ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LOJİSTİK FONKSİYON: İLGİLİ TANIMLAR, TEORİLER VE BAZI UYGULAMALAR

Ahlam MOHAMMED SAEED SAEED

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2023

Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Ahlam MOHAMMED SAEED SAEED tarafından hazırlanan "**Lojistik Fonksiyon: İlgili Tanımlar, Teoriler ve Bazı Uygulamalar**" adlı bu tez çalışması 07/06/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

Jüri Üyeleri :

Başkan **:** Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Gazi Üniversitesi

Üye **:** Prof. Dr. Faruk POLAT
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Prof. Dr. Hüseyin IRMAK
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hamit ALYAR
Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**Lojistik Fonksiyon: İlgili tanımlar, teoriler ve bazı Uygulamalar**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programıyla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim. 07/06/2023

Ahlam MOHAMMED SAEED SAEED

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LOJİSTİK FONKSİYON: İLGİLİ TANIMLAR, TEORİLER
VE BAZI UYGULAMALAR

Ahlam MOHAMMED SAEED SAEED

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

Bu tez çalışmasında, reel ve kompleks değişkenli (parametreli) lojistik (Sigmoid) fonksiyonun bazı özel biçimleriyle ilgili gerekli bilgiler öncelikli olarak tanıtılacak ve daha sonra da, karmaşık (parametreli) lojistik fonksiyonun çeşitli türleri ile ilişkilendirilen çeşitli eşitsizlerden ve diferansiyel eşitsizliklerden oluşan bazı sonuçlar belirlenecektir. Ayrıca, bu sonuçlarla ilgili bazı özel çıkarımlar da sunulacaktır.

2023, 88 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Açık birim disk, Bölgeler, Kompleks düzlem, Kompleks değişkenli fonksiyon, Analitik fonksiyon, Kompleks seri açılımı, Logistik fonksiyon, Sigmoid function, Modifiye edilmiş Sigmoid fonksiyon, Bazı bölgelerde eşitsizlikler ve türev eşitsizlikleri.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

LOGISTIC FUNCTION: RELATED DEFINITIONS, THEORIES AND SOME APPLICATIONS

Ahlam MOHAMMED SAEED SAEED

Çankırı Karatekin University
Institue of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

In this thesis study, certain necessary information pertaining to the Logistic (Sigmoid) function with reel-complex variable (parameter) and some of its special forms will be firstly introduced, and some results consisting of several inequalities and differential inequalities associating with various types of the complex logistics function will be then determined. Moreover, a number of special implications relating to those results will be also presented.

2023, 88 pages

Keywords: Unit open disc, Complex plane, Function with complex variable, Analytic function, Series expansion, Logistic function, Sigmoid function, Modified Sigmoid function, Inequalities and differential inequalities in certain domains.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Birçok bilim alanında oldukça önemli rolleri olan üstel (exponential) fonksiyonunun yardımıyla tanımlanan ve literatürde uygulama alanı bakımından da oldukça zengin olan Logistik fonksiyonu (veya Sigmoid fonksiyonu) matematik biliminin özel fonksiyonlarından biridir. Bu fonksiyon, çeşitli verilerle belirlenen modellemelerin sembolik karşılığı hemen hemen tüm bilim alanlarında hem teorik hem de uygulamalı alanlarda kendini sıkça göstermektedir. Bu açıdan, bu tez araştırmasında, bu özel fonksiyonunun reel değişkenli (parametreli) hali öncelikle tanıtılmış ve ardından da kompleks değişkenli (parametreli) hali üzerine odaklanılmıştır. Dolayısıyla, hedefle-nen araştırma alanı kompleks düzleme, yani kompleks değişkenli fonksiyonlara çekile-rek, kompleks fonksiyonlar teorisi kapsamında gerekli olabilecek teorilere, sonuçlara ve örneklendirmelere zemin oluşturulmuştur. Olası özgün sonuçlar, bu tez çalışmasının "Bulgular ve Tartışma" ile "Sonuç" bölümlerinde ele alınmış ve çeşitli önerilere de yön verilmiştir.

Bu tez savunma sürecinde emekleri geçen ve çeşitli önerilerde bulanan jüri üyelerim Sayın Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR'a ve Sayın Doç. Dr. Müfit ŞAN'a teşekkürlerimi sunarım. Özellikle, bu akademik çalışmanın tüm süreçlerinde bana oldukça sabırla davranan, yardımlarını hiç esirgemeyen ve farklı ufuklar açan danışmanım Sayın Prof. Dr. Hüseyin IRMAK'a da sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, aileme ve bana emeği geçen tüm kurumlara ve herkese çok teşekürlerimi sunarım.

Ahlam MOHAMMED SAEED SAEED

Çankırı, Haziran 2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET……...**i**
ABSTRACT……....**ii**
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR……**iii**
İÇİNDEKİLE……..**iv**
SİMGELER DİZİNİ……....**v**
ŞEKİLLER DİZİNİ……...……....**vi**
1. GİRİŞ……...…....**1**
2. MATERYAL VE YÖNTEM…….**4**
2.1 Bazı Temel Bilgiler……....**4**
2.2 Üstel Fonksiyonlar ve İlgili Bilgiler…….…….**23**
2.3 Lojistik (Sigmoid) Fonksiyonlar ve İlgili Bilgiler……..……...**37**
2.3.1 Gerçel parametreli Lojistik (Sigmoid) fonksiyon ve ilgili bilgiler…….....…**37**
2.3.2 Kompleks parametreli Lojistik (Sigmoid) fonksiyon ve ilgili bilgiler…….....**45**
3. BULGULAR VE TARTIŞMA……....**50**
4. SONUÇ…….. .....**65**
KAYNAKLAR……..**66**
ÖZGEÇMİŞ…….…….**69**

SİMGELER DİZİNİ

exp(w)	w değişkenli üstel (exponential) fonksiyon
$\mathbb{C}$	Kompleks düzlem
$\mathbb{C}^*$	$\mathbb{C} - \{0\}$ şeklindeki küme
L(x)	Gerçel parametreli Lojistik fonksiyon
L(z)	Kompleks parametreli Lojistik fonksiyon
ms(x)	Gerçel parametreli modified Sigmoid fonksiyon
ms(z)	Kompleks parametreli modified Lojistik fonksiyon
$\mathbb{N}$	Doğal sayıların oluşturduğu küme
$\mathbb{N}_s$	$s \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\{s, s+1, s+2, \cdots\}$ şeklindeki doğal sayıların oluşturduğu sonsuz elemanlı küme
$\mathbb{R}$	Reel sayıların oluşturduğu küme
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R} - \{0\}$ şeklindeki küme
$\mathbb{R}^+$	Pozitif gerçel sayılar kümesi
s(x)	Gerçel parametreli Sigmoid fonksiyon
s(z)	Kompleks parametreli Lojistik fonksiyon
$\mathbb{U}$	Kompleks düzlemde açık birim disk
$\mathbb{Z}$	Tam sayıların oluşturduğu küme
$\mathbb{Z}^-$	Negatif tam sayıların oluşturduğu küme
$\{u_n(w)\}_s$	$u_n(w)$ genel terimli fonksiyon dizisi
$\{w_n\}_s$	w_n genel terimli sayı dizisi
$\sum_{n:=s}^{\infty} u_n(w)$	$u_n(w)$ genel terimli fonksiyon serisi
$\sum_{n:=s}^{\infty} w_n$	w_n genel terimli sayı serisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.2.1 Gerçel değişkenli üstel fonksiyonlarına ilişkin bazı grafikler…..….....24
Şekil 2.2.2 Gerçel değişkenli logaritma fonksiyonlarına ilişkin bazı grafikler…….25
Şekil 2.2.3 Kompleks değikenli üstel fonksiyonunun reel kısmına ilişkin 2D ve 3D formundaki grafikler…….....32
Şekil 2.2.4 Kompleks değişkenli üstel fonksiyonunun sanal kısmına ilişkin 2D ve 3D formundaki grafikler……..……....……..33
Şekil 2.2.5 Kompleks değişkenli üstel fonksiyonunun modülüne ilişkin 2D ve 3D formundaki grafikler……..……...……....33
Şekil 2.2.6 Kompleks değişkenli logaritma fonksiyonununun reel kısmına ilişkin 2D ve 3D formundaki grafikler……..…..…….....34
Şekil 2.2.7 Kompleks değişkenli logaritma fonksiyonunun sanal kısmına ilişkin 2D ve 3D formundaki grafikler……..……..……..…….……..34
Şekil 2.2.8 Kompleks değişkenli logaritma fonksiyonunun modülüne ilişkin 2D ve 3D formundaki grafikler...……..……...……...……..……..34
Şekil 2.2.9 P. F. Versults'un üstel büyümeye ilişkin teorisinin matematiksel modellemesinin grafiği…….……...…..37
Şekil 2.2.10 Gerçel parametreli Logistik (Sigmoid) fonksiyonlarına ilişkin bazı grafikler……..…….…….....……...…..39
Şekil 2.2.11 Gerçel değişkenli standart Sigmoid ve modified Sigmoid fonksiyonlarına ilişkin bazı grafikler.....40
Şekil 2.2.12 Gerçel değişkenli bzaı Logit fonksiyonlarına ilişkin grafikler…….....41
Şekil 2.2.13 Gerçel değişkenli $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh(kx)$ fonksiyonlarına ilişkin bazı grafikler…..…….....……...…….42
Şekil 2.2.14 Gerçel değişkenli Sigmoid fonksiyonu ile karşılaştırılabilen bazı gerçel değişkenli fonksiyonlar ve grafikleri.....……..43
Şekil 2.2.15 Kompleks değişkenli Sigmoid fonksiyonun reel kısmına ilişkin 2D ve 3D grafikler……...…….....……...…..48
Şekil 2.2.16 Kompleks değişkenli Sigmoid fonksiyonun sanal kısmına ilişkin 2D ve 3D grafikler...…….…….....……...…….48
Şekil 2.2.17 Kompleks değişkenli Sigmoid fonksiyonun modülüne ilişkin 2D ve 3D grafikler……..…….....……48
Şekil 2.2.18 $z = e^{x}Cos(y)$ gerçel değişkenli fonksiyonuna ilişkin bazı 3D boyutlu grafikler……..……...53

1. GİRİŞ

Çok sayıda bilim alanında olduğu gibi, üstel (exponential) fonksiyoların etkin rolünün olduğu bu tez araştırması temelde üç konu ile doğrudan alakalıdır. Bunlardan ilki gerçel parametreli lojistik fonksiyonu ikincisi bu özel fonksiyonun kompleks parametreli olarak ele alınacak olan kompleks değişkenli özel fonksiyon olacaktır. Üçüncüsü de, kompleks fonksiyonlar teorisi olacaktır. Dolayısıyla, bu araştırma ile olası temel ilişkileri içeren bazı kapsamlı temel bilgiler ve akabinde de araştırmalar da zorunlu olarak üçüncü konuyu içerecektir. Özellikle, bu son konu kapsamı açısından; Nehari (1952), Boas (1954), Wang and Guo (2010) and Irmak (2023) eserleri çeşitli yönleriyle kapsamlı bilgiler sunmaktadır.

Bilindiği gibi, matematik biliminin elementer fonksiyonlardan biri olan üstel fonksiyon (exponential function) veya üstel eğri (exponential curve) kavramları bilimsel açıdan oldukça kullanılabilir fonksiyonlardan biridir. Özellikle, en temel yapısı itibarıyla, bu gibi temel fonksiyonlar bize, negatif bir katsayı içermediği sürece, üstel büyümenin sınır olmaksızın arttığını ifade edebilmektedir. Bu, genellikle bir tür üst sınırın olduğu popülasyon gibi bazı özel durumlar için mümkün olabilmektedir. Özellikle bu durum; yiyecek, alan veya diğer kıt kaynaklar üzerinde sınırlamalara da yol açar. Lojistik büyüme (logistic growth) ise, sınırlayıcı üst sınırın etkisinin önce katlanarak büyüyen, sonra yavaşlayan ve neredeyse hiç büyümeyen bir eğri olduğu bir büyüme özelliğine sahip olan bir tür büyümedir. Dolayısıyla, herhangi bir populasyonun üstel büyümesini modelleyen ve aynı zamanda arazinin taşıma kapasitesi gibi faktörleri de dikkate alan bir fonksiyona lojistik fonksiyon (logistic function) adı verilir. Bu önemli kavram, ilk kez Belçikalı matematikçi Pierre Francois Verhulst tarafından 1930'lu yıllarda (hem şekilsel hem de teorik olarak) tasarlanmış ve 1838 ile 1847 yıllar arasında "Üstel büyüme modelinden esinlenerek bir nüfus artışı modeli olarak tasarlananmış" olan ilgili notlar üç bilimsel makalelik bir seri ile literatürde yerini almıştır. İlgili büyümenin ilk aşamasında, "büyüme yaklaşık olarak üstel (geometrik) olup; daha sonra, doygunluk başladığında da büyüme yavaşlayarak lineer (aritmetik) hale gelir ve olgunlukta ise büyüme durur" şeklindeki ilk temel teoridir. Bu büyüme modeli ifade eden fonksiyonun (veya eğrinin) adının ise, Verhulst isminin fransızca dilindeki karşılığı olan "lojistik"

anlamından geldiği ama herhangi bir askeri terim ile alakalı olmadığı düşünülmektedir. İlgili detaylı bilgiler için, Verhults (1838, 1845, 1847) ile verilen il ve temel bilgileri içeren makalelerine odaklanılabilir. Aynı zamanda, Cramer (2002), Thime (2003), Kyurkchiev and Svetoslava (2015) ve Tarasova and Tarasov (2017) ile verilen eserler de incelenebilir.

İlgili temel bilgiler ışığında, bir lojistik fonksiyon (veya lojistik eğri), denklemi şekilsel olarak S harfini andıran bir eğri şeklinde olduğundan dolayı, Sigmoid eğri adıyla anılır ve

$$\frac{\ell}{1+e^{-k(x-x_0)}} \tag{1.1}$$

şeklinde üstel kesirsel yapıya sahip olan iligili fonksiyon ise, çeşitli matematiksel incelemeler sonucunda Belçikalı matematikçi olan Pierre François Verhults tarafından ileri sürülen (lojistik büyüme) ile ilgili bir teorinin modellemesi ifade eden bir elementer fonksiyondur. (1.1) ile verilen kesri içeren bu özel fonksiyon yapısında yer alan ilgili parametreler ise;

x_0 : İlgili fonksiyonun grafiğine denk gelen orta noktasının değeri

ℓ : İlgili fonksiyona ilişkin üst (sınır) değeri

k : Lojistik büyüme hızı (veya eğrinin dikliği)

şeklindeki gibi ifadeleri içeren parametrelerdir. Özellikle; belirtilen parametrelerin $\ell := 1$, $k := 1$ ve $x_0 := 0$ şeklindeki gibi seçimi sonucu elde edilen özel formdaki logistik fonksiyona da standart Logistik Fonksiyon (Standard Logistic Function) adı verilir ve literatürde, bu özel fonksiyon $s(x)$ şeklinde gösterimi ve Logistik (Sigmoid) fonksiyon adlandırılmasıyla bilinir.

Yukarıda belirtildiği gibi, Verhults tarafından vurgulanmış büyüme modellerini ifade eden Lojistik fonksiyonu (veya daha kullanışlı hali olan Sigmoid fonksiyonu); biyoloji (özellikle ekolojik yönü ile), uygulamalı matematik, biyo-matematik, kimya, demografi, ekonomi, jeoloji, matematiksel psikoloji, olasılık, sosyoloji, siyaset bilimi, dilbilim, istatistik ve yapay sinir ağları dahil olmak üzere çeşitli uygulama alanlarında oldukça etkin bir modellemenin sonucu olarak, oldukça çeşitli kullanımlara sahiptir. Hem çeşitli

modellemeler hem de çeşitli uygulamalar olarak da Carrillo and Gonzalez (2002), Chen and Cau (2009), El-Sayed *et al*. (2007), Costarelli and Spigler (2013), Iliev *et al*. (2015), West (2015), Nasciment *et al*. (2018), Pelinovsky *et al*. (2020) ve Srivastava *et al*. (2021) makaleleri incelenebilir.

Yukarıda verilen eserlerde ilgili fonksiyonlarda (veya eğrilerde) ilgili bağımsız değişken reel sayı olmakla birlikte, diğer parametreler de reel sayılardan oluşmaktadır. Giriş kısmında vurguladığımız gibi, ilgili bağımsız değişken (veya diğer parametreler) elbette ki kompleks bağımsız değişken (veya kompleks parametreler) de olabilmektedir. İşte bu gibi durumlar bu tez çalışmasının temel hedefinde olacağından dolayı, Kompleks Logistik Fonksiyon (veya Kompleks Değişkenli (Parametreli) Logistik Fonksiyon) ve bunun standart formu olan biline Kompleks Sigmoid Fonksiyon (veya Kompleks Değişkenli (Parametreli) Sigmoid Fonksiyon) şeklindeki özel fonksiyonlar kompleks fonksiyonlar teorisinde açısından oldukça önemli rol oynayan ve özel fonksiyonlar (special functions) ailesinde yer alan bu fonksiyonlar üzerine odaklanılacak, bazı teoriler ileri sürülecek ve bunların olası bazı özel sonuçlarına yönelik çeşitli önerilerde bulunulacaktır. Bu belirtilen özel fonksiyonlara ilişkili olan ve literaturde yer alan bazı farklı özel bilimsel çalışmalar olarak da Bell (1968), Abramowitz and Stegun (1972), Area *et al.* (2016), Fadipe-Joseph *et al*. (2013), Goel and Kumar (2019), Hamzat and Oladipo (2022), Kyurkchiev and Markov (2016), Mendiratta and Ravichandran (2015), Murugusundaramoorthy and janna (2015) Hi *et al*. (20209, Singh and Singh (2018), Wnag and Wnag (2018), Zaprawa (2019) and Irmak (2023) eserleri verilebilir.

Ayrıca, özel literatür bilgisi olarak, hem gerçel hem de kompleks değişkenli (parametreli) çeşitli özel fonksiyonlar arasındaki kapsamlı özel ilişkileri, bağıntıları ve bazı özel uygulamaları içeren çeşitli eserler olarak; Whittaker and Watson (1963), Titchmarsh (1964), Lebedev (1965), Zang and Jin (1966), Abramowitz and Stengun (1972), Olver *et al.* (2010) ve özellikle Irmak (2023) temel eserlerine de odaklanılabilir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Bazı Temel Bilgiler

2.1.1 Tanım. Kompleks sayılar kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir ve bu küme de

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : i^2 = -1 \ ve \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde tanımlanır (Boas 1954).

