çizelge 4.10. Tanaka ve Ark (1982) verilerine ait bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri 46

Çizelge 4.11. Girdisi kesin-çıktısı bulanık veriler (Diamond 1988) 47

Çizelge 4.12. Diamond (1988) verilerine ait bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri 48

Çizelge 4.13. Girdisi kesin-çıktısı bulanık veriler (Diamond 1988) 49

Çizelge 4.14. Diamond (1988) verilerine ait bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri 50

Çizelge 4.15. Girdisi bulanık-çıktısı bulanık veriler (Sakawa ve Yano 1992) 51

Çizelge 4.16. Sakawa ve Yano (1992) verilerine ait bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri 54

Çizelge 4.17. Girdisi bulanık-çıktısı bulanık veriler (Diamond 1988) 55

Çizelge 4.18. Diamond (1988) verilerine ait bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri 56

Çizelge 4.19. Girdisi bulanık-çıktısı bulanık veriler (Diamond 1988) 57

Çizelge 4.20. Diamond (1988) verilerine ait bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri 58

Çizelge 5.1. Girdisi kesin-çıktısı bulanık sayı olan veriler için 5 farklı regresyon modeli için elde edilen hata kareler ortalaması değerleri ve tercih edilen yöntem 60
Çizelge 5.2. Girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan veriler için 6 farklı regresyon modeli için elde edilen hata kareler ortalaması değerleri ve tercih edilen yöntem 60

1. GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1.1. Giriş

Bulanık mantık kavramı, ilk olarak 1965 yılında Prof. Lotfi A.Zadeh tarafından öne sürülen belirsizliklerle çalışabilmeyi ve daha niteliksel tanımlama olanağı sağlayan bir yöntemdir. Bulanık mantık, klasik mantık ile oluşan karmaşık olayları en aza indiren bir yöntemdir. Bulanık mantığın özünü bulanık kümeler oluşturmaktadır. Önemi gittikçe artan bulanık mantık, günümüzde beyaz eşya, otomotiv, elektronik aletler gibi birçok alanda kullanıldığı gibi regresyon analizinde de kullanılmaktadır.

Regresyon analizi, bağımlı değişken ile bağımsız değişken arasındaki bağıntıyı belirlemek ve ilgili tahminleri yapabilmek için kullanılan istatistiksel bir tekniktir.

Bulanık regresyon analizi, sistem yapısındaki belirsizliğe bağlı olarak verilerin tamamının ya da bir kısmının bulanık olması veya sistem yapısının değişkenler arasında kesin ilişkilerin tanımlanmasına imkân vermemesi durumlarında kullanılan bir yöntemdir (Terano ve ark. 1992). Başka bir ifadeyle bulanık regresyon analizi, klasik regresyon analizinin uygulanamadığı durumlarda kullanılan alternatif bir yöntemdir. Klasik regresyon analizi uygulamasında kesin veriler kullanılırken, bulanık regresyon analizi uygulamasında kesin veri ya da bulanık veriler kullanılır.

İlk olarak 1980 yılında Tanaka tarafından öne sürülen bulanık doğrusal regresyon modeli;

$$Y_i = A_0 + A_1 x_{i1} + \cdots + A_n x_{in}$$

biçiminde ifade edilmiştir. Burada; bulanık katsayı $A_i = (\alpha_i, c_i)_L$ şeklinde gösterilir ve α merkezi, *c* genişliği belirtmektedir.

Bu çalışmanın amacı, verilerin kesin sayı olmaması durumunda bulanık sayılar ile bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi belirlemek ve tahmin yapabilmektir. Bulanık regresyon analizinde kullanılan yöntemler, doğrusal programlama temeline dayalı yöntemler ve bulanık en küçük kareler yöntemi olmak üzere iki ana başlık altında incelenmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde; bulanık mantık, bulanık küme kavramları verilmiş ve bulanık kümeler üzerinde yapılan işlemler, bulanık sayı ve üyelik fonksiyonu kavramları ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, bulanık regresyon analizi ve bulanık regresyon analizinde kullanılan yöntemler, girdisi kesin-çıktısı bulanık, girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olmak üzere iki ana başlık altında ayrıntılı biçimde incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, incelenen bulanık regresyon yöntemleri sayısal örneklerle verilmiştir.

Beşinci bölüm olan sonuç ve öneriler bölümünde; incelenen yöntemlerden elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak avantaj ve dezavantajları ayrıntılı biçimde açıklanmıştır.

1.2. Önceki Çalışmalar

Tanaka (1987), bulanık veri analizi için olabilirlik doğrusal modelleri önermiştir. Tahmini olabilirlik doğrusal sistem, lineer programlama probleminin çözümü ile elde edilmektedir.

Diamond (1988), girdisi kesin-çıktısı bulanık sayı ve girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan veriler için bulanık en küçük kareler yöntemine dayanan modeller geliştirmiştir. Bulanık veri setlerinin modele uygulanabilirliği için normal denkleme eş kriterler türetmiştir.

Sakawa ve Yano (1992), girdisi bulanık-çıktsı bulanık sayılar için, bulanık doğrusal regresyon modellerini elde etmeyi amaçlayan üç optimizasyon problemi oluşturmuşlardır. Bu problemleri çözmeye yönelik olarak, doğrusal programlama temeline dayalı metotlar geliştirmişlerdir. Önerilen yöntemin kullanılabilirliği ve etkinliğini sayısal örneklerle göstermişlerdir.

Ming ve ark. (1997), bulanık verilere uyan en küçük kareler yöntemi için bir model tanımlamışlardır. Üçgensel bulanık sayılar için bilinen yöntemler genelleştirilmiş ve güçlü desteğe sahip tek maxima parçalı sürekli fonksiyonlarla ifade edilen bütün bulanık sayıları kapsayacak şekilde bir yöntem geliştirmişlerdir. Yeni model, Diamond (1988) tarafından önerilen yöntemi ile karşılaştırılmış ve uygulanabilirliği kanıtlanmıştır.

Yang ve Ling (2002), bulanık en küçük kareler yaklaşımı için, yaklaşık uzaklık bulanık en küçük kareler (ADFLS) ve aralık uzaklık bulanık en küçük kareler (IDFLS) olmak üzere iki yöntem önermişlerdir. Bu yöntemlerin kullanılabilirliği ve etkinliğini sayısal örneklerle göstermişlerdir.

Hojati ve ark. (2005), bulanık regresyon hesaplamasına yönelik basit ve iyi çözüm sunan lineer programlama temeline dayanan yeni bir yöntem önermişlerdir. Girdisi kesin-çıktısı bulanık ve girdisi bulanık-çıktısı bulanık olduğu durumlarda önerilen yaklaşım ile literatürdeki diğer metotları karşılaştırmışlardır.

Terano ve ark. (1992), temel bulanık teori bilgileri, bulanıklık ilişkileri, bulanık regresyon modelleri, doğrusal olabilirlik sistemleri ve doğrusal olasılık regresyon modellerini açıklamışlardır. Bulanık doğrusal programlama problemleri ayrıntılı biçimde açıklayıp sayısal örneklerle çözümlemişlerdir.

Genç ve Öztürk (1993), regresyon analizi, çoklu doğrusal regresyon, çoklu bağlantı sorunu, en uygun regresyon modelinin seçimi, değişen varyanslılık, korelasyon ve normallik varsayımı konularını ele almışlardır.

Baykal ve Beyan (2004), klasik ve bulanık mantık, bulanık küme ve işlemleri, bulanık bağıntılar, bulanık sayılar ve işlemleri, bulanık fonksiyonlar, bulanık türev, bulanık integral gibi konuları ele almışlardır.

Lai ve Hwang (1992), bulanık küme teorisi, bulanık matematiksel programlama, bulanık lineer programlama konularını ele almışlardır.

Klir ve Ark. (1997), klasik küme kuramı, bulanık küme, bulanık mantık, bulanık bağıntı ve bulanık sayılar üzerindeki aritmetik işlemler konularını ele almışlardır.

Bardossy (1990), bulanık regresyonu matematiksel programlama problemi olarak formüle edip açıklamıştır.

2. BULANIK MANTIK ve BULANIK KÜME

Bu bölümde; bulanık mantık, bulanık küme ve üyelik fonksiyonu kavramları açıklanmış ve bulanık kümeler üzerindeki işlemler tanımlanmıştır.

2.1. Bulanık Mantık

Bulanık mantık kavramı ilk olarak 1965 yılında California Berkeley Üniversitesinden Prof. Lotfi A.Zadeh'in makalesini yayınlamasıyla duyulmuştur. O tarihten sonra önemi gittikçe artan bulanık mantık, belirsizliklerin anlatımı ve belirsizliklerle çalışabilmesi için kurulmuş bir matematiksel düzen olarak tanımlanabilir. İstatistikte ve olasılık kuramında kesin değerler ile çalışılır fakat yaşadığımız ortam daha çok belirsizliklerle dolu olduğundan sonuç çıkarabilme yeteneğini anlayabilmek için belirsizliklerle çalışmak gereklidir.

Bulanık mantığın geçerli olduğu iki durum söz konusudur. Bunlardan ilki, incelenen olayın çok karmaşık olması ve bununla ilgili yeterli bilginin bulunmaması durumunda kişilerin görüş ve değer yargılarına yer verilmesidir. İkinci durum ise insan kavrayış ve yargısına gerek duyan hallerdir. İşte bu tür bilgi kaynaklarının, olayların incelenmesinde özgün bir biçimde kullanılmasına bulanık mantık ilkeleri yardımcı olmaktadır (Baykal ve Beyan 2004).

Bulanık mantığı, diğer mantık sistemlerinden ayıran özelliklerden birisi, üçüncünün olmazlığı ilkesi ve çelişmezlik ilkesidir. Bulanık mantıkta bir önerme aynı anda hem doğru hem yanlış olarak değerlendirilemez. Bu durum, doğruluğun çok değerli oluşundan ve bu çerçevede bağlaçlarına yüklenen anlamdan kaynaklanmaktadır. Bulanıklık, bir önerme ile onun tümleyeni arasındaki belirsizlikten kaynaklanır (Baykal ve Beyan 2004).

Çelişmezlik ve üçüncünün olmazlığı ilkesi, bulanık küme teorisinin siyah-beyaz, ikili klasik küme anlayışının kısmi üyelik derecesi kavramı ile gri ölçeğe genişletilmesi olarak kabul edilebilir. Bu durum klasik yaklaşımın iki ilkesini, çelişmezlik ve üçüncünün olmazlığı ilkelerini ortadan kaldırır. Bu durum bulanık kümenin bir elemanının bu kümenin tümleyeni içinde de yer alabilmesi anlamına gelir (Baykal ve Beyan 2004).

Klasik matematiksel yöntemlerle karmaşık sistemleri modellemek ve kontrol etmek zordur, çünkü verilerin tam olması gerekir. Bulanık mantık kişiyi bu zorunluluktan kurtarır ve daha niteliksel bir tanımlama olanağı sağlar. Bir kişi için 38,5 yaşında demektense sadece orta yaşlı demek birçok uygulama için yeterli bir veridir. Böylece azımsanamayacak ölçüde bir

bilgi indirgenmesi söz konusu olur ve matematiksel bir tanımlama yerine daha kolay anlaşılabilen niteliksel bir tanımlama yapılabilir (http://www.yapay-zeka.org/modules/icontent/index.php?page=33, 20.01.2009).

Bulanık mantık, insanın günlük yaşantısında nesnelere verdiği üyelik değerlerini, dolayısıyla insan davranışlarını taklit eder. Örneğin elini suya sokan bir kişi hiçbir zaman tam olarak ısısını bilemez, onun yerine sıcak, az sıcak, soğuk, çok soğuk gibi dilsel niteleyiciler kullanılır (Elmas 2003).

2.2. Üyelik Fonksiyonu

X, bir evrensel küme olsun. Klasik küme, $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olmak üzere, normal olarak sonlu, sayılabilir ya da sayılamaz olabilen $x \in X$ elemanlarının bir birleşimi olarak düşünülür ve

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir. Burada, $\mu_A(x)$: $X \rightarrow \{0,1\}$, klasik kümeler için üyelik fonksiyonu ya da üyelik derecesini gösterir. Eğer $A \subseteq X$ kümesinin üyelik derecesi [0,1] aralığı kabul edilirse A kümesi "bulanık küme" olarak adlandırılır ve üyelik derecesi,

$\mu_A(x)$: $X \rightarrow [0,1]$

eşitliği ile ifade edilir (Yapıcı Pehlivan 2005).

Üyelik fonksiyonu, X evrensel kümesine ait bir x elemanının $\tilde{A}$ bulanık kümesine ait olma derecesini gösteren fonksiyondur.

Dombi (1990)' ye göre üyelik fonksiyon biçimleri;

i) Deneysel karar vermeye dayalı üyelik fonksiyonları

ii) Güvenilirlik kavramına dayalı üyelik fonksiyonları

iii) Teorik isteklere dayalı üyelik fonksiyonları

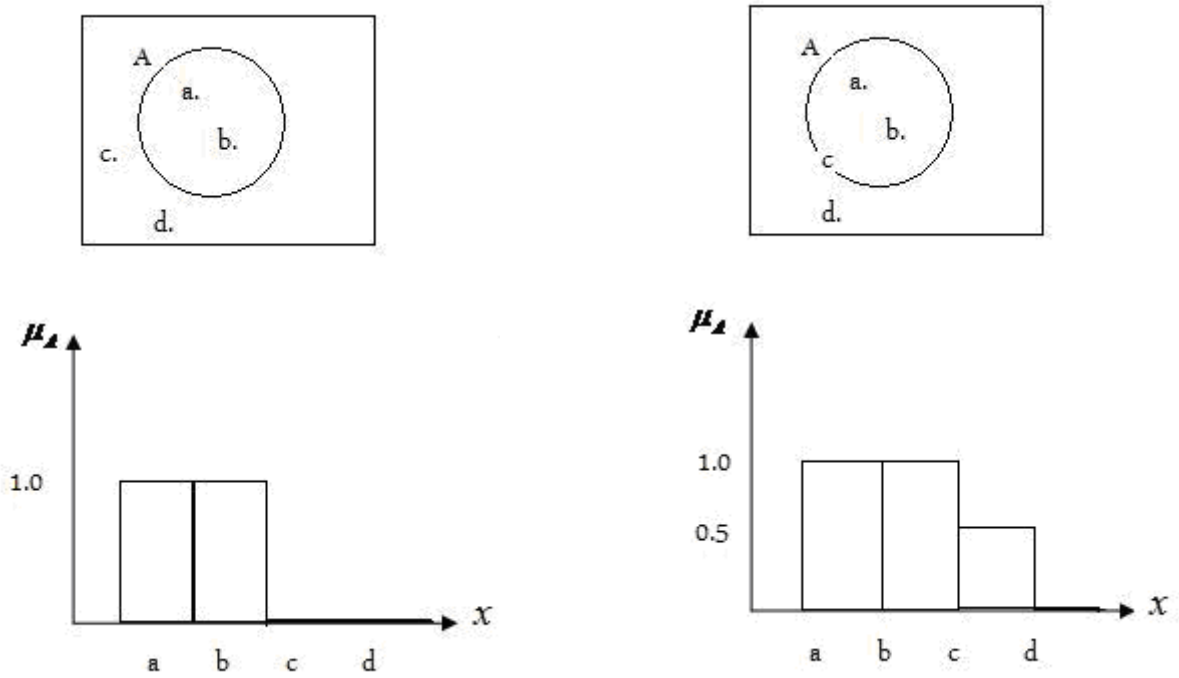
iv) Kişi kavramlarının bir modeli olarak üyelik fonksiyonları

olmak üzere dört ana grupta sınıflandırılmaktadır.

Örnek olarak çeşitli elmalardan oluşan bir kümeyi düşünelim. Bu elmaların hepsi elmalar kümesinin tam elemanı olsun. Bir tanesinin bir parçası yediğimizi düşünelim. Bu elma elmalar kümesinin elemanımıdır? Elma olma ile elma olmama arasındaki sınır neresidir? İşte tam üye ya da üye değil diyemeyeceğimiz bu gibi durumlar için kısmi üyelik derecesi

kavramı oldukça yardımcı olabilir. Her bir eleman için 0 ile 1 arasındaki değişim değerine üyelik derecesi denir (Baykal ve Beyan 2004).

Klasik ve bulanık kümelerin üyelik fonksiyonlarının grafik olarak gösterimi Şekil 2.1'de verilmektedir.



(a) **(b)**

Şekil 2.1 a) Klasik kümeler için üyelik fonksiyonlarının grafik gösterimi

b) Bulanık kümeler için üyelik fonksiyonlarının grafik gösterimi

2.3. Bulanık Küme

Bulanık küme kuramı, belirsizliğin bir çeşit formülleştirilmesidir. Fakat bulanık küme işlemleri, diğer küme işlemlerinden farklılık gösterir. Kümedeki her bir birey, klasik çift değerli küme kuramlarında olduğu gibi üye ya da üye değil olarak değil, bir dereceye kadar üye olarak görülür (Baykal ve Beyan 2004).

Bulanık küme kuramının amacı, belirsizlik ifade eden ve tanımlanması zor kavramlara üyelik derecesi atayarak onlara belirlilik getirmektir. Belirlilik getirme yaklaşımı iki değerli kümeler kuramının, çok değerli kümeler kuramına geçişinden doğar.

X, bir evrensel küme olsun. Klasik küme, $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olmak üzere, normal olarak sonlu, sayılabilir ya da sayılamaz olabilen $x \in X$ elemanlarının bir birleşimi olarak düşünülebilir ve

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir. Burada, $\mu_A(x)$: $X \rightarrow \{0,1\}$, klasik kümeler için üyelik fonksiyonu ya da üyelik derecesini gösterir. Eğer $A \subseteq X$ kümesinin üyelik derecesi [0,1] aralığı kabul edilirse A kümesi "bulanık küme" olarak adlandırılır ve $\widetilde{A}$ ile gösterilir. Zadeh (1965) tarafından ifade edilen $\widetilde{A}$ bulanık kümesi,

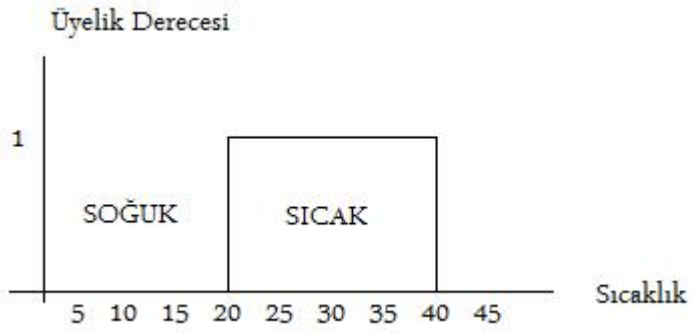
$$\widetilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) | \, x \in X\}$$

biçiminde tanımlanır ve üyelik derecesi,

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$$

eşitliği ile ifade edilir (Yapıcı Pehlivan 2005).

Klasik küme kuramında bir eleman o kümenin ya elemanıdır ya da değildir. Hiçbir zaman kısmi üyelik olmaz. Nesnenin üyelik değeri 1 ise kümenin tam elemanıdır, 0 ise elemanı değildir. Başka bir deyişle klasik küme elemanlarının üyelikleri {0,1} değerlerini alır. Klasik küme gösterimi için bir örnek Şekil 2.2'de verilmiştir.



