T.C
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RİSKE MARUZ DEĞER VE UÇ DEĞERLER TEOREMİ

NURİ ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI

KONYA,2009

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RİSKE MARUZ DEĞER VE UÇ DEĞERLER YÖNTEMİ

Nuri ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANA BİLİM DALI

Konya,2009

Bu tez 11/05/2009 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. M. Fedai KAYA	Doç Dr. Aşır GENÇ	Yrd. Doç. Dr. Nimet Yapıcı PEHLİVAN
(Danışman)	(Üye)	(Üye)

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

RİSKE MARUZ DEĞER VE UÇ DEĞERLER TEOREMİ

Nuri ÇELİK
Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Mehmet Fedai KAYA
2009

Finansal piyasalarının kaçınılmaz bir unsuru olan riskin son 30 yılda önemli bir etken haline gelmesiyle, daha karmaşık risk yönetim tekniklerine gereksinim duyulmuştur. Riskin ölçülmesi için iki temel yöntem geliştirilmiştir. Her iki yöntem de istatistikî temelleri olan yöntemlerdir. İlk yöntem riske maruz değer yöntemidir. Riske maruz değer, veri anlam düzeyinde bir yatırımın en fazla kaç lira kaybedeceğini gösteren bir yöntemdir. Bu çalışmada riske maruz değer hesaplama yöntemlerinden uç değerler yöntemi kullanılmış ve dalgalanmanın sık olduğu piyasalarda daha iyi sonuç verdiği ortaya konulmuştur. Uygulama olarak IMKB-100 gerçek veriler kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Riske Maruz Değer, Risk Analizi, Uç Değerler Teoremi, Gumbel Dağılımı, Weibull Dağılımı, Frechet Dağılımı, Eşik Analizi.

ABSTRACT

Master Thesis

VALUE AT RİSK AND EXTREME VALUES THEORY

Nuri ÇELİK

Selcuk Universtiy

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Statistics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Mehmet Fedai KAYA

2009

Risk management have become more importatnt factor in financial markets within 30 years. Therefore, more complicated risk management tools are needed. There is two main methods of measuring the risk. Both methods have statistical basic facilities. First method is measuring value at risk. Value at risk, VaR is defined as a threshold value such that the probability that the mark-to-market loss on the portfolio over the given time horizon exceeds this value (assuming normal markets and no trading) is the given probability level. In this study the extreme valu theorem is used to measure value at risk and at high volatilities, it is discovered that this method gives better solution than other methods. In application Istanbul stock exchange-100 data is used.

Keywords: Value at Risk, Risk Analyses, Extreme Value Theory, Gumbel distribution, Weibul distribution, Frechet distribution, Threshold Analyses.

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının konu seçiminde ve gerçekleşmesinde yardımını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Mehmet Fedai KAYA'ya, beni çalışmaya teşvik eden ve destek olan başta Doç Dr Aşır GENÇ olmak üzere diğer tüm bölüm hocalarıma ve arkadaşlarıma, tez çalışmam boyunca manevi desteğini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1 Olasılık Uzayları ve Rasgele Değişkenler	5
2.2 Regresyon ve Zaman Serileri Analizi	10
2.3 Normal Dağılım	13
2.4 Karar Fonksiyonu	13
2.5 Kayıp Fonksiyonu	14
2.6 Risk Fonksiyonu	15
2.7 Tahmin Problemi	15
2.7.1 Tahmin Edicide Aranan Özellikler	16
2.7.1.1 Hata Kareler Ortalaması	16
2.7.1.2 Yansızlık	16
2.7.1.3 Yeterlilik	16
2.7.1.4 Tutarlılık	17
2.7.1.5 Etkinlik	17
2.7.2 Tahmin Edici Elde Etme Yöntemleri	18
2.7.2.1 En Çok Olabilirlik Yöntemi	19
2.7.2.2 Momentler Yöntemi	19
2.7.2.3 En Küçük Kareler Yöntemi	20
2.7.2.4 Bayes Yöntemi	21
3. RİSKE MARUZ DEĞER	23
3.1. Risk Kavramı	23

3.2. Riskin Sınıflandırılması 24
3.3. Risk Analizi 24
3.4 Risk Yönetimi 25
3.5 Riskin Ölçülmesi 26
3.6 Riske Maruz Değer 27
3.7 Riske Maruz Değer Hesaplama Yöntemleri 29
3.7.1. Varyans-Kovaryans Yöntemi 30
3.7.2. Tarihi Simülasyon ve Monte Carlo Simülasyon Yöntemi 33
3.7.3. Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama Yöntemi 34
3.7.4. Uç Değerler Yöntemi 34
3.7.5. Kernel Sıklık Yöntemi 35
3.7.6. GARCH Modelleri 35
3.7.7. Geriye Dönük Test 36
3.7.8. Stres Testleri 37
4. UÇ DEĞERLER YÖNTEMİ 38
4.1. Giriş 38
4.2. Sıra İstatistikleri 39
4.3. Sıra İstatistiklerinin Dağılımları 40
4.4. İki Sıra İstatistiğinin Koşullu Dağılımı 45
4.5. Fisher-Tippet Teoremi 45
4.6. Eşik Analizi 48
4.7. Uç Değerler Yöntemiyle Riske Maruz Değer Hesaplama(Algoritma) 51
5. UYGULAMA 54
6. SONUÇ VE ÖNERİLER 63
KAYNAKLAR 64

1. GİRİŞ

Son yıllarda gerek dünyada gerekse ülkemizde yaşanan ekonomik krizler etkin bir risk yönetimi sisteminin gerekliliğini ortaya koymaktadır. Ayrıca globalleşmenin de etkisiyle karmaşık ve değişken yatırım işlemleri nedeniyle artan riskler bu gereksinimi desteklemektedir. Günlük hayatta pek çok yerde karşımıza çıkan risk kavramının tanımını yapmakta bir hayli zorlanılmıştır. Deprem riski, kaza riski, ölüm riski, yatırım riski gibi pek çok kereler duyduğumuz bu kavramın tanımını yapmak oldukça güçtür.

Finansal piyasaların kaçınılmaz bir unsuru olan riskin, son 30 yılda önemli bir etken haline gelmesi ile risk yönetim tekniklerine gereksinim doğmuştur. Geniş bir bakış açısıyla düşünüldüğünde ekonominin içinde yer alan bütün katılımcılar, esasında risk yönetimine odaklanmıştır. Ancak başlangıçta da ifade edildiği gibi, bu amaçla yürütülen faaliyetler sadece son on yıldır "Risk yönetimi" olarak adlandırılmış ve genel bir yaklaşımla bir sistem haline gelmiştir.

Riske Maruz Değer (Value at Risk) , belli bir zaman aralığında verilen bir olasılıkla finansal varlıklardan oluşan bir portföy değerindeki maksimum potansiyel değişimin ölçüsüdür. Riske Maruz Değer (RMD), başlangıcı J.P. Morgan'a (1980) dayanan popüler bir market riski ölçümüdür. Riske Maruz Değer belli bir zaman aralığında belli bir olasılıkla ne kadar kaybedebiliriz sorusunun cevabını verir.

Çalışmanın birinci bölümünde; riskin tanımı, risk fonksiyonu, riskin sınıflandırılması ele alınmıştır. Ayrıca, risk analizi ve risk yönetimi hakkında kısaca bilgi verilmiş ve riskin ölçülmesi problemi ele alınmıştır.

İkinci bölümde; Risk yönetiminde ve ölçümünde gerekli olan istatistik ve ekonometri terimleri kısaca açıklanmıştır. Ortalama, ortanca, mod, varyans, standart sapma ve momentler gibi en temel istatistiki bilgilerin yanı sıra regresyon analizi ve zaman serileri analizi ile durağanlık testleri hakkında kısaca bilgi verilmiştir. Ayrıca risk ölçüm modellerinde en çok kullanılan varsayımlardan, normal dağılım varsayımı için normal dağılım hakkında kısaca bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Riske maruz değer, tanımı, kullanım alanları ve hesaplama yöntemleri hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca, backtesting (geriye dönük test) ve stres testleri hakkında riske maruz değer değerlendirme yöntemleri hakkında bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde; Riske maruz değer hesaplama yöntemlerinden uç değerler yöntemi (Extreme Value Theory) hakkında geniş bilgi verilmiştir. Ayrıca, kuyruk analizi ve

sıra istatistikleri hakkında kısaca bilgi verilmiştir. Uç değerler yönteminin risk ölçümündeki kullanım şeklinden de bahsedilmiştir.

Beşinci bölümde; IMKB Ulusal-30 endeksi kapsamındaki beş bankaya ait hisse senetlerinden oluşan bir portföy için uç değerler yöntemiyle Riske Maruz Değer hesaplaması yapılmıştır. Yapılan RMD hesaplaması diğer yöntemlerle karşılaştırılmış ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

1.1. Literatür Taraması

Risk yönetimi ve risk kavramının gelişimini akademik olarak literatür taramasının yapılmasının yanı sıra piyasadaki gelişmelerin de tarihi gelişmelerinin işlenmesi yerinde olacaktır. Risk yönetimi, 1970 lerin ilk yarısında doğup gelişen, Pazar ekonomilerinin evrimini etkileyen önemli bir kavramdır. 1970 li yılların başında zorunlu nedenlerle dalgalı kur uygulamasının gündeme gelmesi farklı bir dönemi başlatmıştır. Risk Yönetimi alanında önemli kilometre taşı, 1988 Basel Sözleşmesidir. Bankaların kredi risklerini kapsayan bu düzenleme zaman içerisinde finansal piyasalardaki gelişmelere yanıt verecek şekilde birçok kez gözden geçirilmiş ve takip eden düzenlemeler için önemli bir basamak oluşturmuştur. Bankaların asli işlevlerinden biri olan kredi vermenin yanı sıra, finansal piyasalarda kar amacına yönelik kısa vadeli alım/satım yapmaları ve bu şekilde eriştikleri işlem hacminin çok büyük boyutlara ulaşması piyasa riskini gündeme getirmiştir. Bu gelişmeler üzerine harekete geçen Basel Komitesi, 1993 yılından itibaren yoğun bir çalışma içine girmiş ve 1996 yılında son halini alan Basel Sözleşmesinin Piyasa riskini de içerecek şekilde yeniden düzenlenmesi başlıklı bir düzenlemeye son şeklini vermişlerdir.

Haziran 1999 tarihinde Basel Komitesi, yeni bir düzenlemeye ilişkin bir taslak hazırlamıştır. Risk duyarlılığı daha fazla olan yeni düzenlemeye ilişkin olarak, ilgili taraflarca 200'ün üzerinde görüş bildirmiştir. Bu görüşler doğrultusunda taslakta yapılan değişiklikler sonucunda Ocak 2001 de düzenlemeye ilişkin ikinci taslak çalışması kamuoyuna sunulmuştur. Mayıs 2001 sonuna kadar ikinci taslağa ilişkin tekrar görüşlerin toplanması ve 2001 yılı sonunda yeni sermaye düzenlemesi yayımlanarak, 2004 yılında uygulamaya geçirilmesi planlanmıştır. Ocak 2001 de yayınlanan Basel Sözleşmesi önerisi, operasyonel riskleri de sermaye yeterliğinin hesaplamasında dikkate almak suretiyle bu alanda atılan önemli bir adım olmuştur. Son olarak uygulama tarihi birkaç kez revizyon geçiren Basel II; BIS komitesince Haziran 2004 te son hali yayınlanarak 2006 yılı sonuna kadar ülkelerin uygulamaya geçmek için gerekli hazırlıkları yapmaları planlanmıştır. 2006 yılında eski ve yeni sistem paralel

olarak çalışacak ve bir geçiş süresi sonunda 2007'den itibaren yeni Basel II uygulanmaya başlanmıştır.

Akademik olarak, Riske Maruz Değer kavramının, 1990'lı yılların başında karşılaştığımız finansal skandallar sonrasında ortaya çıktığı ve geliştiğini söylemek yanlış olmayacaktır (Akçay,2003). JP Morgan; RiskMetrics'i ve gerekli veri setini, Kasım 1994'de yayınlamaya başlamıştır. Riske Maruz Değer kavramı ve hesaplamalarıyla ilgili çalışmalar son yıllarda gittikçe önem kazanmıştır. İlk olarak üstel ağırlıklı hareketli ortalama yöntemi Hendricks (1996) tarafından ortaya konmuş ve Alexandar (1996) ise varyans modellemesinde kullanılan GARCH yöntemlerinin riske maruz değer için temellerini ortaya atmıştır. Jordan ve Mackay (1997), normallik varsayımı altında hesaplaması oldukça kolay olan varyans-kovaryans modelini ortaya koyarken, Holton (1998), bu varsayımı ortadan kaldırarak tarihi simülasyon ve monte carlo simülasyon yöntemlerini önermiştir. Butler ve Schacter (1997), Kernel sıklık yöntemini riske maruz değer hesaplama yöntemine adapte etmiş ve son olarak Longin (2000), uç değerler yöntemiyle riske maruz değer hesaplama yöntemi önermiştir.

Uç değerler yöntemi ise sıra istatistiklerinin bir dalıdır ve öncelikle bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenlerin maksimum ve minimumlarının stokastik davranışları ile ilgilenir. Temeli 1700 lere dayanan uç değerler yöntemiyle, 1928 de Fisher ve Tippet üç çeşit uç limit dağılım olduğunu göstermiştir. 1943'te Gnedenko uç değer teoreimi için uç sıra istatistiklerinin zayıf ıraksaması için elverişli koşulları göstermiştir. Gumbel (1941) , Weibull (1939) ise uç değer teoremini belli dağılımlara uydurarak mümkün uygulamalarını vermişlerdir. Longin (2000) ise uç değer teoremini riske maruz değer hesaplamalarına uyarlamıştır. Ho ve Diğerleri (2000) uç değerler yöntemiyle hesaplanan Riske Maruz değer uygulamalarını Asya piyasalarına, Gençay ve Selçuk (2004) ise uygulamayı gelişmekte olan ülke ekonomilerine uygulamıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, yapılmış olan çalışma için gerekli olan olasılık uzayları, rasgele değişkenler ve dağılımları hakkında genel bilgiler verilecektir.

2.1. Olasılık Uzayları ve Rasgele Değişkenler

İstatistik, rasgelelik içeren olaylar, süreçler ve sistemler hakkında matematiksel modeller kurmada ve bu modellerin uyumluluğuna ve bu modellerden sonuç çıkarmada gerekli bilgi ve yöntemleri ortaya koyan bir bilim dalıdır.

Tanım 2.1.1. Sonuçların kümesi belli olan ancak gerçeklendiğinde hangi sonucun ortaya çıkacağı önceden bilinmeyen işleme "olasılık deneyi" denir.

Tanım 2.1.2. Bir olasılık deneyinin tüm olabilir sonuçlarının kümesine örnek uzay denir.

Tanım 2.1.3. Örnek uzayın bir alt kümesine "olay" denir. Bir olayın gerçekleşmesi deney sonucunun bu kümenin elemanı olması demektir.

Tanım 2.1.4. Bir Ω cümlesinin alt cümlelerinden oluşan bir U sınıfı,

i. $\Omega \in U$ (2.1)

ii. $A \in U$ cümlesi için $\overline{A} \in U$ (2.2)

iii. U 'da her (A_n) dizisi için $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in U$ (2.3)

özelliklerine sahipse U sınıfına Ω 'da bir "σ - cebir" denir.

Teorem 2.1.5. U, Ω üzerinde bir σ - cebir olmak üzere,

i. $\Omega \in U$

ii. $(A_n), U$ 'da bir dizi ise $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in U$

iii. $A_i \in U$, $i = 1, ..., n \quad n \in N$ ise $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in U$

iv. $A_i \in U$, $i=1,...,n \quad n \in N$ ise $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in U$

v. $A, B \in U$ ise $A \setminus B \in U$

Teorem 2.1.6. $I \neq \varnothing$ bir indis cümlesi ve U_i , $(i \in I)$, σ-cebir olmak üzere, $U = \bigcap_{i \in I} U_i$ sınıfı da bir $\sigma - cebir$'dir.

İspat. $\forall i \in I$ için U_i , σ-cebir olsun.

i. (2.1) koşulundan $\forall i \in I$ için $\Omega \in U_i$ olduğundan $\Omega \in \bigcap_{i \in I} U_i$ olur.

ii. (2.2) koşulundan $\forall i \in I$ için $\overline{A} \in U_i$ ' dir.

$A \in \bigcap_{i \in I} U_i$ ise $\forall i \in I$ için $\overline{A} \in U_i$ ise $\overline{A} \in \bigcap_{i \in I} U_i$

iii. (2.3) koşulundan (A_n), U_i' de bir dizi ise $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in U_i$' dir.

(A_n), $\bigcap_{i \in I} U_i$'de bir dizi olsun.

$\forall i \in I$ için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in U_i$ ise $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \bigcap_{i \in I} U_i$

olduğundan $\bigcap_{i \in I} U_i$,Ω'da bir $\sigma - cebir$'dir.

Tanım 2.1.7. U ,Ω'da bir $\sigma - cebir$ olmak üzere,

$$P : U \to R$$
$$A \to P(A)$$

fonksiyonu,

i. $A \in U$ için $P(A) \geq 0$

ii. $P(\Omega) = 1$

iii. U 'daki ayrık cümlelerin her (A_n) dizisi için $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

özelliklerine sahipse P'ye U üzerinde "bir olasılık ölçüsü" denir. $P(A)$ değerine A'nın ölçüsü veya A'nın olasılığı denir.

Tanım 2.1.8. Ω boş olmayan bir cümle, U, Ω'da bir $\sigma-cebir$ ve P, U üzerinde bir olasılık ölçüsü olmak üzere, (Ω,U,P) üçlüsüne "olasılık uzayı" denir.