Üstte verilen verilen $\mathbb{R}$ notasyonu bilenen reel (gerçel) sayılar kümesini göstermektedir. Bilindiği gibi, x reel sayısına z kompleks sayısının reel kısmı ve y reel sayısına da z kompleks sayısının sanal (veya imajinar) kısmı adları verilir ve bunlar, sırasıyla;

$$\Re e(z) = x \quad \text{ve} \quad \Im m(z) = y$$

şeklindeki gibi gösterimlerle ifade edilir. Bu belirtilen kompleks sayılar kümesi zaman zaman "Kompleks Düzlem", "Analitik Düzlem" veya "z–düzlemi" gibi ifadeler-le de anılır (Boas 1954).

Bu çalışmada zaman zaman hem reel (gerçel) sayılar ($\mathbb{R}$) kümesi hem de kompleks sayılar ($\mathbb{C}$) kümesi kullanılacağından dolayı, tez çalışması için gerekli olduğu düşünülen tanımlamaları tanıtmak adına, $\mathbb{F}$ gibi bir genel sayılar kümesi (cisim uzayı) kullanılacaktır. Dolayısıyla, bu $\mathbb{F}$ kümesini (uzayını) ifade eden notasyonun hem $\mathbb{R}$ hem de $\mathbb{C}$ kümelerini (uzaylarını) içerecek olan bir genel gösterim olduğunu özellikle ifade edelim. Bilindiği gibi, ilgili iki küme üzerinde bilindik dört işlemin tanımlandığı temel iki cisim uzayıdır ve bu uzaylardaki **U** gibi bir gösterilecek olan kümeyi,

$$\{\Omega \in \mathbb{F} : |\Omega| < 1\}$$

şeklinde tanımlayalım.

Bilindiği üzere, eğer $\mathbb{F} \coloneqq \mathbb{R}$ ise, ilgili **U** kümesi $(-1,1)$ gibi bir (açık) aralığı ifade eden $\mathbb{R}$'nin özel bir bölgesidir. Böylesi bir kümeyi $\mathbb{I}$ ile gösterelim. Eğer $\mathbb{F} \coloneqq \mathbb{C}$ ise, bu **U** kümesi de orjin merkezli ve $r = 1\ br$ yarıçaplı olan bir daireyi ifade eder ve bu da $\mathbb{C}$'de bir bölge olarak anılır. Özellikle, kompleks düzlemdeki bu küme de genellikle $\mathbb{U}$ gibi bir notasyon ile gösterilir. Bilindiği üzere, bu özel küme, $\mathbb{C}$'de açık birim disk olarak adlandırılan kümedir (Nehari 1952, Boas 1954).

2.1.2 Tanım. Boş kümeden farklı olan herhangi iki kümenin kesişimi boş küme oluyor ise, ilgili kümelere ayrık kümelerdir veya kısaca ayrıktır denir (Boas 1954).

2.1.3 Tanım. Keyfi $\delta > 0$ sayısı ile herhangi bir $w_0 \in \mathbb{F}$ gibi bir ögesi konumunda olan noktası verilsin. Bu durumda, bu w_0 noktasının δ (-açık-) komşuluğu $\mathrm{U}_\delta(w_0)$ gösterimi ile ifade edilir ve

$$\mathrm{U}_\delta(w_0) = \{\, z \in \mathbb{F} : \ |w - w_0| < \delta \ \ (\delta > 0) \,\} \tag{2.1}$$

şeklindeki küme ile tanımlanır (Boas 1954).

Yukarıda sunulan, yani (2.1)'deki gibi verilen küme tanımlamasında, bilindiği gibi, eğer $\mathbb{F} \coloneqq \mathbb{R}$ seçilirse, $\mathrm{U}_\delta(w_0)$ kümesi $\mathbb{R}$'de $(w_0 - \delta\,, w_0 + \delta)$ gibi bir (açık) aralığın ifade ettiği $w_0 =: x_0 \in \mathbb{R}$ gibi reel (gerçel) noktanın δ (-açık-) komşuluğunu, eğer $\mathbb{F} \coloneqq \mathbb{C}$ şeklinde seçilirse, $\mathrm{U}_\delta(w_0)$ kümesi de $\mathbb{C}$'de açık birim diskinin ifade ettiği $w_0 =: z_0 \in \mathbb{C}$ gibi bir kompleks noktanın δ (-açık-) komşuluğunu ifade eder (Lebedev 1965, Olver *et al*. 2010).

2.1.4 Tanım. $\emptyset \neq \mathrm{H} \subset \mathbb{F}$ gibi bir küme verilsin ve $w_0 \in \mathrm{H}$ olsun. Eğer, verilen w_0 noktasının $\mathrm{U}_\delta(z_0) \subset \mathrm{H}$ olacak şekilde bir komşuluğu var ise, w_0 noktasına H kümesinin ($\mathbb{F}$ kümesinde) bir iç noktası adı verilir (Boas 1954).

2.1.5 Tanım. $\mathrm{H} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer, H'nin her bir noktası bir iç nokta ise, H kümesine ($\mathbb{C}'$de) bir açık küme denir veya kısaca ($\mathbb{C}'$de) açıktır denir (Boas 1954).

2.1.6 Tanım. Ayrık ve açık iki kümenin birleşimi şeklinde yazılamayan kümelere bağlantılı küme adı verilir veya kısaca bağlantılıdır denir (Boas 1954).

2.1.7 Tanım. Açık ve bağlantılı kümelere bölge adı verilir (Boas 1954).

2.1.8 Tanım. $\emptyset \neq X \subset \mathbb{F}$ ve $\emptyset \neq Y \subset \mathbb{F}$ şeklindeki iki küme verilsin. Fonksiyon olma koşulları altında, X kümesinin elemanlarını Y kümesinin elemanlarına götüren kurala, bir fonksiyon adı verilir (Nehari 1952, Boas 1954).

Bilindiği gibi, $\omega \in X$ ve $w \in Y$ olmak üzere, Tanım 2.1.8 ile vurgulanan (fonksiyon olma) kural φ ile gösterilirse, bu fonksiyon;

$$\varphi : X \to Y$$

$$\omega \longmapsto w := \varphi(\omega)$$

şeklindeki gibi bir yazımımla da ifade edilir. Böylesi bir durumda, kullanılan ω değişkenine φ fonksiyonunun bağımlı değişkeni ve w değişkenine de φ fonksiyonunun bağımsız değişken adları verilir. Bu değişkenler kullanılarak, φ fonksiyonu "ω-bağımsız değişkenli ve w-bağımlı değişkenli fonksiyon" adıyla da ifade edilir. Özellikle, $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ seçilirse, ilgili φ fonksiyonu gerçel (reel) bağımsız (değişkenli) ve (gerçel) bağımlı değişkenli olan:

$$\varphi : X \subseteq \mathbb{R} \to Y \subseteq \mathbb{R} \ ; \ x \longmapsto y := \varphi(x)$$

şeklindeki aşina olunan x bağımsız değişkenli gerçel fonksiyon ve $\mathbb{F} := \mathbb{C}$ seçildiğinde de, ilgili φ fonksiyonu kompleks bağımsız değişkenli ve (kompleks) bağımlı değişkenli olan:

$$\varphi \; : \; \mathrm{X} \subseteq \mathbb{C} \; \rightarrow \; \mathrm{Y} \subseteq \mathbb{C} \;\; ; \;\; \mathrm{z} \longmapsto w := \varphi(\omega)$$

şeklindeki aşina olunan z bağımsız değişkenli kompleks fonksiyon yazılışlarıyla da ifade edilir (Lebedev 1965, Olver *et al*. 2010).

2.1.9 Tanım. $\varphi := \varphi(\omega) : \mathrm{X} \subseteq \mathbb{F} \rightarrow \mathrm{Y} \subseteq \mathbb{F}$ gibi verilen bir fonksiyon ω_0 gibi noktanın uygun bir komşuluğunda tanımlı olsun ve $W_0 \in \mathrm{Y}$ verilsin. Eğer, verilen $\epsilon > 0$ keyfi sayısı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı var ve öyle ki $\mathrm{U}_\delta(\omega_0)$ komşuluğundaki her $\omega \in \mathbb{F}$ için,

$$|\varphi(\omega) - W_0| < \epsilon$$

oluyor ise, φ fonksiyonunun ω_0 noktasındaki limiti W_0'dır denir ve bu durum genellikle,

$$\text{“}\omega \rightarrow \omega_0 \;\; \text{iken} \;\; \varphi(\omega) \rightarrow W_0\text{'dır”}$$

veya

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \varphi(\omega) = W_0$$

şeklinde gösterilerek ifade edilir (Nehari 1952).

2.1.10 Tanım. $\varphi := \varphi(\omega) : \mathrm{X} \subseteq \mathbb{F} \rightarrow \mathrm{Y} \subseteq \mathbb{F}$ şeklinde verilen bir fonksiyon ω_0 gibi noktanın uygun bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer, verilen $\epsilon > 0$ keyfi sayısı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı var ve öyle ki $\mathrm{U}_\delta(\omega_0)$ komşuluğundaki her $\omega \in \mathbb{F}$ için,

$$|\varphi(\omega) - \varphi(\omega_0)| < \epsilon$$

oluyor ise, φ fonksiyonunun ω_0 noktasında süreklidir denir ve bu durum genellikle,

"$\omega \to \omega_0$ iken $\varphi(\omega) \to \varphi(\omega_0)$'dır"

veya

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \varphi(\omega) = \varphi(\omega_0)$$

şeklinde gösterilerek ifade edilir (Nehari 1952).

Yukarıda verilen Tanım 2.1.9 ve Tanım 2.1.10 ile verilen ilgili noktadaki limit ve süreklilik kavramları hem gerçel (reel) değişkenli hem de kompleks değişkenli fonksiyonları içerecek şekilde verilmiştir. Elbette ki, sırasıyla, ilgili $\omega \coloneqq x$ olduğunda alışkın olduğumuz gerçel (bağımsız) değişkenli $\varphi \coloneqq \varphi(x)$ gibi bir fonksiyonunun $\omega_0 \coloneqq x_0$ gibi bir gerçel noktadaki limit ve süreklilik ilişkisini ve yine $\omega \coloneqq z$ olduğunda da ilgili kompleks (bağımsız) değişkenli $\varphi \coloneqq \varphi(z)$ gibi bir fonksiyonunun $\omega_0 \coloneqq z_0$ gibi bir kompleks noktadaki limit ve süreklilik ilişkisini ifade edeceğinden dolayı, ilgili x_0 noktasının $\mathbb{R}$'deki uygun bir komşuluğunun ve z_0 noktasının da $\mathbb{C}$'deki uygun bir komşuluğunun önemli rol aldığını biliyoruz. Bu özel bilgiler için Lebedev (1965) ve Olver *et al*. (2010) eserlerine odaklanılabilir.

2.1.11 Teorem. Verilen $\varphi \coloneqq \varphi(\omega) : \mathrm{X} \subseteq \mathbb{F} \to \mathrm{Y} \subseteq \mathbb{F}$ gibi bir fonksiyonun ω gibi bir noktada limiti var ise, bu limit biriciktir (Boas 1952).

Limit ve süreklilik kavramlarının evrenselliği, doğal olarak, üstteki teoremin evrenselliği gereği hem gerçel değişkenli $\varphi \coloneqq \varphi(x)$ ve kompleks değişkenli $\varphi \coloneqq \varphi(z)$ gibi fonksiyonların klasik analiz derslerindeki alışılmış değişkenlere göre de yeniden düzenlenebilir. Böylesi durumlarda, elbette ki, ilgili uygun komşulukların ilgili kümlerdeki tanımları (geometrik şekilsel olarak) oldukça önem taşımaktadır.

2.1.1 Uyarı. Verilen $\varphi \coloneqq \varphi(\omega) : \mathrm{X} \subseteq \mathbb{F} \to \mathrm{Y} \subseteq \mathbb{F}$ gibi ω bağımsız değişkenli bir fonksiyon ω_0 gibi bir noktada tanımlı olması ilgili noktada limitinin olmasını

gerektirmez. Örneğin, $\varphi_1 \coloneqq \varphi_1(x)$ ve $\varphi_2 \coloneqq \varphi_2(x)$ gibi x gerçel (bağımsız değişkenli) fonksiyonları:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} x \ , \text{ eğer } x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 \ , \text{ eğer } x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 2x \ , \text{ eğer } x > 0 \text{ ise} \\ -x \ , \text{ eğer } x < 0 \text{ ise} \\ 1 \ , \text{ eğer } x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde verilsin. Her iki gerçel fonksiyon $\mathbb{R}$'de tanımlı fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlardan φ_1 gerçel fonksiyonu $x_0 = 0$ noktasında hem limiti vardır hem de süreklidir. Fakat φ_2 gerçel fonksiyonu $x_0 = 0$ noktasında limiti olmasına rağmen, ilgili noktada sürekli değildir.

2.1.11 Tanım. Verilen $\varphi \coloneqq \varphi(\omega) : X \subseteq \mathbb{F} \to Y \subseteq \mathbb{F}$ gibi bir fonksiyon herhangi bir ω_0 gibi noktanın (en az) bir komşuluğunda sürekli (veya parçalı sürekli) olsun. Eğer,

$$\lim_{\omega \to \omega_0} \frac{\varphi(\omega) - \varphi(\omega_0)}{\omega - \omega_0} \tag{2.2}$$

şeklindeki limiti var ise, bu limite φ fonksiyonun $\omega = \omega_0$ noktasındaki türevi adı verilir. Ve, bu limit genellikle;

$$\varphi'(\omega_0) \quad , \quad \varphi'(\omega)|_{\omega \coloneqq \omega_0} \quad , \quad \left.\frac{d\varphi}{d\omega}\right|_{\omega \coloneqq \omega_0} \quad \text{veya} \quad \frac{d\varphi(\omega_0)}{d\omega}$$

şeklindeki gösterimlerinden herhangi biri kullanılarak gösterilir. Aynı zamanda, (2.2) ile verilen türev tanımında, eğer

$$\omega - \omega_0 = h \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega \to \omega_0$$

gibi ilişkiler göz önüne alındığında, ilgili limite denk konumda olan;

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(\omega_0+h)-\varphi(\omega_0)}{h} \tag{2.3}$$

şeklindeki limitle de tanımlanabilmektedir. Elbette ki, hem (2.2) tanımı hem de (2.3) tanımı ile verilen ilgili türevleri ifade eden ilgili limitlerin varlıkları söz konusu ise, bu limitler Teorem 2.1.1 kapsamındaki bir limit olmak zorundadır (Boas 1954).

Yine, analiz derslerinde sıkça karşılaşıldığı gibi, genel bağımsız değişkene ilgili fonksiyonların türevlerine ilişkin uygulamalarda kullanılan (2.2) veya (2.3)'teki tanımlar, aynı zamanda verilen $\varphi \coloneqq \varphi(\omega)$ gibi bir fonksiyonunun ω (gibi bir) bağımsız değişkenine göre türevi için de kullanılır. Böylesi durumlarda, ilgili (genel değişkene göre) türeve ilişkin limit de,

$$\lim_{\mathrm{h}\to 0} \frac{\varphi(\omega+h)-\varphi(\omega)}{h} \tag{2.4}$$

şeklindeki limit ile belirlenecek olan ω bağımsız değişkenli fonksiyon olacaktır. Yine, bilindiği gibi, (2.3) (veya (2.4)) ile verilen ilgili limit de;

$$\varphi'(\omega) \quad \text{veya} \quad \frac{d\varphi}{d\omega}$$

şeklindeki gibi ifade edilmektedir. Yukarıda verilen tanımlamalarla ilgili olabilecek detaylı bilgilendirme ve çeşitli uygulamalar açısından; Lebedev (1966), Ahlfors (1966) ve Olver *et al.* (2010) eserleri oldukça kapsamlı eserlerdir.

2.1.2 Teorem. Verilen $\varphi := \varphi(\omega) : X \subseteq \mathbb{F} \to Y \subseteq \mathbb{F}$ gibi bir fonksiyonun ω_0 gibi bir noktada türevi var ise, ω bağımsız değişkenli φ fonksiyonu ω_0 noktasında süreklidir (Boas 1954) .

2.1.2 Uyarı. Teorem 2.1.1'in karşıt tersi her zaman doğrudur ama karşıtı doğru olmak zorunda değildir.

Hem bu tez çalışması açısından oldukça önemli roller içeren hem de kompleks (bağımsız) değişkenli fonksiyonlarının türevlenme durumları ile alakalı olan ve "Analitik (regüler) Fonksiyon" ve "Tam (exat) Fonksiyon" şeklindeki iki önemli ve kapsamlı kavramları da hatırlatalım.

2.1.12 Tanım. $\varphi := \varphi(z)$ gibi bir kompleks değişkenli fonksiyonu, eğer z_0 gibi bir noktanın en az bir komşuluğundaki her noktada analitik oluyor ise, φ kompleks (değişkenli) fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir (Boas 1954).

2.1.13 Tanım. $\varphi := \varphi(z)$ gibi bir kompleks değişkenli fonksiyonu, eğer verilen herhangi bir $D \subset \mathbb{C}$ gibi bir bölgenin her bir noktasında analitik oluyor ise, φ kompleks (değişkenli) fonksiyonuna D kümesinde analitik fonksiyondur veya kısaca analitiktir denir (Boas 1954).

2.1.14 Tanım. $\varphi := \varphi(z)$ gibi bir kompleks değişkenli fonksiyonu verilsin. Eğer, bu $\varphi(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ kümesinin her bir noktasında türevlenebilir ise, φ kompleks fonksiyonuna $\mathbb{C}$ kümesinde analitiktir veya kısaca φ tam fonksiyondur denir (Boas 1954).

2.1.15 Tanım. $\mathbb{R}$'nin $[a, b]$ gibi bir aralığından $\mathbb{C}$'ye tanımlanan fonksiyonlara, bir kompleks (parametreli) eğri adı verilir. Eğer, ilgili kompleks eğri γ ile gösterilirse, $\gamma(a)$'ya γ eğrisinin başlangıç noktası ve $\gamma(b)$'ye de γ eğrisinin bitiş noktası adları verilir (Boas 1954).