Şekil 2.2. Sıcaklık için klasik kümenin grafik gösterimi

Şekil 2.2'de görüldüğü gibi, eğer sıcaklık $20^{\circ}C$'nin altına düşerse sıcak değildir. Yani klasik mantık kuramına göre $19,5^{\circ}C$ sıcak değildir. Doğal olarak bu mantığın hiçbir esnekliği yoktur. Gerçek dünyada sınırlar bu kadar keskin değildir (Elmas 2003).

Bulanık küme gösterimi için bir örnek Şekil 2.3'de verilmiştir.



Şekil 2.3. Sıcaklık için bulanık kümenin grafik gösterimi

Şekil 2.3'de görüldüğü gibi, $10-40^{\circ}C$ arasındaki değerler sıcak kümesine üyedirler. $20-40^{\circ}C$ arasındaki değerlerin üyelik dereceleri 1'dir. $10-20^{\circ}C$ derece arasındaki sıcaklıkların ise üyelik dereceleri 0 ile 1 değerleri arasında değişecektir. Başka bir deyişle $11^{\circ}C$ az sıcak, $15^{\circ}C$ biraz sıcak olarak değerlendirilmiştir (Elmas 2003).

2.4. Bulanık Küme Kavramları ve İşlemleri

Bu kesimde, bulanık kümelerle işlem yapabilmek için gerekli bazı kavramlar ve işlemler verilmiştir.

2.4.1. Bulanık küme kavramları

Tanım 2.1. α-seviye (α-kesim) kümesi

α-seviye kümesi, $\widetilde{A}_{\alpha}$ üyelikleri α 'dan az olmayan üyelerden kurulmuştur.

$$\widetilde{A}_{\alpha} = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

$0 \leq \alpha \leq 1$ arasında keyfi bir değerdir.

Güçlü α seviye kümesi ise

$$\widetilde{A}_{\alpha} = \{x \in X | \mu_A(x) > \alpha\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2. Destek

$\tilde{A}$ bulanık kümenin desteği, X'in kesin altkümesi olarak tanımlanır ve

$$Supp\,\tilde{A} = \left\{ x \,\middle|\, \mu_{\tilde{A}}(x) > 0,\ x \in X \right\}$$

biçiminde verilir.

Tanım 2.3. Dışbükeylik

$\tilde{A}$ bulanık kümesi,

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\right\},\ \forall x_1, x_2 \in X,\ \ \lambda \in [0,1]$$

eşitliğini sağlarsa $\tilde{A}$'ya dışbükey (konveks) küme denir.

Tanım 2.4. Normallik

$\tilde{A}$ bulanık kümesi sadece ve sadece

$$\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

eşitliği sağlandığında normaldir. Bulanık küme, üyelik fonksiyonunun en büyük değeri 1 olduğunda normaldir.

Tanım 2.5. Yükseklik

$\tilde{A}$ bulanık kümesinin yüksekliği,

$$h(\tilde{A}) = \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$$

ile tanımlanır.

(Lai ve Hwang 1992, Yapıcı 2000, Baykal ve Beyan 2004)

2.4.2. Bulanık küme işlemleri

Tanım 2.6. Kesişme

$\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$, X'in iki bulanık kümesi olsun. $\tilde{A}$ ve $\tilde{B}$'nin kesişimi $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ olarak gösterilir ve üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) = \min\left\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\right\},\ x \in X$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.7. Birleşme

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ bulanık kümelerinin birleşimi $\widetilde{A} \cup \widetilde{B}$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}}(x) = \max\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}}(x)\right\} = \mu_{\widetilde{A}}(x) \vee \mu_{\widetilde{B}}(x), \;\; x \in X$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.8. Kapsama

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$, X'in iki bulanık altkümesi olsun. $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$ ise,

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) \leq \mu_{\widetilde{B}}(x) \quad \forall x \in X$$

olarak ifade edilir.

Tanım 2.9. Tümleme

$\widetilde{A}$ bulanık kümesinin tümleyeni $\widetilde{A}^c$ ile gösterilir ve üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\widetilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\widetilde{A}}(x)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.10. Eşitlik

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ bulanık kümeleri eşit ise $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ biçiminde gösterilir ve üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \mu_{\widetilde{B}}(x)$$

eşitliği ile ifade edilir.

Tanım 2.11. Cebirsel Toplam

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ bulanık kümelerinin cebirsel toplamı $\widetilde{A} + \widetilde{B}$ 'nin üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\widetilde{A}+\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x). + \mu_{\widetilde{B}}(x) - \mu_{\widetilde{A}}(x).\mu_{\widetilde{B}}(x), \;\; x \in X$$

eşitliği ile ifade edilir.

Tanım 2.12. Cebirsel Fark

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ bulanık kümelerinin farkı $\widetilde{A}$ - $\widetilde{B} = \widetilde{A} \cap \widetilde{B}$ 'nin üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\widetilde{A}-\widetilde{B}}(x) = \min\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{B}^c}(x)\right\} = \min\left\{\mu_{\widetilde{A}}(x), 1-\mu_{\widetilde{B}}(x)\right\}, \; x \in X$$

eşitliği ile ifade edilir.

Tanım 2.13. Cebirsel Çarpım

$\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ bulanık kümelerinin cebirsel çarpımı $\widetilde{A}$. $\widetilde{B}$ 'nin üyelik fonksiyonu,

$$\mu_{\widetilde{A}.\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x).\mu_{\widetilde{B}}(x), \; x \in X$$

eşitliği ile ifade edilir.
(Lai ve Hwang 1992)

2.5. Bulanık Sayı

U boş olmayan bir küme olsun. U 'daki bir bulanık A kümesi $\forall x \in U$ için, $\mu_A : U \to I = [0,1]$ fonksiyonu ile verilir. μ_A 'ya bulanık kümeye karşılık gelen üyelik fonksiyonu denir. Bulanık A kümesi ise U 'daki her elemanın üyelik derecesiyle birlikte oluşturduğu kümedir. x 'in A 'ya ait olma veya üyelik derecesi $\mu_A(x)$ olur. Her üyelik fonksiyonu bir klasik evrensel kümenin elemanlarını [0,1] aralığındaki bir sayıya karşılık getiren bir fonksiyondur. Bu şekilde tanımlanan bulanık kümelerin kümesi I^U ile gösterilir. Burada eğer I^U evrensel kümesi yerine reel sayıları ele alınırsa, elde edilen yeni bulanık kümeye bulanık sayı denir (Aktaş ve Çağman 2005).

Bulanık sayı; dışbükey, normalleştirilmiş, sınırlı-sürekli üyelik fonksiyonu olan ve gerçel sayılarda tanımlanmış bir bulanık küme olarak ifade edilir.

Bulanık sayılar içinde en çok kullanılanları üçgensel ve yamuksal bulanık sayılardır.

2.5.1. Üçgensel Bulanık Sayı

Üçgensel bulanık sayı A, $A = (\alpha, c)$ olarak ifade edilir. Burada α merkezi , c yayılış (genişliği) gösterir. Üyelik fonksiyonu

$$\mu_A = L((x-\alpha)/c); \qquad c > 0$$

şeklinde gösterilir. Burada $L(x)$ referans fonksiyonu olarak adlandırılır ve

i) $L(x) = L(-x)$

ii) $L(0) = 1$

iii) $L(x)$, $[0,\infty)$ aralığında kesinlikle azalan bir fonksiyon

özelliklerini sağlar.

$p > 0$ için $L(x)$ referans fonksiyonuna örnek olarak, $L_1(x) = \max\left(0, 1 - |x|^p\right)$, $L_2(x) = e^{-|x|^p}$,

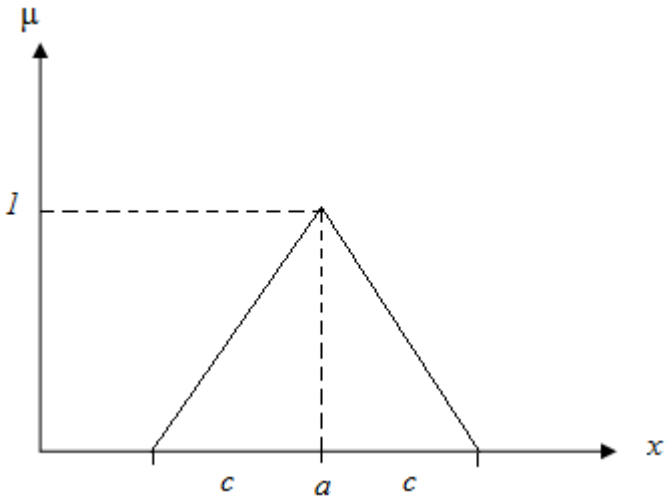
$L_3(x) = 1/\left(1 + |x|^p\right)$ verilebilir.

$p = 1$ için $L_1(x)$ ele alındığında üçgensel bulanık sayı elde edilir.

Simetrik üçgensel bulanık sayı $A_i = (\alpha_i, c_i)_L$ ele alırsak; A_i , bulanık sayısı için üyelik fonksiyonu;

$$\mu_{A_i}(a_i) = L\left((a_i - \alpha_i)/c_i\right)$$

biçiminde gösterilir(Terano ve Ark.1992). Simetrik üçgensel bulanık sayıya örnek Şekil 2.4'de verilmiştir.



Şekil 2.4. Simetrik üçgensel bulanık sayı

Herhangi bir A bulanık kümesinin α-seviye kümesi bir kapalı aralıktır. Burada A ve B'nin α-seviye kümeleri

$$[A]_\alpha = \{x \in A \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

$$[B]_\alpha = \{x \in B \mid \mu_B(x) \geq \alpha\}$$

biçimindedir ve bir kapalı küme oluştururlar. Bulanık sayılar A=[a,b] ve B=[c,d] kapalı aralıkları olarak ele alındığında aritmetik işlemler,

i) *Toplama:* $A+B = [a,b]+[c,d] = [a+c,\ b+d]$

ii) *Çıkarma:* $A-B = [a,b]-[c,d] = [a-d,\ b-c]$

iii) *Çarpma:* $A.B = [a,b].[d,e] = [\min(ac,ad,bc,bd), \max(ac,ad,bc,bd)]$

iv) *Bölme:* $A/B = [a,b]/[c,d] = [a,b].[1/d,1/c]$

$$= [\min(a/c,a/d,b/c,b/d), \max(a/c,a/d,b/c,b/d)]$$

v) *Bir skalerle çarpım:* $k.A = k.[a,b] = \begin{cases} [k.a, k.b], & k \geq 0 \\ [k.b, k.a], & k < 0 \end{cases}$

olarak verilir (Klir ve Ark. 1997).

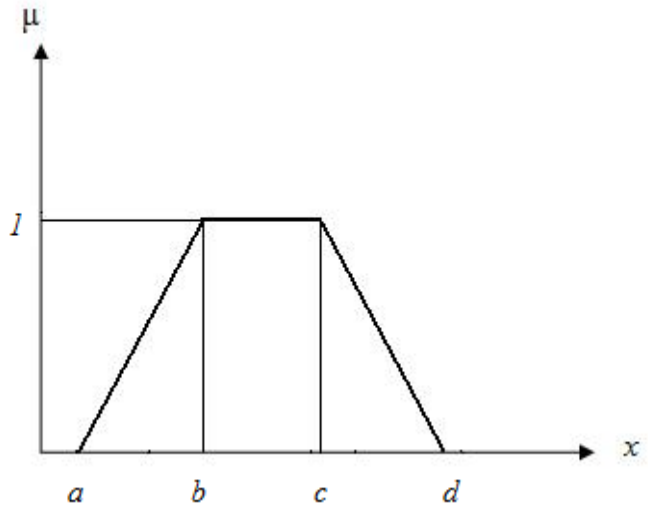
2.5.2. Yamuksal Bulanık Sayı

Yamuksal bulanık sayılar genel olarak X=(a,c,d,b) biçiminde ifade edilir. Burada; c ve d yamuksal bulanık sayının merkezlerini, a yamuksal bulanık sayının alt sınırını, b yamuksal bulanık sayının üst sınırını göstermektedir.

Yamuksal bulanık sayılar için üyelik fonksiyonu,

$$\mu_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{c-a}, & a \leq x \leq c \\ 1, & c \leq x \leq d \\ \dfrac{b-x}{b-d}, & d \leq x \leq b \\ 0, & d.y. \end{cases}$$

biçiminde verilir. Yamuksal bulanık sayılar, *c=d* olması durumunda üçgensel bulanık sayı olarak adlandırılır (Yapıcı Pehlivan 2005). Yamuksal bulanık sayı için bir örnek Şekil 2.5'de gösterilmiştir.



Şekil 2.5. Yamuksal bulanık sayı

3. BULANIK REGRESYON ANALİZİ VE BULANIK REGRESYON ANALİZİNDE KULLANILAN YÖNTEMLER

Regresyon analizi, bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasındaki bağıntının belirlenmesinde ve bu bağıntı yardımıyla çıkarılacak istatistiksel sonuçların elde edilmesinde kullanılan istatistiksel bir tekniktir. Regresyon analizinde amaç, bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu olarak ifade etmektir. Ayrıca bu fonksiyon yardımıyla bağımlı değişkenin değerlerini tahmin etmek, öngörüsünü yapmak, bağımsız değişkenlerin bağımlı değişken üzerindeki etkilerini tahmin etmek ve bağımlı veya bağımsız değişkenlerin etkileri ile ilgili öne sürülen hipotezleri test etmektir (Öztürk ve Genç 1993).

Bulanık regresyon analizi, sistem yapısındaki belirsizliğe bağlı olarak verilerin tamamının ya da bir kısmının bulanık olması veya sistem yapısının değişkenler arasında kesin ilişkiler tanımlanmasına imkân vermemesi gibi klasik regresyon uygulanmasının önerilmediği durumlarda kullanılan alternatif bir yöntemdir. Bulanık regresyon modeli, bağımlı-bağımsız değişken verilerini bir olasılık sistemi ile ifade eden model olarak adlandırılır (Terano ve Ark. 1992).

Bulanık regresyon analizi yöntemleri, bulanık en küçük kareler ve lineer programlama temeline dayalı yöntemler olmak üzere iki ana başlık altında incelenmektedir. Bu bölümde; bağımsız değişkeni(girdi) kesin-bağımlı(çıktı) bulanık sayı olan bulanık regresyon yöntemleri ve girdisi bulanık–çıktısı bulanık sayı olan bulanık regresyon yöntemleri ayrıntılı biçimde incelenecektir.

3.1. Girdisi Kesin-Çıktısı Bulanık Sayı Olan Bulanık Regresyon Yöntemleri

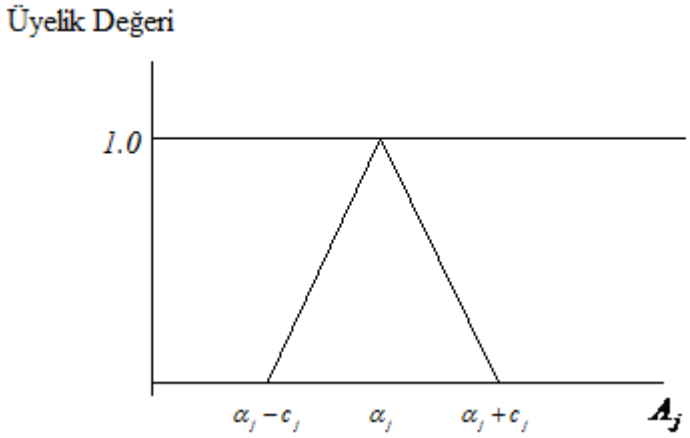
Bu kesimde; girdisi kesin-çıktısı bulanık sayı olan bulanık regresyon yöntemlerinden Tanaka yöntemi (1987), Özelkan yöntemi (2000), Hojati-Bector-Smimou (2005) yöntemi ve Diamond (1988) yöntemi ayrıntılı biçimde ele alınmıştır.

İlk olarak 1980 yılında Tanaka tarafından öne sürülen bulanık doğrusal regresyon modeli,

$$\hat{Y} = A_0 x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_k x_k$$

biçimindedir. Her bir bulanık regresyon katsayısı A_j, $j = 0,\ldots,k$, $A_j = (\alpha_j, c_j)$ biçiminde simetrik üçgensel bulanık sayılar ile ifade edilmektedir. Burada α_j merkezi, c_j

genişliği(sapmayı) gösterir. Şekil 3.1'de üyelik değeri 1 ve sapması, $c_j \geq 0$ olan bulanık regresyon katsayısı A_j'nin gösterimi verilmiştir.



Şekil 3.1. A_j Üçgensel bulanık regresyon katsayısı

3.1.1. Tanaka yöntemi

Girdisi kesin-çıktısı bulanık sayı olan veriler için önerilen ve lineer programlama temeline dayanan Tanaka (1987) yönteminde ele alınan bulanık doğrusal regresyon modeli,

$$Y_i = Ax_i, \qquad i = 1,\ldots,N \tag{3.1}$$

biçimindedir. Tanaka tarafından önerilen yöntemde, girdi verisi $x_i = (x_{i1},\ldots,x_{in})^t$, çıktı verisi $Y_i = (y_i, e_i)_L$ ve bulanık regresyon katsayısı $A_j = (\alpha_j, c_j)$ biçiminde gösterilir. Burada α merkezi , c sapmayı göstermektedir.

(x_i, Y_i), $i = 1,\ldots,N$ verileri ele alındığında, bulanık parametre vektörü ***A***, Eşitlik (3.1)'i sağlar. Buradaki asıl amaç $\bar{A}_i$ ve $\underline{A}_i$'yi elde etmektir, böylece

$$\underline{Y}_i = \underline{A}_1 x_{i1} + \cdots + \underline{A}_{in} x_{in} \underset{\sim h}{\subset} Y_i \underset{\sim h}{\subset} \overline{A}_i x_{i1} + \cdots + \overline{A}_n x_{in} = \overline{Y}_i \tag{3.2}$$

olabilirlik doğrusal sistem tahminleri olan $\overline{Y}_i$ ve $\underline{Y}_i$ tahmin edilmektedir. Burada; $\overline{Y}_i$ alt tahmini, $\underline{Y}_i$ üst tahmini göstermektedir. Eşitlik (3.2)'ye göre bulanık parametre tahminlerini elde etmek için Minimum (Min) ve Maksimum (Max) olmak üzere iki lineer programlama problemi önerilmiştir.

Minimum Problemi

Minimum probleminin amacı bulanık regresyon katsayısı $\overline{A}_i$ 'yi bulmaktır. Bu amaçla

$$\begin{aligned} &\underset{\overline{A}_i=(\overline{\alpha}_i,\overline{c}_i)_L}{Min}\ J(c)=\sum_i c^t\left|x_i\right| \\ &\overline{Y}_i=\overline{A}_1x_{i1}+\cdots+\overline{A}_nx_{in}\underset{\sim h}{\supseteq}Y_i, \qquad i=1,\ldots,N \end{aligned} \tag{3.3}$$

lineer programlama problemi oluşturulmuştur. Eşitlik (3.3)'te; $c^t\left|x_i\right|$, $\overline{Y}_i$'nin genişliğini ve $J(c)$, $\overline{Y}_i$'nin genişlikleri toplamını göstermektedir.

$[Y_i]_h \subseteq [\overline{Y}_i]_h$ sağlandığında, $\overline{Y}_i=\overline{A}_1x_{i1}+\cdots+\overline{A}_nx_{in}$ bulanık kümenin minimumu olur.