Teorem 2.1.9. (Ω,U,P) olasılık uzayı olsun.

i. $P(\varnothing)=0$

ii. $A_1,A_2,...,A_n$, U'da ayrık cümleler ise $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$

iii. $P(\overline{A})=1-P(A)$

iv. $A\subset B$ ise $P(A)\le P(B)$

v. $0\le P(A)\le 1$

vi. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Tanım 2.1.10. (Ω,U,P) olasılık uzayı ve

$$X:\Omega\to R$$
$$w\to X(w)$$

bir fonksiyonu, $\forall B\in \mathrm{B}$ için $X^{-1}(B)\in U$ koşulunu sağlıyorsa X'e "rasgele değişken" denir. Burada B borel kümesini B borel $\sigma-cebir$'ini göstermektedir.

Tanım 2.1.11. (Ω,U,P) olasılık uzayı ve X rasgele değişken olmak üzere,

$$F:R\to[0,1]$$
$$x\to F(x)=P(X\le x)$$

fonksiyonuna "X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu" denir.

Tanım 2.1.12 X rasgele değişkenin $X(\Omega)$ değer kümesi sayılabilir olduğunda X'e kesikli rasgele değişken ve X'in belirlediği olasılık dağılımına da "kesikli dağılım" denir. X'in $x\in X(\Omega)$ değerini alması olasılığı $P(X=x)=P\{w\in\Omega:X(w)=x\}$ olmak üzere,

$$\sum_{x\in X(\Omega)}P(X=x)=P\left(\bigcup_{x\in X(\Omega)}(X=x)\right)=1$$

dir. Kesikli X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu

$$F(x)=P(X\le x)$$
$$=\sum_{\substack{a\le x\\ a\in X(\Omega)}}P(X=a),\quad -\infty<x<\infty$$

ve F dağılım fonksiyonudur.

Tanım 2.1.13. (Ω, U, P) olasılık uzayı ve X rasgele bir değişken olmak üzere,

$$f : X(\Omega) \to R$$
$$x \to f(x) = P(X = x)$$

fonksiyonuna X rasgele değişkenin "olasılık fonksiyonu" denir.

Tanım 2.1.14. Bir $f : R \to R$ fonksiyonu için

i. $f(x) \geq 0$, $x \in R$

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

özellikleri sağlanıyorsa f fonksiyonuna "olasılık yoğunluk fonksiyonu" denir.

Tanım 2.1.15. Bir X rasgele değişkenin F dağılım fonksiyonu bir f olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \ , -\infty < x < \infty$$

şeklinde yazılabiliyorsa X rasgele değişkenine "mutlak sürekli veya kısaca sürekli rasgele değişken" ve f fonksiyonuna "olasılık yoğunluk fonksiyonu" denir.

Tanım 2.1.16. X , bir rasgele değişken ve $g : R \to R$, $\forall B \in \mathrm{B}(R)$ için $\{x : g(x) \in B\} \in \mathrm{B}(R)$ özelliğine sahip bir fonksiyon olmak üzere:

i. X kesikli ve $\sum_x |g(x)| f(x) < \infty$ olduğunda

$$E(g(X)) = \sum_x g(x) f(x)$$

ii. X sürekli ve $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f(x)dx < \infty$ olduğunda,

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)dx$$

değerine $g(X)$'in beklenen değeri denir (Öztürk 1993).

Tanım 2.1.17. X rasgele değişkeninin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x)$ ve $E(X^k)$ var olsun. Bu durumda $E(X^k)$ değerine X rasgele değişkeninin k. ncı momenti denir ve μ_k ile gösterilir. Ayrıca,

i. k=1 için $E(X) = \mu_1$ değerine X rasgele değişkeninin beklenen değeri denir ve μ ile gösterilir.

ii. $E(X-\mu)^k$ değerine X 'in μ'ya göre k. momenti (k. merkezi moment) denir.

iii. $E(X-\mu)^2 = \mu_2 - \mu^2$ değerine X rasgele değişkeninin varyansı denir ve genellikle σ^2 veya $Var(X)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.18. İki boyutlu bir $\boldsymbol{X}$ rasgele vektörünün bileşenleri X_1 ve X_2 olsun. $\boldsymbol{X}$ in beklenen değer vektörü ve varyans-kovaryans matrisi (var olması durumunda)

$$\mu = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_1, X_2) & Var(X_2) \end{bmatrix}$$

dir. Burada,

$$Cov(X_1, X_2) = E[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))]$$

olup, X_1 ve X_2 arasındaki korelasyon,

$$\rho_{X_1X_2} = \frac{Cov(X_1, X)}{\sqrt{Var(X_1)Var(X_2)}}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.19. Dağılım fonksiyonu $F(x)$ olan bir X rasgele değişkeninin medyanı (ortancası)

$$P(X \geq M) \geq \frac{1}{2} \ \ ve\, P(X \leq M) \leq \frac{1}{2}$$

özelliğini sağlayan M sayıdır. (Akdi, 2005).

2.2. Regresyon ve Zaman Serileri Analizi

Zaman serileri, bilimin her alanında uygulamaları bulunabilen, istatistiğin bazen de ekonometri biliminin bir uygulama alanıdır. Zaman serileri, basit şekli ile bir regresyon modeline benzemesine rağmen, temel varsayımlarda birbirlerinden ayrılmaktadır. Bir regresyon modelinde, bağımsız değişken konumundaki değişkenler, zaman serilerinde bağımlı değişken olarak karşımıza çıkmaktadır. Fakat yine de, istatistiki sonuçlar elde edilirken, regresyon teknikleri kullanılmaktadır.

Doğrusal regresyon modeli, $X_{i,t}, t = 1,2,3,....,n$ ve $i = 1,2,3,...,p$ bilinen bağımsız değişkenleri, $y_t, t = 1,2,3,...,n$ bağımlı değişkenleri göstermek üzere,

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1,t} + \beta_2 X_{2,t} + ... + \beta_p X_{p,t} + e_t$$

olarak verilir.Burada, $X_{i,t}$ ler bilinen bağımsız değişkenler olmak üzere temel varsayımlar e_t hata terimleri üzerine yapılır ve bir regresyon modeli için e_t lerin sıfır ortalamalı sabit varyanslı, $Var(e_t) = \sigma^2$ ve $\forall s \neq t$ için $Cov(e_t, e_s) = 0$ olduğu varsayılır. Regresyonda temel amaç parametrelerin $(\beta_i, i = 0,1,2,3,..,p \ ve \ \sigma^2)$ tahmin edilmesi ve verilere göre en uygun modelin belirlenmesidir.

Zaman serileri ise zaman içerisinde yapılan gözlemlerin bir dizisi olarak tanımlanmaktadır. Başka bir ifade ile T bir indis küme olmak üzere, bir zaman serisi, $\{X_t : t \in T\}$ şeklinde ifade edilir. Buradaki T indis kümesi genel olarak $T = \{1,2,3,...\} = \mathrm{N}$, $T = \{0,\pm 1,\pm 2,....\} = \mathrm{Z}$ olarak alındığı gibi, $T = \Re$, *veya* $T = [0,1]$ gibi sürekli aralıklar da alınabilir.

Tanım 2.2.1: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı, T de bir indis küme olmak üzere, bir zaman serisi $\Omega \times T$ çarpım uzayından reel sayılara giden bir fonksiyondur. Yani zaman serisi

$$X : \Omega \times T \to \Re$$
$$: (w,t) \to X(w,t)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur.

Tanım 2.2.2: $\{X_t : t \in T\}$ bir zaman serisi olsun. Eğer, $\forall n,h,t_1,t_2,....,t_n \in T$ ve $t_{1+h},t_{2+h},...,t_{n+h} \in T$ olmak üzere, $\forall x_1,x_2,...,x_n \in \Re$ için,

$$F_{X_{t1},X_{t,2}},....,_{X_{t,n}}(x_1,x_2,....x_n) = F_{X_{t1+h},X_{t,2+h}},....,_{X_{t,n+h}}(x_1,x_2,....x_n)$$

koşulu sağlanıyorsa $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisine güçlü durağan bir zaman serisi denir.

Tanım 2.2.3: $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisi,

i. $E(X_t) = \mu$

ii. $Cov(X_t, X_s)$ kovaryansı sadece $|t-s|$ nin bir fonksiyonudur.

koşullarını sağlıyorsa zayıf durağandır denir.

Tanım 2.2.4: Tanım 2.2.3 teki (ii) koşuluna göre $Cov(X_t, X_{t+h})$ kovaryansının sadece h nin bir fonksiyonu olması gerekmektedir. Bu fonksiyona $\{X_t : t \in T\}$ zaman serisinin otokovaryans fonksiyonu denir ve $\gamma(h)$ ile gösterilir. Yani serinin otokovaryans fonksiyonu,

$$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h})$$

olarak tanımlanır.

Zaman serilerinin durağanlıklarının tespit edilmesinde birçok yöntem söz konusudur. Değişik yöntemler olmakla birlikte, durağanlık için kullanılan en yaygın ve en geçerli yöntem "birim kök" testleri olmaktadır. Birim kök testi için kullanılan ifade,

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t$$

biçimindedir. Burada,

Y_t: Y' nin t zamandaki aldığı değer,

Y_{t-1}: Y'nin t-1 zamandaki aldığı değer,

u_t : Klasik varsayımlara uyan, yani ortalaması sıfır, ardışık bağımlı olmayan, olasılıklı hata terimidir.

Eğer yukarıdaki regresyon denklemi katsayıları hesaplanır ve ρ = 1 olarak bulunursa Y_t olasılıklı değişkeninin bir birim köke sahip olduğu söylenebilinir. Ancak $|\rho|<1$ durumunda serinin durağan olduğu söylenebilmektedir.

Serinin birim köke sahip olup olmadığının tespitinde kullanılan diğer bir yöntem geliştirilmiş Dickey-Fuller(ADF) testidir. Bu testin yapımında kullanılan hipotezler,

$$\begin{aligned} H_0 &: \rho = 1 \\ H_1 &: \rho < 1 \end{aligned} \qquad (3.16)$$

Şeklindedir. En basit biçimi ile ADF test istatistiği olan τ , $Y_t = \rho Y_{t-1} + u_t$ regresyon denkleminden tahmin edilen ρ katsayısını standart hatasına bölümüyle elde edilmektedir Hesaplanan ‘‘τ’’ değerinin mutlak değeri Monte-Carlo benzetimi ile oluşturulan Dickey-Fuller tablosundan elde edilen kritik değerin mutlak değeriyle ilişkilendirilip serinin durağan olup olmadığı hakkında yorum yapılabilmektedir.

2.3. Normal Dağılım

Bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , -\infty < x < \infty$$

biçiminde tanımlandığında X rasgele değişkenine μ ortalamalı σ^2 varyanslı normal dağılıma sahiptir denir ve $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ biçiminde gösterilir.

$\mu = 0$ ve $\sigma^2 = 1$ olması durumunda X rasgele değişkenine standart normal dağılıma sahiptir denir ve olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad , -\infty < x < \infty$$

biçimindedir.

2.4. Karar Fonksiyonu

Bir kitlenin sayısal bir büyüklükle ile ifade edilmesi olası bir özelliği hakkında bir fikir sahibi olmak istediğimizde izlenebilecek iki yol vardır: Ya o kitlenin elemanlarını birer birer ele almak ve her birey üzerinde söz konusu sayısal büyüklüğü saptamak; Ya da bu kitleden *n* büyüklüğünde $X_1, X_2, ...X_n$ örneklemi alınır ve ölçüm sonucu $x_1, x_2, ...x_n$ değerlerine ulaştıktan sonra karar fonksiyonu olarak isimlendirilen bir $d(x_1, x_2, ...x_n)$ fonksiyonunu söz konusu kitlenin sayısal bir büyüklükle ifade edilebilen söz konusu özelliğinin bir temsilcisi olarak kullanmaktır. Bu yoldan elde edilen sonucun kitleden elde etmeyi umduğumuz sonucu temsil edeceğini varsaymaktır. Bir başka deyişle, örneklemi kitlenin bir temsilcisi olarak görmek ve örneklemden elde edilen sonuçları kitleye genelleştirmektir.

2.5. Kayıp Fonksiyonu

$X_1, X_2, ...X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta \subset \Re$ olan bir dağılımdan örneklem ve $T(X_1, X_2, ...X_n)$, θ için bir tahmin edici olsun. *T* tahmin edicisinin aldığı değer *t* olmak üzere, θ parametresi *t* olarak tahmin edildiğinde kaybı anlatan,

$$\begin{aligned} k &: \Theta \times \Re \to [0, \infty) \\ &: (\theta, t) \to k(\theta, t) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

gibi ölçülebilir bir fonksiyona kayıp fonksiyonu denir. θ yerine $d(x_1, x_2, ...x_n) = \hat{\theta}$ almakla uğranılan kaybı temsil eden bir fonksiyona kayıp fonksiyonu denir ve $L(\theta, d)$ ile gösterilir. Kayıp fonksiyonunu belirlemek, işlevine zarar vermemek, adıyla bağdaşır olmak kaydıyla bütünüyle araştırmacının tercihine bırakılmış bir olgudur (Cerit, 1997).

Kayıp fonksiyonunun formunu belirleme işi araştırmacının tercihine bırakılmış olmakla beraber kayıp kelimesinin anlamıyla bağdaşmayan bir formun tercih edilmesi söz konusu olamaz.

$$\begin{aligned} &L(\theta, d) = (\theta - d)^2, \\ &L(\theta, d) = \frac{|\theta - d|}{c} \\ &L(\theta, d) = \cos(\theta - d) \end{aligned} \qquad (2.4)$$

gibi fonksiyonlar kayıp fonksiyonu olarak kullanılabilir. Bu fonksiyonların tamamı çift fonksiyondur ve $\theta - d$ yerine $d - \theta$ almak bir farklılık ortaya çıkmamaktadır. Yani θ'dan sapmaların işareti pozitif veya negatif olması sonuca yansımamaktadır.

$$L(\theta, d) = (\theta - d)$$
$$L(\theta, d) = \frac{(\theta - d)^5}{c} \qquad (2.5)$$
$$L(\theta, d) = \sin(\theta - d)$$

fonksiyonları ise kayıp fonksiyonu olamazlar. Tek fonksiyonlardır ve negatif ve pozitif sapmalar işaretleri ile toplama dahil olduklarında birbirlerinin etkilerini giderecekler ve gerçeği gölgeleyip ortaya çıkmasına engel olacaklardır.

2.6. Risk Fonksiyonu

Kayıp fonksiyonunun beklenen değerine, θ sabit olmak üzere, risk fonksiyonu denir. Risk fonksiyonu,

$$R(\theta, d) = \int .... \int L[\theta, d(x_1, x_2, ..., x_n)] \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) dx_1 dx_2 .... dx_n \qquad (2.6)$$

ile ifade edilir.

2.7. Tahmin Problemi

İstatistiğin en önemli problemlerinden olan tahmin problemi, dağılımı biçimsel olarak bilinen fakat parametreleri (karakteristikleri) bilinmeyen kitle dağılımının parametrelerinin tahmin edilmesidir.

Tahmin için kitleden alınacak bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler topluluğuna (örneklem) ihtiyaç vardır. Belli yöntemler altında alınması gereken bu örneklemde kitle hakkındaki bilgiler mevcuttur. Amaç, örneklemde gizli olarak bulunan bu bilgileri uygun istatistikler (örneklemin bir fonksiyonu) yardımı ile açığa çıkarılmasıdır.

Tahmin problemi kendi içinde nokta tahmini ve aralık tahmini olarak ikiye ayrılır. Bir parametreyi tahmin etmek için bir istatistiğin (tahmin edicinin) değerini kullandığımızda buna nokta tahmini denir. Ancak nokta tahmini her zaman yeterli olmayabilir. Bu durumda kitle parametresine belli bir olasılıkla içinde barındıran (yanılgı payını bildiğimiz) aralık biçiminde tahminlere (güven aralıklarına) ihtiyaç duyarız. Güven aralıkları da tahmin probleminin diğer

bir safhasını oluşturur ve nokta tahmininin eksikliğini tamamlar. Bu iki tahmin, birbirlerinin alternatifi değil tamamlayıcısıdır.

2.7.1. Tahmin Edicide Aranan Özellikler

2.7.1.1. Hata Kareler Ortalaması

$\underline{X}$: $x_1, x_2, ..., x_n$ aynı dağılıma sahip bağımsız örneklem , $T(\underline{x}) = T$, bilinmeyen parametre θ için bir tahmin edici olsun.

$$MSE(T) = E(T - \theta)^2$$

değerine T tahmin edicisinin hata kareler ortalaması denir ve küçük MSE değerine sahip olması arzu edilir.

$$MSE(T) = \begin{cases} \sum_t (t-\theta)^2 f_T(t), & T \text{ kesikli ise} \\ \int_{-\infty}^{\infty} (t-\theta)^2 f_T(t)dt, & T \text{ surekli ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

2.7.1.2. Yansızlık

$E(T)$, θ için kullanılan tahmin edicinin beklenen değeri olmak üzere, $[\theta - E(T)]$ değerine T tahmin edicisinin yanı9 denir. Bir tahmin edicinin MSE değerinin küçük olması mutlak değerce yanın ve varyansın küçük olması ile mümkündür. $\theta - E(T) = 0$ yani $E(T) = \theta$ durumunda T tahmin edicisine θ için yansız bir tahmin edici denir.

2.7.1.3. Yeterlilik

Bilinmeyen θ parametresi hakkındaki bütün bilgi örneklemin içindedir. Yeterlilik prensibi θ parametresi hakkında bilgi kaybı olmadan örneklem değerlerinin indirgenmesidir Gerçekte herhangi bir $T(\underline{x})$ istatistiği örneklem değerinin indirgenmesini sağlar. Burada

önemli olan bu işi bilgi kaybına sebep olmaksızın yapabilmektir. Örneklemin kendisi her zaman tek başına yeterli bir istatistik olmak üzere $T(\underline{x}) = t$ verilmişken $\underline{x}$'in koşullu dağılımı θ'ya bağlı değilse t'ye θ için yeterli istatistik denir.