2.1.16 Tanım. Bir kompleks eğri kendi kendini sadece başlangıç ve bitiş noktalarında kesiyor ise, bu eğriye basit kapalı eğri adı verilir (Boas 1954).

2.1.1 Örnek. $\gamma : [0,\pi/2] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it}$ $(r > 0)$ eğrisi orjin merkezli ve $r\ br$ yarıçaplı bir çemberin $0 \le t \le \pi/2$ aralığına karşılık gelen yay parçasıdır. Bu durumda, bu kompleks eğri:

$$\gamma(0) = -r \neq ir = \gamma(\pi/2)$$

şartını sağladığından dolayı basit kapalı bir (kompleks) eğri olamaz.

2.1.3 Teorem. $\varphi := \varphi(z)$ gibi bir kompleks (değişkenli) fonksiyonu, kompleks düzlemin z_0 gibi bir noktasını içeren herhangi bir basit kapalı γ eğrisinin üzerinde ve bu γ eğrisinin belirlediği bölgede analitik olsun. O zaman, her $m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ doğal sayısı için,

$$\varphi^{(m)}(z_0) := \frac{d^m\varphi}{z^m}\Big|_{z:=z_0} = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \qquad (2.5)$$

dır (Boas 1954).

Yukarıdaki tanımda vurgulanan, yani (2.5)'teki kompleks integralde geçen rasyonel tipteki (kompleks) fonksiyon göz önüne alındığında, $\varphi(z_0) \neq 0$ olması gerektiğini biliyoruz. Özellikle, bilindiği gibi, verilen Teorem 2.1.1 teoremi literatürde Cauchy türev teoremi (formülü) olarak bilinir ve kompleks integral teorisinde oldukça önemli roller üstlenir. Özellikle, vurgulanan γ eğrisince belirlenen bölgedeki her z kompleks sayısı için, ilgili kompleks fonksiyonunu istenilen (her) mertebeden türevi de, (2.5) ile verilen formülle belirlenir.

Hem gerçel hem de kompleks sayı dizileri, fonksiyon dizileri ve bunlarınla doğrudan alakalı olan sayı serileri ve fonksiyon serileri için gerekecek olan bazı bilgilere de ihtiyaç duyulacaktır. Bunların her biri için, öncelikli olarak $\mathbb{N}_s$ gibi bir notasyonu ile gösterilen bir küme kullanılacaktır. Bu küme de:

$$\mathbb{N}_s := \{\, n \in \mathbb{N} : \quad n \ge s \,\}$$

$$= \{ s,\ s+1,\ s+2, \cdots : s \in \mathbb{N} \}$$

şeklindeki doğal sayıların oluşturduğu sonsuz elemanlı bir kümenin olduğunu belirtelim.

2.1.17 Tanım. $\mathbb{N}_s$ kümesinden $\mathbb{F}$ kümesine tanımlanan fonksiyonlara, sayı dizileri adı verilir (Ahlfors 1966).

Bir sayı dizisi, genellikle,

$$\{\omega_n\}_{n:=s} \quad , \quad \{\omega_n\}_s \quad \text{veya} \quad \{\omega_n\} \tag{2.6}$$

şeklindeki gibi gösterimlerle ifade edilir ve bu sayı dizisinin belirttiği kural, yani fonksiyon da,

$$\omega_n = f(n) : \mathbb{N}_s \to \mathbb{F}$$

şeklindeki gibi ifade edilebilen bir fonksiyondur.

Özellikle, eğer ω_n dizisi için değer kümesi $\mathbb{R}$ olarak seçildiğinde, (2.6) formunda gösterilen sayı dizilerine gerçel (reel) sayı dizileri adıyla anılır ve genellikle $\{x_n\}_{n \geq s}$ şeklinde gösterilir. Ve, değer kümesi $\mathbb{C}$ olarak seçildiğinde de, ilgili sayı dizisi kompleks sayı dizisi adıyla anılır ve bu da genellikle $\{z_n\}_{n \geq s}$ şeklinde gösterilir. Hatta, bu sayı dizleri, sırasıyla; "x_n genel terimli gerçel sayı dizisi" ve "z_n genel terimli kompleks sayı dizisi" adlarıyla da ifade edilir.

2.1.18 Tanım. $\omega_n : \mathbb{N}_s \to \mathbb{F}$ gibi bir sayı dizisi verilsin. Eğer, her $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $N := N(\epsilon) \in \mathbb{N}_s$ doğal sayısı var ve her $n \geq N$ için $|\omega_n - \omega_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\omega_0 \in \mathbb{F}$ gibi bir sayı var ise, $\{\omega_n\}$ (sayı) dizisinin limiti ω_0'dır denir ve, genellikle,

$$\lim_{n \to \infty} \omega_n = \omega_0 \quad \text{veya} \quad n \to \infty \ \text{iken} \ \omega_n \to \omega_0 \tag{2.7}$$

şeklinde gösterilir (Boas 1954).

Yine, bilindiği gibi, üstteki gibi tanımlanan ve (2.7) şeklinde ifade edilen ilgili limitin var olması durumunda, ilgili sayı dizinin "ω_0'a yakınsayan dizi" veya kısaca "yakınsak dizi" gibi ifadelerle de sıkça vurgulanmaktadır. Ayrıca, ilgili limit söz konusu değil ise, o sayı dizisine "yakınsak olmayan dizi" denildiği gibi, kısaca "ıraksak dizi" veya "ıraksaktır" da denir.

2.1.19 Tanım. $\mathbf{I} \subset \mathbb{F}$ verilsin ve $\mathbb{F}(\mathbf{I})$'da, **I** kümesi üzerinde tanımlı olan ω bağımsız değişkenli fonksiyonların oluşturdoğu fonksiyonlar ailesi olsun. Bu durumda,

$$f_n(\omega) = f(\omega, n) : \ \mathbb{N}_s \to \mathcal{F}(\mathbf{I})$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara fonksiyon dizileri adı verilir ve (2.8)'deki sayı dizilerinde olduğu gibi;

$$\{ f_n(\omega) \}_{n \geq s} \quad , \quad \{ f_n(\omega) \}_s \quad \text{veya} \quad \{ f_n(\omega) \} \tag{2.8}$$

şeklindeki gösterimlerin herhangi biri ile ifade edilir (Boas 1954).

Bu üstteki tanımda, eğer $\mathbb{F} \coloneqq \mathbb{R}$ şeklindeki gerçel sayılar kümesi seçildiğinde, (2.8) ile gibi gösterilen fonksiyon dizileri "gerçel fonksiyon dizileri" adını alan ve genellikle $\{f_n(x)\}_{n \geq s}$ şeklinde gösterilen dizileridir. Aynı zamanda, $\mathbb{F} \coloneqq \mathbb{C}$ şeklindeki kompleks sayılar kümesi seçildiğinde de, ilgili fonksiyon dizileri "kompleks fonksiyon dizileri" adını alan ve genellikle $\{f_n(z)\}_{n \geq s}$ şeklinde gösterilen dizilerdir.

2.1.20 Tanım. $\mathbf{I} \subset \mathbb{F}$ kümesi üzerinde tanımlı olan herhangi bir $\{f_n(\omega)\}_{n \geq s}$ fonksiyon dizisi verilsin. Eğer, her bir $\omega \in \mathbf{I}$ için elde edilen $f_n(\omega)$ dizisinin limiti $f(\omega)$ gibi fonksiyon oluyor ise, $\{f_n(\omega)\}_{n \geq s}$ fonksiyon dizisi $f(\omega)$ fonksiyonuna yakınsıyor veya noktasal yakınsıyor denir ve böylesi bir yakınsama,

$$" n \to \infty \ iken \ f_n(\omega) \overset{(n)}{\to} f(\omega) \ dır "$$

şeklindeki gibi bir sembolik yazımla ifade edilir (Boas 1954).

2.1.21 Tanım. $\mathbf{I} \subset \mathbb{F}$ kümesi üzerinde tanımlı olan $\{f_n(\omega)\}_{n \geq s}$ gibi bir fonksiyon dizisi $f(\omega)$ gibi bir fonksiyonuna (noktasal) yakınsasın. Eğer, her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle bir $N \in \mathbb{N}_s$ sayısı var öyle ki her $n > N \in \mathbb{N}_s$ ve her $\omega \in \mathbf{I}$ için,

$$|f_n(\omega) - f(\omega)| < \varepsilon$$

oluyor ise, $\{f_n(\omega)\}_s$ fonksiyon dizisi $f(\omega)$ fonksiyonuna düzgün (olarak) yakınsıyor denir ve

$$" n \to \infty \text{ iken } f_n(\omega) \overset{(d)}{\to} f(\omega) \text{ dır } " \qquad (2.9)$$

şeklindeki gibi gösterilir (Boas 1954).

2.1.22 Tanım. $\omega_n = f(n) : \mathbb{N}_s \to \mathbb{F}$ gibi bir sayı dizisi verilsin. Bu dizinin terimlerinden elde edilen:

$$\omega_s + \omega_{s+1} + \omega_{s+2} + \cdots + \omega_{s+n} + \cdots$$

şeklindeki gibi sonsuz tane terimin toplamı:

$$\omega_s + \omega_{s+1} + \omega_{s+2} + \cdots + \omega_{s+n} + \cdots = \sum_{n=s}^{\infty} \omega_n \qquad (2.10)$$

şeklinde gösterilir ve bu sonsuz tane sayı toplamına da sayı serisi adı verilir (Boas 1954).

Yine bilindiği üzere, ilgili $\{\omega_n\}_s$ sayı dizisine ilgili (sayı) serinin "genel terimi" veya "n. terimi" adları verilir. Ayrıca, $\{\omega_n\}_s$ dizisinin ilk terimin toplamı olan diziye de ilgili sayı serinin "kısmi toplamlar dizisi" adı verilir ve bilindiği gibi ilgili sayı dizisinin de,

$$\{S_n\} \equiv \{S_n\}_{n:=s}^{s+1} \tag{2.11}$$

$$= \omega_s + \omega_{s+1} + \omega_{s+2} + \cdots + \omega_{s+n+1}$$

şeklindeki gibi oluşturulan sayı dizisidir.

Özellikle, Tanım 2.1.21 tanımında vurgulanan genel formdaki sayı dizisi, $\mathbb{F} \coloneqq \mathbb{R}$ ve $\mathbb{F} \coloneqq \mathbb{C}$ olarak seçilmesi sonucu, ilgili sayı serileri literatürde, sırasıyla, "x_n genel terimli gerçel sayı serisi" ve "z_n genel terimli kompleks sayı serisi" adlarıyla sıkça anılan sayı serilerdir.

2.1.23 Tanım. ω_n genel terimli (sayı) seri verilsin. Eğer, bu serinin kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise, ilgili seriye yakınsak seri veya kısaca yakınsaktır denir. Yakınsak olmayan (sayı) serilerine de ıraksak seri veya kısaca ıraksaktır denir (Boas 1954).

Klasik analiz derslerinden de bilindiği gibi, verilen (2.10) formuna sahip herhangi bir (sayı) serisinin, (2.11) şeklinde tanımlanmış olan kısmı toplamlar (sayı) dizisinin limitini belirlemek her zaman kolay bir iş değildir. Yine de, (2.10) gibi (sayı) serilerinin yakınsaklıkları hakkında bilgi sahibi olmak çeşitli araştırmalarda oldukça önemli rol oynar. Bu gibi araştırmalar açısından, hem de $\mathbb{C}$'de sıralama bağıntısının söz konusu olmayışından dolayı hem kompleks hem de gerçel (sayı) serilerin yakınsaklıkları hakkında bilgi sahibi olmak adına, bazı testler (kriterler) önemli rol oynamaktadır. Aynı zamanda, özellikle, bu tez çalışmasının esas hedefi olan kompleks (sayı) serileri açısından, sadece bilgi amaçlı olarak bazı gerekli hatırlatmaları sunmak yerinde olacaktır. Aşağıda verilen detaylı bilgiler için Olver *et al.* (2010) eseri oldukça temel bir kaynaktır.

2.1.24 Tanım. $\{\omega_n\}_{n:=s\geq 1}$ genel terimli bir sayı dizisi verilsin. O zaman, eğer

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} |\omega_n|$$

şeklindeki (gerçel) sayı serisi yakınsak ise,

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \omega_n$$

şeklindeki sayı serisine mutlak (modülce) yakınsaktır denir (Boas 1954).

2.1.4 Teorem. Her bir terimi sıfırdan olmayan olan herhangi bir $\{\omega_n\}_{n\geq s}$ (gerçel veya kompleks) sayı dizisi verilsin ve

$$lim_{n\to\infty} \left|\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}\right| = L \quad \text{veya} \quad lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\omega_n|} = L \quad (0 < L < \infty) \qquad (2.12)$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=m}^{\infty} \omega_n$$

şeklindeki bir sayı serisi:

i) $L < 1$ ise ilgili seri mutlak (modülce) yakınsaktır.

ii) $L > 1$ veya $L = \infty$ ise ilgili seri ıraksaktır.

iii) $L = 1$ ise ilgili serinin yakınsaklığı ya da ıraksaklığı için bir şey söylenemez.

2.1.1 Örnek. Çok temel bir örnek olarak,

$$w_{\mathrm{n}} = q^n \quad (n \in \mathbb{N}_1)$$

şeklindeki genel terimli olan gerçel veya kompleks sayı serisini, $n \in \mathbb{N}_1$ için göz önüne alalım. Bilindiği gibi, bu sayı serisi literatürde, genellikle, q serisi olarak bilinen ve serilerinin (mutlak) yakınsama teorilerine temel dayanak oluşturan temel bir sayı seridir. Bu serinin yakınsaklığı, Teorem 2.1.4 yardımıyla da kolayca görülebilir. Fakat, bu araştırmayı, kısmı toplamalar dizisine bir örnek olsun diye, aşağıdaki gibi araştırmak istersek;

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(q^1 + q^2 + q^3 + \cdots + q^n)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(q\,\frac{1-q^{n-1}}{1-q}\right)$$

$$= \frac{q}{1-q}\lim_{\mathrm{n}\to\infty}(\,1 - q^{n-1})$$

$$= \begin{cases} q/(1-q) & \text{eğer } |q| < 1 \\ \mp\infty & \text{eğer } |q| \geq 1 \end{cases}$$

şeklindeki sonuçlar kolayca elde edilir. Dolayısıyla, ilgili q serisi seri,

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \text{ serisi} : \begin{cases} \text{(Mutlak) Yakınsaktır}, & \text{eğer } |q| < 1 \\ \text{Iraksaktır} \quad , & \text{eğer } |q| \geq 1 \end{cases} \tag{2.13}$$

şeklindeki bir seri olur.

O halde,

$$z_n = \left(\frac{1-2i}{3-i}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

şeklindeki gibi kompleks sayı dizisini genel terim kabul aşağıdaki kompleks sayı serileri:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \qquad \text{ve} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} 1/z_n$$

göz önüne alındığında, (2.12) ve (2.13) bilgileri ışığında, üstteki sayı serilerinden birincisi (modülce) yakınsak ve ikincisi de de ıraksak olan serilerdir.

Şimdi, Tanım 2.1.17, Tanım 2.1.18 ve Tanım 2.1.20, Tanım 2.1.21 ve Tanım 2.1.22 bilgilerinin temel teşkil edeceği, genel terimi de (gerçel veya kompleks) fonksiyon dizileri olan ve bu son tanımlamalarla ilgili olabilecek bazı temel bilgileri de hatırlatalım.

2.1.25 Tanım. Aşağıdaki gibi verilen:

$$\{ f_n(\omega) \}_s \quad (s \in \mathbb{N})$$

ibi herhangi bir fonksiyon dizisi $\mathbf{I} \subset \mathbb{F}$ gibi bir kümesi üzerinde tanımlı olsun. Bu durumda,

$$f_s(\omega) + f_{s+1}(\omega) + f_{s+2}(\omega) + \cdots + f_{s+n+1}(\omega) + \cdots = \sum_{n=s}^{\infty} f_n(\omega)$$

şeklinde tanımlanan seriye fonksiyon serisi adı verilir (Boas 1954, Ahlfors 1966).
Doğal olarak, genel terimi Tanım 2.1.19'daki gibi tanımlanan seriler ve (2.10)'daki gibi formlara sahip olan fonksiyon serileri ve bu serinin de kısmı toplamlar dizisi yine Tanım 2.1.22'deki gibi tanımlanmış benzeri forma sahip olan ve Tanım 2.1.20'deki ve (2.13)'teki gibi oluşturulan:

$$\{S_n(\omega)\}_{n:=s}^{n+s+1}$$

şeklindeki fonksiyon dizileri olacaktır. Önceden de vurgulandığı gibi, $\mathbb{F} \coloneqq \mathbb{R}$ ise, üsteki gibi tanımlanan fonksiyon serisi "gerçel (değişkenli) fonksiyon serisi" ve $\mathbb{F} \coloneqq \mathbb{C}$ ise, üsteki gibi tanımlanan fonksiyon serisi de "kompleks (değişkenli) fonksiyon serisi" özel adlarıyla sıkça anılır.

2.1.26 Tanım. Verilen $\mathbf{I} \subset \mathbb{F}$ gibi kümesi üzerinde tanımlı olan $f_n(\omega)$ gibi bir fonksiyon dizisi verisin. Bu fonksiyon dizisinin genel terim olduğu bir fonksiyon serisi verilsin. Eğer, bu serinin $\{S_n(\omega)\}_s$ şeklindeki kısmı toplamlar dizisi yakınsak ise, $\sum_{n=s}^{\infty} f_n(\omega)$ fonksiyon serisine (**I** kümesi üzerinde) yakınsak bir (fonksiyon) serisi adı verilir veya kısaca yakınsaktır denir (Boas 1954).

Kolaylık sağlaması açısından, Tanım 2.1.26 ile vurgulanan yakınsak herhangi bir fonksiyon serisinin kısmı toplamlar dizisini $\{S_n(\omega)\}_1$ şeklindeki gibi bir fonksiyon dizisi olarak düşünelim. Bu durumda, ilgili fonksiyon dizisi her $\omega \in \mathbf{I}$ için yakınsak olup,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = s(\omega)$$

şeklindeki gibi **I** kümesinde tanımlı olan bir $s(\omega)$ gibi bir fonksiyon söz konusudur ve yakınsamanın bir sonucu olarak da,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega) = s(\omega)$$

şeklindeki gibi bir yazım kullanılır.