Tanım 3.1. $0\le h<1$ seviye kümeli bulanık sayılar $A\underset{\sim h}{\supseteq}B$ tarafından $[A]_h\supseteq[B]_h$ şeklinde tanımlanır. $[A]_h\supseteq[B]_h$ eşitlikleri,

$$\begin{aligned} &\alpha_1\le\alpha_2+(1-h)(c_1-c_2) \\ &\alpha_1\ge\alpha_2-(1-h)(c_1-c_2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

biçiminde verilmiştir. Burada; A ve B' nin üyelik fonksiyonları;

$$\begin{aligned} &\mu_A(x)=L\left((x-\alpha_1)/c_1\right) \\ &\mu_B(x)=L\left((x-\alpha_2)/c_2\right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Eşitlik (3.4)'ten yararlanarak lineer programlama problemi,

Tanaka Min:

$$\begin{aligned} &\underset{\alpha,c}{Min}\sum_i c^t\left|x_i\right| \\ &\quad y_i+(1-h)e_i\le x_i^t\alpha+(1-h)c^t\left|x_i\right| \\ &\quad y_i-(1-h)e_i\ge x_i^t\alpha-(1-h)c^t\left|x_i\right| \end{aligned} \tag{3.5}$$

biçiminde oluşturulmuştur.

Maksimum Problem

Maksimum probleminin amacı bulanık regresyon katsayısı $\underline{A}_i$'yi bulmaktır. Bu amaçla

$$\begin{aligned} &\underset{\underline{A}_i=(\underline{\alpha}_i,\underline{c}_i)}{Max}\ J(c)=\sum_i c^t\left|x_i\right| \\ &\underline{Y}_i=\underline{A}_1x_{i1}+\cdots+\underline{A}_{in}x_{in}\underset{\sim h}{\subset}Y_i, \qquad i=1,\ldots,N \end{aligned} \tag{3.6}$$

lineer programlama problemi oluşturulur. Burada $c^t|x_i|$, $\underline{Y}_i$'nin genişliğini ve $J(c)$, $\underline{Y}_i$'nin genişlikleri toplamıdır.

$[\underline{Y}_i]_h \subseteq [Y_i]_h$ sağlandığında, $\underline{Y}_i=\underline{A}_1x_{i1}+\cdots+\underline{A}_{in}x_{in}$ bulanık kümenin maksimumu olur.

Eşitlik (3.4)'ten yararlanarak lineer programlama problemi,

Tanaka Max:

$$\begin{aligned} &\underset{\alpha,c}{Max}\sum_i c^t\left|x_i\right| \\ &\quad y_i+(1-h)e_i\geq x_i^t\alpha+(1-h)c^t\left|x_i\right| \\ &\quad y_i-(1-h)e_i\leq x_i^t\alpha-(1-h)c^t\left|x_i\right| \end{aligned} \tag{3.6}$$

biçiminde oluşturulmuştur (Tanaka 1987).

3.1.2. Özelkan yöntemi

Girdisi kesin-çıktısı bulanık sayı olan veriler için Özelkan ve Duckstein (2000) tarafından öne sürülen lineer programlama temeline dayanan yöntemde bulanık doğrusal regresyon modeli,

$$Y_i=A_0+A_1x_{i1}+A_2x_{i2}+\cdots+A_nx_{in} \tag{3.7}$$

biçiminde ele alınmıştır. Girdi verisi $x_i=(x_{i1},\ldots,x_{in})^t$, çıktı verisi $Y_i=(y_i,e_i)_L$ ve bulanık regresyon katsayısı $A_j=(\alpha_j,c_j)_L$ olarak ifade edilmektedir. Bu yöntemdeki asıl amaç bulanık doğrusal regresyon modelindeki bulanık regresyon katsayısı $A_j=(\alpha_j,c_j)_L$'yi elde etmektir. Bu amaçla,

Özelkan:

$$
\begin{aligned}
&Min \sum_{i=1}^{n} \left(d_{iU} + d_{iL} \right) \\
&\sum_{j=0}^{k} \left(\alpha_j + (1-h) c_j \right) x_{ij} \geq \overline{y}_i + (1-h) e_i - d_{iU} \quad i = 1, \ldots, n \\
&\sum_{j=0}^{k} \left(\alpha_j - (1-h) c_j \right) x_{ij} \leq \overline{y}_i - (1-h) e_i + d_{iL} \quad i = 1, \ldots, n \\
&\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k} c_j x_{ij} \leq v \\
&d_{iL}, d_{iU} \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n \\
&\alpha_j \text{ işareti belirtilmemiş} \quad j = 0, \ldots, k \\
&c_j \geq 0 \quad j = 0, \ldots, k
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

lineer programlama problemi oluşturulmuştur. Eşitlik (3.8)'de *v*, keyfi bir değer olarak alınan parametredir ve d_{iU} üst sapma değişkenlerini, d_{iL} alt sapma değişkenlerini göstermektedir (Özelkan ve Duckstein 2000, Hojati ve ark. 2005).

3.1.3. Hojati-Bector-Smimou yöntemi

Girdisi kesin-çıktısı bulanık sayı olan veriler için Hojati ve ark. (2005) tarafından önerilen ve lineer programlama temeline dayanan yöntemde bulanık doğrusal regresyon modeli,

$$Y_i = A_0 + A_1 x_{i1} + A_2 x_{i2} + \cdots + A_n x_{in} \tag{3.9}$$

şeklinde ele alınmıştır. Girdi verisi $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})^t$, çıktı verisi $Y_i = (y_i, e_i)_L$, ve bulanık regresyon katsayısı $A_j = (\alpha_j, c_j)_L$ olarak ifade edilmektedir. Buradaki asıl amaç bulanık doğrusal regresyon modelindeki bulanık regresyon katsayısı $A_j = (\alpha_j, c_j)_L$'yi elde etmektir. Bu amaçla Hojati ve ark. (2005) tarafından önerilen lineer programlama problemi,

HBS1:

$$
\begin{aligned}
&Min \sum_{i=1}^{n} \left(d_{iU}^{+} + d_{iU}^{-} + d_{iL}^{+} + d_{iL}^{-} \right) \\
&\sum_{j=0}^{k} \left(\alpha_j + (1-h) c_j \right) x_{ij} + d_{iU}^{+} - d_{iU}^{-} = \overline{y}_i + (1-h) e_i \quad i = 1, \ldots, n \\
&\sum_{j=0}^{k} \left(\alpha_j - (1-h) c_j \right) x_{ij} + d_{iL}^{+} - d_{iL}^{-} = \underline{y}_i - (1-h) e_i \quad i = 1, \ldots, n \\
&d_{iL}^{+}, d_{iL}^{-}, d_{iU}^{+}, d_{iU}^{-} \geq 0 \quad i = 1, \ldots, n \\
&\alpha_j \text{ işareti belirtilmemiş} \quad j = 1, \ldots, k \\
&c_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, k
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

biçiminde oluşturulmuştur.

Eşitlik (3.10)'da; d_{iU}^{+}: tahmini aralığının üst noktasını, d_{iU}^{-}: gözlem aralığının üst noktasını, d_{iL}^{+}: tahmini aralığının alt noktasını, d_{iL}^{-}: gözlem aralığının alt noktasını, göstermektedir. Her bir $i = 1, \ldots, n$ için d_{iU}^{+} ve d_{iU}^{-}'den ve d_{iL}^{+} ve d_{iL}^{-}'den en çok biri pozitif olmalıdır. Nitekim $\left| d_{iU}^{+} - d_{iU}^{-} \right|$ aralığı *h*-kesin tahmini aralığının üst noktası ile *h*-kesin gözlem aralığının üst noktası arasındadır. $\left| d_{iL}^{+} - d_{iL}^{-} \right|$ aralığı *h*-kesin tahmini aralığının alt noktası ile h-kesin gözlem aralığının alt noktası arasındadır (Hojati ve ark. 2005).

3.1.4. Diamond yöntemi

Girdisi kesin-çıktısı bulanık sayı olan veriler için Diamond (1988) tarafından önerilen bulanık en küçük kareler temeline dayanan yöntemde bulanık doğrusal regresyon modeli,

$$Y = A + xB, \qquad x \in R \tag{3.11}$$

biçiminde ele alınmıştır. Eşitlik (3.11)'de bulanık regresyon katsayıları, $A = \left(\alpha, \underline{c}, \overline{c} \right)_T$ $B = \left(b, \underline{\beta}, \overline{\beta} \right)_T$ olarak gösterilir.

En küçük kareler optimizasyon problemi,

$$Min\ r\left(A, B\right) = \sum d\left(A + x_i B, Y_i\right)^2 \tag{3.12}$$

biçiminde ele alınır. Eşitlik(3.12)'de;

$$d\left(A+x_iB,Y_i\right)^2=\left(\alpha+bx_i-y_i\right)^2+\left(\alpha+bx_i-\underline{c}-\underline{\beta}x_i-y_i+\underline{e}_i\right)^2+\left(\alpha+bx_i+\overline{c}+x_i\overline{\beta}-y_i-\overline{e}_i\right)^2 \tag{3.13}$$

dir. Bu problemin çözümü sonucunda elde edilen bulanık parametreler,

$A=\left(\alpha,c,c\right)_T$ ve $B=\left(b,\beta,\beta\right)_T$;

$$\begin{aligned}\alpha&=\hat{y}-b\hat{x}\\ c&=\hat{e}-\beta\hat{x}\\ b&=K/T^2\\ \beta&=k/T^2\end{aligned} \tag{3.14}$$

eşitliklerinden elde edilir. Eşitlik (3.14)'de;

$$\begin{aligned}K&=\sum\left(x_i-\hat{x}\right)\left(y_i-\hat{y}\right)\\ k&=\sum\left(x_i-\hat{x}\right)\left(e_i-\hat{e}\right)\\ T^2&=\sum\left(x_i-\hat{x}\right)^2\end{aligned} \tag{3.15}$$

olarak hesaplanır (Diamond 1988).

3.2. Girdisi Bulanık-Çıktısı Bulanık Sayı Olan Bulanık Regresyon Yöntemleri

Bu kesimde girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan bulanık regresyon yöntemlerinden Sakawa ve Yano yöntemi (1992), Hojati-Bector-Smimou yöntemi (2005), Yang-Lin yöntemi (2005), Diamond yöntemi (1988) ve Ming-Friedman-Kandel yöntemi (1997) ele alınmıştır.

3.2.1. Sakawa ve Yano yöntemi

Girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan veriler için Sakawa ve Yano (1992) tarafından önerilen yöntemde ele alınan bulanık doğrusal regresyon modeli,

$$Y_i=A_0+A_1x_{i1}+A_2x_{i2}+\cdots+A_nx_{in} \tag{3.16}$$

biçiminde ifade edilir. Girdi verisi, $X_{ij}=\left(x_{ij},f_{ij}\right)_L$, çıktı verisi $Y_i=\left(y_i,e_i\right)_L$ ve bulanık parametre $A_j=\left(\alpha_j,c_j\right)_L$ olarak ifade edilir. Buradaki asıl amaç, bulanık doğrusal regresyon modelindeki bulanık regresyon katsayısı $A_j=\left(\alpha_j,c_j\right)_L$'yi elde etmektir. Burada $L^{-1}(h)=1-h$ biçimindedir.

Sakawa ve Yano yönteminin çözümünde kullanılan Algoritma 3.1 aşağıda verilmiştir.

Algoritma 3.1

Adım 0: $J_1^{(1)} = \{0,1,\ldots,n\}$, $J_2^{(1)} = \emptyset$ $J_3^{(1)} = \emptyset$ ve i=1 'den başlayarak döngü başlar.

Adım 1: Doğrusal programlama problem çözümü, Eşitlik (3.20-3.22)'de verilen $T_l\left(J_1^{(i)}, J_2^{(i)}, J_3^{(i)}\right), l = 1,2,3$ problemlerinin optimal çözümünden $\left(\overline{a}_j^{(i)}, c_j^{(i)}\right), j = 0,\ldots,n.$ elde edilir.

Adım 2: $\left(\overline{a}_j^{(i)}, c_j^{(i)}\right), j = 0,\ldots,n$ optimal çözümü, doğrusal programlama problemi $T_l\left(J_1^{(i)}, J_2^{(i)}, J_3^{(i)}\right)$'nin Eşitlik (3.23)'de verilen koşulu sağlarsa durulur. Aksi takdirde, $J^{(i+1)}$ indis kümesi aşağıdaki gibi yeniden düzeltilir.

$$J_1^{(i+1)} = \left\{ j \in J_1^{(i)} \mid \overline{a}_j^{(i)} - L^{-1}(h) c_j^{(i)} > 0 \right\} + \left\{ j \in J_2^{(i)} \mid \overline{a}_j^{(i)} - L^{-1}(h) c_j^{(i)} = 0 \right\} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} J_2^{(i+1)} = & \left\{ j \in J_2^{(i)} \mid \overline{a}_j^{(i)} - L^{-1}(h) c_j^{(i)} < 0 \; ve \; \overline{a}_j^{(i)} + L^{-1}(h) c_j^{(i)} > 0 \right\} \\ & + \left\{ j \in J_1^{(i)} \mid \overline{a}_j^{(i)} - L^{-1}(h) c_j^{(i)} = 0 \right\} + \left\{ j \in J_3^{(i)} \mid \overline{a}_j^{(i)} + L^{-1}(h) c_j^{(i)} = 0 \right\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$J_3^{(i+1)} = \left\{ j \in J_3^{(i)} \mid \overline{a}_j^{(i)} + L^{-1}(h) c_j^{(i)} < 0 \right\} + \left\{ j \in J_2^{(i)} \mid \overline{a}_j^{(i)} + L^{-1}(h) c_j^{(i)} = 0 \right\} \tag{3.19}$$

i=i+1 yapılır ve Adım1'e dönülür.

Algoritma 3.1'de ele alınan $T_1(h)$, $T_2(h)$ ve $T_3(h)$ problemleri

$\boldsymbol{T_1}(h; J_1, J_2, J_3)$:

$$\begin{aligned} & Min \quad 2L^{-1}(0) \sum_{i=1}^{k} \left\{ \sum_{j=0}^{n} c_j \overline{x}_{ij} + \sum_{j \in J_1}^{n} \overline{a}_j f_{ij} + \sum_{j \in J_2}^{n} L^{-1}(0) c_j f_{ij} - \sum_{j \in J_3}^{n} \overline{a}_j f_{ij} \right\} \\ & \overline{y}_i - \sum_{j=0}^{n} \overline{a}_j \overline{x}_{ij} \leqq L^{-1}(h) \left\{ \sum_{j \in J_1, J_2} \left[\overline{a}_j f_{ij} + c_j \overline{x}_{ij} + L^{-1}(h) c_j f_{ij} \right] + \sum_{j \in J_3} \left[-\overline{a}_j f_{ij} + c_j \overline{x}_{ij} - L^{-1}(h) c_j f_{ij} \right] \right\} \\ & \qquad + L^{-1}(h) e_i \\ & -\overline{y}_i + \sum_{j=0}^{n} \overline{a}_j \overline{x}_{ij} \leqq L^{-1}(h) \left\{ \sum_{j \in J_1} \left[\overline{a}_j f_{ij} + c_j \overline{x}_{ij} - L^{-1}(h) c_j f_{ij} \right] + \sum_{j \in J_3, J_3} \left[-\overline{a}_j f_{ij} + c_j \overline{x}_{ij} + L^{-1}(h) c_j f_{ij} \right] \right\} \\ & \qquad + L^{-1}(h) e_i \end{aligned} \tag{3.20}$$

$\boldsymbol{T_2}\left(h;J_1,J_2,J_3\right)$:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad 2L^{-1}(0)\sum_{i=1}^{k}\left\{\sum_{j=0}^{n}c_j\overline{x}_{ij}+\sum_{j\in J_1}^{n}\overline{a}_j f_{ij}+\sum_{j\in J_2}^{n}L^{-1}(0)c_j f_{ij}-\sum_{j\in J_3}^{n}\overline{a}_j f_{ij}\right\}\\
&\overline{y}_i-\sum_{j=0}^{n}\overline{a}_j\overline{x}_{ij}\leqq L^{-1}(h)\left\{\sum_{j\in J_1,J_2}\left[\overline{a}_j f_{ij}+c_j\overline{x}_{ij}+L^{-1}(h)c_j f_{ij}\right]+\sum_{j\in J_3}\left[-\overline{a}_j f_{ij}+c_j\overline{x}_{ij}-L^{-1}(h)c_j f_{ij}\right]\right\}\\
&\qquad -L^{-1}(1-h)e_i\\
&-\overline{y}_i-\sum_{j=0}^{n}\overline{a}_j\overline{x}_{ij}\leqq L^{-1}(h)\left\{\sum_{j\in J_1}\left[\overline{a}_j f_{ij}+c_j\overline{x}_{ij}-L^{-1}(h)c_j f_{ij}\right]+\sum_{j\in J_2,J_3}\left[-\overline{a}_j f_{ij}+c_j\overline{x}_{ij}+L^{-1}(h)c_j f_{ij}\right]\right\}\\
&\qquad -L^{-1}(1-h)e_i
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

$\boldsymbol{T}_3\left(h;J_1,J_2,J_3\right)$:

$$
\begin{aligned}
&Max \quad 2L^{-1}(0)\sum_{i=1}^{k}\left\{\sum_{j=0}^{n}c_j\overline{x}_{ij}+\sum_{j\in J_1}^{n}\overline{a}_j f_{ij}+\sum_{j\in J_2}^{n}L^{-1}(0)c_j f_{ij}-\sum_{j\in J_3}^{n}\overline{a}_j f_{ij}\right\}\\
&\overline{y}_i-\sum_{j=0}^{n}\overline{a}_j\overline{x}_{ij}\leqq L^{-1}(1-h)\left\{\sum_{j\in J_1}\left[-\overline{a}_j f_{ij}-c_j\overline{x}_{ij}+L^{-1}(1-h)c_j f_{ij}\right]+\sum_{j\in J_2,J_3}\left[\overline{a}_j f_{ij}-c_j\overline{x}_{ij}-L^{-1}(1-h)c_j f_{ij}\right]\right\}\\
&\qquad +L^{-1}(h)e_i\\
&-\overline{y}_i-\sum_{j=0}^{n}\overline{a}_j\overline{x}_{ij}\leqq L^{-1}(1-h)\left\{\sum_{j\in J_1,J_2}\left[-\overline{a}_j f_{ij}-c_j\overline{x}_{ij}-L^{-1}(1-h)c_j f_{ij}\right]+\sum_{j\in,J_3}\left[\overline{a}_j f_{ij}-c_j\overline{x}_{ij}+L^{-1}(1-h)c_j f_{ij}\right]\right\}\\
&\qquad +L^{-1}(h)e_i
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

biçiminde verilir.

Teorem:

$T_l\left(h;J_1,J_2,J_3\right)$, $\left(\overline{a}^*,c^*\right)$'ın bir optimal çözümü olsun. Eğer,

$$
\begin{aligned}
&\overline{a}_j^*-L^{-1}(h)c_j^*>0, \qquad j\in J_1\\
&\overline{a}_j^*-L^{-1}(h)c_j^*<0, \quad \overline{a}_j^*+L^{-1}(h)c_j^*>0, \quad j\in J_2\\
&\overline{a}_j^*+L^{-1}(h)c_j^*<0, \qquad j\in J_3
\end{aligned}
\tag{3.23}
$$

koşulları sağlanırsa, $\left(\overline{a}^*,c^*\right)$, $T_l(h)$'nın yerel optimal bir çözümüdür (Sakawa ve Yano 1992).