Teorem 2.7.1.(Neyman-Fisher Teoremi) : $T(\underline{X})$**'**in θ için yeterli bir istatistik olması için gerek ve yeter şart örneklemin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunun,

$$f(x_1, x_2, ..., x_n; \theta) = g(T(\underline{x}); \theta).h(\underline{x})$$

biçiminde yazılabilmesidir. Burada h sadece $\underline{x}$ lere bağlı negatif olmayan bir fonksiyondur ve θ'dan bağımsızdır. g'de sadece T ve θ'nın negatif olmayan bir fonksiyonudur. Bu teorem bize yeterli bir istatistik elde etmek için oldukça kolay bir metot vermektedir.

2.7.1.4.Tutarlılık

Tahmin edicilerin tahmin edecekleri parametreye yakın bir değer alması tahminin hassasiyeti bakımından istenen bir durumdur. Tutarlılık bir tahmin edicinin limitteki özelliğidir ve gözlem sayısının yeterince büyük olması durumunda yapılan hatanın belirli bir sınırdan daha küçük olacağını söyler. Tutarlılık, bir tahmin edicinin olasılıkta veya MSE ölçütüne göre tahmin edeceği gerçek kitle parametresi olan θ 'ya yakınsamasıdır.

Tanım 2.7.1 : $T(\underline{X}) = T$ **,** θ için bir tahmin edici olsun,

i) $T \xrightarrow{P} \theta$ ise T'ye θ için tutarlı (olasılıkta tutarlı) bir tahmin edici denir.

ii) $\lim_{n\to\infty} MSE(T) = 0$ ise T'ye MSE ölçütüne göre tutarlı tahmin edici denir.

2.7.1.5. Etkinlik

θ parametresi için verilmiş olan yansız bir tahmin edicinin en küçük varyansa sahip olup olmadığının bilinmesi tahmin edicilerin kıyaslanmasında önemli bir kriterdir. Yansız ve en küçük varyanslı tahmin ediciye etkin tahmin edici denir. Rao-Cramer eşitsizliği yansız

tahmin edicilerin varyansı için bir alt sınır belirler ve yansız tahmin edicinin varyansı bu alt sınıra eşitse bu tahmin ediciye etkindir denir.

Teorem 2.7.2.: $\underline{X} = X_1, X_2, ...X_n \sim f(x;\theta),\ \theta \in \Theta$ örneklem ve T , θ için bir tahmin edici olsun,

$$MSE(T) > \frac{\left[1 - \frac{d(\theta - ET)^2}{d\theta}\right]^2}{n.E\left[\frac{d \ln f(x;\theta)}{d\theta}\right]^2}$$

eşitsizliği Rao-Cramer eşitsizliği olarak adlandırılır. Görüldüğü üzere Rao-Cramer eşitsiliği MSE ölçütü için bir alt sınır belirlemektedir.Ancak T'nin yansız olması durumunda $ET = \theta \ ve \ MSE(T) = VarT$ olduğundan Rao-Cramer eşitsizliği,

$$Var(T) \geq \frac{1}{nE\left[\frac{d \ln f(x;\theta)}{d\theta}\right]^2}$$

biçimini alır. Yansız bir tahmin edicinin varyansı Rao-Cramer eşitsizliğinin alt sınırından daha küçük olamaz. Bu alt sınıra eşitse bu tahmin ediciye etkin tahmin edici denir.

2.7.2. Tahmin Edici Elde Etme Yöntemleri

İstatistiki hesaplamalarda en çok kullanılan tahmin edici elde etme yöntemleri aşağıdadır.

1) En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi
2) En Küçük Kareler Yöntemi
3) Momentler Yöntemi
4) Bayes Yöntemi

2.7.2.1. En Çok Olabilirlik Tahmin Yöntemi

$\underline{X} = X_1, X_2, ...X_n \sim f(x;\theta),\ \theta \in \Theta$ örneklem ve bu örneklemin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(\underline{x};\theta)$ olmak üzere belli bir tanım aralığında verilmiş olan θ değeri için $f(\underline{x};\theta)$, θ'nın bir fonksiyonu olarak düşünüldüğünde $L(\theta) = f(\underline{x};\theta)$'ya θ'nın olabilirlik fonksiyonu denir. En çok olabilirlik yöntemi olabilirlik fonksiyonunu maksimum yapan bilinmeyen θ parametresinin örneklemin bir fonksiyonu olarak tahmin edilmesidir.

Buna göre,

$$L(\theta;x) = \max_{\theta\in\Theta} \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$$

dır. Logaritma fonksiyonun monotonluğu göz önüne alındığında,

$$\ln L(\theta;x) = \max_{\theta\in\Theta} \prod_{i=1}^{n} \ln f(x_i,\theta)$$

yazılabilir. Bazı durumlarda $\max_{\theta\in\Theta} \prod_{i=1}^{n} \ln f(x_i,\theta)$ optimizasyon problemini çözmek daha kolay olmaktadır. Bu sebepten dolayı genellikle olabilirlik fonksiyonu yerine onun doğal logaritması olan ve log-olabilirlik fonksiyonu da denen fonksiyon maksimize edilmektedir.

2.7.2.2. Momentler Yöntemi

$\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r) \in \Theta \subset \Re^r$ olmak üzere r bileşenli θ parametre vektörünü tahmin etmek isteyelim. $\underline{X} = X_1, X_2, ...X_n \sim f(x;\theta),\ \theta \in \Theta$ örneklem olmak üzere, var olması halinde, kitle dağılımının momentleri,

$$\alpha_k = E(X^k), k = 1,2,....$$

ve örneklem momentleri

$$\hat{\alpha}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k,\ k = 1,2,....$$

olsun. Kitle ile örneklem momentlerinden ilk r tanesinin eşitlenmesiyle elde edilen $(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_r)$ bilinmeyenlerine göre r tane denklem sisteminin çözümü olan,

$$\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1(X_1, X_2, ...X_n), \hat{\theta}_2(X_1, X_2, ...X_n), ..., \hat{\theta}_r(X_1, X_2, ...X_n))'$$

tahmin edicisine θ nın momentler yöntemi tahmin edicisi denir.

2.7.2.3. En Küçük Kareler Yöntemi

(X,Y) bağımlı bir rasgele vektör olmak üzere En küçük kareler prensibi, X ve Y arasında $y = h(x)$ biçiminde fonksiyonel bir ilişkiyi belirleyecek ve $E(t-h(x))^2$ 'yi minimum yapacak olan $h(x)$ 'i belirlemeyi amaçlamaktadır.

Teorem 2.7.3. $Var(X) = E[X - EX]^2 < E(X-c)^2$ *ve* $\forall c \neq E(X)$ olmak üzere $y = E(Y \mid x)$ biçimindeki ilişkiye y'nin X üzerindeki regresyonu denir.

Uygulamada genellikle X ve Y rasgele değişkenlerine ait ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu bilinmediğinden bu ilişkinin belirlenmesi için $h(x) = y = ax + b$ biçiminde alınmaktadır. O halde $L = E[Y - ax - b]^2$ yi minimize edecek a ve b parametreleri,

$$a = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{E(X^2) - [E(X)]^2}$$

$$b = E(Y) - aE(X)$$

şeklinde hesaplanabilmektedir.

Tanım 2.7.2 $\underline{X} = X_1, X_2, ...X_n \sim f(x;\theta),\ \theta \in \Theta$ örneklem olmak üzere kitle dağılım fonksiyonun çeşitli işlemlerle doğrusal hale getirilip katsayıları teorem 2.7.3 ten faydalanılarak a ve b katsayılarının en küçük kareler metodu ile tahmin edilmesiyle bulunacak olan $\hat{\theta}$ tahminine en küçük kareler tahmin edicisi denir.

2.7.2.4. Bayes Tahmin Edicileri

Bilindiği gibi, olasılık dağılımların $F = \{f(.;\theta) : \theta \in \Theta\}$ ailesinde olasılık yoğunluk fonksiyonlarını indisleyen θ parametresi bilinmeyen bir sabit olarak ele alındığı gibi olasılık

dağılımına sahip bir rasgele değişken olarak da ele alınmaktadır. Bayes yaklaşımında bir rasgele değişken olan θ nın dağılımına önsel dağılım denir. Genellikle bu öznel bir dağılım olmak üzere $X_1, X_2, ...X_n$ örneklemi, θ rasgele değişkeni ile koşullandırılmış dağılımdan alınmış gibi düşünülmektedir,yani i=1,2,….n için X_i ler bağımsız ve her biri $f(.|\theta)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olarak ele alınmaktadır. Bu durumda, örneklemin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu,

$$f(x_1, x_2, ...x_n \mid \theta) = f(x_1 \mid \theta) f(x_2 \mid \theta) ... f(x_n \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)$$

ve θ nın önsel dağılımının olasılık (yoğunluk) fonksiyonu π olmak üzere,

$$f_{X_1, X_2, ... X_n, \theta}(x_1, x_2, ...x_n, \theta) = f(x_1 \mid \theta) f(x_2 \mid \theta) ... f(x_n \mid \theta) \pi(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta) \pi(\theta)$$

dır. Buradan ***X*** in marjinal dağılımının olasılık (yoğunluk) fonksiyonu,

$$f_X(x) = \int_{\theta} f(x \mid \theta) \pi(\theta) d\theta$$

olmak üzere, örneklem değerleri verildiğinde θ nın koşullu dağılımının, yani θ nın sonsal dağılımının olasılık (yoğunluk) fonksiyonu ,

$$\pi(\theta \mid x) = \frac{f_{X,\theta}(x, \theta)}{f_X(x)} = \frac{f(x \mid \theta) \pi(\theta)}{f_X(x)}$$

dır. Sonsal dağılım bir anlamda, önsel dağılımın gözlenen değerler ile güncellenmesi olarak düşünülebilir. Sonsal dağılımın beklenen değeri, bu gözlemleri üreten dağılımdaki θ için bir tahmin edici olarak kullanılabilir.

$$\hat{\theta}_B = \int_{\theta} \theta \pi(\theta \mid x) d\theta$$

istatistiğine θ nın Bayes tahmin edicisi denir.

3. RİSKE MARUZ DEĞER

3.1 Risk Kavramı

Risk kavramı, 2400 yıllık bir geçmişe sahiptir. M.Ö. 400 yılında eski Yunanlar, Perslerle gireceği bir savaş öncesinde yazılan eski bir yazıtta ilk defa risk kavramından söz etmişlerdir. (History of the Peloponnessian War) . Ancak henüz rakamlar kullanılmadığı için söz konusu tarihte kantitatif bir riskten bahsetmemiz mümkün olmamaktadır.

Risk genel olarak belirsizlik sözcüğü ile birlikte kullanılmaktadır. Ancak ikisi arasındaki en önemli fark riskin belirsizliğin bir sonucu olmasıdır. Risk belirsizliğe maruz kalmaktır (Kiam, 1997). Risk beklenen sonuç ile gerçekleşen sonuç arasındaki sapmadır. Belirsizlik ise elde edilecek olası sonuçların dağılımıdır. Dağılım ne kadar geniş ise belirsizlik o kadar fazla demektir. Dolayısıyla bir yatırımcı için risk, yapılan yatırımın getirisinin beklenenden farklı olması şeklinde tanımlanabilir.

Günlük hayatta pek çok yerde karşımıza çıkan risk kavramının tanımını yapmakta bir hayli zorlanılmıştır. Deprem riski, kaza riski, ölüm riski, yatırım riski gibi pek çok kereler duyduğumuz bu kavramın tanımını yapmak oldukça güçtür. 1989 yılında yayınlanan Webster's Sözlüğünde riskin aşağıdaki tanımları yapılmıştır.

- Kayıp ile karşı karşıya kalma şansı
- Hasar tehlikesi ya da kayıp
- Kaybetme şansı
- Kaybetme olasılığının derecesi.

söz konusu sözlük anlamlarından riskin tam olarak tarifini yapmak mümkün olmasa bile risk kavramı, yaşanılan anın ilerisinde var olması olası, sonuçları istenmeyen, arzulanmayan durumlar için kullanılmaktadır. Finansal anlamada risk kavramı, paranın gelecekti durumu hakkındaki belirsizliktir. Teorik olarak risk, kayıp fonksiyonunun beklenen değeridir ve aşağıdaki teorik yapıyla ifade edilir;

$X_1, X_2, ...X_n$ olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x;\theta)$, $\theta \in \Theta \subset \Re$ olan bir dağılımdan örneklem ve $T(X_1, X_2, ...X_n)$, θ için bir tahmin edici olsun. *T* tahmin edicisinin aldığı değer *t* olmak üzere, θ parametresi *t* olarak tahmin edildiğinde kaybı anlatan ve kayıp fonksiyonu denen,

$$\begin{aligned} k &: \Theta \times \Re \to [0,\infty) \\ &: (\theta, t) \to k(\theta, t) \end{aligned} \qquad (2.1)$$

gibi ölçülebilir bir fonksiyona bağlı olarak tanımlanan,

$$R(\theta,T) = E_{\theta}(k(\theta,T(X_1,X_2,.....X_n))) \qquad (2.2)$$

fonksiyonuna ***risk fonksiyonu*** denir.

3.2. Riskin Sınıflandırılması

Riskin tanımını yaparken karşılaşılan zorluk, riskin sınıflandırılması aşamasında da karşımıza çıkmaktadır. Önceden de belirtildiği gibi hayatın her alanında risk kavramı karşımıza çıkmasına rağmen, bu tezde özellikle finansal ve aktüeryal risk üzerinde durulacaktır. Risk kavramını sınıflandırırken de özellikle bu risk türü yani finansal risk kavramı sınıflandırılacaktır. Finansal risk, yatırımın değerinin veya sahip olunan paranın ilerdeki durumu hakkındaki belirsizlik olarak tanımlanmıştır. Finansal risk kavramını öncelikle sistematik ve sistematik olmayan risk olarak ikiye ayırmamız mümkün olacaktır.

Sistematik risk, beklenmedik olaylar sonucunda meydana gelen risklerdir. Ekonominin yapısında meydana gelen ve tüm piyasayı etkileyen risklerdir. Sistematik olmayan riskler ise, ekonominin genelinde meydana gelen olaylara değil, karar vericinin durumunda meydana gelen değişikliklere bağlı olana risklerdir. Bu risklerin ölçümü basit regresyon modellemesine dayanır.

Diğer taraftan finansal risk, piyasa riski, döviz kuru riski, faiz riski, hisse senedi fiyat riski, kredi riski, likidite riski, bilanço riski ve sermaye yeterliliği riski olarak bir çok kola ayrılır ve ayrı ayrı incelenmesi gerekmektedir.

3.3. Risk Analizi

Risk analizi, 20. yüzyılın son çeyreğinde karşımıza çıkan bir kavramdır. Son yıllarda literatüre giren risk kavramının tanımı yapıldıktan sonra karşılaşılan risk ile nasıl başa çıkılacaktır sorusu gündeme gelmiştir. Karşı karşıya kalınan risk ile baş edebilmek için kullanılacak stratejiler bütününe risk analizi denir. Risk analizi, ilgilenilen alandaki risklerin, bu risklerin ölçeklerinin ve önlem alınması gereken alanların belirlenme sürecidir. Risk analizi, duyarlılık analizinin doğal bir uzantısıdır. Risk analizinin dört temel aşaması mevcuttur. Bunlar;

- Riskin Tanımlanması
- Riskin ölçülmesi (İstatistik)
- Riskin yargılanması
- Riskin değerlendirilmesidir.

3.4. Risk Yönetimi

Bir ülkede fon kullananlar ile fon arz edenler arasında fon akımlarını düzenleyen kurumlar, akımı sağlayan araç ve gereçler ile bunları düzenleyen hukuki ve idari kurallardan oluşan yapıya finansal piyasa denir. Tanımdan da anlaşılacağı gibi, mali piyasa, para ve sermaye piyasalarından daha geniş ve bu piyasaları da kapsamına alan bir kavramdır. Finansal piyasalarda riskin tanımı, belli bir yatırımın gelecekte ne kadar olacağı hakkındaki belirsizliktir. Risk Yönetimi ise, bu belirsizliğin ölçülerek veya tahmin edilerek muhtemel risklerin saptanması ve olabilecek zararlara karşı alınabilecek önlemlere yönelik olarak son yıllarda geliştirilen finansal bir stratejiler bütünüdür**.**

Risk Yönetimi, özellikle bankalar açısından oldukça önem taşımaktadır. Risk yönetimi bankalar için stratejik bir konudur. Bankalar, güçlü risk yönetimi sayesinde bir yandan risklerini kontrol ederek kayıplarını azaltır, diğer yandan da riske ayarlı karlılık analizi ışığında daha karlı ürünlerde büyüyerek hissedara değer katarlar. Güçlü risk yönetimi olan bankalar aldıkları piyasa (faiz oranı, döviz kuru gibi piyasa fiyatlarındaki hareketler sonucu ve likidite darlığından doğabilecek olası değer kayıplar), kredi (problemli kredilerden doğan kayıplar) ve operasyonel riskleri (genel anlamda bankanın aldığı diğer bütün riskler içinde; hatalar, eksiklikler, bilgi teknolojisi sistemlerinin bozulması, sahtekarlıklar, hukuki sebepler veya yeni düzenlemelerden doğan "olay" sebepli kayıpları ve sektörel sebeplerden dolayı hacim ve marjdaki değişimler sonucu karlılığı etkileyen "iş ortamı" kapsamlı riskler) detaylı inceler, olası krizlerde kayıplarını daha önceden belirler, bu kayıpları minimize etmek için önceden önlemler alır, aldıkları risk ile kazançları karşılaştırır ve riski almaya değip değmeyeceğini önceden değerlendirirler. Bunları yapan bankalar, aldıkları her türlü riski ölçmek için Riske-Maruz Değer, Beklenen/ Beklenmeyen Kayıp, Ekonomik Sermaye gibi analitik yöntemler geliştirmiş, ölçümlerle riskleri izleyen ve raporlayan, kriz senaryolarında alınan riski sermaye kaynakları çerçevesinde değerlendiren ve de bunların yanı sıra risk ölçümlerinin riski kontrol etmek ve yönetmek açısından kullanılabilmesi amacıyla banka içinde gerekli organizasyonu, politika ve süreçleri oluşturmuş bankalardır Çünkü bankacılık

sektöründe ortaya çıkabilecek olan yeni bir risk, sadece o sektörü değil, ekonomik sistemin tamamını peşinden sürükleyecektir. Risk yönetiminin önemi son 25 yılda daha da artmaya başlamıştır. Bankalar kuvvetli ve etkin risk yönetimleri sayesinde bir yandan içerisinde bulundukları zarara neden olan etkenlerin azaltılmasını sağlarken, diğer yandan da zayıf noktalarını güçlendirerek karlılıklarının artmasını sağlamaktadır. Başarılı bir risk yönetimi süreci sırası ile şu şekildedir.