Ayrıca, ilgili serinin "kalan terimler toplamı" olarak adlandırılan ve genellikle $K_n(\omega)$ ile gösterilen;

$$K_n(\omega) = f_{n+1}(\omega) + f_{n+1}(\omega) + f_{n+2}(\omega) + \cdots \tag{2.14}$$

şeklindeki gibi bir fonksiyon serisidir.

Ve, özellikle;

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_n(\omega) = \sum_{j=1}^{n} f_n(\omega) + \sum_{j=n+1}^{\infty} f_n(\omega)$$

veya

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_n(\omega) = S_n(\omega) + K_n(\omega)$$

ilişkiler açık olup ve

$$s(\omega) - \lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} [s(\omega) - S_n(\omega)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} K_n(\omega)$$

şeklindeki gibi ilişkinin doğal bir sonucu olarak, her $\omega \in \mathbf{I}$ sayısı için, (2.14) formundaki kalan terimleri ifade eden $K_n(\omega)$ fonksiyon dizisi de sıfıra yakınsayan bir dizi olacaktır.

2.1.27 Tanım. $\mathbf{I} \subset \mathbb{F}$ gibi bir küme üzerinde verilen bir fonksiyon serisinin kısmı toplamlar dizisi düzgün yakınsak ise, ilgili fonksiyon serisine (**I** kümesi üzerinde) düzgün yakınsak bir seri veya kısaca düzgün yakınsaktır denir (Boas 1954).

2.1.5 Teorem. $\mathbf{I} \subset \mathbb{F}$ gibi bir küme üzerinde verilen bir fonksiyon serisinin $s(\omega)$ gibi bir fonksiyona yakınsaması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde ve her bir $\omega \in \mathbf{I}$ olduğunda öyle bir $N \coloneqq N(\omega;\varepsilon) \in \mathbb{N}_s$ sayısı için

$$|S_n(\omega) - s(\omega)| = |K_n(\omega)| < \varepsilon$$

dır (Boas 1954, Lebedev 1965).

2.1.6 Teorem. $\mathbf{I} \subset \mathbb{F}$ gibi bir küme üzerinde verilen bir fonksiyon serisinin $s(\omega)$ gibi bir fonksiyona düzgün yakınsaması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde öyle bir $N \coloneqq N(\varepsilon) \in \mathbb{N}_1$ sayısı vardır öyle ki her $\omega \in \mathbf{I}$ ve her $n \geq N$ için

$$|S_n(\omega) - s(\omega)| = |K_n(\omega)| < \varepsilon$$

dır (Boas 1954).

Sayı serileriyle ilgili bilgilendirmeler yaparken, özellikle vurguladığımız gibi, ilgili "kısmı toplamlar dizileri" için istenen limit belirlemesinin her zaman kolay bir iş olmadığı belirtmiştik. Doğal olarak, böylesi bir araştırmanın, gerçel fonksiyon serileri ve özellikle kompleks fonksiyon serilerinin kısmı toplamlar dizileri için hiç de kolay bir iş olamayacağı aşikar bir sonuçtur. Bu gibi araştırmalar açısından, ilgili fonksiyon serilerinin yakınsaklık ve özellikle düzgün yakınsaklık durumlarının araştırması için oldukça önemli olan ve literatürde de Weierstrass M Kriteri (Testi) olarak bilinen teoremi ve ardından da bazı örneklendirmeleri sunalım (Boas 1954, Lebedev 1965).

2.1.7 Teorem. $\mathbf{I} \subset \mathbb{F}$ gibi bir küme üzerinde verilen $f_n(\omega)$ gibi genel terimli bir fonksiyon serisi verilsin. Eğer, her $\omega \in \mathbf{I}$ için $|f_n(\omega)| \leq c_n$ (pozitif terimli) gerçel bir sayı dizisi var ve $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sayı serisi de yakınsak ise, $\sum_{n=s}^{\infty} f_n(\omega)$ fonksiyon serisi (**I** üzerinde) düzgün yakınsaktır (Boas 1954).

2.1.2 Örnek. $\mathbb{C}$ düzleminin $\mathbf{I} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\} \subset \mathbb{C}$ gibi bir halka bölgesi göz önüne alındığında, her $z \in \mathbf{I}$ için,

$$\left|\left(\frac{z-2i}{z-7i}\right)^n\right| = \left|\frac{z-2i}{z-7i}\right|^n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n =: c_n$$

olduğundan dolayı, Örnek 2.1.1 ve ilgili (2.13) sonucu gereğince, aşağıda verilen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-2i}{z-7i}\right)^n \qquad (2.15)$$

kompleks fonksiyon serisi modülce yakınsak olup, ve, doğal olarak, Teorem 2.1.7, yani M-Testi gereğince, (2.19) ile verilen kompleks fonksiyon serisi, verilen **I** kümesi üzerinde düzgün yakınsak olan bir seri olur.

2.1.8 Teorem. **I** $\subset \mathbb{F}$ gibi verilen bir küme üzerinde $f_n(\omega)$ genel terimli bir $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ fonksiyon serisi verilsin. **I** kümesi üzerinde ve her bir n $\in \mathbb{N}_1$ için $f_n(\omega)$ fonksiyonları türevlenebilir ve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ fonksiyon serisi de düzgün yakınsak ise, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega)$ fonksiyon serisi (ω bağımsız değişkenine göre) terim terime türevlenebilirdir (Boas 1954).

2.1.28 Tanım. $\{\omega_n\}_s$ bir sayısı serisi olmak üzere, $W_n(\omega) = (\omega - \omega_0)^n \omega_n$ genel terimli fonksiyon serilerine kuvvet serisi adı verilir (Boas 1954).

Teorem 2.1.4 gereğince, (2.12) ile belirtilen limitler, Tanım 2.1.28 tanımında vurgulanan kuvvet serileri için göz önüne alındığında;

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{W_{n+1}(\omega)}{W_n(\omega)} \right| < 1 \qquad (2.16)$$

veya

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|W_n(\omega)|} < 1 \qquad (2.17)$$

koşullarını sağlayan kümeler,

$$\sum_{n=1}^{\infty} W_n(\omega) \quad (W_n(\omega) = (\omega - \omega_0)^n \omega_n)$$

gibi fonksiyon serilerinin, yani kuvvet serilerinin mutlak (veya modülce) yakınsaklık olduğu bölgeleri hakkında bilgi verecektir.

2.1.29 Tanım. $\varphi := \varphi(\omega)$ gibi bir ω bağımsız değişkenli fonksiyonu $\omega = \omega_0$ gibi bir noktanın en az bir komşuluğunda her mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. O zaman, aşağıdaki gibi verilen:

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega_0) + \varphi'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \frac{\varphi''(\omega_0)}{2!}(\omega - \omega_0)^2$$

$$+ \ \ldots \ + \frac{\varphi^{(j)}(\omega_0)}{j!}(\omega - \omega_0)^j + \cdots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(j)}(\omega_0)}{j!}(\omega - \omega_0)^j \qquad (2.18)$$

şeklindeki kuvvet serisine, φ fonksiyonunun $\omega = \omega_0$ noktasındaki Taylor seri açılımı adı verilir.

Özellikle, (2.18)'de verilen ilgili kuvvet serisinde, eğer $\omega_0 = 0$ seçilirse, elde edilen fonksiyon serisi:

$$\varphi(\omega) = \varphi(0) + \varphi'(0)\omega + \frac{\varphi'(0)}{2!}\omega^2 + \cdots + \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}\omega^j + \cdots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}\omega^j \qquad (2.19)$$

şeklindeki gibi bir kuvvet serisi olacaktır. Bu gibi fonksiyon serilerine de, φ fonksiyonun fonksiyonunun $\omega_0 = 0$ noktasındaki Taylor seri açılımı veya MacLaurin seri açılımı adı verilir (Boas 1954).

Bilindiği üzere, hem (2.16)'da hem de (2.17)'de geçen $\varphi^{(j)}(\omega)$ gösterimi,

$$\varphi^{(j)}(\omega) = \frac{d^j\varphi}{d\omega^j} \quad (j \in \mathbb{N}_0)$$

şeklindeki j. mertebeden bilenen adi türevdir.

2.1.3 Örnek.

$$\varphi \coloneqq \varphi(\omega) = \frac{1}{1-\omega}$$

şeklideki gibi verilen ω bağımsız (gerçel veya kompleks bağımsız) değişkenli φ fonksiyonu $\omega_0 = 0$ gibi bir noktada, her $j \in \mathbb{N}_0$ için;

$$\frac{d^j}{d\omega^j}\big(\varphi(\omega)\big) = \frac{j!}{(1-\omega)^{j+1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^j}{d\omega^j}\big(\varphi(\omega)\big)\Big|_{\omega_0:=0} = j!$$

olup, bu türevlere ilişkin hesaplamalar (2.19) ile verilmiş olan kuvvet serisinde kullanılırsa,

$$\varphi(\omega) \coloneqq \frac{1}{1-\omega}$$
$$= 1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \cdots + \omega^n + \cdots \qquad (2.20)$$

şeklindeki gibi bir kuvvet serisi elde edilir.

2.1.4 Örnek. Örnek 2.1.19 ile verilen (2.20)'deki kuvvet serisinde $\omega \coloneqq -z$ gibi bir seçim ve ardından da elde edilen kompleks seri z ile çarpılırsa;

$$\frac{z}{1+z} = z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 + \cdots + (-1)^n z^{n+1} + \cdots \qquad (2.21)$$

şeklindeki gibi olan ve

$$\phi(z) = \frac{z}{1+z}$$

ile ifade edilen bir z (bağımsız) kompleks değişkenli fonksiyonunun Maclaurin seri açılımını ilişkin kuvvet serisi kolayca elde edilir.

Hem Örnek 2.1.3 hem de Örnek 2.1.4 örneklerinde geçen iki özel kuvvet serileri literatür açısından oldukça önemli iki fonksiyon serisidir. Her ikisi için, Teorem 2.15, Teorem 2.1.6 ve Teorem 2.1.7 ile verilen temel teoremler yardımıyla, hem yakınsaklık ve düzgün yakınsaklık incelemeleri için gerekli detaylara girilebilir. Özellikle, (2.21) ile verilen kompleks değişkenli kuvvet serini ifade eden:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}z^{n+1} \tag{2.22}$$

şeklindeki fonksiyon serisi için, Teorem 2.1.14 ile verilen (2.12) kriterlerinin temel sonuçları olan (2.16) veya (2.17)'de belirtilen araştırmaları göz önüne alınırsa, modülce yakınsaklık bölgesi olan küme kolayca elde edilir. Yine de, (2.17) ile verilen limiti göz önüne alırsak:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|(-1)^{n+1}z^{n+1}|} &= \lim_{n\to\infty}|z|^{1+1/n}\\ &= |z|\\ &< 1\end{aligned}$$

eşitsizliği gereğince; (2.21), yani (2.22) ile verilen kompleks fonksiyon serisi için $\mathbb{U}$ açık birim diskinde yakınsak olacaktır. Aynı zamanda,

$$|z| \leq h < 1$$

şeklindeki durum, Teorem 2.1.7 ile verilen Weiersstrass M-testi bu sefer de kompleks fonksiyon serisi için göz önüne alındığında, (2.22) ile verilen kompleks fonksiyon serisinin modülce yakınsak, dolayısıyla, düzgün yakınsak olduğu kolayca görülür. O halde, Teorem 2.1.8 gereğince; (2.22) ile verilen fonksiyon serisi terim terime türevlenebilirdir. Dolayısıyla,

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{1+z}\right) = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}z^{n+1}\right)$$

olup ve

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{d}{dz}((-1)^{n+1}z^{n+1})\right\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^{n+1}z^n$$

şeklindeki gibi bir kompleks seri elde edilir.

2.2 Üstel Fonksiyonlar ve İlgili Bilgiler

Giriş bölümünde de belirtiğimiz gibi, bu tez çalışmasının temel amacı gerçel değişkenli (parametreli) üstel fonksiyonlarının kompleks değişkenli (parametreli) fonksiyon formaları ile ilgili olabilecek bazı araştırmalar üzerine odaklanmak olacağından dolayı, bu bilgiler çok temel bilgiler içerse de, bu özel iki tip fonksiyon hakkında çok temel olan bazı bilgilendirmeleri hatırlatmanın yerinde olacağı düşünülmektedir. Bu açıdan, temel fonksiyonlarından biri olan bu üstel (exponential) fonksiyonların öncelikli konumda olan gerçel (reel) bağımsız değişkenli fonksiyonlar tipi ele alınacak ve, ardından da, kompleks değişkenli üstel fonksiyonlara ve ilgili bazı gerekli bilgilendirmelere yön verilecektir.

2.2.1 Tanım. $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere, ω (gerçel veya kompleks) bağımsız değişken olmak üzere, a-tabalı üstel fonksiyon,

$$f(\omega) = a^{\omega}$$

şeklinde tanımlanır.

Klasik analiz derslerinde, genellikle, Tanım 2.2.1'de $\omega \coloneqq x$ gibi bir bağımsız değişkenin seçilmesi sonucu "gerçel değişkenli üstel fonksiyon" ve $\omega \coloneqq z$ gibi bir bağımsız değişkenin seçilmesi sonucu da "kompleks değişkenli üstel fonksiyon" olarak sıkça karşılaşılan temel üstel fonksiyonların en genel hali elde edilir.

Üstteki gibi hatırlatılan genel üstel formlarda, eğer $a \coloneqq e$ şeklindeki gibi bir seçim göz önüne alınırsa,

$$f(\omega) = e^{\omega}$$

şeklindeki gibi özel anlam taşıyan ve $e \approx 2{,}718281\ldots$ gibi bir irrasyonel sayı tabanlı olan bu özel üstel fonksiyonu elde edilir. Bilindiği gibi, bu üstel fonksiyona matematik literatüründe "doğal üstel fonksiyon" veya "exponential fonksiyon" adıyla bilinir ve genellikle

$$f(\omega) = exp(\omega)$$

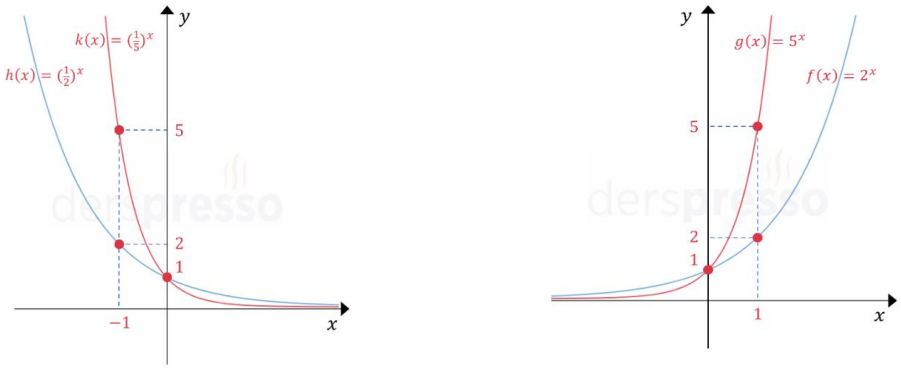
şeklindeki gibi bir evrensel gösterimle ifade edilir.
Doğal olarak,

$$f(x) = a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \coloneqq (0, \infty)$$

şeklindeki gerçel (bağımsız) değişkenli fonksiyonu, a pozitif gerçel sayısının:

$$0 < a < 1 \quad \text{ve} \quad a > 1$$

şeklindeki gibi iki zorunlu olan genel durumu ile $\mathbb{R}^2$ uzayında sıkça karşılaşılır. İlgili koşular altında, bu $y = f(x)$ üstel (gerçel bağımsız değişkenli) fonksiyonlarına ilişkin bazı grafikler aşağıda sunulmuştur.



Şekil 2.2.1 Gerçel değişkenli üstel fonksiyonlarına ilişkin bazı grafikler

Yukarıdaki bilgiler ışığında, ilgili gerçel değişkenli üstel fonksiyon birebir örten bir fonksiyon olduğundan dolayı, elbette ki, $\mathbb{R}^+$ gibi bir küme üzerinde tanımlı ve ilgili üstel fonksiyonun ters fonksiyonu konumunda olan bir fonksiyondan da söz edilebilmektedir. Bilindiği gibi, bu (gerçel değişkenli) ters fonksiyon da matematik literatüründe "logaritma fonksiyonu" olarak adlandırılan ve aşağıdaki gibi tanımlanan fonksiyondur.

2.2.2 Tanım. $a > 0$ ve $a \neq 1$ olmak üzere, ω (gerçel veya kompleks) bağımsız değişken olmak üzere, a-tabalı üstel fonksiyonun:

$$f(\omega) = a^{\omega}$$

şeklindeki fonksiyonun tersi olan fonksiyon:

$$f^{-1}(x) = \log_a x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

şeklindeki gibi gösterilerek tanımlanan ve "a tabanına göre logaritma x" diye okunan fonksiyondur. Doğal tabanlı olarak bilinen ve

$$f^{-1}(x) = \log_e x \equiv \ln x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

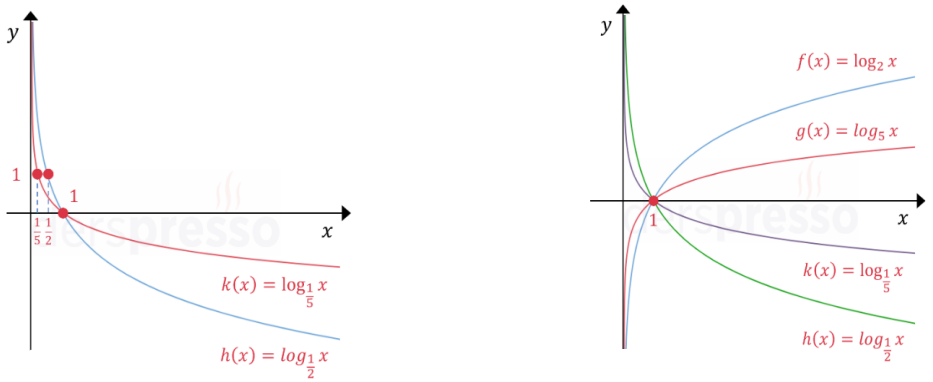
şeklinde gösterilen x-gerçel (bağımsız) değişkenli bu fonksiyon da, $f(x) = \mathrm{e}^x$ exponential fonksiyonunun bilindik tersidir. Yukarıda verilen tanımlamaların ışığında, aşağıda verilen ilişkiler kolayca görülebilir:

$$y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a y \tag{2.23}$$

ve, doğal olarak,

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y \tag{2.24}$$

Yine, çeşitli tabanlara göre, aşağıdaki gibi, ilgili özel fonksiyonlara ilişkin çeşitli grafikler de sunulmuştur:



Şekil 2.2.2 Gerçek değişkenli logaritma fonksiyonlarına ilişkin bazı grafikler

Tanım 2.1.10, Tanım 2.1.11 ile Şekil 2.1.1 ve Şekil 2.1.2 grafiklerinin ışığında, verilen bilgiler ışığında, sadece e-tabanlı üstel ve bunun tersi olan logaritma fonksiyonlarına ilişkin çok temel olan bazı temel bilgilendirmeler, aşağıdaki gibi önermeler şeklinde sunulmuştur. Onlar için, (2.23) ve (2.24) ile verilen özel ilişkiler bazı kolaylık sağlayacaktır.