3.2.2. Hojati-Bector-Smimou yöntemi

Girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan veriler için Hojati ve ark. (2005) tarafından önerilen yöntem bulanık lineer programlama temeline dayanmaktadır. Bu yöntemde ele alınan bulanık doğrusal regresyon modeli,

$$Y_i = A_0 + A_1 x_{i1} + A_2 x_{i2} + \cdots + A_n x_{in} \tag{3.24}$$

biçimindedir. Girdi verisi $X_{ij} = \left(x_{ij}, f_{ij}\right)_L$, çıktı verisi $Y_i = \left(y_i, e_i\right)_L$ ve bulanık regresyon katsayısı $A_j = \left(\alpha_j, c_j\right)_L$ olarak ifade edilmektedir. Buradaki asıl amaç bulanık doğrusal regresyon modelindeki bulanık regresyon katsayısı $A_j = \left(\alpha_j, c_j\right)_L$'yi elde etmektir. Bu amaçla, Hojati ve ark. (2005) tarafından önerilen lineer programlama problemi,

HBS2:

$$\begin{aligned}
&Min \sum_{i=1}^{n} \left(d_{ilU}^{+} + d_{ilU}^{-} + d_{ilL}^{+} + d_{ilL}^{-} + d_{irU}^{+} + d_{irU}^{-} + d_{irL}^{+} + d_{irL}^{-} \right) \\
&\sum_{j=0}^{1} \left(\alpha_j + (1-h)c_j\right)\left(\overline{x}_{ij} - (1-h) f_{ij}\right) + d_{ilU}^{+} - d_{ilU}^{-} = \overline{y}_i + (1-h)e_i \quad i = 1,\ldots,n \\
&\sum_{j=0}^{1} \left(\alpha_j + (1-h)c_j\right)\left(\overline{x}_{ij} + (1-h) f_{ij}\right) + d_{irU}^{+} - d_{irU}^{-} = \overline{y}_i + (1-h)e_i \quad i = 1,\ldots,n \\
&\sum_{j=0}^{1} \left(\alpha_j - (1-h)c_j\right)\left(\overline{x}_{ij} - (1-h) f_{ij}\right) + d_{ilL}^{+} - d_{ilL}^{-} = \overline{y}_i - (1-h)e_i \quad i = 1,\ldots,n \\
&\sum_{j=0}^{1} \left(\alpha_j - (1-h)c_j\right)\left(\overline{x}_{ij} + (1-h) f_{ij}\right) + d_{irL}^{+} - d_{irL}^{-} = \overline{y}_i - (1-h)e_i \quad i = 1,\ldots,n \\
&d_{ilU}^{+}, d_{ilU}^{-}, d_{irU}^{+}, d_{irU}^{-}, d_{ilL}^{+}, d_{ilL}^{-}, d_{irL}^{+}, d_{irL}^{-} \geq 0 \quad i = 1,\ldots,n \\
&\alpha_j \text{ işareti belirtilmemiş} \quad j = 0,1 \\
&c_j \geq 0 \quad j = 0,1
\end{aligned} \tag{3.25}$$

biçiminde oluşturulmuştur.

Eşitlik (3.25)'de; d_{ilU}^{+}, d_{ilU}^{-}, d_{irU}^{+}, d_{irU}^{-}, d_{ilL}^{+}, d_{ilL}^{-}, d_{irL}^{+}, d_{irL}^{-} sapma değişkenlerini göstermektedir. *l* indisi; bağımsız değişken aralıklarının sol (alt) noktasını, *r* indisi; bağımsız değişken aralıklarının sağ (üst) noktasını, *U* indisi; gözlem ve tahmini aralıklarının üst noktasını, *L* indisi; gözlem ve tahmini aralıklarının alt noktasını göstermektedir (Hojati ve ark. 2005).

3.2.3. Yang-Lin yöntemi

Yang-Lin (2002) tarafından önerilen yöntemlerde ele alınan girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan bulanık doğrusal regresyon modeli;

$$Y_j = A_0 + A_1 X_{j1} + \cdots + A_k X_{jk}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

(3.26)

biçimindedir. Çıktı verisi $Y_j = \left(y_j, \underline{e}_j, \overline{e}_j\right)_{LR}$, girdi verisi $X_{ji} = \left(x_{ji}, \underline{f}_{ji}, \overline{f}_{ji}\right)_{LR}$ ve parametreler $A_i = \left(\alpha_i, \underline{c}_i, \overline{c}_i\right)_{LR}$ biçiminde gösterilir. Burada $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ şeklinde gösterilen bir bulanık sayı için üyelik fonksiyonu

$$\mu_M(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{\alpha}\right) & x \le m \\ R\left(\dfrac{x-m}{\beta}\right) & x \ge m \end{cases} \qquad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

biçiminde verilir. Burada; *m* ortalama değeri, α sol sapmayı, β sağ sapmayı göstermektedir. Eğer $L(x) = R(x) = 1 - x$, ise $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ bir üçgensel bulanık sayıyı gösterir.

Yang-Lin (2005) tarafından girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan bulanık regresyon modeli için iki farklı yöntem önerilmiştir. Bu yöntemler yaklaşık uzaklık bulanık en küçük kareler yöntemi (ADFLS) ve aralık uzaklık bulanık en küçük kareler (IDFLS) yöntemleridir.

Yöntemlerden ilki olan ADFLS yönteminde;

$$d_{LR}^2(X, Y) = (x - y)^2 + \left[\left(x - l\underline{f}\right) - \left(y - l\underline{e}\right)\right]^2 + \left[\left(x + r\overline{f}\right) - \left(y + r\overline{e}\right)\right]^2 \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} J\left(A_0, A_1, \ldots, A_k\right) &= \sum_{j=1}^{n} d_{LR}^2\left(Y_j, A_0 + A_1 X_{j1} + \cdots + A_k X_{jk}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left[\left(y_j - \hat{y}_j\right)^2 + \left(\left(y_j - l\underline{e}_j\right) - \left(\hat{y}_j - l\underline{\hat{e}}_j\right)\right)^2 + \left(\left(y_j + r\overline{e}_j\right) - \left(\hat{y}_j + r\overline{\hat{e}}_j\right)\right)^2\right] \end{aligned} \tag{3.28}$$

minimizasyon problemi ele alınmıştır. $\underline{c}_i \ge 0$ ve $\overline{c}_i \ge 0$ kısıtlarına göre A_i üzerinden $J\left(A_0, A_1, \ldots, A_k\right)$'nın minimizasyonu; yaklaşık uzaklık bulanık en küçük kareler yöntemi (ADFLS) olarak adlandırılmaktadır. Eşitlik (3.28) ile verilen ADFLS yönteminde $A_0 + A_1 X_{i1} + \cdots + A_k X_{ik} \cong \left(\hat{y}_j, \underline{\hat{e}}_j, \overline{\hat{e}}_j\right)_{LR}$ ele alınır. Burada;

$$\hat{y}_j = \alpha_0 + \sum_{p=1}^{k}\left(\alpha_p x_{jp}\right) \tag{3.29}$$

$$\underline{e}_j = \underline{c}_0 + \sum_{A_p \in H_1} \left[s_{jp} \left(\alpha_p f_{jp} + x_{jp} \underline{c}_p \right) + \left(1 - s_{jp}\right) \left(\alpha_p \underline{f}_{jp} - x_{jp} \overline{c}_p \right) \right]$$
$$+ \sum_{A_p \in H_2} \left[s_{jp} \left(x_{jp} \underline{c}_p - \alpha_p \overline{f}_{jp} \right) + \left(1 - s_{jp}\right) \left(-\alpha_p \overline{f}_{jp} - x_{jp} \overline{c}_p \right) \right] \tag{3.30}$$

$$\hat{\overline{e}}_j = \overline{c}_0 + \sum_{A_p \in H_1} \left[s_{jp} \left(\alpha_p \overline{f}_{jp} + x_{jp} \overline{c}_{jp} \right) + \left(1 - s_{jp}\right) \left(\alpha_{jp} \overline{f}_{jp} - x_{jp} \underline{c}_{jp} \right) \right]$$
$$+ \sum_{A_p \in H_2} \left[s_{jp} \left(x_{jp} \overline{c}_{jp} - \alpha_{jp} \underline{f}_{jp} \right) + \left(1 - s_{jp}\right) \left(\underline{c}_{jp} \underline{f}_{jp} - x_{jp} \underline{c}_{jp} \right) \right] \tag{3.31}$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik (3.29-3.31)'da;

$$H_1 = \left\{ A_p \,\middle|\, A_p > 0, \quad p \in \{1, \ldots, k\} \right\}$$

$$H_2 = \left\{ A_p \,\middle|\, A_p < 0, \quad p \in \{1, \ldots, k\} \right\}$$

olduğu varsayılır ve

$$s_{jp} = \begin{cases} 1, & X_{jp} \geq 0 \\ 0, & X_{jp} < 0 \end{cases}$$

$$l = \int_0^1 L^{-1}(h) dh$$

$$r = \int_0^1 R^{-1}(h) dh$$

'dir. Burada; $L^{-1}(h) = 1 - h$ ve $R^{-1}(h) = 1 - h$ biçimindedir.

İkinci yöntem olan aralık uzaklık bulanık en küçük kareler (IDFLS) yönteminde, $(A_0 + A_1 X_{j1} + \cdots + A_k X_{jk})_h = \left(\tilde{A} \otimes \tilde{X}_j \right)_h = \left[\left(\tilde{A} \otimes \tilde{X}_j \right)_h^L, \left(\tilde{A} \otimes \tilde{X}_j \right)_h^R \right]$ şeklindedir. Burada;

$$\rho\left(A_0, A_1, \ldots, A_k\right) = \sum_{j=1}^{n} D^2 \left(Y_j, A_0 + A_1 X_{j1} + \cdots + A_k X_{jk} \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \left(\left(Y_{jh}^L - \left(\tilde{A} \otimes \tilde{X}_j \right)_h^L \right)^2 + \left(Y_{jh}^R - \left(\tilde{A} \otimes \tilde{X}_j \right)_h^R \right)^2 \right) dh \tag{3.32}$$

minimizasyon problemi ele alınmıştır. $\underline{c}_i \geq 0$ ve $\overline{c}_i \geq 0$ kısıtlarına göre A_i üzerinden $\rho\left(A_0, A_1, \ldots, A_k\right)$'nın minimizasyonu; aralık uzaklık bulanık en küçük kareler yöntemi (IDFLS) olarak adlandırılır. Eşitlik (3.32)'de;

$$\left(\tilde{A}\otimes\tilde{X}_j\right)_h^L = \sum_{A_i\in P_1}\left(\alpha_i - L_{a_i}^{-1}(h)\underline{c}_i\right)\left(x_j - L_{x_{ji}}^{-1}(h)\underline{f}_j\right) + \sum_{A_i\in P_2\cup P_3}\left(\alpha_i - L_{a_i}^{-1}(h)\underline{c}_i\right)\left(x_j + R_{x_{ji}}^{-1}(h)\overline{f}_j\right) \tag{3.33}$$

$$\left(\tilde{A}\otimes\tilde{X}_j\right)_h^R = \sum_{A_i\in P_1\cup P_2}\left(\alpha_i + R_{a_i}^{-1}(h)\overline{c}_i\right)\left(x_j + R_{x_{ji}}^{-1}(h)\overline{c}_i\right) + \sum_{A_i\in P_3}\left(\alpha_i + R_{a_i}^{-1}(h)\overline{c}_i\right)\left(x_j - L_{x_{ji}}^{-1}(h)\alpha_{x_{ji}}\underline{c}_i\right) \tag{3.34}$$

biçiminde elde edilir. Burada;

$$P_1 = \left\{A_i \mid \alpha_i - L_{a_i}^{-1}(h)\underline{c}_i \geq 0\right\}$$

$$P_2 = \left\{A_i \mid -R_{a_i}^{-1}(h)\overline{c}_i \leq \alpha_i < -L_{a_i}^{-1}(h)\underline{c}_i\right\}$$

$$P_3 = \left\{A_i \mid \alpha_i < -R_{a_i}^{-1}(h)\overline{c}_i\right\}$$

olduğu varsayılır ve

$$Y_{jh}^L = y_j - L_{y_j}^{-1}(h)\underline{e}_j$$

$$Y_{jh}^R = y_j + R_{y_j}^{-1}(h)\overline{e}_j$$

'dir (Yang ve Lin 2002).

3.2.4. Diamond yöntemi

Girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan veriler için Diamond (1988) tarafından önerilen bulanık en küçük kareler temeline dayanan bu yöntemde;

(F1): $Y = a + bX, \qquad a,b \in R$

(F2): $Y = E + bX, \qquad b \in R, \quad E \in \nu(R)$

olmak üzere iki model önerilmiştir. Bu çalışmada ele alınan F1 modelinde $X_i = \left(x_i, \underline{f}_i, \overline{f}_i\right)_T$ ve $Y_i = \left(y_i, \underline{e}_i, \overline{e}_i\right)_T$ biçimindedir.

F1 modeli için en küçük kareler optimizasyon problemi;

$$\text{Min } r(a,b) = \sum d\left(a + bX_i, Y_i\right)^2 \tag{3.35}$$

şeklindedir. Eşitlik (3.35)'de $b \geq 0$ ve $b < 0$ olmak üzere iki durum söz konusudur.

$b \geq 0$ ise,

$$d\left(a+bX_i,Y_i\right)^2=\left[a+bx_i-y_i-\left(b\underline{f}_i-\underline{e}_i\right)\right]^2+\left[a+bx_i-y_i+\left(b\overline{f}_i-\overline{e}_i\right)\right]^2+\left(a+bx_i-y_i\right)^2 \tag{3.36}$$

eşitliği ele alınmakta ve

$\left(S_+\right)$:

$$3Na+b\sum\left[3x_i+\delta\left(X_i\right)\right]=\sum\left[3y_i+\delta\left(Y_i\right)\right] \tag{3.37}$$

$$a\sum\left[3x_i+\delta\left(X_i\right)\right]+b\sum\left[x_i^2+\left(x_i-\underline{f}_i\right)^2+\left(x_i+\overline{f}_i\right)^2\right]$$
$$=\sum\left[\left(x_i-\underline{f}_i\right)\left(y_i-\underline{e}_i\right)+\left(x_i+\overline{f}_i\right)\left(y_i+\overline{e}_i\right)+x_iy_i\right] \tag{3.38}$$

denklemleri elde edilmektedir. $\left(S_+\right)$ ile verilen denklem sisteminin çözümü sonucunda a_+,b_+ çözümleri elde edilir.

$b<0$ ise,

$$d\left(a+bX_i,Y_i\right)^2=\left(a+bx_i-y_i+b\overline{f}_i+\underline{e}_i\right)^2+\left[a+bx_i-y_i-\left(b\underline{f}_i+\overline{e}_i\right)\right]^2+\left(a+bx_i-y_i\right)^2 \tag{3.39}$$

eşitliği alınmakta ve

$\left(S_-\right)$:

$$3Na+b\sum\left[3x_i+\delta\left(X_i\right)\right]=\sum\left[3y_i+\delta\left(Y_i\right)\right] \tag{3.40}$$

$$a\sum\left[3x_i+\delta\left(X_i\right)\right]+b\sum\left[x_i^2+\left(x_i+\overline{f}_i\right)^2+\left(x_i-\underline{f}_i\right)^2\right]$$
$$=\sum\left[\left(x_i+\overline{f}_i\right)\left(y_i-\underline{e}_i\right)+\left(x_i-\underline{f}_i\right)\left(y_i+\overline{e}_i\right)+x_iy_i\right] \tag{3.41}$$

denklemleri elde edilmektedir. $\left(S_-\right)$ ile verilen denklem sisteminin çözümü sonucunda a_-,b_- çözümleri elde edilir.

Eşitlik (3.37-3.41)'de, X değişkeni için;

$$\delta\left(X\right)=\overline{f}-\underline{f}$$

$$\hat{x}=\sum x_i/N$$

$$\delta\left(\hat{X}\right)=\sum\delta\left(X_i\right)/N$$

Y değişkeni için;

$$\delta(Y) = \bar{e} - \underline{e}$$

$$\hat{y} = \sum y_i / N$$

$$\delta(\hat{Y}) = \sum \delta(Y_i) / N$$

değerleri hesaplanır.

Eğer $b_- \geq 0$ veya $b_+ \leq 0$ ise, bulanık veri seti tight (sıkı)'dır. Eğer $b_- \geq 0$ ise veri seti tight pozitiftir, $b_+ \leq 0$ ise tight negatiftir. Eğer dejenere olmayan bulanık veri seti tight ise Eşitlik (3.35) probleminin bir tek çözümü vardır. Eğer veri seti tight pozitif ise en küçük kareler eğrisi (S_+) çözümü ile, tight negatif ise (S_-) çözümü ile verilir.

Yardımcı Teorem: Dejenere olmayan her veri seti için $b_+ \geq b_-$'dir. Burada,

$$T^2 b_+ = 3\sum 3\{(x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y}) + (y_i - \hat{y})\left[\delta(X_i) - \delta(\hat{X})\right] + (x_i - \hat{x})\left[\delta(Y_i) - \delta(\hat{Y})\right]$$
$$+ \left[\delta(X_i) - \delta(\hat{X})\right]\left[\delta(Y_i) - \delta(\hat{Y})\right] + \underline{f}_i \bar{e}_i + \bar{f}_i \underline{e}_i\} + 2N\delta(\hat{X})\delta(\hat{Y})$$

$$T^2 = \sum\left\{\left[3(x_i - \hat{x}) + \delta(X_i) - \delta(\hat{X})\right]^2 + 2\underline{f}_i \bar{f}_i\right\}$$

ve

$$T^2(b_+ - b_-) = 3\sum\left(\underline{f}_i + \underline{e}_i\right)\left(\bar{f}_i + \bar{e}_i\right) \geq 0$$

'dır (Diamond 1988).

3.2.5. Ming-Friedman-Kandel yöntemi

Girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan veriler için Ming-Friedman-Kandel (1997) tarafından önerilen bulanık en küçük kareler temeline dayanan yöntemde ele alınan bulanık doğrusal regresyon modeli,

$$Y_i = a + bX_i = \left(a + bx_i, b\underline{f}_i, b\bar{f}_i\right) \tag{3.42}$$

biçimindedir. Girdi verisi $X_i = \left(x_i, \underline{f}_i, \bar{f}_i\right)$, çıktı verisi $Y_i = \left(y_i, \underline{e}_i, \bar{e}_i\right)$ biçiminde ele alınmıştır.

En küçük kareler optimizasyon problemi;

$$\text{Min}\, r(a,b) = \sum d\left(a + bX_i, Y_i\right)^2 \tag{3.43}$$

biçimindedir. Eşitlik (3.43)'da $b \geq 0$ ve $b < 0$ olmak üzere iki durum söz konusudur.

$b \geq 0$ ise,

$$r_+(a,b) = \sum_{i=1}^{N}\left[\left(a+bx_i-y_i-b\underline{f}_i+\underline{e}_i\right)^2+\left(a+bx_i-y_i+b\overline{f}_i-\overline{e}_i\right)^2+2\left(a+bx_i-y_i\right)^2\right] \tag{3.44}$$

eşitliği ele alınmakta ve

$\left(S_+^*\right)$:

$$4aN+b\sum_{i=1}^{N}\left(4x_i+\overline{f}_i-\underline{f}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(4y_i+\overline{e}_i-\underline{e}_i\right) \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned} &a\sum_{i=1}^{N}\left(4x_i+\overline{f}_i-\underline{f}_i\right)+b\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i-\underline{f}_i\right)^2+\left(x_i+\overline{f}_i\right)^2+2x_i^2\right] \\ &=\sum_{i=1}^{N}\left[\left(y_i-\underline{e}_i\right)\left(x_i-\underline{f}_i\right)+\left(y_i+\overline{e}_i\right)\left(x_i+\overline{f}_i\right)+2x_iy_i\right] \end{aligned} \tag{3.46}$$

denklemleri elde edilmektedir. $\left(S_+^*\right)$ ile verilen denklem sisteminin çözümü sonucunda a_+, b_+ çözümleri elde edilir.