- Riskin tanımlanması
- Riskin ölçülmesi
- Riskin analiz edilmesi
- Riskin kontrol edilmesi
- Riskin raporlanması
- Riske göre yönetim stratejisi ve politikanın belirlenmesi.

Etkin bir risk yönetimi, farklı riskleri bir bütün halinde yöneterek ve risk ile getiri arasındaki dengeyi sağlayarak hissedarın kazancını maksimum yapan sistemdir. Risk analizi ve risk yönetimi sürecinde de en önemli süreç riskin ölçülmesidir. Riskin ölçülmesi tamamen istatistiki temelleri olan bir süreçtir.

3.5. Riskin Ölçülmesi

Finansal piyasalarının kaçınılmaz bir unsuru olan riskin son 30 yılda önemli bir etken haline gelmesi ile, daha karmaşık risk yönetim tekniklerine gereksinim duyulmuştur. Riskin ölçülmesi için iki temel yöntem geliştirilmiştir. Her iki yöntemde istatistiki temelleri olana yöntemlerdir. İlk yöntem riske maruz değer yöntemidir. Riske maruz değer, veri anlam düzeyinde bir yatırımın en fazla kaç lira kaybedeceğini gösteren bir yöntemdir. İkinci yöntem ise beklenen kayıp (Expected Shortfall-ES) yöntemidir. Beklenen kayıp yöntemi, Artzner(1997) tarafından ortalamayı aşan kayıp şeklinde ifade edilmektedir. Beklenen kayıp yönteminin etkin risk ölçümlemesi yapabilmesi için verilerin duranlılığı önem taşımaktadır. Fishburn (1977), ilk olarak beklenen kayıp yöntemine benzer matematiksel hesaplamalar yapmıştır. Risk ölçümü için geliştirilen beklenen kayıp yöntemi, doğrudan risk verilerini kullanarak risk ölçümü gerçekleştirilmesine imkan veren ve geliştirilmeye devam eden bir ölçüm yaklaşımı olarak ön plana çıkmaktadır.

3.6. Riske Maruz Değer

Finansal piyasaların kaçınılmaz bir unsuru olan riskin, son 30 yılda önemli bir etken haline gelmesi ile risk yönetim tekniklerine gereksinim doğmuştur. Geniş bir bakış açısıyla düşünüldüğünde ekonominin içinde yer alan bütün katılımcılar, esasında risk yönetimine odaklanmıştır. Ancak başlangıçta da ifade edildiği gibi, bu amaçla yürütülen faaliyetler sadece son on yıldır "Risk yönetimi" olarak adlandırılmış ve genel bir yaklaşımla bir sistem haline gelmiştir.

Riske Maruz Değer (Value at Risk) , belli bir zaman aralığında verilen bir olasılıkla finansal varlıklardan oluşan bir portföy değerindeki maksimum potansiyel değişimin ölçüsüdür. Riske Maruz Değer (RMD), orijini J.P. Morgan'a (1980) dayanan popüler bir pazar riski ölçümüdür. Riske Maruz Değer belli bir zaman aralığında belli bir olasılıkla ne kadar kaybedebiliriz sorusunun cevabını verir.

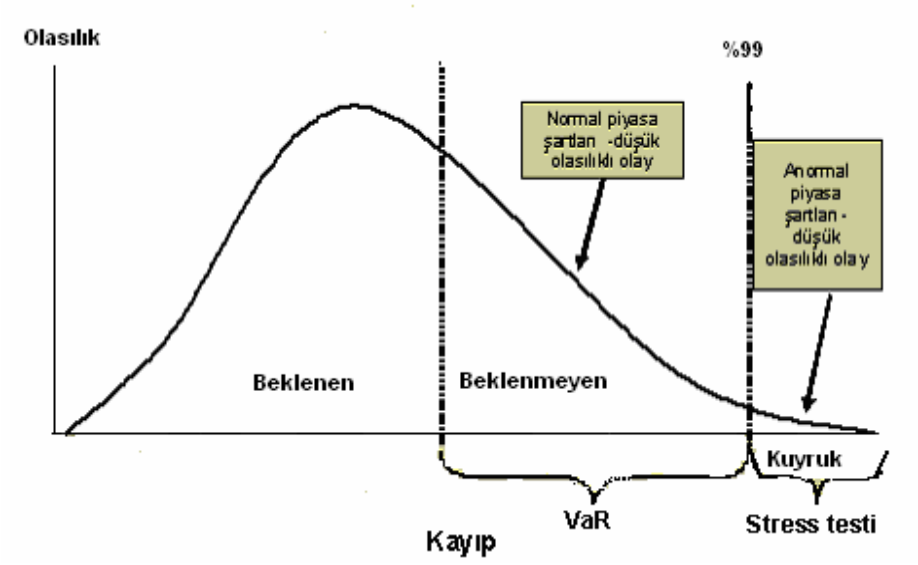
Firmaların kendi kurumları içindeki tüm riskleri bir bütün olarak ölçme yolundaki çalışmalar 1980'lerde başlamıştır. Sonradan bu çalışmalar danışmanlık firmalarına ve kendisi bir model geliştirebilecek durumda olmayan ancak böyle sistemlere ihtiyaç duyan finansal kurum ve şirketlere satılmıştır. Bu sistemlerin en ünlüsü J.P. Morgan tarafından geliştirilen, RMD ölçütünü kullanan RiskMetrics dir. Bunun ardından RMD daha yaygın bir kabul ve kullanım bulmuş, sadece menkul kıymet işlemleri ile uğraşanlar değil bankalar, emeklilik fonları, diğer finansal kurumlar ve mali olmayan şirketler tarafından da uygulanır hale gelmiştir. (Aydın,1993).

Riske Maruz Değer (VaR), piyasa riskinin tespitinde son yıllarda gittikçe daha yaygın olarak kullanılmaya başlanan ve istatistiki temeli olan bir yöntemdir. Teorik olarak RMD, belli bir güven aralığında muhtemel maksimum zarar miktarını ölçen yöntemlere denir. İstatistiki olarak, bir örneklem üzerinde hesaplanan portföy zarar dağılımı olarak ifade edilmektedir. Bir başka tanımı ise, bir portföyün veri güven düzeyinde en fazla kaç lira kaybedeceğini gösteren rakamdır. (Henriks, 1996).

100(1-α)% güven aralığı için RMD,

$$\mathrm{Var}_{\alpha}(x) = -\inf\{x : P(X \le x) > \alpha\} \qquad (4.1)$$

dır. (Yasuhino ve Toshinao,1996)



Şekil 4.1: Riske Maruz Değer Grafiği

RMD modellerinin bu kadar popüler olmasının iki temel nedeni vardır.

- Tek bir rakam ile tüm portföyün riskini söyleyebilmesi,
- Sermaye hesaplamalarında temel oluşturulması.

1994 yılından itibaren risk yönetim ve ölçüm aracı olarak uluslar arası finansal kuruluşlar arasında yaygınlaşan RMD uygulamaları, günümüz risk yönetim araçları içinde önemli bir yere sahiptir. Ayrıca uygulama kolaylığı, üst yönetimlerce yorumlanıp değerlendirilmesinin kolay olması ve kullanılmasının teşvik edilmesi gibi diğer nedenler riske maruz değer kullanımını önemli hale getirmiştir.

RMD, risk raporlaması, risk limitlerinin belirlenmesi, sermaye uygulamaları, sermayenin iç dağılımının belirlenmesi, performans ölçümü gibi her türlü risk yönetimi ihtiyacı için kullanılmaktadır. Ancak RMD risk yönetiminde bütün sorunların yanıtını vermemektedir. RMD modellerinin de bazı eksiklikleri ve uygulama sorunları vardır. Her gün yeni yöntemler geliştirerek bu uygulama sorunları aşılmaya çalışılmaktadır.

3.7. Riske Maruz Değer Hesaplama Yöntemleri

Riske maruz değer hesaplaması ile ilgili en iyi modelin hangisi olduğu hakkında bir görüş birliği sağlanamamıştır. Literatürde oluşturulan bütün yöntemler temelde portföy getirilerinin olasılık dağılımlarının hesaplaması üzerinde odaklanmaktadırlar. RMD hesaplamasında etkili faktörler,

- Güven düzeyi,
- Verinin zaman uzunluğu,
- Verinin sıklığı (günlük, aylık),
- Elde tutma süresidir.

Söz konusu etkili faktörler göz önüne alındığında en basit gösterimiyle bir portföyün Riske Maruz Değerini hesaplamak için aşağıdaki formül kullanılmaktadır.

$$RMD=[Ortalama\ Getiri+(olasılık\ dağılım\ değeri* Standart\ sapma*\sqrt{Elde\ tutma\ \ suresi})]*Yatırımın\ değeri \quad (4.2)$$

Formülde de görüldüğü gibi etkili parametreler hesaplanarak RMD hesaplaması teorik olarak basit görünse de portföyün olasılık dağılım değerini ve standart sapmasını hesaplamak her zaman kolay olmamaktadır. Bu yüzden birçok RMD hesaplama yöntemleri kullanılmaktadır. Her bir yöntemin zayıf ve kuvvetli noktaları mevcuttur. En genel anlamıyla Riske Maruz Değer Hesaplama yöntemleri;

- Varyans-Kovaryans yöntemi (Jordan ve Mackay,1997),
- Üstel ağırlıklı hareketli ortalama yöntemi (Hendricks,1996),
- Tarihi simülasyon ve Monte Carlo simülasyon yöntemi (Holton,1998)
- Uç değerler yöntemi (Longin,2000),
- Kernel sıklık yöntemi (Butler ve Schacter,1997),
- GARH yöntemi (Alexandar,1996),

dır. Literatürde yer alan Riske Maruz Değer hesaplama yöntemlerinin zayıf ve kuvvetli yönleri mevcut olmakla beraber geliştirilen değer yöntemlerinin değerlendirilmesi yöntemleri mevcuttur. Bunlar,

- Geriye dönük test (Backtesting),
- Kupiec testi,
- Durasyona bağlı test,
- Stres testleri

dir.

3.7.1. Varyans-Kovaryans Yöntemi

Bu yöntem portföy getirilerinin normallik varsayımı altında varyans-kovaryans matrisinin tahminini elde etmek için kullanılır. Yöntemi kullanmak için gerekli tek varsayım yatırım getirilerinin normal dağıldığı varsayımıdır. Bu bağlamada RMD hesaplamasındaki parametreler normal dağılım özelliklerinden faydalanılarak tahmin edilir ve hesaplanılabilir. Normal dağılıma sahip değişkenlerin lineer toplamı da normal dağıldığıma sahip olduğundan tek yatırım aracı için hesaplanabilen RMD, aynı şekilde normal dağılım özelliklerinden faydalanılarak kolaylıkla hesaplanabilmektedir.

Varyans-Kovaryans metodu ile *n* sayıda finansal varlıktan oluşan bir portföyün RMD sini hesaplamak için öncelikle portföyün ortalamasını ve volatilitesini (standart sapma) bulmak gerekmektedir. Bir portföyde her bir yatırım aracının portföy içindeki ağırlığı farklı olduğundan öncelikle *w* ağırlık vektörünü tanımlamamız gerekir. Buna göre portföyün ortalaması;

$$\mu_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i \qquad (4.3)$$

dir. Burada,

w_i = i. finansal varlığın portföydeki ağırlığı,

μ_i = i. finansal varlığın ortalaması

şeklinde hesaplanmaktadır. Portföyün standart sapması ,

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}} \tag{4.4}$$

dir. Vektör formu ile yazımı da aşağıdaki şekildedir.

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

her bir yatırım aracının portföy içindeki ağırlık vektörü olsun. ve

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

ortalama vektörü olmak üzere, portföyün ortalaması,

$$\mu_p = w'\mu \tag{4.7}$$

şeklinde hesaplanır. Aynı şekilde portföyün standart sapması ise,

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

şeklinde tanımlanan varyans-kovaryans matrisinin ağırlık vektörüyle çarpımına eşittir. Yani,

$$\sigma_p = \sqrt{w' \sum w} \tag{4.9}$$

şeklinde ifade edilir.

Bu yöntemin avantajları:

- Fiyat ve oranların geçmişe yönelik verisi mevcuttur, bu sebeple de bir çok piyasada şeffaf bir şekilde analiz edilebilmektedir.
- Yöntem, pek çok yerde kullanıldığı için hesaplama açısından verimlidir.

Dezavantajları ise:

- Geleceğe yönelik tahminler için hesaplanan volatilite gelecekteki piyasa hareketlerinin en iyi tahmini olmayabilir. Bu durum, özellikle normal dağılımı olmayan ve dengesiz piyasalar için önemlidir.
- Doğrusal olmayan pozisyonların riski sadece yaklaşık olarak ölçülebilir.

Normal dağılımın en önemli özelliklerinden biride standart sapmanın zamandan bağımsızlığıdır yani standart sapma durağandır. Ancak piyasa fiyatlarındaki veriler incelendiğinde varyansın (volatilite) değişken bir yapıya sahip olduğu ortaya çıkmıştır. Bu yüzden bu yöntemle bulunan RMD hesaplamasının gerçeği yansıtmayacağı düşünülerek oynaklığın tahmin edilmesi için başka yöntemler kullanılmıştır.

3.7.2. Tarihi Simülasyon ve Monte Carlo Simülasyon Yöntemi

Tarihi simülasyon yöntemi, volatilite, korelasyon ya da başka parametrelerin hesaplanmasına gerek duymadan, risk faktöründeki tarihi değişimler kullanarak hesaplamaların yapılmasına olanak sağlar. Tarihi simülasyon yönteminde normallik varsayımı aranmadığı için de parametrik olmayan RMD yöntemi olarak sınıflandırılmaktadır. Ayrıca model riski olasılığı da çok düşüktür.

Tarihi simülasyon yönteminde, tek yatırım aracı için hesaplanacak RMD için elde olan getiri verilerinin sıralanarak önceden belirlenen anlam düzeyindeki yüzdeliğinin hesaplanması amaçlanmaktadır. Portföy için hesaplanacak RMD için her bir yatırım aracının getiri verilerinin sıralandıktan sonra ağırlıklandırılması ve önceden belirlenen anlam düzeyindeki yüzdeliğinin bulunması amaçlanmaktadır.

Bu yöntemin avantajları:

- Doğrusal olmayan pozisyonlar için kolaylıkla uygulanır.
- Dağılımlar hakkında herhangi bir varsayımda bulunmaz.
- Zaman serilerinden türetilen volatiliteye güvenilmektedir.

Dezavantajları ise:

- Yöntem tam değerleme olduğu için hesaplaması yoğun işlem gerektirir.
- Senaryo üretimi yanlış bilgiler verebilir.
- Sadece geçmişte yaşanmış değişimleri göz önüne aldığı için gelecekte yaşanabilecek olası değişimler dikkate alınmamaktadır.

Monte Carlo simülasyon yönteminde ise model belli bir dönem için portföyün olası kar ve zararlarını gösterecek olan histogramın tesadüfi olarak belirlenmesini amaçlar. Monte Carlo simülasyon yöntemi ile RMD hesaplanması aşağıdaki aşamaları içerir:

- RMD hesaplanacak portföyün belirlenmesi
- Portföyün risk faktörlerinin getiri değişimlerinin hesaplanması
- Getiri değişimlerinin dağılımının hangi istatistiksel dağılıma uyduğunun tespit edilmesi
- Risk faktörlerinin korelasyon ve kovaryans matrislerinin hesaplanması.
- Belirlenen dağılıma uygun rasgele sayı üretilmesi
- Bu fiyat serilerinin portföye uygulanması
- Belirlenen güven düzeyinde RMD nin hesaplanmasıdır.

Tarihi simülasyon yöntemi beş aşamada hesaplanmaktadır,

- İlk olarak portföyün temel piyasa etkenleri cinsinden tanımlanması ve portföyde bulunan varlıkların piyasa fiyatlarına göre değerlerini piyasa etkenleri cinsinden ifade edebilecek olan bir formül tespit edilmesi gereklidir.
- Bu aşamada piyasa etkenleri için son N dönem boyunca gerçekleşmiş olan tarihi verilerin sağlanması gerekmektedir. Veriler RMD tutarının hesaplandığı elde bulundurma süresi ile uyumlu olmalıdır. Örneğin RMD tutarı bir günlük elde bulundurma süresi ile hesaplanıyorsa yani RMD tutarı bir günlük elde bulundurma süresi boyunca karşılaşılabilecek zararın bir ölçüsü olarak kullanılacaksa varsayımsal kar veya zararlara ulaşmak için piyasa etkenlerinin günlük değişimleri kullanılacaktır.
- TS yönteminin bu aşamasında mevcut portföye, piyasa oran ve fiyatlarında geçmiş N dönemde görülen değişimler uygulanmakta ve varsayımsal portföy değerleri bulunduktan sonra her bir varsayımsal portföy değerinden portföyün mevcut değeri çıkarılarak varsayımsal kar ve zararlar bulunmaktadır.

- Bu aşamada piyasa fiyatları ile değerleme sonucunda bulunan varsayımsal portföy kar ve zararları azami kardan azami zarara doğru sıralanmaktadır.
- Son aşamada seçilen güven aralığına karşılık gelen zarar tespit edilmektedir. Örneğin %95'lik güven aralığının esas alınması ve 1000 günlük verilerin kullanılması durumunda, ortaya çıkacak zararın RMD'yi aşması günlerin %5'inde veya toplam 50 günde beklenecek, böylece RD en büyük 51'inci zarar olacaktır.