2.2.1 Teorem. $f(x) = e^x$ üstel fonksiyonu için, aşağıda verilenler daima doğrudur:

i) $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ dır.

ii) $f(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ kümesinde süreklidir.

iii) $f(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}$'de türevlenebilirdir ve bu da $f'(x) = e^x$ şeklindedir.

iv) Her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) > 0$ olduğundan dolayı, $f(x)$ fonksiyonu ($\mathbb{R}$'de) artandır.

2.2.2 Teorem. $u = u(x) : \mathcal{A} \subset \mathbb{R} \to \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = e^{u(x)}$ fonksiyonu için aşağıda verilenler daima doğrudur:

i) $f(x) : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ şeklindeki gibi bir fonksiyondur.

ii) $u(x)$ fonksiyonu sürekli olduğunda, $f(x)$ fonksiyonu da sürekli olur.

iii) $u(x)$ fonksiyonu türevlenebilir olduğunda, $f(x)$ fonksiyonu da türevlenebilirdir ve bu da $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ şeklindedir.

iv) $u(x)$ fonksiyonu artan olduğunda, $f(x)$ fonksiyonu da artan olur.

2.2.3 Teorem. $f(x) = lnx$ fonksiyonu için, aşağıda verilenler daima doğrudur:

i) $f(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dır.

ii) $f(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ kümesinde süreklidir.

iii) $f(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$'da türevlenebilirdir ve bu da $f'(x) = \frac{1}{x}$ şeklindedir.

iv) Her $x \in \mathbb{R}^+$ için $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ olduğundan dolayı, $f(x)$ fonksiyonu da ($\mathbb{R}^+$'da) artandır.

2.2.4 Teorem. $u = u(x) : \mathcal{A} = \{x : u(x) > 0\} \subset \mathbb{R} \to \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f(x) = \ln(u)$ fonksiyonu için aşağıda verilenler daima doğrudur:

i) $f(x) : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ şeklindeki gibi bir fonksiyondur.

ii) $u(x)$ fonksiyonu $\mathcal{A}$ gibi bir kümede sürekli olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu da $\mathcal{A}$'da sürekli olur.

iii) $u(x)$ fonksiyonu $\mathcal{A}$'da türevlenebilir olduğundan, $f(x)$ fonksiyonu da $\mathcal{A}$'da türevlenebilirdir ve $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ şeklindedir.

iv) $u(x)$ fonksiyonu $\mathcal{A}$'da artan olduğunda, $f(x)$ fonksiyonu da $\mathcal{A}$'da artan olur.

Yukarıdaki bilgiler ve kompleks fonksiyonlara özgü olan z bağımsız değişkeninin $z = x + iy$ şeklindeki gerçel x ve y değişkenleri ile olan ilişkiler göz önüne alındığın-da, doğal olarak, kompleks z-bağımsız değişkenli üstel fonksiyonun ve bunun tersinin dizayn edilmesi kaçınılmaz bir gerçektir. Özellikle, gerçel değişkenli $y = f(x)$ gibi fonksiyonlarına ilişkin çeşitli geometrik ilişkiler $\mathbb{R}^2$ uzayında hem x hem de y

değişkenlerini içerek şekilde aynı uzayda (düzlemde) gerçekleştirilir. Olası çeşitli geometrik yapıların incelenmesi veya oluşturulması açısından, kompleks değişkenli $w = f(z)$ şeklindeki bir gösteriminin belirleyeceği kompleks fonksiyonun olası geometrik ilişkileri $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ gibi iki farklı uzaylar arasındaki hem z hem de w değişkeni ile birlikte dikkate alınması bir zorunluluktur. Bundan dolayı, bu oluşturulacak olan ilgili kompleks değişkenli fonksiyonlar için, kompleks dönüşümler kapsamında durumunun göz önüne alınması gerekecektir.

Kısacası, Tanım 2.1.1 ile sunulan z gibi kompleks ifadesin bağımsız değişken olarak seçilmesi durumunda $z = x + iy$ gibi genel tanımlama durumu, kompleks w bağımlı değişkeni için de zorunluluk hallerinde, $w = u + iv$ şeklindeki gibi farklı bir değişken formunu alacaktır.

O halde,

$$\begin{aligned} u + iv &= w \\ &= f(z) \\ &= f(x + iy) \\ &= u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned} \tag{2.25}$$

gibi zorunlu ilişkiler gereği, ilgili kompleks (değişkenli) dönüşüm ile doğal olarak bunun tersi konumunda olan (kompleks) döşüm arasında;

$$\Phi : \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad \text{ve} \quad \Phi^{-1} : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = v(u, v) \end{cases} \tag{2.26}$$

gibi denk konumda olan ilişkiler de söz konusu olacaktır.

Hem gerçel hem de kompleks (bağımsız) değişkenli fonksiyonlar veya dönüşümler ile ilgili olabilecek daha detaylı bilgiler için, Lebedev (1965), Abramowitz and Stegun

(1972), Olver *et al.* (2010) ve Wang and Guo (2019) eserleri oldukça kapsamlı kaynaklardır.

Kompleks (z-bağımsız) değişkenli hem (kompleks) üstel fonksiyonlar hem de (kompleks) dönüşümler olarak, e-tabanına göre düşünülen kompleks (değişkenli) exponential fonksiyonlar (veya kompleks dönüşümler) göz önüne alınır: Gerekli bazı temel bilgilendirmelere yapmak için, kompleks üstel fonksiyonu öncelikle hatırlatalım.

2.2.3 Tanım. $z = x + iy$ olmak üzere, z-bağımsız değişkenli üstel (exponential) kompleks fonksiyon:

$$f(z) = e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\} \tag{2.27}$$

şeklinde gösterilir ve

$$e^z = e^x[cosy + isiny] \tag{2.28}$$

şeklinde tanımlanır.

Özellikle, her $m \in \mathbb{Z}$ tamsayı için, yukarıda geçen en yalın formdaki sinüs ve cosinüs ifadelerinin 1-1 olmadıklarını ve bu gibi sinusoidlar için de $2m\pi$ sayılarının birer periyot oluşturdukları ve (2.28)'de geçen ilgili ifadeler için de,

$$cosy + isiny = \cos(y + 2m\pi) + i\sin(y + 2m\pi)$$

şeklindeki eşitlikler göz önüne alındığında, (2.27) ve (2.8)'de verilen bilgiler yardımıyla;

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + iy) \\ &= e^{x+iy} \\ &= e^x[cosy + isiny] \\ &= e^x[\cos(y + 2m\pi) + i\sin(y + 2m\pi)] \end{aligned} \tag{2.29}$$

şeklindeki 1-1'lik bir yapının olamayacağı ve böylesi bir durumda da "çok değerli fonksiyon" adıyla anılan ilgili bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu söz konusu olacaktır. Elbette ki, (2.29) ile verilen üstel kompleks fonksiyonun tersi konumunda olan ilgili kompleks logaritma fonksiyon için 1-1 olacak şekildeki bir kısıtlama kaçınılmaz olacaktır.

Şimdi, öncelikli olarak, ilgili üstel kompleks fonksiyon ile ilgili olan bazı temel önermeler aşağıdaki gibi verilmiştir. Her birinin ispatı için, z gibi verilen ilgili kompleks ifadelerin $z = x + iy$ şeklindeki ifadeleri göz önüne alınması ve ardından da doğru olan cebirsel işlemlerin yardımıyla, her birinin ispatı kolayca elde edilebilir. Daha genel bilgileri ve vurgulanan çeşitli cebirsel işlemleri içeren çeşitli bilgiler için Boas (1954) ve Alfors (1966) eserine odaklanılabilir.

2.2.4 Teorem. Her $z, w \in \mathbb{C}$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için, aşağıda verilenlerin önermelerin her biri daima doğrudur:

i) $exp(z+w) = exp(z)\, exp(w)$ dır.

ii) $exp(z) \neq 0$ dır.

iii) $|exp(i\alpha)| = 1$ dır.

iv) $|exp(z)| = exp(\Re e(z))$ dır.

v) $exp(z) = 1 \iff z = 2m\pi i \quad (m \in \mathbb{Z})$ dır.

vi) $arg\big(exp(z)\big) = \Im m(z) + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$ dır.

vii) $peryot\big(exp(z)\big) = 2m\pi i$ dır $(m \in \mathbb{Z})$ dır.

viii) $exp(z) = exp(w) \iff z - w = 2m\pi i \; (m \in \mathbb{Z})$ dır.

Tanım 2.2.3 ile Teorem 2.2.1 arasındaki temel olan cebirsel işlemler dikkate alındığında, (2.29) ile vurgulanan periyodiklik durumunun bir sonucu olarak, x ve y gerçel değişkenli arasında, her $y \in \mathbb{R}$ için, eğer

$$-\infty < x < \infty \quad \text{ve} \quad y_0 < y \leq y_0 + 2\pi \tag{2.30}$$

şeklindeki gibi kısıtlamalar göz önüne alınırsa, 1-1'lik şartı sağlanarak çok değerlilik ortadan kaldırılır. Bu gibi sonsuz sayıda oluşturulabilen her bir şerit şeklindeki kümeler üzerinde, (2.27) şeklinde verilmiş ve (2.28) şeklinde de tanımlanmış olan kompleks üstel fonksiyonun tersi de tanımlanmış olur. Elbette ki, gerekli olan 1-1'lik koşulu, y için verilen (2.30) koşulunun dışına da çıkılabilir. Örneğin,

$$-\infty < x < \infty \quad \text{ve} \quad y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$$

gibi kısıtlaması da söz konusu olabilir. Daha detaylı bilgi için; Boas (1954), Ahlfors (1966) ve Lebedev (1965) eserleri oldukça kapsamlı bilgiler içermektedir. Bilgilendirmemizi, aşağıdaki temel bilgilendirmeyle devam ettirelim.

2.2.4 Tanım. $z = x + iy$ olmak üzere, $f(z) = e^z$ üstel fonksiyonunu 1-1 yapan her bir kümeye Esas Bölge adı verilir ve bu küme de EB ile gösterilirse, bu küme de

$$\{\, z = x + iy : \; -\infty < x < \infty \;\; ve \;\; y_0 < y \leq y_0 + 2\pi \;\; (y_0 \in \mathbb{R}) \,\}$$

şeklindeki gibi bir kümedir (Boas 1954, Ahlfors 1966).

Dikkat edilirse, yukarıdaki tanımlanan küme çeşitli şekillerde tanımlanır. Eğer, ilgili $y_0 \in \mathbb{R}$ sayısının çeşitli şekillerdeki her bir seçimi göz önüne alınırsa,

$$\mathrm{EB} \coloneqq \mathrm{EB}_{y_0} \; (y_0 \in \mathbb{R})$$

şeklindeki genişliği 2π br yatay şeritler şeklinde olan kümeler olacaktır. Doğal olarak, aşağıda oluşturulmuş kümelerin her biri, ilgili exponantial fonksiyonun birer 1-1'lik şartına uygun olan daha özel tipteki kümelerdir:

$$\mathrm{EB}_0 = \{\, z = x + iy : \ -\infty < x < \infty \ \ ve \ \ 0 < y \leq 2\pi \,\},$$

$$\mathrm{EB}_\pi = \{\, z = x + iy : \ -\infty < x < \infty \ \ ve \ \ \pi < y \leq 3\pi \,\},$$

$$\mathrm{EB}_{-\pi} = \{\, z = x + iy : \ -\infty < x < \infty \ \ ve \ \ -\pi < y \leq \pi \,\},$$

$$\mathrm{EB}_{\pi/2} = \{\, z = x + iy : \ -\infty < x < \infty \ \ ve \ \ \pi/2 < y \leq 5\pi/2 \,\},$$

$$\mathrm{EB}_{-\pi/2} = \{\, z = x + iy : \ -\infty < x < \infty \ \ ve \ \ -\pi/2 < y \leq 3\pi/2 \,\},$$

$$\vdots$$

O halde, gerek kompleks fonksiyon gerekse kompleks dönüşüm düşünülsün, (2.29) ile verilen kompleks üstel yapı:

$$w = f(z) = e^z : \mathrm{EB}_{y_0} \to \mathbb{C}$$

şeklindeki gibi 1-1 olan bir fonksiyon (veya dönüşüm) oluşturur. Şimdi, böylesi bir durumun ters kompleks fonksiyon (veya dönüşümü) yapısını oluşturmak için de, öncelikle kompleks logaritma fonksiyonu (veya dönüşümü) için olan gerekli bilgilendirmeleri sunalım.

Yukarıda verilen bilgiler kapsamında, kompleks üstel fonksiyonunun $\mathbb{C}$'de 1-1 olmadığını ve her $z \in \mathbb{C}$ için de $e^z \neq 0$ olduklarını belirtmiştik. Dolayısıyla, $w = u + iv$ olmak üzere, $e^w = z \neq 0$ gibi bir kompleks bir denklem göz önüne alındığında;

$$|e^w| = |z| \quad \text{ve} \quad arg(e^w) = arg(z)$$

olmak zorundadır. O zaman,

$$|e^w| = e^u = |z| \quad \text{ve} \quad arg(e^w) = v = arg(z)$$

olacaktır ve buradan da;

$$e^u = |z| \;\Rightarrow\; u = ln\,|z| \quad ve \quad v = \; arg(z)$$

özel ilişkiler kendini gösterir. O halde,

$$e^w = z \quad \Longrightarrow \quad w = ln|z| + i\,\arg(z)$$

elde edilir.

Yukarıda vurgulanmış olan:

$$ln|z| = log_e\, z$$

bilinen gerçel logaritma olduğu açıktır. Bu yukarıdaki bilgiler sonucu olarak, aşağıdaki tanım kolayca oluşturulabilir.

2.2.5 Tanım. Kompleks değişkenli logaritma fonksiyonu lnz ile gösterilir ve

$$lnz = ln|z| + i\; arg(z) : \; \mathbb{C}^* \to \; \mathbb{C} \tag{2.31}$$

şeklinde tanımlanır (Boas 1954, Ahlfors 1966).

Yukarıdaki tanıma odaklanıldığında,

$$arg(z) = Arg(z) + 2m\pi \quad (z \in \mathbb{C}^* \,;\, m \in \mathbb{Z})$$

ilişkisi gereği, (2.29) ile verilen logaritmanın da kompleks exponential fonksiyon gibi 1-1 olmadığı, yani çok değerli olduğu açıktır. Bu kompleks fonksiyon için de, eğer $arg(z)$ için 2π gibi bir uzunluk kısıtlaması getirilirse; yani, her $\theta_0 \in \mathbb{R}$ için,

$$y_0 \leq arg(z) < y_0 + 2\pi$$

veya

$$y_0 < arg(z) \leq y_0 + 2\pi$$

gibi sınırlandırmaların her biri birer 1-1'lik şart oluşturur. Elbette ki, kompleks logaritma fonksiyonu için de, konulacak olan 1-1'lik şartların sonsuz sayıda olacağı açıktır. Dolayısıyla, birbirinin tersi konumda olacak olan bu kompleks değişkenli fonksiyonlar için, aşağıdaki tanımlama genellikle kabul edilen evrensel tanımdır.

2.2.6 Tanım. Kompleks (bağımsız değişkenli) logaritma fonksiyonu lnz ile gösterilir ve

$$y_0 \leq arg(z) < y_0 + 2\pi \quad (y_0 \in \mathbb{R}) \tag{2.32}$$

koşulu altında,

$$lnz = ln|z| + i\, arg(z) : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \tag{2.33}$$

şeklinde tanımlanır (Boas 1954, Ahlfors 1966).

Belirtilen (2.30) ve (2.34) koşulları ile getirilen kısıtlamalar altında, ilgili kompleks değişkenli fonksiyonlar daima birbirinin tersleri olarak karşılaşılan fonksiyonlar olup, (2.34) ile belirlenen koşul, kompleks logaritma fonksiyonu için dal olarak kabul edilir. Ve, böylece, kompleks logaritma fonksiyonu da iyi tanımlanmış bir fonksiyon haline getirilmiş olunur. Böylesi bir düşünme yoluyla, verilen her kompleks kuvvetler (veya kompleks kuvvet fonksiyonlar); yani, her $z \in \mathbb{C}^*$ ve $w \in \mathbb{C}$ kompleks ifadeler için,

$$z^w \text{ (veya } f(z) = z^w \text{)}$$

şeklindeki gibi kompleks ifadeler, (2.30) ile belirtilen bir dal dikkate alınır ve doğal olarak

$$z^w = e^{wlnz} = e^{w[lnz+iarg(z)]} \tag{2.34}$$

dır.