$b < 0$ ise,

$$r_-(a,b) = \sum_{i=1}^{N}\left[\left(a+bx_i-y_i+b\overline{f}_i+\underline{e}_i\right)^2+\left(a+bx_i-y_i-b\underline{f}_i-\overline{e}_i\right)^2+2\left(a+bx_i-y_i\right)^2\right] \tag{3.47}$$

eşitliği alınmakta ve

$\left(S_-^*\right)$:

$$4aN+b\sum_{i=1}^{N}\left(4x_i+\overline{f}_i-\underline{f}_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\left(4y_i+\overline{e}_i-\underline{e}_i\right) \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned} &a\sum_{i=1}^{N}\left(4x_i+\overline{f}_i-\underline{f}_i\right)+b\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i-\underline{f}_i\right)^2+\left(x_i+\overline{f}_i\right)^2+2x_i^2\right] \\ &=\sum_{i=1}^{N}\left[\left(x_i-\overline{f}_i\right)\left(y_i-\underline{e}_i\right)+\left(x_i+\underline{f}_i\right)\left(y_i-\overline{e}_i\right)+2x_iy_i\right] \end{aligned} \tag{3.49}$$

denklemleri elde edilmektedir. $\left(S_-^*\right)$ ile verilen denklem sisteminin çözümü sonucunda a_-, b_- çözümleri elde edilir.

Eğer $b_- \geq 0$ veya $b_+ \leq 0$ ise, bulanık veri seti tight (sıkı)'dır. Eğer $b_- \geq 0$ ise veri seti tight pozitiftir, $b_+ \leq 0$ ise tight negatiftir. Eğer dejenere olmayan bulanık veri seti tight ise

Eşitlik (3.43) probleminin bir tek çözümü vardır. Eğer veri seti tight pozitif ise en küçük kareler eğrisi $\left(S_{+}^{*}\right)$ çözümü ile tight negatif ise $\left(S_{-}^{*}\right)$ çözümü ile verilir (Ming ve ark. 1997).

4. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde, üçüncü bölümde ayrıntılı biçimde incelenen bulanık en küçük kareler ve lineer programlama temeline dayanan bulanık regresyon yöntemlerine ilişkin uygulamalara yer verilmiştir. Kesim 4.1'de girdisi kesin-çıktısı bulanık sayı, Kesim 4.2'de girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan verilere ilişkin sayısal örnekler ele alınmıştır. Çözüm sürecinde WinQSB paket programı ve EXCEL programından yararlanılmıştır.

4.1. Girdisi Kesin-Çıktısı Bulanık Sayı Olan Verilere İlişkin Sayısal Örnekler

Bu kesimde, girdisi kesin-çıktısı bulanık sayı olan bulanık regresyon yöntemlerinden Tanaka yöntemi, HBS1 yöntemi, Özelkan yöntemi ve Diamond yöntemi kullanılarak bulanık parametre değerleri, bulanık tahmini değerler ve hata kareler ortalaması (MSE) değeri elde edilmiştir.

Bu bölümde yöntemleri karşılaştırmada kullanılan hata kareler ortalaması değeri,

$$E = \frac{1}{N}\sum\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 + \left(e_i - \hat{e}_i\right)^2 \tag{4.1}$$

eşitliğinden hesaplanmıştır.

Örnek 4.1.1. Bu örnekte, Tanaka (1987) tarafından yapılmış olan makale çalışmada ele alınan veri seti kullanılmış ve Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Girdisi kesin-çıktısı bulanık veriler (Tanaka 1987)

i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	Y_i	$\left(Y_i^L, Y_i^U\right)$
1	3.0	5.0	9.0	$(94,38)_L$	(56, 132)
2	14.0	8.0	3.0	$(121,45)_L$	(76, 166)
3	7.0	1.0	4.0	$(49,27)_L$	(22, 76)
4	11.0	7.0	3.0	$(104,38)_L$	(66, 142)
5	7.0	12.0	15.0	$(192,71)_L$	(121, 263)
6	8.0	15.0	10.0	$(194,61)_L$	(133, 255)
7	3.0	9.0	6.0	$(111,33)_L$	(78, 144)
8	12.0	15.0	11.0	$(211,72)_L$	(139, 283)
9	10.0	5.0	8.0	$(110,49)_L$	(73, 159)
10	9.0	7.0	4.0	$(103,37)_L$	(66, 140)

Örnek 4.1.1

için oluşturulan bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3$ biçimindedir. Tanaka, HBS1 ve Özelkan yöntemlerinin çözüm sonucunda elde edilen bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve hata kareler ortalaması (MSE) değerleri Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Tanaka Yöntemi

Kesim 3.1.1'de incelenen Tanaka yönteminde ele alınan Eşitlik (3.6)'dan yararlanarak,

$$
\begin{aligned}
Min \quad & 10c_0 + 84c_1 + 84c_2 + 73c_3 \\
& \alpha_0 + 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 9\alpha_3 + c_0 + 3c_1 + 5c_2 + 9c_3 \geq 132 \\
& \alpha_0 + 14\alpha_1 + 8\alpha_2 + 3\alpha_3 + c_0 + 14c_1 + 8c_2 + 3c_3 \geq 166 \\
& \alpha_0 + 7\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + c_0 + 7c_1 + c_2 + 4c_3 \geq 76 \\
& \alpha_0 + 11\alpha_1 + 7\alpha_2 + 3\alpha_3 + c_0 + 11c_1 + 7c_2 + 3c_3 \geq 142 \\
& \alpha_0 + 7\alpha_1 + 12\alpha_2 + 15\alpha_3 + c_0 + 7c_1 + 12c_2 + 15c_3 \geq 263 \\
& \alpha_0 + 8\alpha_1 + 15\alpha_2 + 10\alpha_3 + c_0 + 8c_1 + 15c_2 + 10c_3 \geq 255 \\
& \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 6\alpha_3 + c_0 + 3c_1 + 9c_2 + 6c_3 \geq 144 \\
& \alpha_0 + 12\alpha_1 + 15\alpha_2 + 11\alpha_3 + c_0 + 12c_1 + 15c_2 + 11c_3 \geq 283 \\
& \alpha_0 + 10\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3 + c_0 + 10c_1 + 5c_2 + 8c_3 \geq 159 \\
& \alpha_0 + 9\alpha_1 + 7\alpha_2 + 4\alpha_3 + c_0 + 9c_1 + 7c_2 + 4c_3 \geq 140 \\
& \alpha_0 + 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 9\alpha_3 - c_0 - 3c_1 - 5c_2 - 9c_3 \leq 56 \\
& \alpha_0 + 14\alpha_1 + 8\alpha_2 + 3\alpha_3 - c_0 - 14c_1 - 8c_2 - 3c_3 \leq 76 \\
& \alpha_0 + 7\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 - c_0 - 7c_1 - c_2 - 4c_3 \leq 22 \\
& \alpha_0 + 11\alpha_1 + 7\alpha_2 + 3\alpha_3 - c_0 - 11c_1 - 7c_2 - 3c_3 \leq 66 \\
& \alpha_0 + 7\alpha_1 + 12\alpha_2 + 15\alpha_3 - c_0 - 7c_1 - 12c_2 - 15c_3 \leq 121 \\
& \alpha_0 + 8\alpha_1 + 15\alpha_2 + 10\alpha_3 - c_0 - 8c_1 - 15c_2 - 10c_3 \leq 133 \\
& \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 6\alpha_3 - c_0 - 3c_1 - 9c_2 - 6c_3 \leq 78 \\
& \alpha_0 + 12\alpha_1 + 15\alpha_2 + 11\alpha_3 - c_0 - 12c_1 - 15c_2 - 11c_3 \leq 139 \\
& \alpha_0 + 10\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3 - c_0 - 10c_1 - 5c_2 - 8c_3 \leq 61 \\
& \alpha_0 + 9\alpha_1 + 7\alpha_2 + 4\alpha_3 - c_0 - 9c_1 - 7c_2 - 4c_3 \leq 66
\end{aligned}
$$

lineer programlama problemi oluşturulmuş ve WinQSB paket programında çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Özelkan Yöntemi

Kesim 3.1.2'de verilen Özelkan yönteminde ele alınan Eşitlik (3.11)'den yararlanarak,

$$\text{Min } d_{1U} + d_{2U} + \cdots + d_{9U} + d_{10U} + d_{1L} + d_{2L} + \cdots + d_{9L} + d_{10L}$$

$$d_{1U} + \alpha_0 + 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 9\alpha_3 + c_0 + 3c_1 + 5c_2 + 9c_3 \geq 132$$
$$d_{2U} + \alpha_0 + 14\alpha_1 + 8\alpha_2 + 3\alpha_3 + c_0 + 14c_1 + 8c_2 + 3c_3 \geq 166$$
$$d_{3U} + \alpha_0 + 7\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + c_0 + 7c_1 + c_2 + 4c_3 \geq 76$$
$$d_{4U} + \alpha_0 + 11\alpha_1 + 7\alpha_2 + 3\alpha_3 + c_0 + 11c_1 + 7c_2 + 3c_3 \geq 142$$
$$d_{5U} + \alpha_0 + 7\alpha_1 + 12\alpha_2 + 15\alpha_3 + c_0 + 7c_1 + 12c_2 + 15c_3 \geq 263$$
$$d_{6U} + \alpha_0 + 8\alpha_1 + 15\alpha_2 + 10\alpha_3 + c_0 + 8c_1 + 15c_2 + 10c_3 \geq 255$$
$$d_{7U} + \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 6\alpha_3 + c_0 + 3c_1 + 9c_2 + 6c_3 \geq 144$$
$$d_{8U} + \alpha_0 + 12\alpha_1 + 15\alpha_2 + 11\alpha_3 + c_0 + 12c_1 + 15c_2 + 11c_3 \geq 283$$
$$d_{9U} + \alpha_0 + 10\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3 + c_0 + 10c_1 + 5c_2 + 8c_3 \geq 159$$
$$d_{10U} + \alpha_0 + 9\alpha_1 + 7\alpha_2 + 4\alpha_3 + c_0 + 9c_1 + 7c_2 + 4c_3 \geq 140$$
$$d_{1L} + \alpha_0 + 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 9\alpha_3 - c_0 - 3c_1 - 5c_2 - 9c_3 \leq 56$$
$$d_{2L} + \alpha_0 + 14\alpha_1 + 8\alpha_2 + 3\alpha_3 - c_0 - 14c_1 - 8c_2 - 3c_3 \leq 76$$
$$d_{3L} + \alpha_0 + 7\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 - c_0 - 7c_1 - c_2 - 4c_3 \leq 22$$
$$d_{4L} + \alpha_0 + 11\alpha_1 + 7\alpha_2 + 3\alpha_3 - c_0 - 11c_1 - 7c_2 - 3c_3 \leq 66$$
$$d_{5L} + \alpha_0 + 7\alpha_1 + 12\alpha_2 + 15\alpha_3 - c_0 - 7c_1 - 12c_2 - 15c_3 \leq 121$$
$$d_{6L} + \alpha_0 + 8\alpha_1 + 15\alpha_2 + 10\alpha_3 - c_0 - 8c_1 - 15c_2 - 10c_3 \leq 133$$
$$d_{7L} + \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 6\alpha_3 - c_0 - 3c_1 - 9c_2 - 6c_3 \leq 78$$
$$d_{8L} + \alpha_0 + 12\alpha_1 + 15\alpha_2 + 11\alpha_3 - c_0 - 12c_1 - 15c_2 - 11c_3 \leq 139$$
$$d_{9L} + \alpha_0 + 10\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3 - c_0 - 10c_1 - 5c_2 - 8c_3 \leq 61$$
$$d_{10L} + \alpha_0 + 9\alpha_1 + 7\alpha_2 + 4\alpha_3 - c_0 - 9c_1 - 7c_2 - 4c_3 \leq 66$$
$$10c_0 + 84c_1 + 84c_2 + 73c_3 \leq 25$$

lineer programlama problemi oluşturulmuş ve WinQSB paket programında çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar Çizelge 4.2'de verilmiştir.

HBS1 Yöntemi

Kesim 3.1.3'de ele alınan HBS1 yönteminde ele alınan Eşitlik (3.13)'den yararlanarak,

$$\text{Min}\, d_{1L}^{+} + d_{2L}^{+} + \cdots + d_{10L}^{+} + d_{1L}^{-} + d_{2L}^{-} + \cdots + d_{10L}^{-} + d_{1U}^{+} + d_{2U}^{+} + \cdots + d_{10U}^{+} + d_{1U}^{-} + d_{2U}^{-} + \cdots + d_{10U}^{-}$$

$$\begin{aligned}
&d_{1U}^{+} - d_{1U}^{-} + \alpha_0 + 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 9\alpha_3 + c_0 + 3c_1 + 5c_2 + 9c_3 = 132\\
&d_{2U}^{+} - d_{2U}^{-} + \alpha_0 + 14\alpha_1 + 8\alpha_2 + 3\alpha_3 + c_0 + 14c_1 + 8c_2 + 3c_3 = 166\\
&d_{3U}^{+} - d_{3U}^{-} + \alpha_0 + 7\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + c_0 + 7c_1 + c_2 + 4c_3 = 76\\
&d_{4U}^{+} - d_{4U}^{-} + \alpha_0 + 11\alpha_1 + 7\alpha_2 + 3\alpha_3 + c_0 + 11c_1 + 7c_2 + 3c_3 = 142\\
&d_{5U}^{+} - d_{5U}^{-} + \alpha_0 + 7\alpha_1 + 12\alpha_2 + 15\alpha_3 + c_0 + 7c_1 + 12c_2 + 15c_3 = 263\\
&d_{6U}^{+} - d_{6U}^{-} + \alpha_0 + 8\alpha_1 + 15\alpha_2 + 10\alpha_3 + c_0 + 8c_1 + 15c_2 + 10c_3 = 255\\
&d_{7U}^{+} - d_{7U}^{-} + \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 6\alpha_3 + c_0 + 3c_1 + 9c_2 + 6c_3 = 144\\
&d_{8U}^{+} - d_{8U}^{-} + \alpha_0 + 12\alpha_1 + 15\alpha_2 + 11\alpha_3 + c_0 + 12c_1 + 15c_2 + 11c_3 = 283\\
&d_{9U}^{+} - d_{9U}^{-} + \alpha_0 + 10\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3 + c_0 + 10c_1 + 5c_2 + 8c_3 = 159\\
&d_{10U}^{+} - d_{10U}^{-} + \alpha_0 + 9\alpha_1 + 7\alpha_2 + 4\alpha_3 + c_0 + 9c_1 + 7c_2 + 4c_3 = 140\\
&d_{1L}^{+} - d_{1L}^{-} + \alpha_0 + 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 9\alpha_3 - c_0 - 3c_1 - 5c_2 - 9c_3 = 56\\
&d_{2L}^{+} - d_{2L}^{-} + \alpha_0 + 14\alpha_1 + 8\alpha_2 + 3\alpha_3 - c_0 - 14c_1 - 8c_2 - 3c_3 = 76\\
&d_{3L}^{+} - d_{3L}^{-} + \alpha_0 + 7\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 - c_0 - 7c_1 - c_2 - 4c_3 = 22\\
&d_{4L}^{+} - d_{4L}^{-} + \alpha_0 + 11\alpha_1 + 7\alpha_2 + 3\alpha_3 - c_0 - 11c_1 - 7c_2 - 3c_3 = 66\\
&d_{5L}^{+} - d_{5L}^{-} + \alpha_0 + 7\alpha_1 + 12\alpha_2 + 15\alpha_3 - c_0 - 7c_1 - 12c_2 - 15c_3 = 121\\
&d_{6L}^{+} - d_{6L}^{-} + \alpha_0 + 8\alpha_1 + 15\alpha_2 + 10\alpha_3 - c_0 - 8c_1 - 15c_2 - 10c_3 = 133\\
&d_{7L}^{+} - d_{7L}^{-} + \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 6\alpha_3 - c_0 - 3c_1 - 9c_2 - 6c_3 = 78\\
&d_{8L}^{+} - d_{8L}^{-} + \alpha_0 + 12\alpha_1 + 15\alpha_2 + 11\alpha_3 - c_0 - 12c_1 - 15c_2 - 11c_3 = 139\\
&d_{9L}^{+} - d_{9L}^{-} + \alpha_0 + 10\alpha_1 + 5\alpha_2 + 8\alpha_3 - c_0 - 10c_1 - 5c_2 - 8c_3 = 61\\
&d_{10L}^{+} - d_{10L}^{-} + \alpha_0 + 9\alpha_1 + 7\alpha_2 + 4\alpha_3 - c_0 - 9c_1 - 7c_2 - 4c_3 = 66
\end{aligned}$$

lineer programlama problemi oluşturulmuş ve WinQSB paket programında çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Çizelge 4.2. Tanaka (1987) verilerine ait bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri

Bulanık parametreler	Tanaka	Özelkan (v=25)	HBS1
α_0	0	0	0
c_0	0	0	0
$A_0 = (\alpha_0, c_0)$	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
α_1	3	5	3
c_1	2	0	2
$A_1 = (\alpha_1, c_1)$	(3, 2)	(5, 0)	(3, 2)
α_2	8	8.702	8
c_2	1	0.297	1
$A_2 = (\alpha_2, c_2)$	(8, 1)	(8.702, 0.297)	(8, 1)
α_3	5	8	5
c_3	3	0	3
$A_3 = (\alpha_3, c_3)$	(5, 3)	(8, 0)	(5, 3)
$c_0 + c_1 + c_2 + c_3$	6	0.297	6
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} c_j x_{ij}$	471	24.948	471
Gözlem No	**Tahmini Aralıklar** $\left(\hat{Y}_i^L, \hat{Y}_i^U\right)$		
1	(56, 132)	(129.02, 131.99)	(56, 132)
2	(76, 166)	(161.24, 142.23)	(76, 166)
3	(20, 76)	(75.41, 75.99)	(20, 76)
4	(66, 142)	(137.83, 141.99)	(66, 142)
5	(121, 263)	(255.86, 262.98)	(121, 263)
6	(133, 255)	(246.07, 254.98)	(133, 255)
7	(78, 144)	(138.64, 143.99)	(78, 144)
8	(139, 283)	(274.07, 282.98)	(139, 283)
9	(61, 186)	(156.02, 158.99)	(61, 186)
10	(66, 140)	(135.83, 139.99)	(66, 140)

Örnek 4.1.1'de; h=0 için Tanaka yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (0,0) + (3,2)x_1 + (8,1)x_2 + (5,3)x_3$, Özelkan yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (0,0) + (5,0)x_1 + (8.702, 0.297)x_2 + (8,0)x_3$,HBS1 yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (0,0) + (3,2)x_1 + (8,1)x_2 + (5,3)x_3$

biçimindedir. Diamond yöntemi girdi verisi tek değişkenli olan verilere uygulanabildiğinden Örnek 4.1.1'e uygulanamamıştır. Ele alınan üç yöntemden elde edilen sonuçlar incelendiğinde, Tanaka ve HBS1 yöntemlerinden elde edilen tahmini değerlerin gözlemlenen aralıklar ile tam uyum gösterdiği ve MSE=0 olduğu görülmektedir. Özelkan yönteminden elde edilen sonuçlar incelendiğinde; hesaplanan tahmini aralıkların gözlemlenen aralıklardan farklı bulunduğu ve MSE=4381.08 olduğu görülmüştür.