Monte Carlo simulasyon yöntemi de şu şekilde hesaplanmaktadır.

- Tıpkı Tarihi Simülasyon yönteminde olduğu gibi burada da öncelikle portföyün temel piyasa etkenleri cinsinden tanımlanması ve portföyde bulunan varlıkların piyasa fiyatlarına göre değerlerini piyasa etkenleri cinsinden ifade edebilecek olan bir formül tespit edilmesi gerekmektedir.
- Temel risk etkenleri belirlendikten sonra bunlardaki değişimler için belli bir dağılım tespit veya kabul edilmekte ve bu dağılımın parametreleri tahmin edilmektedir. Diğer iki yöntemde piyasa etkenlerindeki değişimlerin dağılımı yöntemin bir parçası olarak tanımlandığından dağılım seçme yeteneği MCS yöntemini diğer iki yöntemden ayıran özelliktir. Kabul edilen dağılımın normal dağılım olması zorunlu değildir. Risk yöneticileri piyasa etkenlerinde gelecekte ortaya çıkabilecek olası değişimleri doğru bir şekilde tanımlayabileceğine inandıkları herhangi bir dağılımı seçebileceklerdir. Piyasa etkenlerinde olası değişimler geçmişteki gözlemlere dayandırılabilmektedir. Dolayısıyla geçmişte gözlemlenen değişimleri temsil edebilecek bir dağılımın seçilmesi mümkündür.
- Dağılım seçildikten sonra piyasa etkenlerinin her biri için 1.000 veya 10.000 adetten fazla varsayımsal değişim değeri üretilecek ve bu varsayımsal piyasa etkenleri kullanılarak varsayımsal portföy değerleri hesaplanacaktır. Portföyün mevcut değeri ile varsayımsal portföy değerleri karşılaştırılmak suretiyle de varsayımsal kar ve zararlar bulunacaktır.
- Bu aşamada piyasa fiyatları ile değerleme sonucunda bulunan varsayımsal portföy kar ve zararları azami kardan azami zarara doğru sıralanmaktadır.
- Son aşamada seçilen güven aralığına karşılık gelen zarar tespit edilmektedir. Örneğin %95'lik güven aralığının esas alınması ve 1000 günlük verilerin kullanılması durumunda, ortaya çıkacak zararın RMD'yi aşması günlerin %5'inde veya toplam 50 günde beklenecek, böylece RD en büyük 51'inci zarar olacaktır.

3.7.3. Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama Yöntemi (EWMA)

Basit hareketli ortalama en son k tane gözlemin ortalamasıdır. Her yeni gözlem yapıldığında en baştaki veri çıkartılıp son verinin eklenmesiyle bulunan ortalamayı tarif eder. Basit hareketli ortalama her veriye eşit ağırlık verdiği için finansal verilerde uygulanan ve her veriye değişik ağırlık veren üstel ağırlıklı hareketli ortalama tercih edilir.

Bu yaklaşımda, zaman değişimli oynaklıkların tahmin edilmesinde üstel ağırlıklı hareketli ortalamalar kullanılmaktadır. Bu yöntemde oynaklık tahmin edilirken, hesaplama yapılacak döneme yakın olan fiyat değişimlerine daha fazla ağırlık verilmektedir. *t* zamanındaki tahmini varyans, geçmiş tahminlerin λ ağırlıklı ortalamasıdır. Üstel ağırlıklı hareketli ortalama yöntemiyle hesaplanacak varyans şu şekildedir:

$$\hat{\sigma}_t = \sqrt{(1-\lambda)\sum_{i=1}^{t} \lambda^{t-1}(r_t - \bar{r})} \qquad (4.10)$$

Formülde kullanılan r_t , yatırım aracının t zamanındaki getirisi, $\bar{r}$, tüm portföyün getirisi ve λ ise sabit sayıdır. λ değeri 0 ve 1 arasında bir değer olup kabul edilen değeri 0,94 tür.(Sevil,2001)

Üstel ağırlıklandırılmış hareketli ortalama yönteminde ise,

- λ sabit sayısının değerine karar verilir.
- Sabit sayının değerine karar verildikten sonra 4.10 daki eşitlik kullanılarak yatırım aracının volatilitesi yani standart sapması tahmin edilir.
- Hesaplanan standart sapma değeri ile eşitlik 4.2 de yerine konularak yatırım aracının RMD si hesaplanır.

3.7.4. Uç değerler Yöntemi

Yöntem bir sonraki bölümde geniş bir şekilde ele alınacaktır.

3.7.5. Kernel Sıklık Yöntemi

İstatistikte kernel sıklık yöntemi, bir rasgele değişkenin dağılımını bulmamıza yarayan parametrik olmayan bir yöntemdir. Bu yöntem sayesinde kitleden alınan bir örneklem ile kitle hakkında bilgi sahibi olmamız mümkün olmaktadır.

Teorik olarak, $X_1, X_2 ..... X_n$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olsun, rasgele değişkenlerden elde edilecek kernel sıklık tahmini ise,

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{N_h} \sum_{i=1}^{N} K\left(\frac{x - x_i}{h} \right) \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada K genellikle standart normal dağılım olarak alınırken *h* ise bant genişliği parametresidir.

RMD hesaplamasında ise, bulunan kernel sıklık tahmini ile dağılımın standart sapması bulunarak hesaplamalar yapılır. (Butler ve Schacter,1997)

3.7.6. GARCH modelleri

ARCH modelleri zaman serilerinde oldukça sık kullanılan bir yöntem olup varyans modellemesi için geliştirilen bir yöntemdir. Bu model ilk olarak Engle tarafından bulunmuş ve daha sonraki yıllarda birçok türevi ortaya çıkmıştır. Yöntem regresyon modellerinde sadece ortalamanın değil varyansın da modellenebileceğini ve bu modelleme içinde ek bağımsız değişkenlere ihtiyaç olmadığını göstermiştir. (Engle,1982)

Genel olarak GARCH(p,q) modeli 4.12 deki gibidir.

$$\sigma^2 = w + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_t^2 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_j \sigma_{t-1}^2 \tag{4.12}$$

Burada, p sayısı varyans denkleminde hata teriminin kaç tane gecikmesi olduğunu, q sayısı modelde kaç tane geçmiş dönem volatilitesinin olduğunu, w ise sabit bir sayıyı

göstermektedir. Zaman içerisinde varyans modellemesinin çeşitli türevleri ortaya çıkmıştır. Bunlar,

- IGARCH
- FGARCH
- CGARCH
- GARCH-M
- EGARCH
- GJR-GARCH

dır.

RMD hesaplama yöntemlerinin her birinin kendi içinde avantaj ve dezavantajları mevcuttur. Ancak RMD modellerinin doğruluğunu test edilmesi için bir takım istatistiksel testler geliştirilmiştir. Bunlardan en sık kullanılanları, Geriye dönük test(Back testing) ve stres testleridir.

3.7.7. Geriye Dönük Test (Back Testing)

Bu test bankalar tarafından RMD modelinin doğruluğunun test edilmesi sürecidir. Geriye dönük test için bir tek metot söz konusu değildir ve bankaların risklerinden dolayı taşıması gereken sermaye rakamını verir. En önemli geriye dönük test, bütün RMD modellerinin ne kadar iyi işlendiğini gösteren kolektif seviyedeki alım satım getirileri için oluşturulan testtir.

Geriye dönük test prosedüründe bulunan RMD artı ve eksi olarak destek-direnç çizgisi olarak çizilmektedir. Geçmiş veriler ise grafiğe yerleştirildikten sonra, bulunan RMD den sapma sayısına göre, bankaların riske karşı elinde bulundurması gereken sermaye tutarı belirlenmektedir. Sapma sayısına göre ceza faktörü uygulanarak bankalar hesaplamaları yapmaktadırlar.

Finansal kurumlar tarafından RMD ölçümünde kullanılan risk modellerinin doğruluğunun test edilmesi gerekir. Yarın için hesaplanan RMD değeri ile yarın gerçekleşen Kar-zarar değeri karşılaştırılmaktadır. RMD için hesaplanan modelin uygun olabilmesi için gerçekleşen kar-zarar değeri, hesaplanan RMD değerinden küçük ve ya eşit olmalıdır. Hatalı bir modelleme sonucunda yüksek hesaplanan RMD değeri, finansal kurumun yüksek sermaye

tutmasına sebep olacağı gibi, düşük hesaplanan RMD değeri de kurumun hesapladığı modelde güvensizlik yaratacaktır.

3.8.8. Stres Testleri

Bilindiği gibi istatistiksel risk ölçümleri piyasa davranışının dengeli olduğunu varsaymaktadır. Bu da piyasanın geçmişte kaydettiği istatistiksel karakteristiklerin gelecekte de devam edeceği anlamına gelmektedir. Bu mantıkla hesaplanan RMD değerleri, piyasa davranışının büyük ölçüde değişmesinden kaynaklanacak riskleri kapsamamaktadır. Bütün piyasalarda bu tür sıra dışı durumların ortaya çıkması ihtimali her zaman vardır. Bu nedenle RMD hesaplamalarının başka testlerle desteklenmesi gereklidir. Uygulamada RMD'i destekleyen test olarak stres testleri kullanılmaktadır.

Stres testi işleminde, aşırı ya da uç değerin gerçekleşmesi olasılığı durumundaki zarar ölçülmektedir. Stres testlerinde bir senaryo üretilerek, üretilmiş olan senaryo üzerinden hesaplamalar yapılır. Son yıllarda finansal piyasaların göstermiş olduğu dalgalanmalara risk faktörü bakımından bakılacak olunursa, stres testi olarak düşünülen aşırı fiyat hareketliliğinin yılda birkaç kez gerçekleşebileceği görülmektedir.

4. UÇ DEĞERLER TEORİSİ

4.1. Giriş

Son yıllarda uç değerler teorisi, olasılık teorisinin önemli bir dalı haline gelmiştir. Bilimsel araştırmaların birçok alanında ise uç değerler yönteminin uygulama alanları genişlemiştir. Mühendislik, ekonomi, sigortacılık, astronomi gibi birçok alanda uygulama alanları mevcut olan uç değerler teorisi, son yıllarda ekonomideki globalleşme, volatilitenin artması ve risk kavramının literatüre girmesiyle beraber risk ölçüm modellerinde de kullanılmaya başlanmıştır. Risk ölçüm modellerinde, günümüzde en yaygın olarak kullanılan riske maruz değer hesaplamalarında uç değerler yöntemi özellikle ekonomik krizlerin artmasıyla beraber daha önce kullanılan hesaplama yöntemlerinin kullanmış olduğu varsayımları çürüterek ön plana çıkmıştır.

Uç değerler teorisi, kuyruklu dağılımlarda daha iyi sonuç verdiği için risk yönetiminde de önemli bir ölçüm modeli haline gelmiştir. Birçok finansal verinin asimetrik dağılıma uyduğu gerçeği altında uç değerler teorisinin normal dağılım, t dağılımı, ARCH ve GARCH model dağılımları gibi simetrik dağılımları kullanan diğer ölçüm modellerinden daha iyi sonuç vermektedir. (Levich,1985)

Uç değerler teorisi, esasında Fisher&Tippet(1928), Gnedenko(1943) ile Gumbel(1958) isimli araştırmacıların çalışmalarına dayanan, sıra istatistiği teorisinin bir dalıdır. Ancak finans alanında gerçekleşen uygulamaları oldukça yenidir. Rassal finansal değişkenin toplamının modellenmesinde, merkezi limit teoreminin oynadığı rolün benzerini, rassal değişkenlerin ekstrem değerlerinin dağılımının modellenmesi durumunda da uç değerler teorisi oynamaktadır. Her iki durumda da teori, örnekleme çapını arttırdığımızda dağılımın limit durumunda ne olması gerektiğini ifade etmektedir. RMD hesaplamasında son yıllarda önemli bir yaklaşım da, sıra dışı zamanlarda ortaya çıkan aşırı olaylara odaklanan olağanüstü değerler yaklaşımıdır. Finans piyasalarında aşırı fiyat hareketleri olağan zamanlarda piyasada yapılan düzenlemeler ile sıra dışı zamanlarda meydana gelen borsa ve döviz krizleri gibi durumların analizine karşılık gelmektedir.

Uç değerler teorisi, sıra istatistiklerine dayanmaktadır. Yöntemi vermeden önce, sıra istatistikleri hakkında kısa bir bilgi vermek yerinde olacaktır.

4.2. Sıra İstatistikleri

Sıra istatistikleri; F dağılımına sahip bir kitleden alınan n boyutlu örneklemin küçükten büyüğe sıraya dizilmesiyle elde edilen istatistiklerdir.

$X_1, X_2, ..., X_n$ kitleden alınan örneklem ve $X_{1:n} \le X_{2:n} \le ... \le X_{n:n}$ bu örnekleme ait sıra istatistikleri olsun.

$X_{i:n}$'e $i.$ sıra istatistiği adı verilir.

$i = 1$ ve $i = n$ için sırasıyla $X_{1:n} = min\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ ve $X_{n:n} = maks\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ dir. Bu iki istatistik dağılımın uç noktaları olarak adlandırılır ve uygulamalarda önemli rol oynar.

Örneklem kendi içinde bağımsız ve aynı dağılıma sahip olmasına rağmen bu örneklemden elde edilen sıra istatistikleri aralarındaki büyüklük ilişkisi sebebiyle bağımsız ve aynı dağılıma sahip olmayacaklardır.

Sıra istatistiklerinin günlük hayatta kullanıldığı alanlara ilişkin aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Belli bir zaman aralığında bir nehirden akan suyun m^3 olarak dağılımı F olsun. Biz biliyoruz ki suyun belli bir alt seviyeden az akması kuraklığı, belli bir üst seviyeden fazla akması da sele sebep olur. Su akış dağılımı F olan bu nehirden su seviyelerini gösteren $X_1, X_2, ..., X_n$ örneklemini aldığımızı düşünelim.

$X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{k:n}$ alt sıra istatistiklerinin dağılımları ve $X_{n-k:n}, X_{n-k+1:n}, ..., X_{n:n}$ üst sıra istatistiklerinin dağılımları sırasıyla kuraklığın ve selin modellenmesi için, sadece $X_{n:n}$ maksimum sıra istatistiğinin dağılımı sel risklerinin çalışılmasında ve selin önlenmesinin planlanmasında kullanılabilir.

Belli bir sistemin yaşamı en zayıf bağlantı yöntemi tarafından belirleniyorsa sistemdeki en zayıf unsurun yaşam zamanı ile sistemin yaşam zamanı aynıdır. $X_1, X_2, ..., X_n$ bir sistemi oluşturan bileşenlerin yaşam zamanları ise o zaman sistemin yaşam zamanı

$$X_{1:n} = min\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$$

tarafından belirlenir. Böylece minimum sıra istatistiğinin (*1.sıra istatistiği*) dağılımı sistemin yaşam zaman dağılımıdır.

Bir sistemin n tane aynı dağılıma sahip bileşenden (unsurdan) oluştuğunu varsayalım. Öyle ki bu n bileşenden $r.$ bozulma meydana geldiğinde sistem de bozuluyorsa o zaman $r.$ sıra istatistiğinin yaşam zamanı dağılımı, sistemin yaşam zaman dağılımı olur.

4.3. Sıra İstatistiklerinin Dağılımları

$X_1, X_2, ..., X_n \sim F$ dağılımına sahip bir örneklem olsun.

$X_{1:n} = min(X_1, X_2, ..., X_n)$ sıra istatistiğinin dağılımı;

$$F_1(x) = P\{X_{1:n} \le x\} = P\{min(X_1, X_2, ..., X_n) \le x\}$$
$$= 1 - P\{min(X_1, X_2, ..., X_n) > x\}$$
$$= 1 - [P\{X_1 > x\}P\{X_2 > x\}...P\{X_n > x\}]$$
$$= 1 - \left[\left(1 - \underbrace{P\{X_1 \le x\}}_{F(x)}\right)\left(1 - \underbrace{P\{X_2 \le x\}}_{F(x)}\right)...\left(1 - \underbrace{P\{X_n \le x\}}_{F(x)}\right)\right]$$
$$= 1 - [1 - F(x)]^n \qquad (4.1)$$
$$f_1(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x)$$

$X_{n:n} = maks(X_1, X_2, ..., X_n)$ sıra istatistiğinin dağılımı;

$$F_n(x) = P\{X_{n:n} \le x\} = P\{maks(X_1, X_2, ..., X_n) \le x\}$$
$$= \underbrace{P\{X_1 \le x\}}_{F(x)}\underbrace{P\{X_2 \le x\}}_{F(x)}...\underbrace{P\{X_n \le x\}}_{F(x)}$$
$$= [F(x)]^n \qquad (4.2)$$
$$f_n(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x)$$

$1 \le r \le n$ olmak üzere $X_{r:n}$ $r.$ sıra istatistiğinin dağılım fonksiyonu ise

$$F_r(x) = P\{X_{r:n} \le x\} = P\{X_1, X_2, ..., X_n \text{ lerden en az } r \text{ tanesi} \le x\}$$
$$= P\left\{\sum_{i=r}^{n} X_1, X_2, ..., X_n \text{ lerden tam i tanesi} \le x\right\}$$

olur. A_i: $\{X_1, X_2, ..., X_n$ lerden tam i tanesi $\le x\}$ olması olayı olsun. A_i olayları ayrık olduğundan

$$F_r(x) = P\left\{\sum_{i=r}^{n} A_i\right\} = \sum_{i=r}^{n} P\{A_i\}$$
$$= \sum_{i=r}^{n} C_n^i [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i} \qquad (4.3)$$

dır. Bu ise tam olmayan beta fonksiyonudur. Yani

$$F_r(x) = \sum_{i=r}^{n} C_n^i \left(F(x)\right)^i \left(1-F(x)\right)^{n-i}$$

$$= \frac{1}{B(r, n-r+1)} \int_0^{F(x)} t^{r-1}(1-t)^{n-r}\, dt$$

$$= I_{F(x)}(r, n-r+1) \qquad (4.4)$$

Şayet X_i ler $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$ olacak biçimde sürekli rasgele değişkenler ise

$$f_r(x) = \frac{dF_r(x)}{dx} = \frac{1}{B(r, n-r+1)} \frac{d}{dx} \int_0^{F(x)} t^{r-1}(1-t)^{n-r}\, dt$$

$$= \frac{1}{B(r, n-r+1)} \left(F(x)\right)^{r-1} \left(1-F(x)\right)^{n-r} f(x) \qquad (4.5)$$

olur. Burada

$$B(r, n-r+1) = \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!} \text{ dir.}$$

X_i rasgele değişkenlerinin kesikli olması durumunda (4.3) den

$$f_r(x) = P\{X_{r:n} = x\}$$

$$= F_r(x) - F_r(x-1)$$

$$= \sum_{i=r}^{n} C_n^i \left(F(x)\right)^i \left(1-F(x)\right)^{n-i} - \sum_{i=r}^{n} C_n^i \left(F(x-1)\right)^i \left(1-F(x-1)\right)^{n-i} \qquad (4.6)$$

dır.