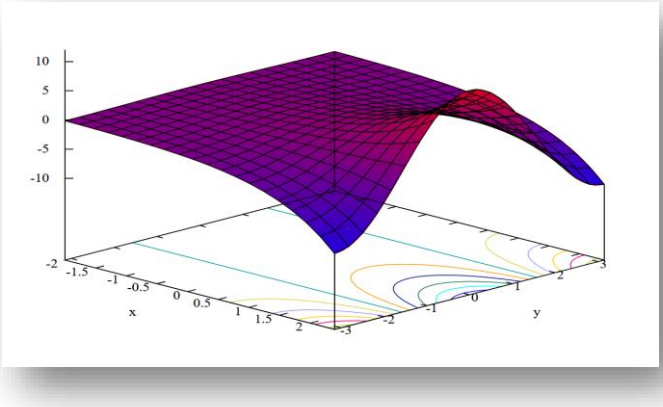
Birbirinin tersi konumunda olan ilgili kompleks değişkenli fonksiyonlar (veya dönüşümler) için;

$$z = x + iy$$

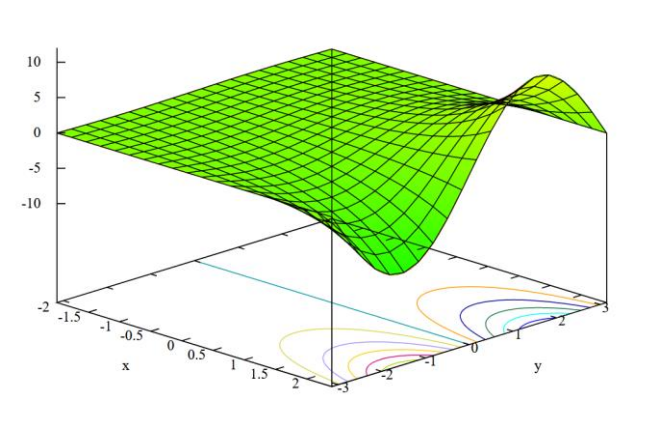
olmak üzere,

$$-3 \leq x \leq 3 \quad \text{ve} \quad -3 \leq y \leq 3$$

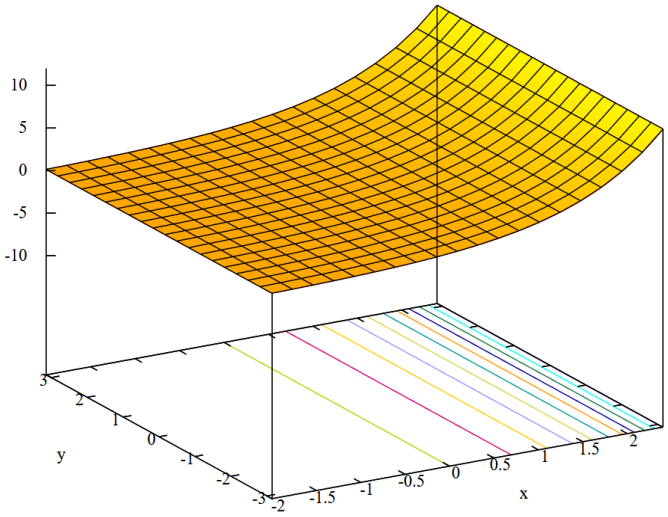
şeklindeki gibi reel ve sanal kısımlara getirilen kısıtlamalar ve bazı bilindik hazır matematiksel programlar yardımıyla oluşturulmuş olan 3D ve 2D boyutlarında bazı özel grafikler (veya geometrik ilişkiler) aşağıdaki gibi örneklendirilmiştir.



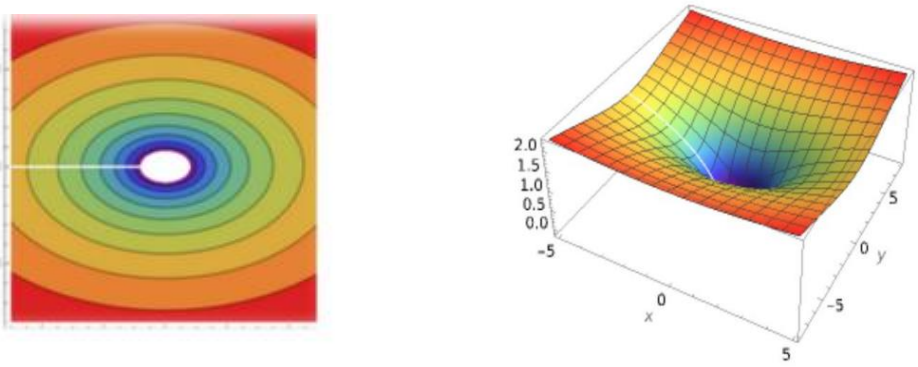
Şekil 2.2.3 Kompleks değişkenli üstel fonksiyonunun reel kısmına ilişkin 2D ve 3D formundaki grafikler



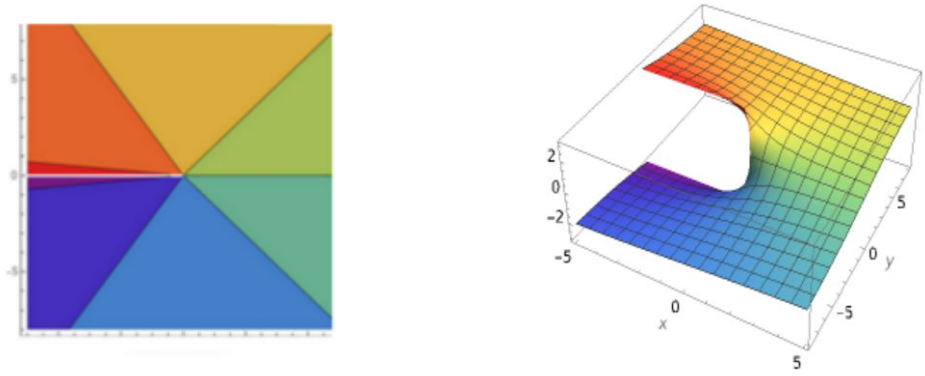
Şekil 2.2.4 Kompleks değişkenli üstel fonksiyonunun sanal kısmına ilişkin 2D ve 3D formundaki grafikler



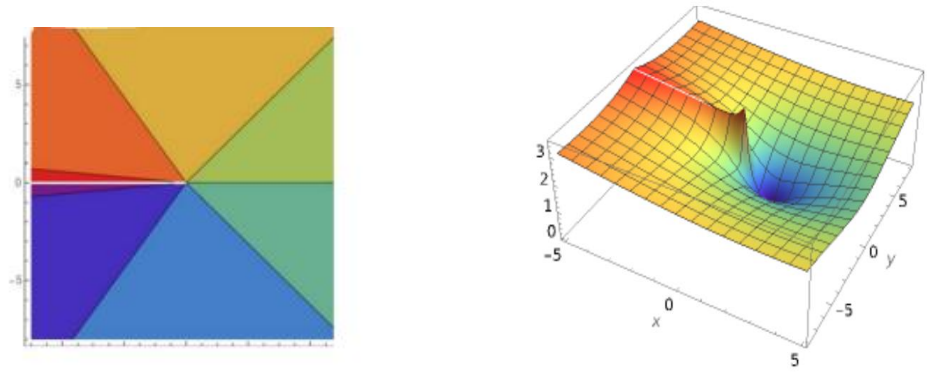
Şekil 2.2.5 Kompleks değişkenli üstel fonksiyonunun modülüne ilişkin 2D ve 3D formundaki grafikler



Şekil 2.2.6 Kompleks değişkenli logaritma fonksiyonunun reel kısmına ilişkin 2D ve 3D formundaki grafikler



Şekil 2.2.7 Kompleks değişkenli logaritma fonksiyonunun sanal kısmına ilişkin 2D ve 3D formundaki grafikler



Şekil 2.2.8 Kompleks değişkenli logaritma fonksiyonunun modülüne ilişkin 2D ve 3D formundaki grafikler

Özellikle, bazı basit cebirsel işlemlerin sonucu olarak, aşağıdaki gibi verilen bazı özel örneklendirmeler kolayca oluşturulabilir.

2.2.1 Örnek. $f(z) = e^z$ ve $f^{-1}(z) = lnz$ kompleks değişkenli fonksiyonları (dönüşümleri) için aşağıda verilen kümeler arasındaki ilişkiler kolayca görülebilir:

$$f : \mathrm{EB}_{-\pi} \rightleftarrows \{ z \in \mathbb{C} : |w| > 0 \} : f^{-1}$$

$$f : \{ z = x_0 + iy : x \in \mathbb{R} \text{ ve } -\pi < y \leq \pi \} \rightleftarrows \{ z \in \mathbb{C} : |w| = e^{x_0} \} : f^{-1}$$

ve

$$f : \{ z = x + iy_0 : x \in \mathbb{R} \text{ ve } -\pi < y \leq \pi \} \rightleftarrows \{ z \in \mathbb{C} : |z| = \arg(z) = y_0 \} : f^{-1}.$$

Son bilgilendirme olarak, Tanım 2.1.11ile sunulan bilgiler ışığında, yukarıda verilen ve birbirinin tersi konumundaki kompleks z-değişkenli fonksiyonların türevlerini de hatırlatalım. Elbette ki, çok iyi bilinen bu ilgili türevle, verilen genel bir $\mathcal{V} \coloneqq \mathcal{V}(z)$ analitik fonksiyonu için de genelleştirilebilinir.

2.2. 1 Teorem. $\varphi \coloneqq \varphi(z) = e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kompleks üstel fonksiyonunu $\mathbb{C}$'nin her noktasında türevlenebilirdir ve

$$\frac{d\varphi}{dz} = \varphi'(z) = e^z$$

dır.

2.2. 2 Teorem. $\varphi \coloneqq \varphi(z) = lnz : \mathcal{A} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} - \{0\} : Argz \neq \pm\pi \} \to \mathbb{C}$ kompleks loğaritma fonksiyonu $\mathcal{A}$'nın her noktasında türevlenebilirdir ve

$$\frac{d\varphi}{dz} = \varphi'(z) = \frac{1}{z}$$

dır.

2.2.2 Örnek. $\varphi(z) = e^z$ kompleks (z-bağımsız) değişkenli üstel fonksiyonu $\mathbb{C}$'de analitik bir fonksiyon olduğundan dolayı, her $j \in \mathbb{N}_0$ için;

$$\frac{d^j}{dz^j}\big(\varphi(z)\big) = e^z \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^j}{dz^j}\big(\varphi(z)\big)\Big|_{z:=0} = 1$$

olduğundan dolayı, Tanım 2.1.19'un özel bir hali olarak verilen (2.23)'tek gibi seri açılımı, yani MacLaurin seri açılımı:

$$\varphi(z) \coloneqq e^z$$

$$= 1 + z + \frac{1}{2!}\, z^2 + \frac{1}{3!}\, z^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\, z^n + \cdots \tag{2.35}$$

şeklindeki gibi bir kuvvet serisi olacaktır. Aynı zamanda, Teorem 2.1.5 ve Teorem 2.1.8 arasında sunulan bilgiler ile (2.16)'da (veya (2.17)'de) verilen kriterler de göz önüne alındığında, (2.35) ile verilen ilgili kompleks kuvvet serisinin $\mathbb{C}$'de yakınsaklık ve düzgün yakınsaklık durumları kolayca görülebilir.

2.2.3 Örnek. $\varphi(z) = ln(1+z)$ kompleks (z-bağımsız) logarithma fonksiyonu $z_0 = 0$ noktasında analitik olduğundan dolayı;

$$\frac{d^0}{dz^0}\big(\varphi(z)\big) = \varphi(z) \;\Longrightarrow\; \varphi(0) = ln1 = 0$$

ve her $j \in \mathbb{N}_1$ için de,

$$\frac{d^j}{dz^j}\big(\varphi(z)\big) = j!\,(-1)^{1+j}(1+z)^{j+1} \;\Longrightarrow\; \frac{d^j}{dz^j}\big(\varphi(z)\big)\Big|_{z:=0} = j!\,(-1)^{1+j}$$

dır. Dolayısıyla, ilgili logaritma fonksiyonun, Tanım 2.1.19'da belirtilen $z_0 = 0$ noktasındaki Taylor seri açılımı da:

$$\varphi(z) = ln(1+z)$$

$$= z - \frac{1}{2}\,z^2 + \frac{1}{3}\,z^3 - \frac{1}{4}\,z^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,z^n + \cdots \tag{2.36}$$

şeklindeki gibi bir kuvvet serisi olacaktır. Ayrıca, Teorem 2.1.5-Teorem 2.1.8 bilgileri ışığında ve (2.16) (veya (2.17)) ile verilen kriterler de göz önüne alındığında, (2.36) ile verilen kompleks kuvvet serisinin;

$$\mathbb{U} = \{\, z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \,\}$$

açık birim diskinde yakınsak ve

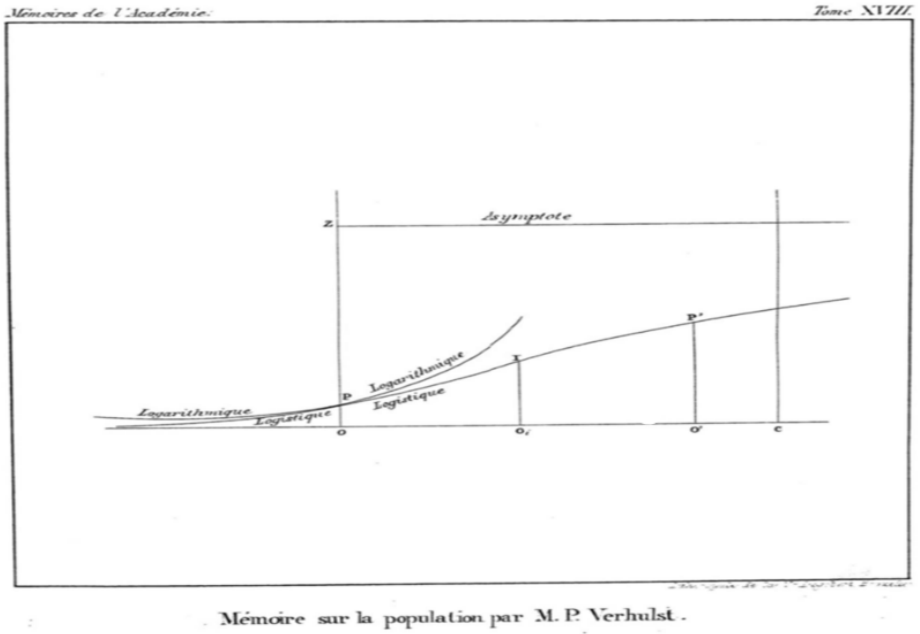
$$\mathbb{U}_q \coloneqq \{\, z \in \mathbb{C} : |z| < q \quad (q < 1) \,\}$$

bölgesinde düzgün yakınsak olduğu da kolayca görülebilir. Bu gibi seriler için, Teorem 2.1.8'in önemini vurgulamıştık.

2.3 Logistik (Sigmoid) Fonksiyonlar ve İlgili Bilgiler

2.3.1 Gerçel parametreli Logistik (Sigmoid) fonksiyonu

Bu tez çalışmasının giriş bölümünde detaylıca vurgulandığı gibi, Lojistik fonksiyon ile ilgili bazı özel bilgilendirmelerle birlikte kapsamlı literatür bilgilendirlmeleri de yapılmıştı. Üstel (exponential) fonksiyonunun yardımıyla tanımlanan gerçel (reel) parametreli (değişkenli) logistik fonksiyonuna (eğrisine) ilişkin ilk çalışmalar, 1838 ile 1847 yılları arasında Pierre François Verhulst tarafından ve Adolphe Quetelet'in rehberliğinde oluşturulan:



Şekil 2.2.9 P. F. Versults'un üstel büyümeye ilişkin teorisinin matematiksel modellemesinin grafiği

şeklindeki üstel büyüme modellemesi bir nüfus artışı modeli için ilk olarak tasarlanmış ve ilgili araştırmanın literatürdeki özel sonuçlarını içeren çalışmalar da, Versults (1938, 1945, 1947) tarafından sunulan temel eserler olarak literatürde yerini almıştır. İlgili araştırmada ileri sürülen teoriler ışığında, ilgili modellemenin matematiksel ifadesi olarak, aşağıdaki gibi tanımlama ile Logistik fonksiyonunun (eğrsinin) (Logistic function (curve)) en genel formunu ifade eden tanımı günümüz araştırmacılarına sunmaktadır.

2.3.1.1 Tanım. Genel parametreli Logistik fonksiyon;

$$\mathbf{L}(x) \equiv \mathbf{L}_{\lambda,\ell}(x_0;\, x) \tag{2.37}$$

şeklinde gösterilir ve

$$\mathbf{L}_{\lambda,\ell}(x_0;\, x) = \frac{\ell}{1+\mathrm{e}^{-\lambda(x-x_0)}} \tag{2.38}$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıda geçen parametreler de;

$$x_0 \in \mathbb{R} \quad , \quad \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \text{ve} \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \qquad (2.39)$$

şeklindeki reel sayılardır.

Yukarıdaki gibi; yani, (2.37) ile gösterilen ve (2.38) ile tanımlana gerçel değişkenli fonksiyon, bazı durumlarada x_0, ℓ ve λ parametreli ve x bağımsız değişkenli olan genel formdaki Lojistik fonksiyon olarak anıldığı gibi, genellikle, x gerçel değişkenli (parametreli) genel Logistik fonksiyon (Logistik eğri) veya Sigmoid fonksiyon olarak da anılır.

Klasik analiz bilgileri yardımıyla, (2.38) ile verilen ilgili fonksiyon (veya eğri) detaylı analizler ileri sürülebilir. Özellikle, eğriye ilişkin grafiksel bilgi açısından, yani, şekilsel olarak S harfini andıran bir grafiği andırdığından dolayı, Sigmoid fonksiyon (eğri) adıyla bilinen, üstel ve kesirsel yapıya sahip olan bu özel fonksiyonda geçen ilgili parametreler açısından;

x_0 : İlgili fonksiyonun grafiğine denk gelen orta noktasının değeri
ℓ : İlgili fonksiyona ilişkin üst (sınır) değeri
k : Lojistik büyüme hızı (veya eğrinin dikliği)

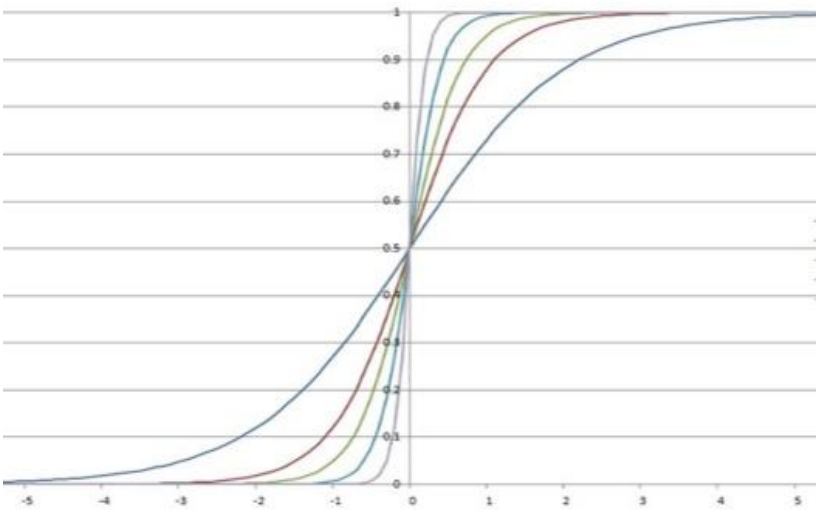
şeklindeki gibi oldukça özel ve önemli anlamları içeren parametrelerin durumlarını da belirtelim.