Örnek 4.1.2. Bu örnekte Tanaka ve ark. (1989) tarafından yapılmış olan makale çalışmasından alınan veri seti kullanılmış ve Çizelge 4.3'de verilmiştir.

Çizelge 4.3. Girdisi kesin-çıktısı bulanık veriler (Tanaka ve ark. 1989)

i	x_{i1}	Y_i	$\left(Y_i^L, Y_i^U\right)$
1	1	(8.0, 1.8)	(6.2, 9.8)
2	2	(6.4, 2.2)	(4.2, 8.6)
3	3	(9.5, 2.6)	(6.9, 12.1)
4	4	(13.5, 2.6)	(10.9, 16.1)
5	5	(13.0, 2.4)	(10.6, 15.4)

Örnek 4.1.2 için oluşturulan bulanık doğrusal regresyon modeli $\hat{Y} = A_0 + A_1 x_1$ şeklindedir. Tanaka, Özelkan ve HBS1 yöntemlerinin uygulanması sonucunda elde edilen bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve hata kareler ortalaması (MSE) değerleri Çizelge 4.4'de verilmiştir.

Çizelge 4.4. Tanaka ve ark. (1989) verilerine ait bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri

Bulanık Parametreler	Tanaka	Özelkan (v=25)	HBS1	Diamond
α_0	3.85	6.15	6.75	4.95
c_0	3.85	1.55	1.65	1.84
$A_0 = (\alpha_0, c_0)$	(3.85, 3.85)	(6.15, 1.55)	(6.75, 1.65)	(4.95, 1.84)
α_1	2.10	0.95	1.25	1.71
c_1	0	1.15	0.15	0.16
$A_1 = (\alpha_1, c_1)$	(2.10, 0)	(0.95, 1.15)	(1.25, 0.15)	(1.71, 0.16)
$c_0 + c_1$	3.85	2.7	1.8	2
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} c_j x_{ij}$	19.25	25	10.5	11.6
Gözlem No	**Tahmini Aralıklar** $\left(\hat{Y}_i^L, \hat{Y}_i^U\right)$			
1	(2.10, 9.8)	(4.4, 9.8)	(6.2, 9.8)	(4.66, 8.66)
2	(4.20, 11.9)	(4.2, 11.9)	(7.3, 11.2)	(6.21, 10.53)
3	(6.3, 14)	(4, 14)	(8.4, 12.6)	(7.76, 12.4)
4	(8.4, 16.1)	(3.8, 16.1)	(9.5, 14)	(9.31, 14.27)
5	(10.5, 18.2)	(3.6, 18.2)	(10.6, 15.4)	(10.86, 16.14)
MSE	4.57	13.67	5.01	1.86

Örnek 4.1.2'de h=0 için; Tanaka yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (3.85, 3.85) + (2.10, 0)x_1$, Özelkan yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (6.15, 1.55) + (0.95, 1.15)x_1$, HBS1 yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (6.75, 1.65) + (1.25, 0.15)x_1$, Diamond yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (4.95, 1.84) + (1.71, 0.16)x_1$ biçimindedir. Bu yöntemlerden elde edilen sonuçlar incelendiğinde, minimum MSE=1.86 değerine sahip olan yöntemin Diamond yöntemi olduğu görülmektedir. Tanaka ve HBS1 yönteminden elde edilen MSE değerleri birbirine yakın bulunmuştur. MSE=13.67 olan Özelkan yönteminde tahmini aralıkların gözlemlenen aralıklardan farklı elde edildiği görülmüştür.

Örnek 4.1.3. Bu örnekte, Terano ve ark. (1992) tarafından yapılmış olan çalışmadan alınan veri seti kullanılmış ve Çizelge 4.5'de verilmiştir.

Ele alınan veri setinde; girdi verileri olarak x_1: Petrol, x_2: Kimyasal, x_3: Demir Çelik, x_4: Elektrik Motoru, x_5: Taşıma Makinesi ve çıktı verisi olarak y : Yen Değeri ele alınmıştır.

Çizelge 4.5. Girdisi kesin-çıktısı bulanık veriler (Terano ve ark. 1992)

i		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$Y_i = (y_i, e_i)$	$\left(Y_i^L, Y_i^U\right)$
	1979							
1	III	106.1	89.3	111.6	83.3	89.1	(218.75,10.94)	(207.81, 229.69)
2	IV	98.1	84.1	104.4	78.0	88.8	(238.37,11.92)	(226.45, 250.29)
	1980							
3	I	89.2	76.7	100.1	70.8	87.5	(243.38,12.17)	(231.26, 255.55)
4	II	96.8	71.1	95.9	71.3	81.7	(233.20,11.66)	(221.54, 244.86)
5	III	101.7	68.9	92.7	70.4	80.5	(220.19,11.01)	(209.18, 231.2)
6	IV	102.9	69.9	95.5	71.1	80.6	(210.76,10.54)	(200.22, 221.3)
	1981							
7	I	98.9	70.9	96.6	73.7	81.5	(205.44,10.27)	(195.17, 215.71)
8	II	94.4	70.4	95.4	74.8	83.4	(219.75,10.99)	(208.76, 230.74)
9	III	94.8	68.5	93.0	75.1	84.1	(231.80,11.59)	(220.21, 243.39)
10	IV	98.1	68.8	93.4	75.5	83.8	(224.93,11.25)	(213.68, 236.18)
	1982							
11	I	96.5	69.0	92.3	76.3	84.9	(233.05,11.65)	(221.4, 244.7)
12	II	96.1	68.6	89.7	76.6	85.4	(244.14,12.21)	(231.93, 256.35)
13	III	93.9	68.2	86.8	76.2	85.1	(258.62,12.93)	(245.69, 271.55)

Örnek 4.1.3 için oluşturulan bulanık doğrusal regresyon modeli;

$\hat{Y} = A_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4x_4 + A_5x_5$ şeklindedir. Tanaka, Özelkan ve HBS1 yöntemlerinin uygulanması sonucunda elde edilen bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve hata kareler ortalaması (MSE) değerleri Çizelge 4.6'da verilmiştir.

Çizelge 4.6. Terano ve ark. (1992) verilerine ait bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri

Bulanık Parametreler	Tanaka	Özelkan (v=25)	HBS1
α_0	46.292	0	0
c_0	0	0	0
$A_0 = (\alpha_0, c_0)$	(46.292, 0)	(0, 0)	(0, 0)
α_1	0	0	0
c_1	0	0	0.02
$A_1 = (\alpha_1, c_1)$	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0.02)
α_2	0	0	0
c_2	0	0	0
$A_2 = (\alpha_2, c_2)$	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
α_3	0	0	0
c_3	0	0	0.08
$A_3 = (\alpha_3, c_3)$	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0.08)
α_4	0	0	0
c_4	0.455	0	0
$A_4 = (\alpha_4, c_4)$	(0, 0.455)	(0, 0)	(0, 0)
α_5	2.238	2.73	2.73
c_5	0	0.02	0
$A_5 = (\alpha_5, c_5)$	(2.238, 0)	(2.73, 0.02)	(2.73, 0)
$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$	0.455	0.02	0.1
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} c_j x_{ij}$	442.76	21,928	109,64
Gözlem No	**Tahmini Aralıklar** $\left(\hat{Y}_i^L, \hat{Y}_i^U\right)$		
1	(207.79, 283.59)	(241.46, 245.02)	(232.19, 254.29)
2	(209.53, 280.51)	(240.64, 244.2)	(232.11, 252.73)
3	(209.90, 274.33)	(237.12, 240.62)	(229.08, 248.66)
4	(196.69, 261.57)	(221.40, 224.67)	(213.43, 232.64)
5	(194.41, 258.48)	(218.15, 221.37)	(210.31, 229.21)
6	(194.32, 259.02)	(218.42, 221.65)	(210.34, 229.73)
7	(195.15, 262.22)	(220.86, 224.12)	(212.78, 232.21)
8	(198.90, 266.97)	(226.01, 229.35)	(218.16, 237.21)
9	(200.33, 268.67)	(227.91, 231.27)	(220.25, 238.92)
10	(199.48, 268.18)	(227.09, 230.45)	(219.34, 238.21)
11	(201.58, 271.01)	(230.07, 233.47)	(222.46, 241.09)
12	(202.56, 272.27)	(231.43, 234.85)	(224.04, 242.24)
13	(202.07, 271.41)	(230.62, 234.02)	(223.51, 241.14)
MSE	657.71	253.24	159.36

Örnek 4.1.3'de *h*=0 için; Tanaka yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (46.292, 0) + (0, 0)x_1 + (0,0)x_2 + (0,0)x_3 + (0,0.455)x_4 + (2.238,0)x_5$, Özelkan yönteminden elde edilen, bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = (0, 0) + (0, 0)x_1 + (0,0)x_2 + (0,0)x_3 + (0,0)x_4 + (2.73,0.02)x_5$, HBS1 yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = (0, 0) + (0, 0.02)x_1 + (0,0)x_2 + (0,0.08)x_3 + (0,0)x_4 + (2.73,0)x_5$ biçimindedir.

Bu yöntemlerden elde edilen sonuçlar incelendiğinde, minimum MSE=159.36 değerine sahip yöntemin HBS1 yöntemi olduğu görülmektedir.

Örnek 4.1.4. Bu örnekte, Bardossy (1990) tarafından yapılmış olan makale çalışmasından alınan veri seti kullanılmış ve Çizelge 4.7'de verilmiştir.

Ele alınan veri setinde, Bayan koşucularının fiziksel ve performans karakterleri ele alınmıştır. Girdi verileri olarak x_1: Kilo, x_2:Boy, x_3: Vücuttaki Yağ Oranı, x_4:Vücuttaki Fiziksel Yağ, x_5:VO2 ve çıktı verileri olarak Y : Koşma Süresi, e_i : Bulanık Koşma Süresinin Genişliğiele alınmıştır.

Çizelge 4.7. Girdisi kesin-çıktısı bulanık veriler (Bardossy 1990)

x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	x_{i4}	x_{i5}	$Y_i = (y_i, e_i)$	(Y_i^L, Y_i^U)
163	53.6	76.4	17.9	61.32	(39.37, 0)	(39.37, 39.37)
167	56.4	62.1	15.2	55.29	(39.80, 0)	(39.80, 39.80)
166	58.1	65.0	17.0	52.83	(40.03, 0)	(40.03, 40.03)
157	43.1	44.9	12.6	57.94	(41.32, 0)	(41.32, 41.32)
150	44.8	59.7	13.9	53.31	(42.03, 0)	(42.03, 42.03)
151	39.5	59.3	19.2	51.32	(42.37, 0)	(42.37, 42.37)
162	52.1	98.7	19.6	52.18	(43.93, 0)	(43.93, 43.93)
168	58.8	73.1	19.6	52.37	(44.90, 0)	(44.90, 44.90)
152	44.3	59.2	17.4	57.91	(44.90, 0)	(44.90, 44.90)
161	47.4	51.5	14.4	53.93	(45.12, 0)	(45.12, 45.12)
161	47.8	61.4	7.9	47.88	(45.60, 0)	(45.60, 45.60)
165	49.1	62.5	10.5	47.41	(46.03, 0)	(46.03, 46.03)
157	50.4	60.3	12.6	47.17	(47.83, 0)	(47.83, 47.83)
154	46.4	76.7	19.6	51.05	(48.55, 0)	(48.55, 48.55)

Örnek 4.1.4 için oluşturulan bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 + A_5 x_5$ şeklindedir. Tanaka, Özelkan ve HBS1 yöntemlerinin uygulanması sonucunda elde edilen bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve hata kareler ortalaması (MSE) değerleri Çizelge 4.8'de verilmiştir.

Çizelge 4.8. Bardossy (1990) verilerine ilişkin bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri

Bulanık Parametreler	Tanaka	Özelkan (v=25)	HBS1
α_0	43.470	40.427	44.900
c_0	0	0	0
$A_0 = (\alpha_0, c_0)$	(43.470, 0)	(40.427, 0)	(44.900, 0)
α_1	0	0	0
c_1	0	0	0
$A_1 = (\alpha_1, c_1)$	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
α_2	0	0	0
c_2	0.026	0.036	0
$A_2 = (\alpha_2, c_2)$	(0, 0.026)	(0, 0.036)	(0, 0)
α_3	0.007	0.054	0
c_3	0.042	0	0
$A_3 = (\alpha_3, c_3)$	(0.007, 0.042)	(0.054, 0)	(0, 0)
α_4	0	0	0
c_4	0	0	0
$A_4 = (\alpha_4, c_4)$	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
α_5	0	0	0
c_5	0	0	0
$A_5 = (\alpha_5, c_5)$	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$	0.068	0.036	0
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} c_j x_{ij}$	56.23	24.91	0
Gözlem No	**Tahmini Aralıklar** $\left(\hat{Y}_i^L, \hat{Y}_i^U\right)$		
1	(39.40, 47.53)	(42.61, 46.47)	(44.90, 44.90)
2	(39.83, 47.97)	(41.74, 45.80)	(44.90, 44.90)
3	(39.68, 48.16)	(41.83, 46.02)	(44.90, 44.90)
4	(40.77, 46.79)	(41.29, 44.39)	(44.90, 44.90)
5	(40.21, 47.56)	(42.03, 45.25)	(44.90, 44.90)
6	(40.36, 47.40)	(42.20, 45.04)	(44.90, 44.90)
7	(38.66, 49.66)	(43.87, 47.62)	(44.90, 44.90)
8	(39.38, 48.58)	(42.25, 46.48)	(44.90, 44.90)
9	(40.24, 47.52)	(42.02, 45.21)	(44.90, 44.90)
10	(40.43, 47.22)	(41.49, 44.90)	(44.90, 44.90)
11	(40.07, 47.72)	(42.01, 45.45)	(44.90, 44.90)
12	(40, 48.15)	(42.02, 45.56)	(44.90, 44.90)
13	(40.04, 47.73)	(41.86, 45.49)	(44.90, 44.90)
14	(39.57, 48.43)	(42.89, 46.23)	(44.90, 44.90)
MSE	24.34	21.96	9.45

Örnek 4.1.4 için; Tanaka yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = (43.470,\ 0) + (0,\ 0)x_1 + (0, 0.026)\, x_2 + (0.007, 0.042)\, x_3 + (0,0)\, x_4 + (0,0)\, x_5$,

Özelkan yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = (40.427,\ 0) + (0,\ 0)x_1 + (0, 0.036)\, x_2 + (0.054, 0)\, x_3 + (0,0)\, x_4 + (0,0)\, x_5$,

HBS1 yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = (44.900,\ 0) + (0,\ 0)x_1 + (0,0)\, x_2 + (0,0)\, x_3 + (0,0)\, x_4 + (0,0)\, x_5$,

biçimindedir. Bu yöntemlerden elde edilen sonuçlar incelendiğinde, minimum MSE=9.45 değerine sahip yöntemin HBS1 yöntemi olduğu görülmektedir.

Örnek 4.1.5. Bu örnekte Tanaka ve Ark. (1982) tarafından yapılmış olan makale çalışmasında ele alınan veri seti kullanılmış ve Çizelge 4.9'de verilmiştir.

Ele alınan veri setinde, prefabrik evlerin maliyetini hesaplamak için; girdi verileri olarak x_1: Malzemenin Kalitesi, x_2:1.Kat Alanı, x_3: 2.Kat Alanı, x_4: Toplam Oda Sayısı, x_5: Japon Tipi Oda Sayısı, çıktı verileri olarak, Y : Prefabrik Evlerin Satış Fiyatı ele alınmıştır.

Çizelge 4.9. Girdisi kesin-çıktısı bulanık veriler (Tanaka ve Ark. 1982)

x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	x_{i4}	x_{i5}	$Y_i = (y_i, e_i)$	(Y_i^L, Y_i^U)
1	38.09	36.43	5	1	(6060, 550)	(5510, 6610)
1	62.10	26.50	6	1	(7100, 50)	(7050, 7150)
1	63.76	44.71	7	1	(8080, 400)	(7680, 8480)
1	74.52	38.09	8	1	(8260, 150)	(8110, 8410)
1	75.38	41.40	7	2	(8650, 750)	(7900, 9400)
2	52.99	26.49	4	2	(8520, 450)	(8070, 8970)
2	62.93	26.49	5	2	(9170, 700)	(8470, 9870)
2	72.04	33.12	6	3	(10310, 200)	(10110, 10510)
2	76.12	43.06	7	2	(10920, 600)	(10320, 11520)
2	90.26	42.64	7	2	(12030, 100)	(11930, 12130)
3	85.70	31.33	6	3	(13940, 350)	(13590, 14290)
3	95.27	27.64	6	3	(14200, 250)	(13950, 14450)
3	105.98	27.64	6	3	(16010, 300)	(15710, 16310)
3	79.25	66.81	6	3	(16320, 500)	(15820, 16820)
3	120.50	32.25	6	3	(16990, 650)	(16340, 17640)

Örnek 4.1.5 için oluşturulan bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = A_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 + A_5 x_5$ şeklindedir. Tanaka, Özelkan ve HBS1 yöntemlerinin uygulanması sonucunda elde edilen bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve hata kareler ortalaması (MSE) değerleri Çizelge 4.10'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.10. Tanaka ve Ark. (1982) verilerine ilişkin bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri

Bulanık Parametreler	Tanaka	Özelkan (v=25)	HBS1
α_0	0	0	0
c_0	0	0	0
$A_0 = (\alpha_0, c_0)$	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
α_1	2286.766	2661.389	0
c_1	430.321	0	0.02
$A_1 = (\alpha_1, c_1)$	(2286.766, 430.321)	(2661.389, 0)	(0, 0.02)
α_2	62.648	55.059	0
c_2	0	0	0
$A_2 = (\alpha_2, c_2)$	(62.648, 0)	(55.059, 0)	(0, 0)
α_3	47.311	39.600	0
c_3	11.815	0	0.08
$A_3 = (\alpha_3, c_3)$	(47.311, 11.815)	(39.600, 0)	(0, 0.08)
α_4	0	0	0
c_4	0	0.271	0
$A_4 = (\alpha_4, c_4)$	(0, 0)	(0, 0.271)	(0, 0)
α_5	0	0	2.73
c_5	362.485	0	0
$A_5 = (\alpha_5, c_5)$	(0, 362.485)	(0, 0)	(2.73, 0)
$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$	804.621	0.271	0.1
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} c_j x_{ij}$	30943.6	24.93	44.168
Gözlem No	**Tahmini Aralıklar** $\left(\hat{Y}_i^L, \hat{Y}_i^U\right)$		
1	(5173.12, 6033.76)	(6200.59, 6201.13)	(5.66, 5.66)
2	(6324.88, 7170.83)	(7129.11, 7129.65)	(4.87, 4.87)
3	(7074.64, 7935.28)	(8632.38, 8632.92)	(6.32, 6.32)
4	(7514.31, 7782.98)	(8271.79, 8272.33)	(5.79, 5.79)
5	(7685.05, 10248.93)	(8449.94, 8451.02)	(8.79, 8.79)
6	(7247.34, 9594.58)	(9288.32, 9289.41)	(7.61, 7.61)
7	(7869.98, 11667.14)	(9835.51, 9836.59)	(7.61, 7.61)
8	(8313.45, 12992.24)	(10599.27, 10600.35)	(10.87, 10.87)
9	(9284.27, 13472.98)	(11217.8, 11218.88)	(8.94, 8.94)
10	(10155.1, 14333.88)	(11956.61, 11997.69)	(8.91, 8.91)
11	(10962.02, 16459.15)	(13941.78, 13943.41)	(10.75, 10.75)
12	(11430.53, 16840.46)	(14322.48, 14324.11)	(10.46, 10.46)
13	(12099.53, 17511.34)	(14912.07, 14912.69)	(10.46, 10.46)
14	(11817.18, 15330,27)	(14991.71, 14993.33)	(13.59, 13.59)
15	(123174.55, 18693.42)	(15893.95, 15898.57)	(10.83, 10.83)
MSE	3602526.82	489775.48	135375101.1

Örnek 4.1.5'de h=0.5 için; Tanaka yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = (0, 0) + (2286.766, 430.321)x_1 + (62.648, 0)x_2 + (47.311, 11.815)x_3 + (0, 0)x_4 + (0, 362.485)x_5$

Özelkan yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = (0, 0) + (2661.389, 0)x_1 + (55.059, 0)x_2 + (39.600, 0)x_3 + (0, 0.271)x_4 + (0, 0)x_5$

HBS1 yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = (0, 0) + (0, 0.02)x_1 + (0, 0)x_2 + (0, 0.08)x_3 + (0, 0)x_4 + (2.73, 0)x_5$

biçimindedir. Bu yöntemlerden elde edilen sonuçlar incelendiğinde, MSE değerleri oldukça yüksek bulunmuş ve hesaplanan tahmini aralıkların gözlemlenen aralıklardan farklı elde edildiği görülmüştür. Minimum MSE=489775.48 değerine sahip yöntemin Özelkan yöntemi olduğu görülmüştür.