David (1970), verilen bir yöntemde, sıra istatistiklerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları kombinatorik yöntemlerde kullanılarak aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$A_r = \{x < X_{r:n} < x + \Delta x\}$$

olayını göz önüne alalım.

A_r olayının gerçeklenmesi için $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örnekleminden $r-1$ tane örneğin x den küçük, 1 tane örneğin $(x, x+\Delta x]$ aralığında ve $n-r$ tane örneğinde $x+\Delta x$ den büyük olması gerekiyor. Dolayısıyla A_r olayı

$$\binom{n}{r-1}\binom{n-(r-1)}{1}\binom{n-r}{n-r} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$$

farklı sayıda gerçekleşebilir.

$$P\{A_r\} = P\{x < X_{r:n} < x+\Delta x\}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} P\{X_1, \ldots, X_{r-1} \le x; X_r \in (x, x+\Delta x]; X_{r+1}, \ldots, X_n > x+\Delta x\}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(x)]^{r-1} [F(x+\Delta x) - F(x)] [1-F(x+\Delta x)]^{n-r} \qquad (4.7)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$F_r(x+\Delta x) - F_r(x) = P\{x < X_{r:n} < x+\Delta x\}$ olmak üzere

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F_r(x+\Delta x) - F_r(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[F(x)]^{r-1} [F(x+\Delta x) - F(x)] [1-F(x+\Delta x)]^{n-r}}{\Delta x}$$

$F(x+\Delta x) - F(x) = f(x)\Delta x + o(\Delta x)$ yazılırsa

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \left[\lim_{\Delta x \to 0} [F(x)]^{r-1} f(x) [1-F(x+\Delta x)]^{n-r} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right]$$

$$= \frac{1}{B(r, n-r+1)} [F(x)]^{r-1} [1-F(x)]^{n-r} f(x) = f_r(x). \qquad (4.8)$$

bulunur.

$X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ $1 \le r < s \le n$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu da aynı yöntemle aşağıdaki gibi bulunur.

$$A_{r,s} = \{x < X_{r:n} < x + \Delta x \text{ , y} < X_{s:n} < y + \Delta y\}$$

olayının gerçeklenmesi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örnekleminden $r-1$ tane örneğin x den küçük, 1 tane örneğin $(x, x+\Delta x]$ aralığında, $s-r-1$ tane örneğin $(x+\Delta x, y]$ aralığında, 1tane örneğin $(y, y+\Delta y]$ aralığında ve $n-s$ tane örneğinde $y+\Delta y$ den büyük olması durumunda sağlanır. Burada mümkün olan durumların sayısı

$C_n^{r-1} C_{n-(r-1)}^{1} C_{n-r}^{s-r-1} C_{n-s+1}^{1} C_{n-s}^{n-s} = \dfrac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$ dir.

$P\{x < X_{r:n} < x + \Delta x \text{ , y} < X_{s:n} < y + \Delta y\} =$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}[F(x)]^{r-1}[F(x+\Delta x) - F(x)]\text{x}$$

$$\text{x}[F(y) - F(x+\Delta x)]^{s-r-1}[F(y+\Delta y) - F(y)][1 - F(y+\Delta y)]^{n-s} \quad (4.9)$$

dır. Diğer taraftan,

$F_{r,s}(x,y) = P\{X_r < x \text{ , } X_s < y\}$ olmak üzere

$$f_{rs}(x,y) = \frac{\partial F_{r,s}(x,y)}{\partial x \partial y} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{1}{\Delta x . \Delta y} P\{x < X_{r:n} < x + \Delta x \text{ , y} < X_{s:n} < y + \Delta y\}$$

$F(x+\Delta x) - F(x) = f(x)\Delta x + o(\Delta x)$ ve

$F(y+\Delta y) - F(y) = f(y)\Delta y + o(\Delta y)$ (4.9) yerine yazılırsa, $x < y$ olmak üzere

$$f_{rs}(x,y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}[F(x)]^{r-1}[F(y) - F(x)]^{s-r-1} \times$$

$$\times [1 - F(y)]^{n-s} f(y) f(x) \quad (4.10)$$

$k \le n$ ve $1 \le r_1 < r_2 < ... < r_k \le n$ olmak üzere $X_{r_1:n}, X_{r_2:n}, ..., X_{r_k:n}$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu da benzer şekilde

$$f_{r_1,...,r_k}(x_1,...,x_k) = \frac{n!}{(r_1-1)!(r_2-r_1-1)!...(n-r_k)!}\left[F(x_1)\right]^{r_1-1}\left[F(x_2)-F(x_1)\right]^{r_2-r_1-1} \times$$

$$\times\left[1-F(x_k)\right]^{n-r_k} f(x_1)...f(x_k) \quad x_1 \le x_2 \le ... \le x_k \qquad (4.11)$$

dır. $x_0 = -\infty, x_{k+1} = \infty, r_0 = 0, r_{k+1} = n$ olarak tanımlanırsa,

$$f_{r_1,...,r_k}(x_1,...,x_k) = n!\left[\prod_{i=1}^{k} f(x_i)\right]\prod_{i=0}^{k}\left(\frac{\left[F(x_{i+1})-F(x_i)\right]^{r_{i+1}-r_i-1}}{(r_{i+1}-r_i-1)!}\right) \qquad (4.12)$$

şekline dönüşür.

$X_{1:n}, X_{2:n}, ..., X_{n:n}$ sıra istatistiklerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f_{1,2,...,n}(x_1,x_2,...,x_n) = \begin{cases} n!\,f(x_1)f(x_2)...f(x_n) & ;\ x_1 \le x_2 \le ... \le x_n \\ 0 & ;\ \text{d.y.} \end{cases} \qquad (4.13)$$

olur. $X_{r:n}$ ve $X_{s:n}$ sıra istatistiklerinin dağılım fonksiyonu $F_{r,s}(x,y)$ (4.10) dan integral alınmak suretiyle elde edilebilir. Fakat $X_{i:n}$ lerin kesikli rasgele değişken olması durumunda $r < s$ olmak üzere $F_{r,s}(x,y)$ aşağıdaki gibidir.

$$F_{r,s}(x,y) = P\{\text{en az } r \text{ tane } X_i \le x, \text{en az } s \text{ tane } X_i \le y\} \quad x < y$$

$$= \sum_{i=r}^{n}\sum_{j=s-i}^{n-i} P\{\text{tam } i \text{ tane } X_i \le x, \text{tam } j \text{ tane } X_i \ (x,y] \text{ aralığında}\}$$

$i > s$ olması durumunda j sıfırdan başlar ve $x < y$ için

$$F_{r,s}(x,y) = \sum_{i=r}^{n}\sum_{j=maks\{0,s-i\}}^{n-i} \frac{n!}{i!\,j!(n-i-j)!}\left[F(x)\right]^{i}\left[F(y)-F(x)\right]^{j}\left[1-F(y)\right]^{n-i-j} \qquad (4.14)$$

dır. $x \ge y$ olması durumunda $X_{s:n} \le y$ olması $X_{r:n} \le x$ olmasını gerektireceğinden

$$F_{r,s}(x,y) = F_s(y) \tag{4.15}$$

olur.

4.4. İki Sıra İstatistiğinin Koşullu Dağılımı

$X_1, X_2, ..., X_n \sim F$ dağılımına sahip bir örneklem olsun.($r<s$)

$$f_{X_{r:n}/X_{s:n}}(x_1 / x_2) = \frac{f_{r,s:n}(x_1, x_2)}{f_{s:n}(x_2)} \quad =$$

$$= \frac{(s-1)!\, f(x_1)[F(x_1)]^{r-1}[F(x_2)-F(x_1)]^{s-r-1}[F(x_2)]^{1-s}}{(r-1)!(s-r-1)!}\ ; \qquad x_2 \geq x_1$$

(4.16)

4.5. Fisher-Tippet Teoremi

Merkezi limit teoreminde özetlendiği gibi normal dağılım örneklem ortalamaları için önemli bir limit dağılımdır. Aynı şekilde uç değerler dağılımları ailesi de örneklemin ekstra değerleri için limit dağılımı olarak da önemlidir. Bu aile genelleştirilmiş uç değerler dağılımları olarak adlandırılır. Teorem, uç değerlerin yakınsamaları ile ilgilenmektedir.

X_t, $t=1,2,3...$ ortalaması (merkezsel eğilim parametresi) μ, varyansı (dağılım parametresi) σ^2 olan ve bilinen bir dağılım fonksiyonuna sahip $(F(x) = P(X \leq x))$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişken olsun. Rasgele değişkenlerin en küçüğü $X_{(1)}$ ve en büyüğü $X_{(n)}$ olarak tanımlansın.

Fisher Tippet teoremi, $X_{(n)}$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip rassal değişkenlerin serisi olsun, $C_n > 0$ ve $d_n \in \Re$ sabitleri ve ,

$$\frac{X_{(n)} - d_n}{C_n} \to H \tag{4.17}$$

olacak şekilde dejenere olmayan bir H dağılım fonksiyonu mevcut ise, bu durumda H dağılım fonksiyonunun aşağıdaki üç dağılımdan birisine ait olduğunu göstermektedir.

$$\textit{Frechet} \qquad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0, \alpha > 0 \end{cases}$$

$$\textit{Weibull} \qquad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp[-(-x^{-\alpha})] & x \le 0, \alpha < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \qquad (4.18)$$

$$\textit{Gumbel} \qquad \Lambda(x) = \exp[-e^{-x}], \qquad x \in \Re$$

Fisher Tippet teoremine göre, eğer standartlaştırılmış maksima dejenere olmayan bir dağılıma yakınsıyorsa, o zaman maksimanın dağılımı, gözlenmiş olan verilerin dağılımına bakılmaksızın yukarıda ifade edilen üç dağılımdan birine ait olacaktır.

Diğer taraftan tüm olası dağılımların kuyrukları şu üç kategori içerisinde sınıflandırılır.

i. İnce kuyruklu dağılımlar; tüm momentleri sonlu, birikimli dağılım fonksiyonu kuyruklarda üssel olarak azalan dağılımlardır.

ii. Kalın kuyruklu dağılımlar; birikimli dağılım fonksiyonları kuyruklarda bir kuvvet kanununa göre azalan dağılımlardır.

iii. Sonlu kuyruklar ile kalın kuyruklu dağılımlar; bu kategoride sadece α kuyruk indeks parametresi kullanılarak biri diğerinden ayrılabilir.

   i) kategorisi için $\alpha = \infty$

   ii) kategorisi için $\alpha > 0$

   iii) kategorisi için $\alpha < 0$

$\xi = 1/\alpha$ alınarak, (Von Mises,1936) ve (Jenkinson,1955) bu üç dağılım ailesi için tek bir parametre ile gösterebilen bir dağılım önermişlerdir. Bu ifade Genelleştirilmiş Uç değer dağılım olarak adlandırılır ve şu şekilde tanımlanır,

$$H_\xi(x) = \begin{cases} \exp\{-(1+\xi x)^{-1/\xi}\} & \xi \neq 0 \, ve \, 1+\xi x > 0 \\ \exp\{-\exp(-x)\} & \xi = 0 \end{cases} \qquad (4.19)$$

$\xi = \frac{1}{\alpha}$ şekil parametresidir ve H_ξ dağılımının kuyruk davranışını belirler. $\alpha = \frac{1}{\xi}$ ise kuyruk indeksi olarak adlandırılır.

Genellikle F dağılım fonksiyonu;

$$F_{\mu,\sigma}(x) = F[(x-\mu)/\sigma] \tag{4.20}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Genelleştirilmiş Uç değer teorisi de aşağıdaki şekilde modellenebilir.

$$H_{\xi,\mu,\sigma}(x) = H_\xi[(x-\mu)/\sigma] \tag{4.21}$$

Gözlenen verilerin F dağılımının kuyruk davranışı genelleştirilmiş uç değerler dağılımının ξ şekil parametresi ile belirlenir.

- F dağılımının kuyruğu üssel olarak azalıyorsa, o zaman H_ξ, Gumbel tipi dağılım fonksiyonudur ve $\xi = 0$ olur. Gumbel tipi dağılım fonksiyonu ince kuyrukludur. Normal, lognormal, üssel ve gamma tipi dağılımlar bu sınıfa girmektedir.
- F dağılımının kuyruğu bir kuvvet fonksiyonuna göre azalmakta ise;

$$1 - F(x) = c.x^{-1/\xi} = x^{-\alpha} \tag{4.22}$$

c sabit parametreyi ve H_ξ dağılımı da Frechet tipi dağılım fonksiyonunu göstermekte olup, $\xi > 0$'dır. Frechet tipi fonksiyonda dağılımlar kalın kuyrukludur. Pareto, Cauchy, Student-t ve diğer karma modeller bu türdedir.Bu dağılımların tüm momentleri sonlu değildir. Mesela, $k \geq \alpha = 1/\xi$ için $E[X^k] = \infty$'dur. Frechet tipi dağılım fonksiyonu, finansal verilere en uygun türdeki ekstrem dağılım sınıfırıdır.

- F dağılımının kuyruğu sonlu ise, o zaman H_ξ dağılımı Weibull türünü göstermekte olup bu durumda $\xi < 0$'dır. Weibull türündeki dağılımlar, uniform

dağılım, beta dağılımıdır. Bu dağılımların tüm momentleri mevcuttur. Dolayısı ile finansal getiri dağılımları sonsuz kuyruğa sahip olmadıklarında Weibull dağılım elde edilmektedir.

Uç değer dağılımları sadece kuyruk indeksi, ortalama ve ölçek parametrelerine göre farklılık göstermektedir.

4.6. Eşik Analizi

Uç değerler teorisi, genelde en küçük veya en büyük değerlerle ilgilenmektedir. Ancak bazen, gözlemlerin en küçüğü veya büyüğüyle değil de, belirlenen eşiği aşan gözlemlerle ilgilenilmektedir. Örneklemden bu ekstra gözlemler ile ilgili sonuç çıkarım için kullanılan bu metot, $F(x) = P(X \le x)$ dağılımına sahip X rasgele değişkeninin önceden belirlenen bir eşikten yüksek olup olmadığına bakmaktır. Eşik noktasına u denilirse, $X_t > u$ olduğu zaman bir aşma durumu söz konusudur. *(t=1,2,3,...)*

Eşik noktası u'nun üzerindeki değerler aşma miktarı $y_i = X_i - u$ olarak tanımlanır ve yeni oluşan y rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$$F_u(y) = P(X - u \le y \mid X > u) \tag{4.23}$$

şeklinde tanımlanır. Yani,

$$\begin{aligned} F_u(y) &= \frac{P(X - u \le y, X > u)}{P(X > u)} \\ &= \frac{F(y+u) - F(u)}{1 - F(u)} \end{aligned} \tag{4.24}$$

olur. $X > u$ için x=y+u olduğu için,

$$F(x) = [1 - F(u)]F_u(y) + F(u) \tag{4.25}$$

dır.

Balkema ve de Haan (1974) ve Pickands (1975) tarafından önerilen bu teorem, yeterli büyüklükteki u eşiği için, aşım noktalarının dağılımının genelleştirilmiş Pareto dağılımına yakınsadığını, çünkü eşik noktası u büyüdükçe, aşım noktalarının dağılım fonksiyonu

($F_u(y)$) genelleştirilmiş pareto dağılımına (GPD) yakınsadığımı göstermiştir. GPD aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$G_{\xi,\sigma,\upsilon}(x) = \begin{cases} 1-(1+\xi\dfrac{x-\upsilon}{\sigma})^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ 1-\exp(-(x-\upsilon)/\sigma) & \xi = 0 \end{cases} \tag{4.26}$$

burada,

$$x \in \begin{cases} [\upsilon,\infty], & \xi \geq 0 \\ [\upsilon,\upsilon-\sigma/\xi] & \xi < 0 \end{cases} \tag{4.27}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Eşitlikte tanımlanan, $\xi = \dfrac{1}{\alpha}$ şekil parametresi, α kuyruk indeksi, σ yayılım parametresi ve υ eğilim parametresi şeklinde tanımlanmıştır. $\upsilon = 0$ *ve* $\sigma = 1$ iken genelleştirilmiş Pareto dağılımı bilinen Pareto dağılımına eşittir.