Özellikle, (2.39)'de belirtilen ilgili parametrelerinin, $x_0 := 0$ ve $\ell := 1$ şeklindeki gibi özel seçimleriyle elde edilen fonksiyonlar literatürde Logistik Fonksiyon veya Sigmoid fonksiyonlar adıyla bilinen özel fonksiyonlardır. Bu tip fonksiyonlar da,

$$s_\lambda(x) := \mathbf{L}_{\lambda,\ell}(0\,;x) = \frac{1}{1+e^{-\lambda x}} \qquad (2.40)$$

şeklinde gösterilen gerçel değişkenli fonksiyonlardır. Bu (2.40) ile verilen fonksiyon için, $-5 \leq x \leq 5$ kısıtlası altında ve λ parametresinin 1, 2, 3, 5 ve 10 reel sayılarının

seçilmesine karşılık gelecek şeklide elde edilecek olan özel logistik fonksiyonlarına ilişkin grafikler aşağıda verilmiş olup, ilgili λ parametresinin büyümesi sonucu oluşan eğrideki diklik kolayca görülebilir.



Şekil 2.2.10 Gerçel parametreli Logistik (Sigmoid) fonksiyonlarına ilişkin bazı grafikler

Aynı zamanda, (2.40)'nin daha özel hali olarak, eğer (2.39)'de verilen ilgili parametre değerlerinin;

$$L \coloneqq 1 \quad , \quad k \coloneqq 1 \quad \text{ve} \quad x_0 \coloneqq 0$$

şeklindeki gibi seçimi sonucu elde edilen özel formdaki fonksiyon da, standart Logistik Fonksiyon (Eğri) (Standard Logistic Function (Curve)) adıyla bilinir. Bu gerçel değişkenli fonksiyon, yani standart Sigmoid fonksiyonu, genellikle, $s(x)$ notasyonu ile gösterilen ve

$$s(x) \coloneqq s_1(x) \equiv \mathbf{L}_{1,1}(0;\ x)$$

şeklindeki gibi tanımlanan bu fonksiyon da,

$$s \coloneqq s(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \tag{2.41}$$

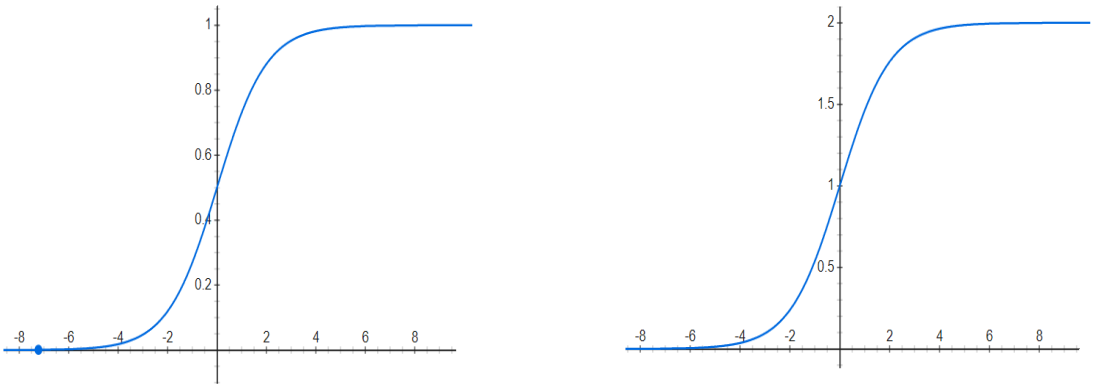
şeklindeki bir elementer fonksiyondur. Bu fonksiyon yardımıyla elde edilen ve modifiye edilmiş Sigmoid fonksiyonu da Modified Sigmoid fonksiyonu olarak bilenen ve genellikle $ms(x)$ ile gösterilen bu fonkisyon ise,

$$ms(x) \coloneqq 2s(x) = \frac{2}{1+e^{-x}} \tag{2.42}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyondur. Özellikle, matematik literatüründe, çeşitli elementer fonksiyonlarla olan kapsamlaı ilişkileri gereği; basit bazı elementer işlemlerin cebirsel sonuçları olarak, (2.41) ve (2.42) ile verilen ilgili özel fonksiyonlar aynı zamanda,

$$y \coloneqq s(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \quad \text{ve} \quad y \coloneqq sm(x) = \frac{2e^x}{1+e^x}$$

şeklinde de ifade edilebilmektedir. Ayrıca, $-8 \leq x \leq 8$ kısıtlaması altında, her iki Sigmoid fonksiyonuna ilişkin grafikler sırasıyla aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.2.11 Gerçel değişkenli standart Sigmoid ve modified Sigmoid fonksiyonlarına ilişkin grafikler

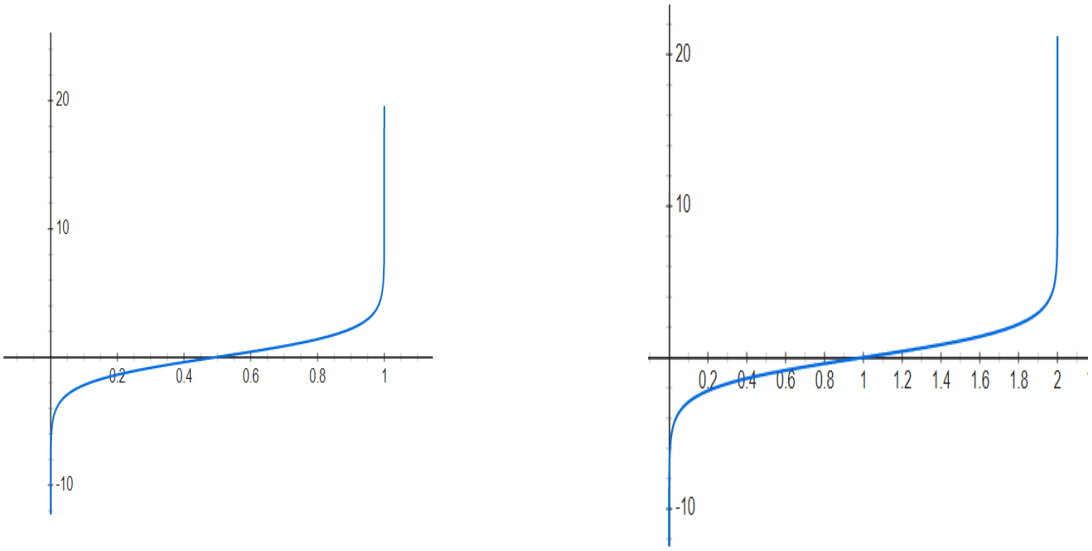
Üstekki bilgilendirmelere zemin oluşturması açısından, klasik analiz bilgilerimiz de göz önüne alındığında, üstteki özel fonksiyon(lar) için, aşağıda sunulan bazı önemli olan genel sonuçlar kolayca ifade edilebilir:

i) $s(x) : \mathbb{R} \to (0,1)$ şeklinde olan bir fonksiyondur.

ii) $s(x)$ fonksiyonunun tersi de,

$$s^{-1}(x) = ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \qquad (2.43)$$

şeklindeki bir fonksiyondur. Özellkle, $s^{-1}(x) : (0,1) \to \mathbb{R}$ şeklinde olan bu gerçel fonksiyon literatürde Logit fonksiyonu olarak anılan özel fonksiyonlardan biridir. Benzeri şekilde, modified Sigmoid fonksiyonunun tersini ifade eden Logit fonksiyonu da kolayca belirlenebilir. Özellikle, $-10 \leq y \leq 20$ kısıtlaması altında, her iki Logit fonksiyonuna ilişkin grafikler sırasıyla aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.2.12 Gerçel değişkenli bazı Logit fonksiyonlarına ilişkin grafikler

iii) Her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$s'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$$

olduğundan dolayı, s fonksiyonu $\mathbb{R}$'de artan bir fonksiyondur. Bu durumda, Şekil 2.2.10 ve Şekil 2.2.11 ile verilen grafiklerden de kolayca görülebilir.

iv)

$$s''(x) = \frac{e^{-x}(1-e^{-x})}{(1+e^{-x})^3} = 0$$

eşitliğinden $x = 0$ noktasınının $s(x)$ fonkksiyonu için bir dönüm noktası konumunda olup, bu durum, Şekil 2.2.10 ve Şekil 2.2.11 ile verilen grafiklerden de kolayca görülmektedir.

v) Her $x \in \mathbb{R}$ için $s(x)$ fonksiyonunun her mertebeden türevi vardır.

vi)

$$s(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, tanh\left(\frac{x}{2}\right) \qquad (2.44)$$

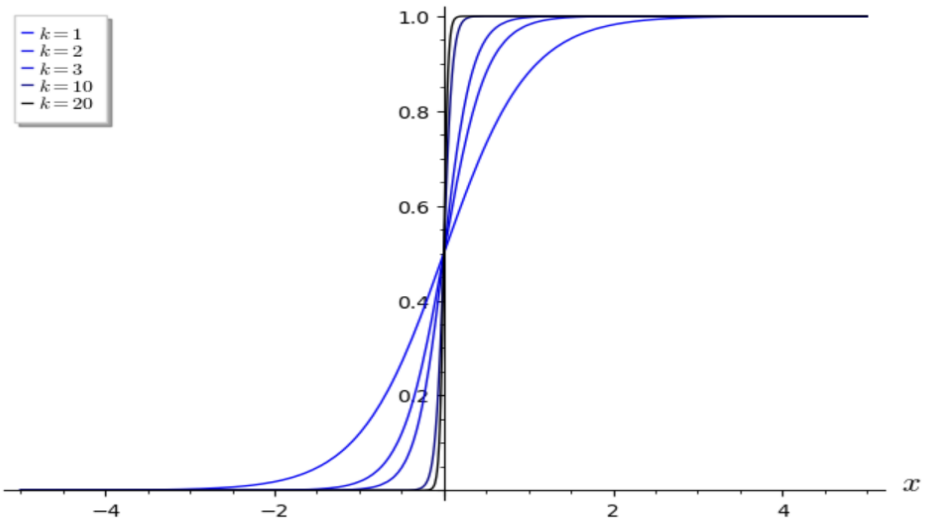
olup, aynı zamanda

$$tanh(x) = 2s(2x) - 1$$

şeklindeki hiperbolik tanjant fonksiyonu ile ilişkileri olan bir fonksiyondur. Aşağıda, Lojistik fonksiyounu ile olan ilişkisi gereği, k parametresinin çeşitli değerlerine göre genliklerin açıkça görüldüğü ve çeşitli bilim alanlarında da sıkça karşılaşılan (2.44) formunun:

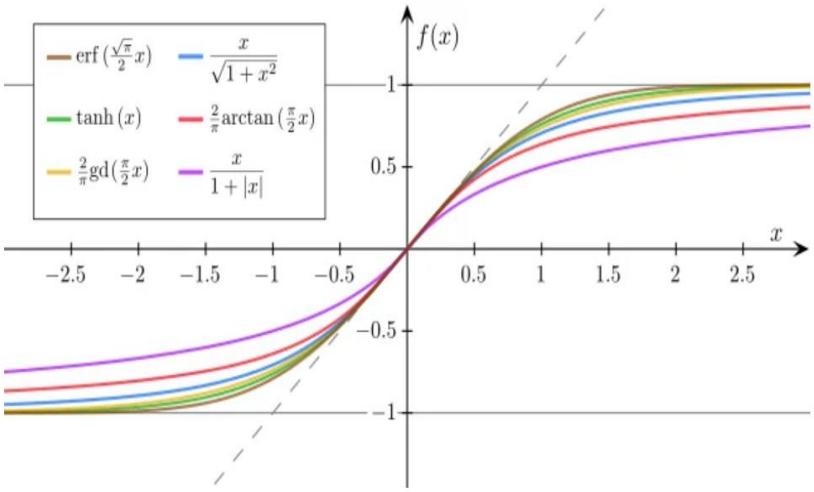
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh(kx)$$

şeklindeki gibi oluşturulmuş (gerçel değişkenli) fonksiyonlarının çeşitli durumlarını içeren bazı grafikler de aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.2.13 Gerçel değişkenli $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh(kx)$ fonksiyonlarına ilişkin bazı grafikler

Aynı zamanda, yine bazı kıstlamalar altında, gerçel değişkenli $s(x)$, yani standart Sigmoid fonksiyonu çeşitli fonksiyonlarla ilişkili olan veya salınımlarıya yakından ilişkilendirilen bazı (elemeter) fonksiyonlar olarak literatürde ve çeşitli kapsamlarda kullanılır (veya tercih edilir). Özellikle, bunlardan bazıları olarak; *erf* (hata fonksiyonu), *arctanjant* fonksiyonu, *Gd* (Gudermannian fonksiyonu) ve diğer bazı kesirsel formadaki gerçel değişkenli fonksiyonlara ilişkin bazı grafikler de aşağıda sunulmuştur.



Şekil 2.2.14 Grçel degişkenli Sigmoid fonksiyonu ile karşılaştıralabilen bazı gerçel değişkenli fonksiyonlar ve grafikleri

vii) $ds/dx = s'$ olduğundan dolayı, doğal olarak, $s' = s(1-s)$ gibi bir diferansiyel denkleminin $s(0) = 1/2$ başlangıç koşulu altındaki çözümü bir s fonksiyondur.

viii) $\int s(x)\,dx = \ln(1+e^x)$ dır. Özellikle, yapay sinir ağlarında (in artificial neural networks), bu fonksiyon (gerçel değişkenli hali olarak) Softplus fonksiyonu da olarak anılır.

ix) Örnek 2.2.2'de (2.35) ile vurgulanan ilgili serinin bilgieleri ışığında, literatürde $E_n(x)$ Euler polinomunu ve B_n de bernoulli sayısını göstermek üzere, $s(x)$ kompleks fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasındaki seri açılımı:

$$s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j E_j(0)}{2j!}\, x^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{1+j}\left(2^{1+j}-1\right)) E_j(0)}{j+1}\, x^j \qquad (2.45)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{408}x^5 - \frac{17}{80640}x^7 + \frac{31}{1451520}x^9 - \cdots$$

şeklinde forma sahip olan ki gibi fonksidyon serisidir. Doğal olarak, kompleks modified Sigmoid fonksiyonunun da MacLaurin seri açılımı da:

$$ms(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{204}x^5 - \frac{17}{403200}x^7 + \cdots \qquad (2.46)$$

şeklindeki gibi bir fonksiyon seri olacaktır. Özellikle, bu özel fonksiyon serisinin de düzgün yakınsaklığı ve düzgün yakınsaklığı, Teorem 2.1.8'in uygulanabilirliği açısından önemli rol oynadığını bilmekteyiz.

2.3.2 Kompleks parametreli Logistik (Sigmoid) fonksiyonu

Tez çalışmasının esas kısmı oluşturacak bu bölümünde, araştırmada temel konumda olan Lojistik (veya Sigmoid) fonksiyonunun kompleks formu, yani kompleks değişkenli (paramtreli) formu göz önüne alınacaktır. Bilimndiği gibi, kompleks değişkeli fonksiyonlarla elementer işlemelerinin yapılması her zaman kolay bir iş değildir. Bu açıdan, bu kompleks değişkenli fonksiyonların bu özel formları, yani kompleks Lojistik fonksiyonu (veya kompleks dönüşümü), z-bağımsız değişkenine göre tanıtılacaktır. Bu tanımlamalarda, Tanım 2.3.1.12'in esas rol oynayacı ve aynı zamanda (2.40)-(2.41) arasında verilen bilgilerin paralelinde, bu özel kompleks fonksiyonlar yeniden tanımlanacaktır.

2.3.2.1 Tanım. Kompleks (değişkenli veya parametreli) Logistik fonksiyonu:

$$\mathbf{L}(z) \equiv \mathbf{L}_{\lambda,\ell}(z_0;\, z) \tag{2.47}$$

şeklinde gösterilir ve

$$\mathbf{L}_{\lambda,\ell}(z_0;\, z) = \frac{\ell}{1+\mathrm{e}^{-\lambda(z-z_0)}} \tag{2.48}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyondur. Yine, burada, kullanılan ilgili parametreler ise;

$$z_0 \in \mathbb{C} \quad , \quad \ell \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\} \quad \text{ve} \quad \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} \tag{2.49}$$

şeklindeki koşullarda olan sayılardır.

Doğal olarak, (2.40) ve (2.42) arasında geçen temel bilgilerinin yardımı sonucunda, (2.49) ile oluşturulan ilgili parametrelerinin, sırasıyla;

$$z_0 \coloneqq 0 \quad \text{ve} \quad \ell \coloneqq 1\,,$$

$$z_0 \coloneqq 0 \quad , \quad \ell \coloneqq 1 \quad \text{ve} \quad \lambda \coloneqq 1$$

ve

$$z_0 \coloneqq 0 \quad , \quad \ell \coloneqq 2 \quad \text{ve} \quad \lambda \coloneqq 1$$

şeklindeki gibi özel seçimlerinin dikkate alınması sonucu yeniden oluşturulacak olan kompleks z-değişkenli fonksiyonlar ise; kompleks parametreli Logistik fonksiyonlar, yani

$$s_\lambda(z) \coloneqq \mathbf{L}_{\lambda,\ell}(0;\, z) = \tfrac{1}{1+e^{-\lambda z}}\,, \tag{2.50}$$

kompleks değikenli standart Sigmoid fonksiyonu, yani

$$s(z) \equiv \mathbf{L}_{1,1}(0;\, z) \equiv \tfrac{1}{1+e^{-z}} \equiv \tfrac{e^z}{1+e^z}\,, \tag{2.51}$$

kompleks değişkenli modified Sigmoid fonksiyonu, yani

$$ms(z) \equiv \mathbf{L}_{1,2}(0;\, z) \equiv \tfrac{2}{1+e^{-z}} \equiv \tfrac{2e^z}{1+e^z} \tag{2.52}$$

şeklindeki gibi tanımlanan kompleks değişkenli fonksiyonlar söz konusu olacaktır.