Örnek 4.1.6. Bu örnekte, Diamond (1988) tarafından yapılmış olan çalışmadan alınan veri seti kullanılmış ve Çizelge 4.11'de verilmiştir.

Çizelge 4.11. Girdisi kesin-çıktısı bulanık veriler (Diamond 1988)

x_{i1}	$Y_i = (y_i, e_i, \overline{e_i})$	(Y_i^L, Y_i^U)
21.0	(4.0, 0.8, 0.8)	(3.2, 4.8)
15.0	(3.0, 0.3, 0.3)	(2.7, 3.3)
15.0	(3.5, 0.35, 0.35)	(3.15, 3.85)
9.0	(2.0, 0.4, 0.4)	(1.6, 2.4)
12.0	(3.0, 0.45, 0.45)	(2.55, 3.45)
18.0	(3.5, 0.7, 0.7)	(2.8, 4.2)
6.0	(2.5, 0.38, 0.38)	(2.12, 2.88)
12.0	(2.5, 0.5, 0.5)	(2, 3)

Örnek 4.1.6 için oluşturulan bulanık doğrusal regresyon modeli $\hat{Y} = A + Bx_i$ şeklindedir. Tanaka, Özelkan, HBS1 ve Diamond yöntemlerinin uygulanması sonucunda elde edilen bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve hata kareler ortalaması (MSE) değerleri Çizelge 4.12'de verilmiştir.

Çizelge 4.12. Diamond (1988) verilerine ilişkin bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri

Bulanık Parametreler	Tanaka	Özelkan (ν=25)	HBS1	Diamond
α_0 c_0 $A_0 = (\alpha_0, c_0)$	1.39 1.232 (1.39, 1.232)	1.12 0.15 (1.12, 0.15)	1.646 0 (1.646, 0)	1.38 0.152 (1.38, 0.152)
α_1 c_1 $A_1 = (\alpha_1, c_1)$	0.114 0 (0.114, 0)	1.34 0 (1.34, 0)	0.112 0.038 (0.112, 0.038)	0.12 0.025 (0.12, 0.025)
$c_0 + c_1$	1.232	0.15	0.038	0.177
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} c_j x_{ij}$	9.85	1.2	4.11	4.08
Gözlem No	**Tahmini Aralıklar** $\left(\hat{Y}_i^L, \hat{Y}_i^U\right)$			
1	(2.54, 5.01)	(29.11, 29.41)	(3.11, 4.79)	(3.11, 4.47)
2	(1.86, 4.33)	(21.07, 21.37)	(2.69, 3.89)	(2.57, 3.63)
3	(1.86, 4.33)	(21.07, 21.37)	(2.69, 3.89)	(2.57, 3.63)
4	(1.17, 3.64)	(13.03, 13.33)	(2.27, 2.99)	(2.03, 2.79)
5	(1.51, 3.98)	(17.05, 17.35)	(2.48, 3.44)	(2.3, 3.21)
6	(2.02, 4.67)	(25.09, 25.39)	(2.9, 4.34)	(2.84, 4.05)
7	(0.83, 3.31)	(9.01, 9.31)	(2.06, 2.54)	(1.76, 2.37)
8	(1.51, 3.98)	(17.05, 17.35)	(2.48, 3.44)	(2.3, 3.21)
MSE	0.98	293.10	0.12	0.09

Örnek 4.1.6'da h=0 için; Tanaka yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (1.39, 1.232) + (0.114, 0)x_1$ Özelkan yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (1.12, 0.15) + (1.34, 0)x_1$, HBS1 yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (1.646, 0) + (0.112, 0.038)x_1$, Diamond yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (1.38, 0.152) + (0.120, 0.025)x_1$ biçimindedir. Bu yöntemlerden elde edilen sonuçlar incelendiğinde, minimum MSE=0.09 değerine sahip yöntemin Diamond yöntemi olduğu görülmektedir. MSE=293.10 ile Özelkan yönteminden hesaplanan tahmini değerlerin gözlemlenen aralıklardan oldukça farklılık gösterdiği görülmektedir.

Örnek 4.1.7. Bu örnekte, Diamond (1988) tarafından yapılmış olan çalışmadan alınan veri seti kullanılmış ve Çizelge 4.13'de verilmiştir.

Çizelge 4.13. Girdisi kesin-çıktısı bulanık veriler (Diamond 1988)

x	$Y_i = (y_i, \underline{e}_i, \overline{e}_i)$	(Y_i^L, Y_i^U)
45	(21.0, 6.5, 6.5)	(14.5, 27.5)
40	(15.9, 4.9, 4.9)	(11, 20.8)
35	(18.45, 1.3, 1.3)	(17.15, 19.75)
30	(12.5, 2.7, 2.7)	(9.8, 15.2)
25	(9.85, 3.35, 3.35)	(6.5, 13.2)
20	(6.45, 2.55, 2.55)	(3.9, 9)
15	(4.9, 3.0, 3.0)	(1.9, 7.9)
10	(4.15, 1.15, 1.15)	(3, 5.3)
5	(1.35, 0.35, 0.35)	(1, 1.7)

Örnek 4.1.7 için oluşturulan bulanık doğrusal regresyon modeli $\hat{Y} = A + Bx_i$ şeklindedir. Tanaka, Özelkan, HBS1 ve Diamond yöntemlerinin uygulanması sonucunda elde edilen bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve hata kareler ortalaması (MSE) değerleri Çizelge 4.14'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.14. Diamond (1988) verilerine ilişkin bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri

Bulanık Parametreler	Tanaka	Özelkan (v=25)	HBS1	Diamond
α_0	0	0	0	-1.74
c_0	3.82	0	0	-0.155
$A_0 = (\alpha_0, c_0)$	(0, 3.82)	(0, 0)	(0, 0)	(-1.74, -0.155)
α_1	0.425	0.412	0.416	0.49
c_1	0.142	0.11	0.089	0.121
$A_1 = (\alpha_1, c_1)$	(0.425, 0.142)	(0.412, 0.11)	(0.416, 0.089)	(0.49, 0.121)
$c_0 + c_1$	3.96	0.11	0.089	-0.034
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} c_j x_{ij}$	66.33	24.75	20.02	25.82
Gözlem No	**Tahmini Aralıklar** $\left(\hat{Y}_i^L, \hat{Y}_i^U\right)$			
1	(8.78, 29.02)	(13.95, 23.4)	(14.4, 22.95)	(14.62, 25.56)
2	(7.38, 26.22)	(12.4, 20.8)	(12.8, 20.4)	(12.82, 22.51)
3	(5.98, 23.42)	(10.85, 18.2)	(11.2, 17.85)	(11.02, 19.46)
4	(4.58, 20.62)	(9.3, 15.6)	(9.6, 15.3)	(9.22, 16.41)
5	(3.18, 17.82)	(7.75, 13)	(8, 12.75)	(7.42, 13.36)
6	(1.78, 15.02)	(6.2, 10.4)	(6.4, 10.2)	(5.62, 10.31)
7	(0.38, 12.22)	(4.65, 7.8)	(4.8, 7.65)	(3.82, 7.26)
8	(1.02, 9.42)	(3.1, 5.2)	(3.2, 5.1)	(2.02, 4.21)
9	(-1.02, 6.62)	(1.55, 2.6)	(1.6, 2.55)	(0.22, 1.16)
MSE	24.51	5.97	4.99	0.29

Örnek 4.1.7'de h=0 için; Tanaka yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (0, 3.82) + (0.425, 0.142)x_1$, Özelkan yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (0, 0) + (0.142, 0.11)x_1$, HBS1 yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (0, 0) + (0.416, 0.089)x_1$, Diamond yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (-1.74, -0.155) + (0.49, 0.121)x_1$ biçimindedir. Bu yöntemlerden elde edilen sonuçlar incelendiğinde, minimum MSE=0.29 değerine sahip yöntemin Diamond yöntemi olduğu görülmektedir.

4.2. Girdisi Bulanık-Çıktısı Bulanık Sayı Olan Verilere İlişkin Sayısal Örnekler

Bu kesimde, girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan bulanık regresyon yöntemlerinden HBS2 yöntemi, Diamond yöntemi, Ming ve Ark. Yöntemi, Sakawa ve Yano yöntemi ve Yang ve Lin yöntemleri kullanılarak bulanık parametreler ve bulanık tahmini değerler elde edilmiştir.

Bu bölümde yöntemleri karşılaştırmada kullanılan hata kareler ortalaması Eşitlik (4.1), Eşitlik (3.18), Eşitlik (3.34), Eşitlik (3.43) ve Eşitlik (3.47) eşitliklerinden hesaplanmıştır.

Örnek 4.2.1. Bu örnekte, Diamond (1988)'ın çalışmasından alınan veri seti kullanılmış ve Çizelge 4.15'de verilmiştir.

Çizelge 4.15. Girdisi bulanık-çıktısı bulanık veriler **(**Diamond 1988)

$X_i = \left(x_i, \underline{f}_i, \overline{f}_i\right)$	$Y_i = \left(y_i, \underline{e}_i, \overline{e}_i\right)$	$\left(Y_i^L, Y_i^U\right)$
$\left(1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$	$\left(1, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$	(0.25, 1.75)
$(2,1,1)$	$\left(\frac{15}{8}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	(0.37, 3.37)
$(3,1,1)$	$\left(\frac{13}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	(1.75, 4.75)

Örnek 4.2.1 için oluşturulan bulanık doğrusal regresyon modeli $\hat{Y} = A_0 + A_1 x_1$ şeklindedir. HBS2, Sakawa ve Yano, Diamond, Ming-Friedman-Kandel, Yang-Lin'in ADFLS ve IDFLS yöntemlerinin uygulanması sonucunda elde edilen bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve hata kareler ortalaması (MSE) değerleri Çizelge 4.16'da gösterilmiştir.

HBS2 Yöntemi

Kesim 3.2.1'de ele alınan HBS2 tarafından önerilen yöntemde verilen, Eşitlik (3.17)'den yararlanarak;

$$
\begin{aligned}
Min \quad & d_{1lU}^{+} + \cdots + d_{3lU}^{+} + d_{1lU}^{-} + \cdots + d_{3lU}^{-} + d_{1lL}^{+} + \cdots + d_{3lL}^{+} + d_{1lL}^{-} + \cdots d_{3lL}^{-} \\
& + d_{1rU}^{+} + \cdots + d_{3rU}^{+} + \cdots d_{1rU}^{-} + \cdots + d_{3rU}^{-} + d_{1rL}^{+} + \cdots d_{3rL}^{+} + d_{1rL}^{-} + \cdots d_{3rL}^{-} \\
& d_{1lU}^{+} - d_{1lU}^{-} + \alpha_0 + 0.5c_0 + 0.63\alpha_1 + 0.31c_1 = 1.37 \\
& d_{2lU}^{+} - d_{2lU}^{-} + \alpha_0 + 0.5c_0 + 1.5\alpha_1 + 0.75c_1 = 2.62 \\
& d_{3lU}^{+} - d_{3lU}^{-} + \alpha_0 + 0.5c_0 + 2.5\alpha_1 + 1.25c_1 = 4 \\
& d_{1rU}^{+} - d_{1rU}^{-} + \alpha_0 + 0.5c_0 + 1.37\alpha_1 + 0.68c_1 = 1.37 \\
& d_{2rU}^{+} - d_{2rU}^{-} + \alpha_0 + 0.5c_0 + 2.5\alpha_1 + 1.25c_1 = 2.62 \\
& d_{3lU}^{+} - d_{3lU}^{-} + \alpha_0 + 0.5c_0 + 3.5\alpha_1 + 1.75c_1 = 4 \\
& d_{1lL}^{+} - d_{1lL}^{-} + \alpha_0 - 0.5c_0 + 0.63\alpha_1 - 0.31c_1 = 2.75 \\
& d_{2lL}^{+} - d_{2lL}^{-} + \alpha_0 - 0.5c_0 + 1.5\alpha_1 - 0.75c_1 = 1.12 \\
& d_{3lL}^{+} - d_{3lL}^{-} + \alpha_0 - 0.5c_0 + 2.5\alpha_1 - 1.25c_1 = 2.5 \\
& d_{1rL}^{+} - d_{1rL}^{-} + \alpha_0 - 0.5c_0 + 1.37\alpha_1 - 0.68c_1 = 2.75 \\
& d_{2rL}^{+} - d_{2rL}^{-} + \alpha_0 - 0.5c_0 + 2.5\alpha_1 - 1.25c_1 = 1.12 \\
& d_{3rL}^{+} - d_{3rL}^{-} + \alpha_0 - 0.5c_0 + 3.5\alpha_1 - 1.75c_1 = 2.5
\end{aligned}
$$

lineer programlama problemi oluşturulmuş ve WinQSB paket programında çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar Çizelge 4.16'de verilmiştir.

Sakawa ve Yano (SY) Yöntemi

Kesim 3.2.3'de ele alınan HBS2 tarafından önerilen yöntemde verilen, Algoritma 3.1'den yararlanarak;

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & 6c_0 + 5.5\alpha_1 + 12c_1 \\
& \alpha_0 + 0.5c_0 + 1.37\alpha_1 + 0.68c_1 \geq 0.62 \\
& \alpha_0 + 0.5c_0 + 2.5\alpha_1 + 1.25c_1 \geq 1.12 \\
& \alpha_0 + 0.5c_0 + 3.5\alpha_1 + 1.75c_1 \geq 2.5 \\
& -\alpha_0 + 0.5c_0 - 0.62\alpha_1 + 0.31c_1 \geq -1.37 \\
& -\alpha_0 + 0.5c_0 - 1.5\alpha_1 + 0.75c_1 \geq -2.62 \\
& -\alpha_0 + 0.5c_0 - 2.5\alpha_1 + 1.25c_1 \geq -4
\end{aligned}
$$

lineer programlama problemi oluşturulmuş ve WinQSB paket programında çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar Çizelge 4.16'de verilmiştir.

Diamond (FLS) Yöntemi

Diamond yönteminde ele alınan Eşitlik (3.20-3.21) ve Eşitlik (3.23-3.24) kullanılarak denklemler belirlenerek oluşturulan ve enküçük kareler temeline dayanan problem Excel programında çözülmüştür.

Bulanık doğrusal regresyon modeli $Y = A + Bx$ şeklindedir. Burada,

$b \geq 0$ için oluşturulan

S^+ : $12a + 24b = 24.5$
$24a + 61.125b = 65.125$

denklemlerinin çözümü sonucunda, $a = -0.4152$, $b = 1.2285$ ve $r_+ = 28.51$ elde edilmiştir.

$b < 0$ için oluşturulan

S^- : $12a + 24b = 24.5$
$24a + 61.125b = 41.5$

denklemlerinin çözümü sonucunda, $a = 3.1844$, $b = -0.5714$ ve $r_- = 35.62$ elde edilmiştir.

Ming-Friedman-Kandel (GFLS) Yöntemi

Ming-Friedman-Kandel yönteminde ele alınan Eşitlik (3.36-3.37) ve Eşitlik (3.39-3.40) kullanılarak denklemler belirlenerek oluşturulan ve enküçük kareler temeline dayanan problem Excel programında çözülmüştür.

Bulanık doğrusal regresyon modeli $Y = A + Bx$ şeklindedir. Burada

$b \geq 0$ için oluşturulan

S^+ : $12a + 24b = 24.48$
$24a + 115.12b = 63.244$

denklemlerinin çözümü sonucunda, $a = 1.616$, $b = 1.212$ ve $r_+ = 45.2$ elde edilmiştir.

$b < 0$ için oluşturulan

S^- : $12a + 24b = 24.48$
$24a + 115.12b = 41.459$

denklemlerinin çözümü sonucunda, $a = 2.26$, $b = -0.11$ ve $r_- = 25.75$ elde edilmiştir.

Yang-Lin'in ADFLS Yöntemi

Yang-Lin'in ADFLS yönteminde verilen Eşitlik (3.44-3.46)'dan yararlanarak enküçük kareler temeline dayanan problem oluşturulmuş ve Maple programında çözülmüştür.

Yang-Lin'in IDFLS Yöntemi

Yang-Lin'in IDFLS yönteminde verilen Eşitlik (3.48-3.49)'dan yararlanarak enküçük kareler temeline dayanan problem oluşturulmuş ve Maple programında çözülmüştür.