Genelleştirilmiş Pareto dağılımı , $\xi > 0$ olduğunda birçok farklı dağılımı da içine alır ve bu haliyle sıradan pareto dağılımı adını alır. Bu özellik, finansal piyasalardaki zaman serisi analizinde oldukça sık kullanılmaktadır. $\xi > 0$ için, $k > \dfrac{1}{\xi}$ ise $E[X^k]$ tanımsızdır(sonsuzdur). Mesela, $\xi = 0.5$ *ve* $\xi = 0.25$ için GPD sonsuz varyansa ve sonsuz dördüncü momente sahiptir. Örneğin, yüksek kur değişimleri tahmininde ξ genellikle 0,5 ten düşüktür, bu demektir ki sonlu bir varyansa sahip olmasıdır. $\xi = 0$ için GPD, üstel dağılıma yakınsar $\xi < 0$ için ise Pareto II. tip olarak adlandırılır. (Gençay, et al., 2001)

Balkema ve De Haan(1974) ve Pickands(1975) sonuçları ξ'nın seçimini yüksek eşik noktası *u*'yu seçerek eşik üstü gözlem dağılımının GPD'a yakınsadğını göstermiştir. GPD modelleri en çok olabilirlik yöntemiyle tahmin edilebilir. $\xi > -0.5$ için Hosking ve Wallis(1987) en çok olabilirlik koşullarının sağlandığını ve tahmin edicilerin asimptotik olarak normal dağıldığını söylemiştir. Bu sebeple, yaklaşık olarak ξ'nın standart hataları en çok olabilirlikten sağlanabilir.

Kuyruk tahmini için eşitlikten,

$$F(x) = [1 - F(u)]F_u(y) + F(u) \tag{4.28}$$

yeterince büyük u için $F_u(y)$ genelleştirilmiş Pareto dağılımına yakınsadığı için ve $x = y + u, (X > u)$ olduğu için, u'nun tanımı yapıldıktan sonra, $F(u)$ $\frac{n - n_u}{n}$ olarak tanımlanır. Burada n_u, n örneklemden u eşiğini aşan gözlem sayısı olduğuna göre,

$$F(x) = [1 - F(u)]G_{\xi,\sigma,\upsilon}(x - u) + F(u) \tag{4.29}$$

$$\hat{F}(x) = \left(1 - \frac{n - n_u}{n}\right)G_{\xi,\sigma,\upsilon}(x - u) + \frac{n - n_u}{n} \tag{4.30}$$

$$\hat{F}(x) = \frac{n_u}{n}G_{\xi,\sigma,\upsilon}(x - u) + \frac{n - n_u}{n} \tag{4.31}$$

$$\hat{F}(x) = 1 + \frac{n_u}{n}(G_{\xi,\sigma,\upsilon}(x - u) - 1) \tag{4.32}$$

şeklinde bulunur. Böylece kuyruk tahmini,

$$G_{\xi,\sigma,\upsilon}(x) = 1 - \left(1 + \xi\frac{x - u}{\sigma}\right)^{-1/\xi} \tag{4.33}$$

verildiğinde,

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{n_u}{n}\left(1 + \hat{\xi}\frac{x - u}{\hat{\sigma}}\right)^{-1/\hat{\xi}} \tag{4.34}$$

şeklinde hesaplanır. Burada, $\hat{\xi}$ *ve* $\hat{\sigma}$ parametrelerin en çok olabilirlik tahmin edicisi olup, işlemlerin sadece $X > u$ için geçerli olduğunu unutmamak gerekmektedir.

4.7. Uç Değerler Yöntemiyle RMD hesaplaması (Algoritma)

Parametrik yaklaşım, gerçekleşmiş ekstremlerin tam olarak bu dağılımdan gelmekte olduğunu kabul ederek parametrelerin tahmin edilmesinden ibarettir. Sık kullanılan yöntem, en çok olabilirlik ve regresyon metodudur.

Parametrik olmayan yaklaşım, ekstremlerin tam olarak asimptotik bir dağılımdan çekilmiş olduğu varsayımında bulunmaz ve doğrudan X değişkeninin kuyruğunun tahmin edilmesine dayanmaktadır. Hill tahmini, olasılık ağırlıklandırılmış momentler metodu olarak düşünülebilir.

Neticede uç değer kullanarak RMD'in tahmin edilmesi aşağıdaki adımlardan oluşmaktadır.

- Getiri sıklığının seçilmesi; bu genelde likidite ve pozisyon riskinde etkilenmektedir.
- Periyot uzunluğunun seçimi; örnek uzunluk, birbirini kesmeyen her biri n tane finansal getiri gözleminden oluşan alt periyotlara bölünmektedir. (Christoffersan,1998)
- Maksimum getirileri, $X_{(n)}$ leri seçmek.
- Maksimumların limit dağılımları için parametre tahmini, her üç parametre, farklı yöntemlerden birisi seçilerek tahmin edilmektedir. Ön değerler dağılımının karakteristiğini gösteren en önemli parametre "ξ"şekil parametresidir. Buradan elde edilen değere göre maksimumların dağılım tipi belirlenir.
- Uç değerler dağılımı kullanılarak RMD hesaplanmaktadır. Standartlaştırılmış maksimumlar serisi ve genelleştirilmiş uç değer dağılımı kullanılarak RMD aşağıdaki şekilde hesaplanabilir;
-

$M = M_I^j ; j = 1,2,,....m$ olmak üzere,

$$p = P(M < RMD) = \exp[-(1+\xi(RMD-\mu)/\sigma]^{-1/\xi}$$
$$RMD_p = \mu + \frac{\sigma}{\xi}\left[(-\ln(p))^{-\xi} - 1\right] \qquad (4.35)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Burada p, maksimum finansal getirinin RMD sınırını geçmeme olasılığıdır. p, %95 yada %99 güven düzeyini göstermektedir. Böylelikle normal dağılım varsayımı altında eksik tahmin edilen risk düzeyi, bu şekilde daha doğru tahmin edilmiş

olmaktadır. Diğer taraftan uç değerler yaklaşımında finansal getiriler için bir dağılım kabul etmeye gerek bulunmamaktadır. Dolayısı ile risk ölçümü kapsamında model riski oldukça azaltmıştır.

Sonuç olarak RMD modelleri normal piyasa koşulları ile ilgilenmekte ve analizleri de bu piyasa şartlarını kapsamaktadır. Fakat gerçekleşmesi çok küçük de olsa sıra dışı olaylar yaşanabilmektedir. Bu nedenle küçük de olsa her olasılığın gerçekleşme ihtimalinin olduğu unutulmamalı, RMD sonuçları her zaman stres testleri ve senaryo analizleri ile birlikte incelenmelidir.

5. UYGULAMA

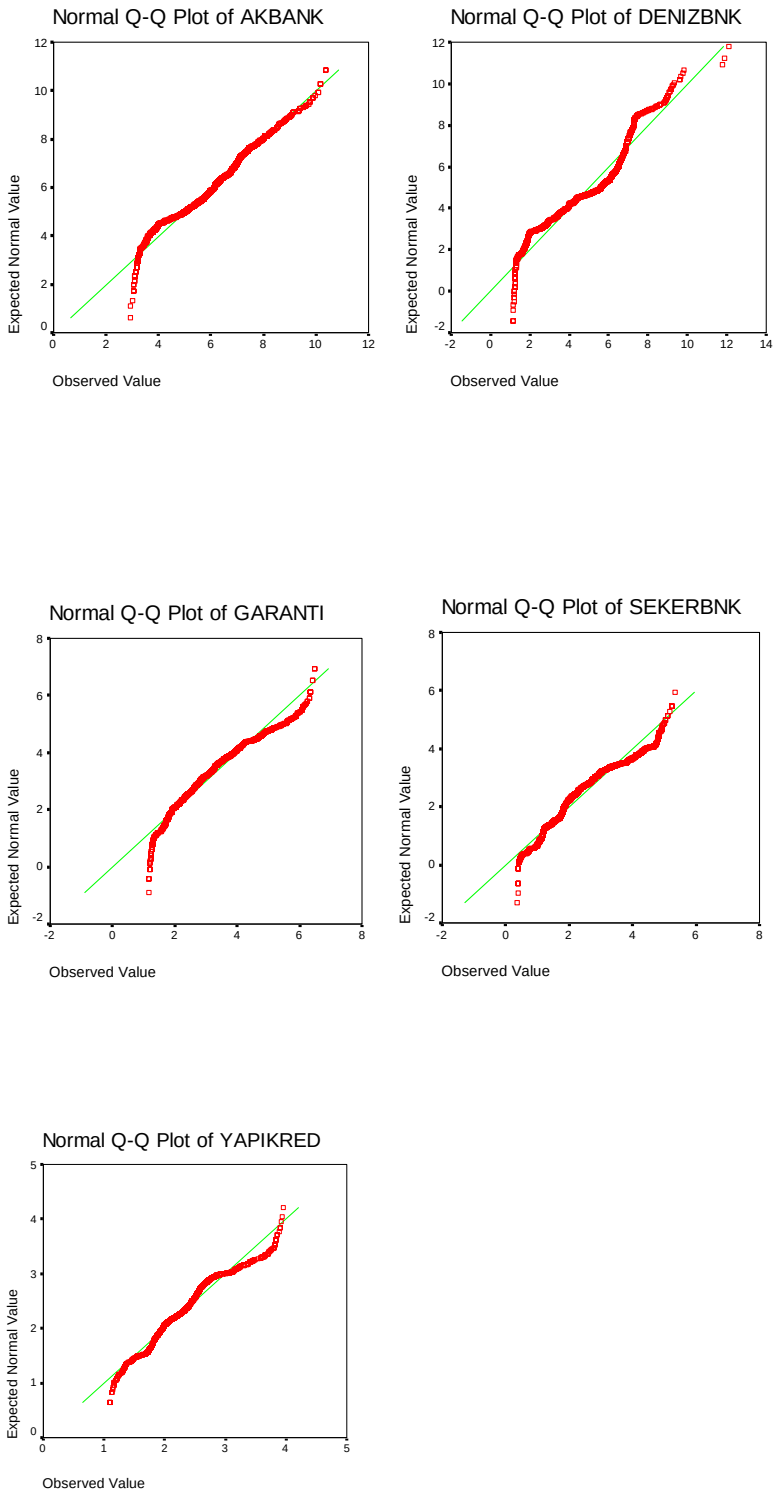
Uygulamada IMKB-100 endeksinde işlem gören Akbank, Denizbank, Şekerbank, Garanti Bankası ve Yapı ve Kredi Bankası'na ait beş ayrı hisse senedine ilişkin ve bu hisse senetleriyle oluşturulmuş portföye ilişkin riske maruz değer hesaplamaları yapılmıştır. Riske Maruz değer hesaplamaları için, varyans-kovaryans metodu, tarihi simülasyon metodu ve üstel ağırlıklandırılmış hareketli ortalama metodu kullanılmıştır. Son olarak uç değerler yöntemi ile riske maruz değer hesaplanmış ve diğer üç yöntemle karşılaştırılmıştır. Daha sonra da oluşturulan portföye ilişkin hangi yönde yatırım yapılması gerektiğine ilişkin sonuçlar verilmiştir.

İlk olarak IMKB-100 endeksinde işlem gören beş hisse senedi verilerinin 01.01.2004 ve 25.11.1008 tarihleri arasında gün sonu kapanış fiyatları alınmıştır. Daha sonra bu kapanış fiyatların logaritmik getirileri $(\ln(P_{t-1} / P_t))$ hesaplanmıştır. Oluşturulan logaritmik getiri verilerinin tanımlayıcı istatistikleri tablodaki gibidir.

Tablo 6.1 Getiri verilerine ait tanımlayıcı istatistikler

Descriptive Statistics (Tanımlayıcı İstatistikler)						
	Gözlem Sayısı	**Ortalama**	**Std. Sapma**	**Varyans**	**Çarpıklık**	**Basıklık**
Akbank	1045	0,0002	0,0299	0,0009	0,2458	2,6613
Denizbank	1045	0,0011	0,0350	0,0012	1,0772	8,6373
Garanti	1045	0,0006	0,0303	0,0009	0,0678	1,7979
Şekerbank	1045	0,0009	0,0377	0,0014	0,2993	3,9770
Yapı Kredi	1045	0,0003	0,0289	0,0008	0,0412	2,5356

Tanımlayıcı istatistikleri hesaplanan getiri verilerinin normal dağılıp dağılmadığı incelenmiştir. Getiri verilerinin normal dağılıp dağılmadığına karar verirken önce Q-Q plot grafiklerine bakılmış sonra da Kolmogrov-Smirnov testi yapılmıştır. Verilere ait Q-Q plot grafikleri şekil 6.1 de verilmiştir.



Şekil 6.1 Getiri verilerine ait Q-Q plot grafikleri

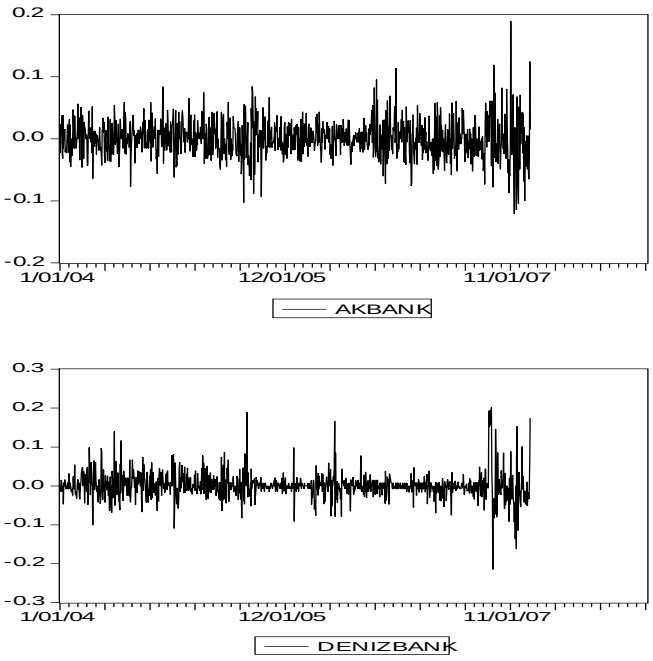
Grafiklerden de görüldüğü gibi getiri verilerinin normal dağılmadığı sonucuna varılabilmektedir. Sonuçları sağlamlaştırmak için Kolmogorov-Smirnov testi yapılmıştır.

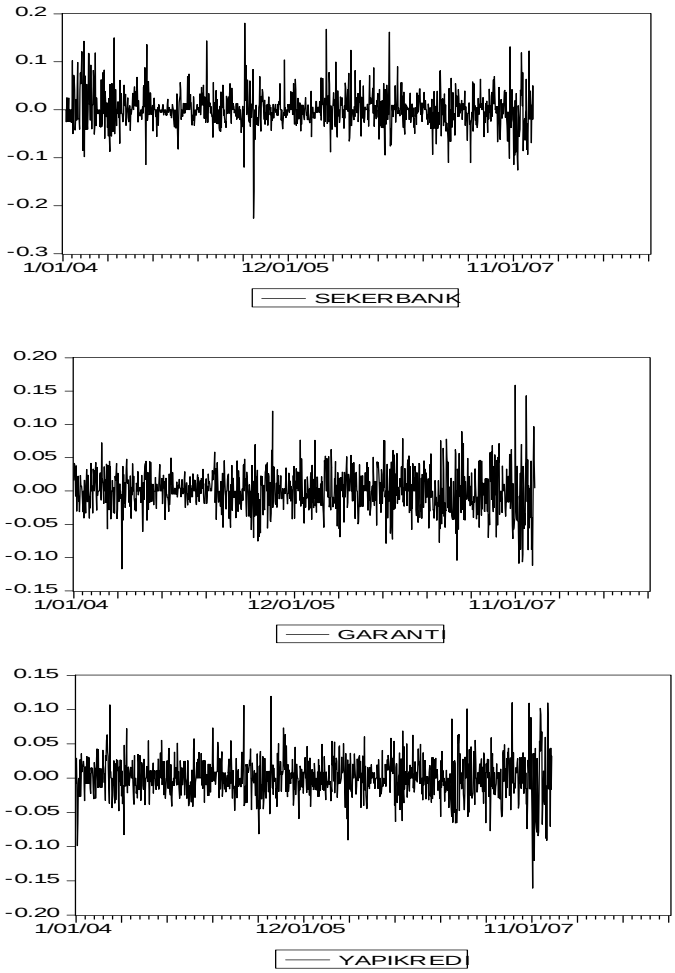
Tablo 6.2. Getiri verilerinin Kolmogorav-Smirnov test sonuçları

	Kolmogorov-Smirnov		
	Gözlem Sayısı	**Kolmogorov-Smirnov Z**	**Asymp. Sig. (2-tailed)**
Akbank	1045	2,093	0
Denizbank	1045	4,359	0
Garanti	1045	1,755	0,004
Şeker bank	1045	3,175	0
Yapı Kredi	1045	2,476	0

Tabloya göre getirilerin normal dağılmadığına karar verilebilmektedir.

Riske maruz değer hesaplama yöntemlerinden varyans-kovaryans metodu verilerin normal dağıldığı varsayımı altında hesaplanmaktadır. Riske Maruz Değer hesaplamaları yapmadan önce serilerin durağanlıklarına bakılmıştır. Bu amaçla serilerin zaman serileri grafikleri çizilmiştir. Grafikler şekil 6.2 de verilmiştir.





Şekil 6.2. Verilerin zaman serileri garfikleri

Zaman serileri grafikleri incelendiğinde serilerin kabaca durağan oldukları söylenebilir, ancak getiri serilerinin durağanlıkları hakkında kesin bir karar vermek için ADF testi yapılarak durağanlık tespiti yapılmıştır. Serilerin Dickey-Fuller test istatistiği sonuçları tablo 6.3. te verilmiştir. Dicky-Fuller test istatistiklerine göre getiri serile durağandır denilmektedir.

Tablo 6.3. Getiri verilerinin ADF test sonuçları

ADF Test Statistic	-19.29974	1% Critical Value*	-3.4394	
		5% Critical Value	-2.8647	
		10% Critical Value	-2.5685	Akbank
ADF Test Statistic	-15.35258	1% Critical Value*	-3.4394	
		5% Critical Value	-2.8647	
		10% Critical Value	-2.5685	Denizbank
ADF Test Statistic	-19.07358	1% Critical Value*	-3.4394	
		5% Critical Value	-2.8647	
		10% Critical Value	-2.5685	Garanti
ADF Test Statistic	-17.84222	1% Critical Value*	-3.4394	
		5% Critical Value	-2.8647	
		10% Critical Value	-2.5685	Şeker bank
ADF Test Statistic	-19.22778	1% Critical Value*	-3.4394	
		5% Critical Value	-2.8647	
		10% Critical Value	-2.5685	Yapı Kredi

Getiri serilerinin normallik ve durağanlık tespitinden sonra riske maruz değer hesaplamaları varyans-kovaryans yöntemi, tarihi simülasyon yöntemi ve üstel ağırlıklandırılmış hareketli ortalama(EWMA) yöntemiyle hesaplanmıştır. Daha sonra söz konusu üç yöntemden elde edilen sonuçlar uç değerler yöntemiyle elde edilen RMD sonuçları ile karşılaştırılmıştır. RMD hesaplamaları yapılırken %90 ve %95 güven düzeyleri alınmıştır. Elde tutma süresi olarak bir ay (21 gün), 10 gün ve 1 günlük değerler alınmıştır. Varyans-Kovaryans metodu, Tarihi simülasyon metodu ve EWMA yöntemiyle bulunmuş RMD değerleri tabloda verilmiştir.

Uygulanan RMD hesaplamalarına ek olarak tez konusu olan uç değerler yöntemiyle RMD hesaplaması yapılmıştır. Öncelikle getiri verileri 21 günlük bloklara bölünmüş ve bölünen bloklardan elde edilen maksimum getiri verileri kullanılarak verilerin hangi dağılıma uyduğunu saptamak için şekil parametresi ξ ve diğer parametreler En Küçük Kareler Yöntemiyle tahmin edilmiştir. Parametre tahminleri her getiri verisi için aşağıdaki tablo 6.4 de verilmiştir.

Tablo 6.7. En küçük kareler yöntemiyle hesaplanan parametre değerleri

	ε	μ	σ
Akbank	0,3944	0,0993	0,0418
Denizbank	0,6891	0,0982	0,0333
Garanti	0,3587	0,1026	0,0442
Şekerbank	0,5341	0,1269	0,0491
YapıKredi	0,3791	0,1004	0,0428

Tabloda 6.4 te görüldüğü gibi verilerin şekil parametrelerinin ξ değerlerinin sıfırdan büyük olduğu için Frechet dağılımına uyduğu kararına varılmaktadır.

Yapılan parametre tahminleriyle birlikte getiri verilerine ilişkin RMD değerleri uç değer yöntemiyle hesaplanmıştır. Tablo 6.5, 6.6, ve 6.7 de Varyans-kovaryans yönetimi, tarihi simülasyon yöntemi, üstal ağırlıklandırılmış hareketli ortalama yöntemi ve uç değerler yöntemi ile hesaplanan RMD değerleri elde tutma süresi olarak 1 gün, 10 gün ve 1 ay olarak hesaplanmıştır. Veri anlam düzeyleri ise %90 ve %95 olarak dikkate alınmış ve sonuçlar tablolarda verilmiştir.

Tablo 6.5 1 günlük RMD değerleri

		RMD (VaR)			
		1 gün			
		Varyans-Kovaryans	Tarihi Simülasyon	EWMA	Uç Değerler
Akbank	90%	0,038144	0,044787	0,068745	0,054803
	95%	0,058538	0,085946	0,105266	0,073281
Denizbank	90%	0,043520	0,043891	0,079360	0,060681
	95%	0,066640	0,091728	0,121520	0,092661
Garanti	90%	0,038817	0,046554	0,070362	0,055823
	95%	0,059439	0,091787	0,107739	0,073602
Şekerbank	90%	0,048197	0,047795	0,103179	0,074451
	95%	0,073804	0,109740	0,132434	0,105784
YapıKredi	90%	0,037050	0,040858	0,068576	0,055126
	95%	0,056733	0,087906	0,105009	0,073279

Tablo 6.7 10 günlük RMD değerleri

		RMD (VaR)			
		10 gün			
		Varyans-Kovaryans	Tarihi Simülasyon	EWMA	Uç Değerler
Akbank	90%	0,120622	0,141630	0,217391	0,173302
	95%	0,185113	0,271785	0,332881	0,231735
Denizbank	90%	0,137623	0,138796	0,250958	0,191889
	95%	0,210734	0,290070	0,384280	0,293019
Garanti	90%	0,122751	0,147215	0,222503	0,176528
	95%	0,187963	0,290256	0,340700	0,232751
Şekerbank	90%	0,152411	0,151142	0,326280	0,235436
	95%	0,233388	0,347029	0,418792	0,334518
YapıKredi	90%	0,117162	0,129203	0,216858	0,174325
	95%	0,179404	0,277983	0,332068	0,231727

Tablo 6.8 Bir aylık RMD değerleri

		RMD (VaR)			
		1 ay			
		Varyans-Kovaryans	Tarihi Simülasyon	EWMA	Uç Değerler
Akbank	90%	0,174798	0,205241	0,315029	0,251138
	95%	0,268254	0,393854	0,482391	0,335816
Denizbank	90%	0,199434	0,201135	0,363673	0,278074
	95%	0,305383	0,420351	0,556875	0,424625
Garanti	90%	0,177883	0,213335	0,322437	0,255813
	95%	0,272384	0,420621	0,493721	0,337288
Şekerbank	90%	0,220865	0,219025	0,472824	0,341179
	95%	0,338211	0,502893	0,606887	0,484762
YapıKredi	90%	0,169784	0,187233	0,314257	0,252621
	95%	0,259981	0,402836	0,481212	0,335805

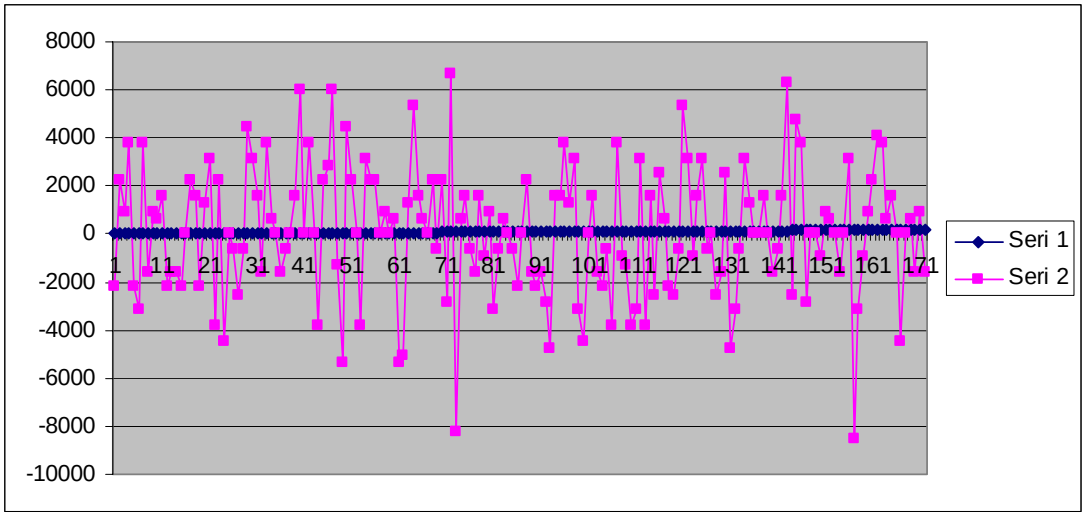
Hesaplanan RMD verilerine göre verilerin normal dağıldığı varsayımı altında hesaplanan varyans kovaryans metoduna göre %95 anlama seviyesi ve 1 ay elde tutma süresi göz önüne alındığında en riskli hisse senedinin yaklaşık %33 ile Şekerbank olduğu en risksiz hisse senedinin de %25 ile Yapı kredi bankasına ait hisse senedi olduğu ortaya çıkmıştır. %90 anlam seviyesine göre ise aynı şekilde en riskli hisse senedi %22 ile Şekerbank 'a ait hisse senedi iken en risksiz hisse senedinin yine aynı şekilde yaklaşık %17 ile Yapı Kredi bankasına ait hisse senedi olduğu ortaya çıkmıştır. Elde tutma süresi 1 aydan 10 güne indirdiğimiz zaman riske maruz değerlerin düştüğü ancak en riskli ve en risksiz hisse senetlerinin değişmediği görülmektedir.

Tarihi simülasyon yöntemine göre, %95 lik anlama seviyesi ve 1 aylık elde tutma süresi göz önüne alındığında en riskli hisse senedinin %50 ile Şekerbank olduğu ancak en risksiz hisse senedinin ise yaklaşık %39 ile Akbank'a ait olduğu ortaya çıkmıştır. %95 lik anlam seviyesi %90'a indirildiği zaman ise en riskli hisse senedinin yaklaşık %22 ile Şekerbank en risksiz hisse senedinin ise yaklaşık %19 ile bu sefer Yapı Kredi bankasına ait hisse senedi olduğu ortaya çıkmıştır. Elde tutma süresi 10 güne çekildiğinde ise Rmd değerleri düşmüş ancak en riskli ve en risksiz hisse senedi değişmemiştir.

Üstel ağırlıklandırılmış hareketli ortalama yöntemine göre , %95 lik anlama seviyesi ve 1 aylık elde tutma süresi göz önüne alındığında en riskli hisse senedinin %60 ile Şekerbank olduğu ancak en risksiz hisse senedinin ise yaklaşık %48 ile Akbank'a ait olduğu ortaya çıkmıştır. %95 lik anlam seviyesi %90'a indirildiği zaman ise en riskli hisse senedinin yaklaşık %47 ile Şekerbank en risksiz hisse senedinin ise yaklaşık %31 ile bu sefer Yapı Kredi bankasına ait hisse senedi olduğu ortaya çıkmıştır. Elde tutma süresi 10 güne çekildiğinde ise Rmd değerleri düşmüş ancak en riskli ve en risksiz hisse senedi değişmemiştir.

Uç değerler yöntemine göre ise , %95 lik anlam seviyesi ve 1 aylık elde tutma süresine göre en riskli hisse senedinin % 40 ile Şekerbank'a ait olduğu ancak en risksiz hisse senetlerinin yaklaşık %33 ile Akbank'a ve Yapı Kredi Bankası'na ait olduğu ortaya çıkmıştır. Anlam seviyesi %90'a çekildiğinde ise Riske Maruz Değerlerin düştüğü ancak en riskli ve en risksiz hisse senedinin değişmediği gözlenmiştir. Elde tutma süresi değiştirildiğinde ise aynı sonuçların alındığı ortaya çıkmıştır.

Son olarak Garanti bankasına ait hisse senedi kapanış verilerine bactesting (geriye dönük test) uygulanmıştır. Geriye dönük test ile hisse senedinin kapanış fiyatlarına göre hesaplanan fiyat kaybı ve fiyat kazancının hesaplanan RMD değerinin üstünde veya altında olup olmamasına göre hesaplanan RMD değereinin doğruluğu hakkında yorum yapılabilmektedir. Backtesting sonucu Şekil 6.3 te verilmiştir.



Şekil 6.3: Garanti bankasına ait hisse senedinin bactesting sonucu

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Görüldüğü üzere, her dört yöntemde en riskli hisse senedinin Şekerbank'a ait olduğunu ortaya koymakta, varyans-kovaryans yöntemi en risksiz hisse senedinin Yapı Kredi olduğunu söylerken, diğer üç yöntem hem Akbank'ın hem de Yapı Kredi'nin risksiz yatırımlar olduğunu ortaya koymaktadır. Değişik anlam seviyesi ve değişik elde tutma sürelerine göre değişik RMD ler tahmin edilse de riskli ve risksiz hisse senedi konusunda ortak tahminler gerçekleştirilmiştir.

Dört yöntem karşılaştırıldığında riskin tahmininin en yüksek olduğu yöntem olan Üstel ağırlıklandırışmış hareketli ortalama yöntemleri son dönemlere daha çok ağırlık verdiği için ve uygulamadaki son verilerin kriz dönemine denk gelmesi sebebiyle yüksek tahmin değerlerine ulaştığı görülmektedir. Varyans-Kovaryans yöntemi ise normallik varsayımından dolayı diğer yöntemlere göre daha düşük risk tahminleri yaparak yatırımcıyı yanıltacak sonuçlar verebilmektedir. Tarihi simülasyon yöntemi ise farklı elde tutma süreleri ve farklı anlam seviyeleri göz önüne alındığında farklı sonuçlar vermekte ve anlamlı bir tahmin yapmakta yatırımcıyı etkileyebilmektedir. Uç değerler yöntemi ise varyans-kovaryans yönteminden daha fazla ancak EWMA ve Traihi simülasyon yönteminlerine göre daha düşük sonuçlar vererek yatırımcıyı doğru risk ölçümü konusunda yönlendirmekte ve daha iyi sonuçlar vermektedir.

Kriz dönemlerinin daha sıklaştığı ve dalgalanmanın yüksek olduğu finansal piyasalarda, yani uç değerlerin etkili olduğu yatırım araçlarında riske maruz yöntemlerinden uç değerler yönteminin kullanılması yatırımcıyı daha iyi yönlendirecek ve doğru kararlar almasına yardımcı olacak bir unsur olarak karşımıza çıkmaktadır.

Kaynaklar

Akan, B., Laçiner, O. (2003), "Bankacılık Sektöründe Finansal Riskin Ölçülmesi ve Gözetiminde Yeni Bir Yaklaşım:"Value at Risk Metodolojisi", Bankacılar Dergisi, Sayı:45.

Akdi, Y. (2005), Matematiksel İstatistiğe Giriş, Aydan Ofset, Ankara.

Akdi, Y. (2003), Zaman Serileri Analizi (Birim Kökler ve Kointegrasyon), Bıçaklar Kitabevi, Ankara.

Aven, T., (2003), Foundations of Risk Analysis, John Wiley & Sons, Inc., USA.

Benninga, S. ve Wiener, Z. (1998), "Value-at-Risk (VaR) ", Mathematica in Education and Research ,Vol 7 .

Best, P., (1998), Implementing Value at Risk, John Wiley & Sons, Inc., USA.

Bolgün, K.E., Akçay, M.B. (2003), Risk Yönetimi,Gelişmekte Olan Türk Finans Piyasasında Risk Ölçüm ve Yönetim Uygulamaları, Scala Yayıncılık, İstanbul.

Bozkuş, S. (2005),"Risk Ölçümünde Alternatif Yaklaşımlar:Riske Maruz Değer (VaR) ve Beklenen Kayıp (ES) Uygulamaları, D.E.Ü.İ.İ.B.F. Dergisi Cilt:20 Sayı:2, ss:27-45.

Castillo, E. (1998), Extreme Value Theory in Engineering, Academic Press, Inc, London.

Cerit, C., Yüksel, M., (1998), Olasılık Problemleri, İstanbul Teknik Üniversitesi Yayınları, İstanbul

Chan, K.F. ve Gray, P., (2006),"Using extreme value theory to measure value-at-risk for daily electricity spot prices", Science Direct, pp:283-300.

Choudry, M., (2006), An Introduction to Value at Risk, John Wiley & Sons, Inc., USA.

Coles, S. (2001), An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values, Springer-Verlag London Limited, Great Britain.

Fernandez, V., "Extreme Value Theory and Value at Risk-Abstract", JEL classification C22,G10.

Galambos, J., Lechner, J. (1993), Extreme Value Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Genç, A., Bektaş, M., Çelik, N., (2008), Finansal Risk Analizine Giriş, Ders Notları, Cilt Dizgi Ofset, Konya.

Genç, A., Çelik, N., (2008), Aktüerya Analizine Giriş Ders Notları, Cilt Dizgi Ofset, Konya.

Gençay, R. ve Selçuk, F. (2004), "Extreme value theory and Value-at-Risk: Relative Performances in emerging market", International Journal of Forecasting 20, pp:287-303.

Gujarati, D. N., (1995), Basic Econometrics, third edit, MC-Graw-Hill, İnc.,USA.

Ho, L.C., Burridge, P., Cadle, J. Ve Theobald, M. (2000), " Value-at-Risk: Applying the extreme value approach to Asian markets in the recent financial turmoil", Pacific-Basin Finance Journal 8, pp: 249-275.

Hogg, R.V., Klugman, S.A., (1984), Loss Distributions, John Wiley & Sons, Inc., Canada.

Holton, G.A., (2003), Value at Risk-Theory and Practice, Academic Press, Inc, London.

Karadayı, N. (2004), "Uç Değer Dağılımları ve Uygulamaları, Selçuk Üniversitesi İstatistik Ana Bilim Dalı Yüksek Lisans Tezi.

Kutler, A., (2000), Ekonometrik Zaman Serileri, Gazi kitabevi, Ankara.

McNeil, A.J. (1999), " Extreme Value Theory for Risk Managers", Department Mathematik , Zurich.

McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P., (2005), Quantitative Risk Management, Concepts, Techniques and Tools, Princeton University Pres, New Jersey.

Önalan, Ö. (2004), "Ekstrem Değer teorisi ile riskin değeri (VaR)'ın tahmini", İstatistik Araştırma Dergisi, Cilt:3, No:1, Sayfa: 35-50.

Öztürk, F., Akdi, Y., Aydoğdu, H. Karabulut, İ., (2006), Parametre Tahmini ve Hipotez Testi, Aydan Ofset, Ankara.

Rohatgi, V.K., " Mathematical Statistics ",John Willey&Sons Inc, USA, 1976

Sarma, M., (2002), " Extreme Value Theory and financial risk management", JEL classification: C10,C13,C22,G10.

Sevil, G., (2001), Finansal Risk Yönetimi Çerçevesinde Piyasa Volatilitesinin Tahmini ve Portföy VaR Hesaplamaları, Anadolu Üniversitesi Yayınları, Eskişehir.

Şahin, H., (2004), Riske Maruz Değer Hesaplama Yöntemleri, Turhan Kitabevi, Türkiye, 2004.

Tevfik, A.T., (1997), Risk Analizine Giriş, Alfa Basım Yayın Dağıtım, İstanbul.

Yıldırım, O., (2003), "Döviz Kurları Çerçevesinde Satın Alma Gücü Paritesinin Zaman Serisi Analizi ve Türkiye Ekonomisi Uygulaması", Bankacılar Dergisi, s:44, 6-7.