Çizelge 4.16. Diamond (1988) verilerine ilişkin bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri

Bulanık Parametreler	SY	HBS2	FLS	GFLS	ADFLS	IDFLS
α_0	1.12	1.58	3.18	2.26	-0.222	-0.231
$\underline{c}_0$	0	0	-	-	-0.488	-0.249
$\overline{c}_0$	-	-	-	-	-0.226	0.964
$A_0 = (\alpha_0, c_0)$	(1.12, 0)	(1.58, 0)	3.18	2.26	(-0.222,-0.488, -0.226)	(-0.231, -0.249, 0.964)
α_1	0.39	0.47	-0.57	-0.11	1.133	1.137
$\underline{c}_1$	0	0.42	-	-	0.398	0.172
$\overline{c}_1$	-	-	-	-	0.214	-0.301
$A_1 = (\alpha_1, c_1)$	(0.39, 0)	(0.47, 0.42)	-0.57	-0.11	(1.133, 0.398, 0.214)	(1.137, 0.172, -0.301)
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} c_j x_{ij}$	0	2.52	0	0	1.38	1.37
Gözlem No	**Tahmini Aralıklar** $\left(\hat{Y}_i^L, \hat{Y}_i^U\right)$					
1	(1.21, 1.8)	(1.59, 3.13)	(3.03, 2.18)	(2.23, 2.06)	(0.44, 1.9)	(0.22, 2.41)
2	(1.51, 2.29)	(1.63, 4.25)	(2.61, 1.47)	(2.15, 1.93)	(0.99, 3.58)	(0.84, 3.61)
3	(1.9, 2.68)	(1.68, 5.14)	(2.04, 0.9)	(2.04, 1.82)	(1.72, 4.92)	(1.67, 4.57)
MSE	0.41	4.22	35.62	25.75	0.11	0.03

Örnek 4.2.1'de h=0.5 için HBS2 yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (1.12, 0) + (0.39, 0)x_1$, SY yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (1.58, 0) + (0.47, 0.42)x_1$, FLS yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = 3.18 - 0.57x_1$, GFLS yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = 2.26 - 0.11x_1$, Yang-Lin'in ADFLS yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (-0.222, -0.488, -0.226) + (1.113, 0.172, -0.301)x_1$,

Yang-Lin'in IDFLS yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = (-0.231, -0.249, 0.964) + (1.137, 0.172, -0.301)x_1$ biçimindedir. Bu yöntemlerden elde edilen sonuçlar incelendiğinde, minimum MSE=0.03 değerine sahip olan yönteminin Yang-Lin'in IDFLS yöntemi olduğu görülmektedir.

Örnek 4.2.2. Bu örnekte, Sakawa ve Yano (1992) tarafından yapılmış olan makale çalışmasından alınan veri seti kullanılmış ve Çizelge 4.17'de verilmiştir.

Çizelge 4.17. Girdisi bulanık-çıktısı bulanık veriler (Sakawa ve Yano 1992)

i	$x_{i1} = (\overline{x}_{i1}, f_{i1})$	$Y_i = (\overline{y}_i, e_i)$	(Y_i^L, Y_i^U)
1	(2.0, 0.5)	(4.0, 0.5)	(3.5, 4.5)
2	(3.5, 0.5)	(5.5, 0.5)	(5, 6)
3	(5.5, 1.0)	(7.5, 1.0)	(6.5, 8.5)
4	(7.0, 0.5)	(6.5, 0.5)	(6, 7)
5	(8.5, 0.5)	(8.5, 0.5)	(8, 9)
6	(10.5, 1.0)	(8.0, 1.0)	(7, 9)
7	(11.0, 0.5)	(10.5, 0.5)	(10, 11)
8	(12.5, 0.5)	(9.5, 0.5)	(9, 10)

Örnek 4.2.2 için oluşturulan bulanık doğrusal regresyon modeli $\hat{Y} = A_0 + A_1 x_1$ şeklindedir. HBS2, Sakawa ve Yano, Diamond, Ming-Friedman-Kandel, Yang-Lin'in ADFLS ve IDFLS yöntemlerinin uygulanması sonucunda elde edilen bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve hata kareler ortalaması (MSE) değerleri Çizelge 4.18'de verilmiştir.

Çizelge 4.18. Sakawa ve Yano(1992) verilerine ilişkin bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri

Bulanık Parametreler	SY	HBS2	FLS	GFLS	ADFLS	IDFLS
α_0	3.367	3.409	3.48	3.50	3.553	3.559
$\underline{c}_0$	0.426	0.409	-	-	0.257	0.265
$\overline{c}_0$	-	-	-	-	0.334	0.299
$A_0 = (\alpha_0, c_0)$	(3.367, 0.426)	(3.409, 0.409)	3.48	3.50	(3.553, 0.257, 0.334)	(3.559, 0.265, 0.299)
α_1	0.559	0.522	0.53	0.52	0.521	0.520
$\underline{c}_1$	0.110	0.022	-	-	0.004	0.004
$\overline{c}_1$	-	-	-	-	-0.004	0.0003
$A_1 = (\alpha_1, c_1)$	(0.559, 0.110)	(0.522, 0.022)	0.53	0.52	(0.521, 0.004, -0.004)	(0.520, 0.004, 0.0003)
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} c_j x_{ij}$	10.05	4.6	0	0	4.72	4.78
Gözlem No	**Tahmini Aralıklar** $\left(\hat{Y}_i^L, \hat{Y}_i^U\right)$					
1	(3.61, 5.46)	(3, 5.17)	(4.27, 4.8)	(4.28, 4.8)	(4.05, 5.18)	(4.05, 5.15)
2	(4.26, 5.81)	(4.5, 5.98)	(5.07, 5.6)	(5.06, 5.58)	(4.82, 5.96)	(4.82, 5.93)
3	(4.92, 8.13)	(5.25, 7.33)	(5.86, 6.92)	(5.84, 6.88)	(5.58, 7.26)	(5.58, 7.23)
4	(5.81, 8.81)	(6.25, 7.87)	(6.92, 7.45)	(6.88, 7.4)	(6.61, 7.78)	(6.61, 7.75)
5	(6.46, 9.82)	(7, 8.68)	(7.72, 8.25)	(7.66, 8.18)	(7.37, 8.56)	(7.37, 8.53)
6	(7.12, 11.48)	(7.75, 10.03)	(8.52, 9.57)	(8.44, 9.48)	(8.13, 9.86)	(8.13, 9.83)
7	(7.23, 11.48)	(8.25, 10.03)	(9.04, 9.57)	(8.96, 9.48)	(8.64, 9.86)	(8.64, 9.83)
8	(8.22, 12.48)	(8.25, 10.03)	(9.84, 10.37)	(9.74, 10.26)	(9.41, 10.64)	(9.41, 10.51)
MSE	0.71	0.74	14.11	21.77	11.07	10.34

Örnek 4.2.2'de h=0 için HBS2 yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (3.409, 0.409) + (0.522, 0.022)x_1$, SY yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (3.367, 0.426) + (0.559, 0.1108)x_1$, FLS yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = 3.48 + 0.53x_1$, GFLS yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = 3.50 + 0.52x_1$, Yang-Lin'in ADFLS yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = (3.553, 0.257, 0.334) + (0.521, 0.004, -0.004)x_1$, Yang-Lin'in IDFLS yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = (3.559, 0.265, 0.299) + (0.520, 0.004, 0.0003)x_1$ biçimindedir. Bu yöntemlerden elde edilen sonuçlar incelendiğinde, minimum MSE=0.71 değerine sahip olan yönteminin SY yöntemi olduğu ve HBS2 yöntemi ile yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.

Örnek 4.2.3. Bu örnekte, Diamond (1988) tarafından yapılmış olan makale çalışmasında ele alınan veri seti kullanılmış ve Çizelge 4.16'de verilmiştir.

Çizelge 4.19. Girdisi bulanık-çıktısı bulanık veriler **(**Diamond 1988)

$X_i = \left(x_i, \underline{f}_i, \overline{f}_i\right)$	$Y_i = \left(y_i, \underline{e}_i, \overline{e}_i\right)$	$\left(Y_i^L, Y_i^U\right)$
(21.0, 4.2, 2.1)	(4.0, 0.6, 0.8)	(3.4, 4.8)
(15.0, 2.25, 2.25)	(3.0, 0.3, 0.3)	(2.7, 3.3)
(15.0, 1.5, 2.25)	(3.5, 0.35, 0.35)	(3.15, 3.85)
(9.0, 1.35, 1.35)	(2.0, 0.4, 0.4)	(1.6, 2.4)
(12.0, 1.2, 1.2)	(3.0, 0.3, 0.45)	(2.7, 3.45)
(18.0, 3.6, 1.8)	(3.5, 0.53, 0.7)	(2.97, 4.2)
(6.0, 0.6, 1.2)	(2.5, 0.25, 0.38)	(2.25, 2.88)
(12.0, 1.8, 2.4)	(2.5, 0.5, 0.5)	(2, 3)

Örnek 4.2.3 için oluşturulan bulanık doğrusal regresyon modeli $\hat{Y} = A_0 + A_1 x_1$ şeklindedir. Bu örnekte girdisi üçgensel bulanık sayı olmadığından HBS2 ve Sakawa ve Yano yöntemi uygulanamamıştır. Diamond, Ming-Friedman-Kandel, Yang-Lin'in ADFLS ve IDFLS yöntemlerinin uygulanması sonucunda elde edilen bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve hata kareler ortalaması (MSE) değerleri Çizelge 4.20'de gösterilmiştir.

Çizelge 4.20. Diamond (1988) verilerine ilişkin bulanık parametreler, bulanık tahmini değerler ve MSE değerleri

Bulanık Parametreler	FLS	GFLS	ADFLS	IDFLS
α_0	3.25	-0.828	0.995	1.368
$\underline{c}_0$	-	-	-0.695	0.239
$\overline{c}_0$	-	-	0.82	0.067
$A_0 = (\alpha_0, c_0)$	3.25	-0.828	(0.995, -0.695, 0.82)	(1.368, 0.239, 0.067)
α_1	-0.017	0.271	0.095	0.121
$\underline{c}_1$	-	-	-0.042	-0.008
$\overline{c}_1$	-	-	0.068	0.013
$A_1 = (\alpha_1, c_1)$	-0.017	0.271	(0.095, -0.042, 0.068)	(0.121, -0.008, 0.013)
$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} c_j x_{ij}$	0	0	4.63	2.97
Gözlem No	**Tahmini Aralıklar** $\left(\hat{Y}_i^L, \hat{Y}_i^U\right)$			
1	(2.96, 2.85)	(3.72, 5.43)	(3.87, 5.51)	(3.13, 4.44)
2	(3.03, 2.95)	(2.62, 3.84)	(3.34, 4.58)	(2.65, 3.67)
3	(3.02, 2.95)	(2.83, 3.84)	(3.44, 4.58)	(2.74, 3.67)
4	(3.11, 3.07)	(1.24, 1.97)	(2.68, 3.47)	(2.03, 2.77)
5	(3.06, 3.02)	(2.09, 2.74)	(3.1, 3.93)	(2.41, 3.14)
6	(3.01, 2.91)	(3.07, 4.53)	(3.56, 4.98)	(2.84, 4)
7	(3.15, 3.12)	(0.63, 1.12)	(2.4, 2.97)	(1.76, 2.36)
8	(3.07, 3.01)	(1.93, 3.07)	(3.01, 4.13)	(2.35, 3.3)
MSE	13.75	19.39	4.26	1.45

Örnek 4.2.3'de h=0 için FLS yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = 3.25 - 0.017x_1$, GFLS yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli, $\hat{Y} = -0.828 + 0.271x_1$, Yang-Lin'in ADFLS yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = (0.995, -0.695, 0.82) + (0.095, -0.042, 0.068)x_1$, Yang-Lin'in IDFLS yönteminden elde edilen bulanık doğrusal regresyon modeli,

$\hat{Y} = (1.368, 0.239, 0.067) + (0.121, -0.008, 0.013)x_1$ biçimindedir. SY ve HBS2 yöntemlerinde girdi verisi üçgensel bulanık sayı olan verilere uygulanabildiğinden Örnek 4.2.3'e uygulanamamıştır. Bu yöntemlerden elde edilen sonuçlar incelendiğinde, minimum MSE=1.45 değerine sahip olan yöntemin Yang-Lin'in IDFLS yöntemi olduğu görülmektedir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Regresyon analizi, bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi belirlemek ve bu bağıntı ile ilgili tahminleri yapabilmek için kullanılan istatistiksel bir tekniktir. Regresyon analizinin uygulanamadığı durumlarda alternatif olarak önerilen yöntem, bulanık regresyon analizidir. Bulanık regresyon analizi; verilerin kesin sayı olmaması durumunda bağımlı değişken ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi belirtmek ve tahmin yapabilmek için kullanılan bir yöntemdir.

Bulanık regresyon analizi için önerilen yöntemler bulanık en küçük kareler ve lineer programlama temeline dayalı yöntemler olmak üzere iki gruba ayrılır. Bu çalışmada; girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan bulanık regresyon yöntemleri ve girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan bulanık regresyon yöntemleri ayrıntılı biçimde incelenmiş ve sayısal örneklerle karşılaştırılmıştır.

Bugüne kadar, bulanık regresyon analizi üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan en önemlileri, Tanaka (1982), Terano ve ark. (1992)'nun yapmış olduğu çalışmalardır. Tanaka (1982), bulanık veri analizi için modeller önermiştir. Terano ve ark. (1992), bulanık teoriler için temel bilgiler, bulanık regresyon modelleri, doğrusal olabilirlik sistemleri ve doğrusal olasılık regresyon modellerini açıklamışlardır.

Çalışmanın Birinci bölümünde, bulanık regresyon analizi ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar hakkında genel bilgiler verildi. İkinci bölümde, bulanık mantık, bulanık küme, bulanık kümeler üzerinde yapılan işlemler, bulanık sayı, üyelik fonksiyonu konuları ele alındı. Üçüncü bölümde, bulanık regresyon analizi ve bulanık regresyon analizinde kullanılan bulanık en küçük kareler ve lineer programlama temeline dayanan yöntemler, girdisi kesin-çıktısı bulanık, girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olmak üzere iki başlık altında ayrıntılı biçimde incelendi. Dördüncü bölümde, ele alınan bulanık regresyon analiz yöntemleri sayısal örneklerle çözümlendi ve sonuçlar yorumlandı.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, bulanık regresyon analiz yöntemleri girdisi kesin-çıktısı bulanık ve girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olmak üzere iki başlık altında ele alınmış ve sayısal örneklerle verilmiştir. Sayısal örnekler bölümünde literatürdeki çalışmalardan alınan veriler kullanılmıştır. Çözüm aşamasında, WinQSB, Excel ve Maple programlarında çözüm yapılarak bulanık parametre değerleri, bulanık tahmini değerler ve hata kareler ortalaması değerleri elde edilmiştir. Girdisi kesin-çıktısı bulanık sayı olan veriler için elde edilen sonuçlar Çizelge 4.2-4.14'de, girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan veriler için elde edilen sonuçlar Çizelge 4.16-4.21'de verilmiştir.

Girdisi kesin- çıktısı bulanık sayı olan veriler için elde edilen sonuçlara göre 4 farklı regresyon modeli için etkin olan ve tercih edilen yöntem hata kareler ortalaması küçük olan yöntemdir ve Çizelge 5.1'de özetlenmiştir.

Çizelge 5.1. Girdisi kesin-çıktısı bulanık sayı olan veriler için 5 farklı bulanık regresyon yöntemi için elde edilen hata kareler ortalaması değerleri ve tercih edilen yöntem

Çizelge No	Tanaka_{MSE}		Özelkan_{MSE}		HBS1_{MSE}		Diamond_{MSE}	Tercih Edilen Yöntem
(4.2)	0	<	4381.08	>	0		-	Tanaka ve HBS1
(4.4)	4.57	<	13.67	>	5.01	>	1.86	Diamond
(4.6)	657.71	>	253.24	>	159.36		-	HBS1
(4.8)	24.34	>	21.96	>	9.45		-	HBS1
(4.10)	3602526.8	>	489775.48	<	135375101.1		-	Özelkan
(4.12)	0.98	<	293.10	>	0.12	>	0.09	Diamond
(4.14)	24.51	>	5.97	>	4.99	>	0.29	Diamond

Çizelge 5.1 incelendiğinde ele alınan girdisi kesin-çıktısı bulanık sayı olan örnekler için en çok tercih edilen yöntemlerin HBS1 ve Diamond yöntemleri olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.2. Girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan veriler için 6 farklı bulanık regresyon yöntemi için elde edilen hata kareler ortalaması değerleri ve tercih edilen yöntem

Çizelge No	SY_{MSE}		HBS2_{MSE}		FLS_{MSE}		GFLS_{MSE}		ADFLS_{MSE}		IDFLS_{MSE}	Tercih Edilen Yöntem
(4.16)	0.41	<	4.22	<	35.62	>	25.75	>	0.11	>	0.03	IDFLS
(4.18)	0.71	<	0.74	<	14.11	<	21.77	>	11.07	>	10.34	SY
(4.20)	-		-		13.75	<	19.39	>	4.26	>	1.45	IDFLS

Çizelge 5.2 incelendiğinde ele alınan girdisi bulanık-çıktısı bulanık sayı olan örnekler için en çok tercih edilen yöntemin IDFLS yöntemi olduğu görülmektedir.

Bu tez çalışmasında, doğrusal programlama temeline dayalı yöntemler ve bulanık en küçük kareler yöntemleri veriler üzerinde uygulandı. Daha sonra yapılacak çalışmalarda, birden fazla bağımlı ve/veya bağımsız değişkene sahip bulanık çoklu regresyon ve bulanık çok değişkenli regresyon modelleri verilere uygulanabilir.

KAYNAKLAR

1. Aktaş. H., Çağman, N., 2005. Bulanık ve Yaklaşımlı Kümeler, Çankaya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi.

2. Bardossy, A., 1990. Note On Fuzzy Regression, Fuzzy Sets and Systems, 37, 65-75.

3. Baykal, N., Beyan, T., 2004. Bulanık Mantık İlke ve Temelleri, Bıçaklar Kitabevi, Ankara.

4. Diamond, P.,1988. Fuzzy Least Squares, Information Sciences, 46, 141-157.

5. Dombi, J., (1990), Membership function as an evaluation. Fuzzy Sets and Systems 35, 1-21.

6. Elmas, Ç., 2003. Bulanık Mantık Denetleyicileri, Seçkin Kitabevi, Ankara.

7. Hojati, M., Bector, C.R., Simimou, K.,2005. A simple Method for Computation of Fuzzy Linear Regression, European Journal of Operational Research, 166, 172-184.

8. Klir, G.J., Clair, U.H., Yuan, B., 1997. Fuzzy Set Theory Foundations and Applications, Prentice Hall PTR.

9. Lai, Y.J., Hwang, C.L., 1992. Fuzzy Mathematical Programming; Method and Applications, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

10. Ming, M., Friedman, M., Kandel, A., (1997). General Fuzzy Least Squares, Fuzzy Sets and Systems, 88, 107-118.

11. Özelkan, E.C., Duckstein, L., 2000. Multi-objective fuzzy regression: A General framework, Computers and Operations Research 27, 635-652.

12. Sakawa, M., Yano, H.,1992. Fuzzy Linear Regression Analysis for Fuzzy Input-Output Data, Information Sciences, 63, 191-206.

13. Şen, Z., 2001. Bulanık Mantık ve Modelleme İlkeleri, İstanbul Teknik Üniversitesi, Bilge Kültür Sanat Yayınevi, İstanbul.

14. Tanaka, H., Uejima, S., Asai, K., 1982. Linear Regression Analysis with Fuzzy Model, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. SMC-12, No.6.

15. Tanaka, H., 1987. Fuzzy Data Analysis By Possibilistic Linear Models, Fuzzy Sets and Systems, 24, 363-375.

16. Terano, T. , Asai, K., Sugeno, M., 1992. Fuzzy Stems Theory and Its Applications, Academic Press Inc.

17. Yang, M.S., Lin, T.S., 2002. Fuzzy Least-Squares Linear Regression Analysis for Fuzzy Input-Output Data, Fuzzy Sets and Systems,126, 389-399.

18. Yapıcı, N., 2000, Bulanık Doğrusal Programlamaya Sinir Ağları Yaklaşımı, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Konya.

19. Yapıcı Pehlivan, N., 2005. Parametrik Olmayan Regresyonda Bulanık Tahmin Ediciler, S.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi, Konya.

20. http://www.yapay-zeka.org/modules/icontent/index.php?page=33, son erişim tarihi: 20.01.2009.