Aynı zamanda, (2.43)-(2.46) arasındaki özel bilgilerin birer sonucu olarak, (2.48) ile doğrudan ilişkili ve aşağıdaki gibi kompleks z-değikenini içerecek olan bazı özel tanımlamaları, denklemleri ve ilişkileri de vurgulayalım:

i) $$s^{-1}(z) = ln\left(\tfrac{z}{1-z}\right) \tag{2.53}$$

olup, Tanım 2.2.4 ve Tanım 2.2.5 ile (2.25)'te vurgulan kompleks dönüşüm ilişkileri kapsamında ve (2.51) ile verilen kompleks değişkenli

Sigmoid fonksiyonunun tersi konumunda olan kompleks fonksiyon ilişkileri gereği, iligili iki kompleks fonksiyon (veya dönüşüm) arasındaki ilişkiler açısından $\mathbb{U}$ birim diski göz önüne alındığında, her $z \in \mathbb{U}$ için;

$$\begin{aligned} w = s(z) = \frac{1}{1+e^{-z}} \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-z} = \frac{1}{w} - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -z = \ln\left(\frac{1}{w} - 1\right) \\ &\Leftrightarrow \quad |z| = \left|\ln\left(\frac{w}{1-w}\right)\right| < 1 \end{aligned} \tag{2.54}$$

ilişkileri kendini gösterir.

ii) Doğal olarak, Tanım 2.2.4 ve Tanım 2.2.5 bilgilerinin paralelinde, **i)**'deki durum bir kez de burada dikkate alınırsa;

$$w = s(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{z}{2}\right) \tag{2.55}$$

şeklindeki *kompleks hiperbolik tanjant* fonksiyonu ile olan doğal ilişkiler ve (2.25)'teki açıklamalar paralelinde, yine her $z \in \mathbb{U}$ için;

$$\begin{aligned} w = s(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tanh\left(\frac{z}{2}\right) \Leftrightarrow \; & 2w - 1 = \tanh\left(\frac{z}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \; & 2\tanh^{-1}(2w-1) = z \\ \Leftrightarrow \; & z = 2\tanh^{-1}(2w-1) \\ \Leftrightarrow \; & |z| = 2|\tanh^{-1}(2w-1)| < 1 \end{aligned}$$

(2.56)

şeklindeki gibi olan kompleks ters hiperbolik tanjant fonksiyonu ile olan bazı ilişkiler de elde edilir.

iii) $s \coloneqq s(z)$ olmak üzere,

$$\begin{cases} \frac{ds}{dz} = s(1-s) \\ s(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.55}$$

gibi bir kompleks diferansiyel denkleminin çözümü olan fonksiyon da ilgili $s(z)$ fonksiyonudur. Ayrıca, (2.55) ile verilen başlangıç değer problemi için,

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dz} = s(1-s) &\Leftrightarrow \frac{ds}{s(1-s)} = dx \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1-s} - \frac{1}{s}\right) ds = -dz \\ &\Leftrightarrow ln(1-s) - lns = -dz \\ &\Leftrightarrow ln\left(1 - \frac{1}{s}\right) = -z + L \\ &\Leftrightarrow ln\left(1 - \frac{1}{s}\right) = e^{C-z} \\ &\Leftrightarrow s(z) = \frac{1}{1+Ke^z} \end{aligned}$$

ilişkileri, $K = 1$ seçimiyle kolayca görülebilir.

v) İlgili kompleks (değişkenli) fonksiyonlar, yani kompleks standart Sigmoid ve kompleks modified Sigmoid fonksiyonlarına ilişkin olan ve aşağıdaki gibi verilen $z_0 = 0$ noktasındaki Taylor Seri açılımları da:

$$s(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^3 + \frac{1}{408}z^5 - \frac{17}{80640}z^7 + \frac{31}{1451520}z^9 - \cdots \tag{2.55}$$

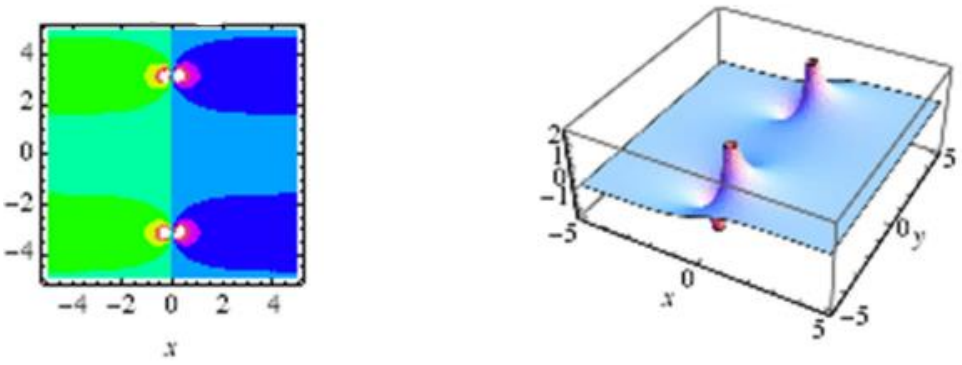
ve

$$ms(z) = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}z^3 + \frac{1}{204}z^5 - \frac{17}{40320}z^7 + \frac{31}{725760}z^9 - \cdots \tag{2.56}$$

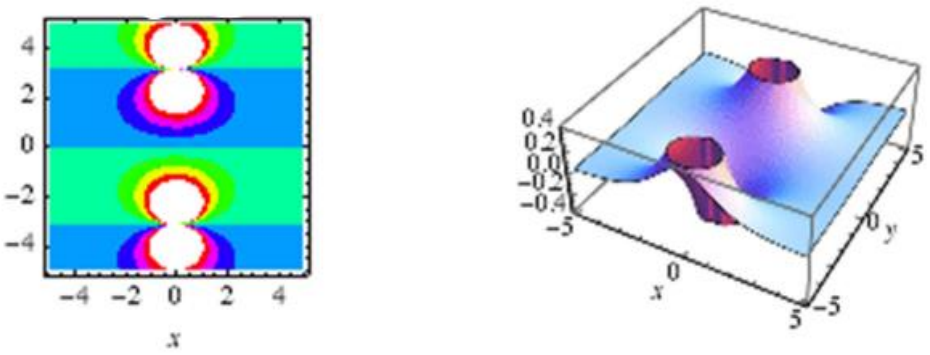
şeklindeki kompleks kuvvet serileri olacaktır. Özellikle, kompleks fonksiyon serileri açısından, (2.55) ve (2.56) ile verilen kompleks serilerinin yakınsaklıkları ve düzgün

yakınsaklıkları için, Teorem 2.1.4 ve Teorem 2.1.8 ile vurgulanan uygulama boyutlarının rolleri oldukça önem taşığını belirtmiştik.

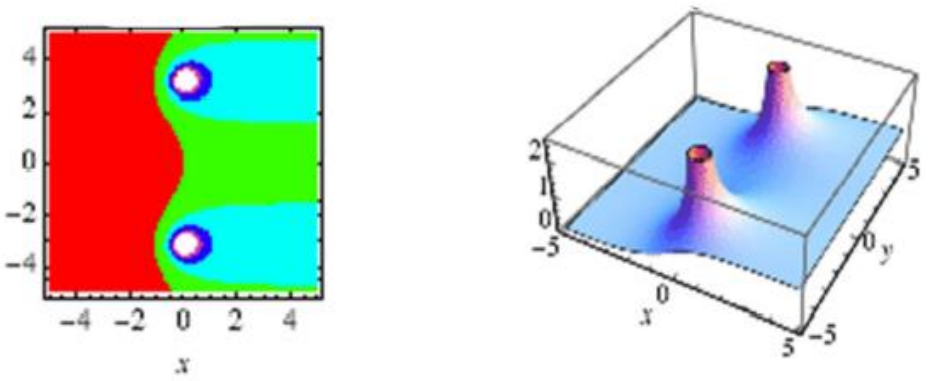
Önceden de vurguladığı üzere, kompleks değişkenli fonksiyonların (veya dönüşümlerinin) kompleks düzlemler arası ilişkilerini geometrik (veya analitik) olarak incelemek (her zaman) kolay bir iş olmamasına rağmen, gerek (2.55) gerekse (2.56)'da, kompleks (değişkenli) fonksiyonların (veya dönüşümlerin) biribirleri arasındaki bazı özel ilişkiler belirlenmişti. Daha da zor olabilecek bazı ilişkileri görebilmek adına, aşağıdaki grafiklerle verildiği gibi, ilgili z kompleks değişkeni belirleyen x ve y gerçel değişkenlere getirilen kısıtlamalar altında, kompleks z-değişkenli Logistik fonksiyonu (veya kompleks Sigmoid fonksiyonu) ile ilgili olan ve geometrik analamlar taşıyan bazı grafiklerinin oluşturluması için yine bilindik bazı matematiksel hazır programlara ihtiyaç duyulmuştur. Bu kapsamda, yukarıda vurgulanan ilgili özel kompleks değişkenli fonksiyona ilişkin 2D ve 3D boyutlarındaki bazı özel garfikler de sunulmuştur.



Şekil 2.2.15 Kompleks değişkenli Sigmoid fonksiyonunun reel kısmına ait olan 2D ve 3D boyutlu grafikler



Şekil 2.2.16 Kompleks değişkenli Sigmoid fonksiyonunun sanal kısmına ait olan 2D ve 3D boyutlu grafikler



Şekil 2.2.17 Kompleks değişkenli Sigmoid fonksiyonunun modül kısmına ait olan 2D ve 3D boyutlu grafikler

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu esas bölümde, tez araştırmasının temel hedefi konumunda olan kompleks parametreli Logistik fonksiyonu (ve Sigmoid kompleks fonksiyonu) ile ilgili olan bazı (analitik ve geometrik) sonuçları elde etmek olduğundan dolayı, ilgili kompleks fonksiyonlarının temel yapısını teşkil eden kompleks (üstel) formdaki fonksiyonlardan yola çıkarak, üstel elementer kompleks fonksiyonlarla ilgili olabilecek bazı temel önermeleri (veya teorileri) öncelikli olarak sunmak ve ardından da ispatlamaktır. Daha sonra da, elde edilen ilgili genel sonuçları hedefimiz doğrultusunda kullanmak veya ilgilenen araştırmacılar için de çeşitli önerilerde bulunmak olacaktır. Elbette ki, Tanım 2.3.2.1 ile verilen genel tanımlanın ve akabinde de, bu tanımın dayanağı olan ve (2.50)-

(2.56) arasında geçen özel ilişkiler için önemli rol oynayan Teorem 2.2.4 ve bu teoremle ilgili olan (2.30)-(2.36) arasındaki bilgilerin merkezinde olan kompleks üstel ve kompleks logaritma ili ilgili olan bazı özel önermelerin üzerinde odaklanmak önemli rol oynayacaktır. İstenilen hedefler için, aşağıda verilen önermelerle çalışmamızı başlayalım.

3.1 Önerme. $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere ve her $k, m \in \mathbb{Z}$ için, kompleks z-bağımsız değişkenli $\rho(z) = e^z$ fonksiyonu için, aşağıda verilenler daima doğrudur:

i) $\rho(\mathbb{U}) = \{z \in \mathbb{C} : |ln(z)| > 0\}$ dır.

ii) $|\rho(z)| = e^{\Re e(z)}$ dır.

iii) $arg\{\rho(z)\} = \Im m(z) + 2k\pi$ dır.

iv) $\rho(z) = e^{\Re e(z)}\{Cos[arg\{\rho(z)\}] + iSin[arg\{\rho(z)\}]\}$ dır.

v) $\Re e\{\rho(z)\} = e^{\Re e(z)} Cos[arg\{\rho(z)\}]$ ve $\Im\{\rho(z)\} = e^{\Re e(z)} Sin[arg\{\rho(z)\}]$ dır.

vi)

$$\Re e\{\rho(z)\} \begin{cases} > 0\,, \ eğer \ -\frac{\pi}{2} + 2m\pi < arg(z) < \frac{\pi}{2} + 2m\pi \\ = 0\,, \ eğer \ arg(z) = \pm\frac{\pi}{2} + 2m\pi \\ < 0\,, \ eğer \ \frac{\pi}{2} + 2m\pi < arg(z) < \frac{3\pi}{2} + 2m\pi \end{cases} \tag{3.1}$$

ve

$$\Im m\,\{\rho(z)\} \begin{cases} > 0\ , \ eğer \ 2m\pi < arg(z) < \pi + 2m\pi \\ = 0\,, \ eğer \ arg(z) = 2m\pi \ veya \ arg(z) = \pi + 2m\pi \\ < 0\,, \ eğer \ \pi + 2m\pi < arg(z) < 2\pi + 2m\pi \end{cases} \tag{3.2}$$

dır.

vii) $\rho(z)$ kompleks üstel fonksiyonu $\mathbb{C}$'de (modülce) sınırlı olamaz.

viii) Her

$$z \in \{\, z \in \mathbb{C} : |z| \leq q \ \ (q > 0) \,\}$$

için,

$$\min_{|z|=q} \Re e\{\rho(z)\} = \rho(-q) = \min_{|z|=q} |\rho(z)| \tag{3.3}$$

ve

$$\max_{|z|=q} \Re e\{\rho(z)\} = \rho(q) = \max_{|z|=q} |\rho(z)| \tag{3.4}$$

dır.

ix) $\rho(z)$ kompleks fonksiyonu $\mathbb{C}$'de analitiktir.

x) $\rho(z)$ kompleks fonksiyonu $\mathbb{C}$'de 1-1 değildir.

İspat.

i) $z \in \mathbb{C}$ ve $\rho(z) = e^z$ olup; (2.24), (2.25) ve (2.29) arasında geçen bilgiler dikkate alındığında,

$$w = \rho(z) = e^z \iff z = ln\big(\rho(z)\big) = ln(w)$$

$$\Longrightarrow |ln(w)| = |z| > 0$$

şeklindeki istenen sonuca kolayca varılır.

ii) Teorem 2.2.4 ile verilen **iv)**'teki önermeden açıktır.

iii) Teorem 2.2.4 ile verilen **vi)**'daki önermeden açıktır.

iv) $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, ilgili önermede vurgulanan $\rho(z)$ üstel kompleks fonksiyonu ile birlikte,

$$\rho(z) = |\rho(z)|e^{i\Theta} \quad \text{ve} \quad \Theta := Arg(\rho(z))$$

ilişkileri göz önüne alınırsa, ii) ile iii)'te verilen önermeler kullanılırsa istenene kolayca varılır.

v) v)'de verilen önermeden kolayca görülebilir.

vi) $z = x + iy \in \mathbb{C} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olduğundan dolayı, ilgili gerçel değişkenlerin $x \in \mathbb{R}$ ve $y \in \mathbb{R}$ şeklinde oldukları göz önüne alınırsa, $e^x > 0$ olmakla birlikte **ii)** ve **vi)**'te verilen önermeler gereği,

$$\begin{aligned} arg\{e^z\} &= arg\{e^{x+iy}\} \\ &= arg\{e^x e^{iy}\} \\ &= arg\{e^x\} + arg\{e^{iy}\} \\ &= 2n_1\pi + y + 2n_2\pi \quad (n_1, n_2 \in \mathbb{Z}) \\ &= y + 2k\pi \quad (n_1 + n_2 \coloneqq k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

ve

$$\Re e\{e^z\} = \Re e\{e^{x+iy}\} = e^x Cos(y)$$

olup, her $m' = m - k \in \mathbb{Z}$ için, $\Omega(x,y) = e^x Cos(y)$ gibi bir (gerçel değişkenli ve gerçel değerli) cosinüs fonksiyonu için de,

$$\Omega(x,y)\begin{cases} > 0\,, \ e\breve{g}er \ -\frac{\pi}{2} + 2m'\pi < y < \frac{\pi}{2} + 2m'\pi \\ = 0\,, \ e\breve{g}er \ y = 2m'\pi \ veya \ y = \pi + 2m'\pi \\ < 0\,, \ e\breve{g}er \ \frac{\pi}{2} + 2m'\pi < y < \frac{3\pi}{2} + 2m'\pi \end{cases} \tag{3.5}$$

olacaktır. Böylece, (3.1) ve (3.2) ile verilen önermelerin, yani ilgili eşitsizliklerin doğrulukları da açıkça görülür.

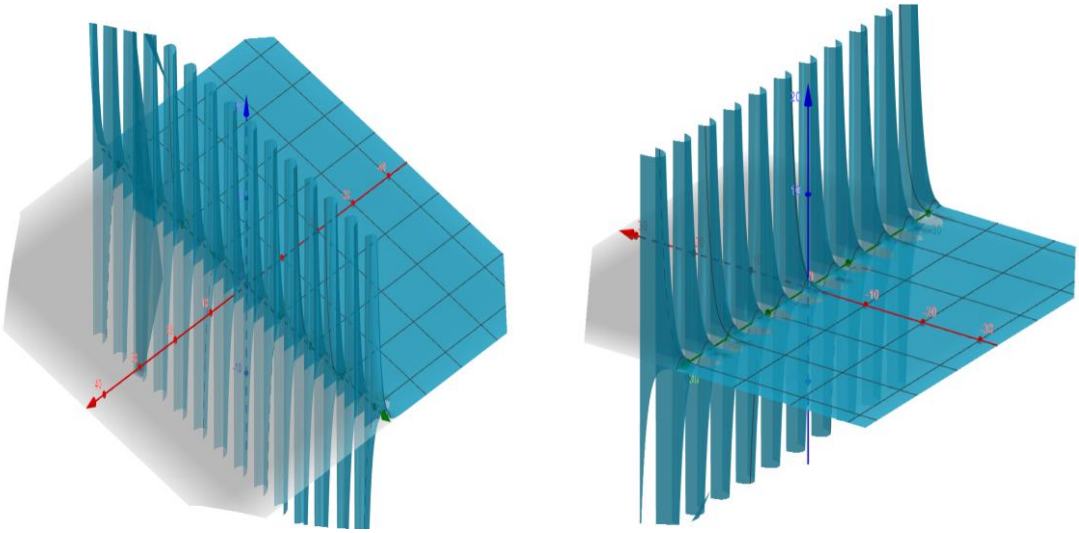
Ayrıca, basit birer görsel örneklendirmeler olarak, yukarıda gibi, yani (3.5) ile verilen eşitsizliklerin her üç halini analitik olarak göz önüne sermek adına, ilgili x ve y bağımsız değişkenleri için

$$-30 \le x \le 30 \quad \text{ve} \quad -30 \le y \le 30$$

şeklindeki kısıtlamalar altındaki,

$$z = \Omega(x, y) = e^{x}Cos(y)$$

fonksiyonuna ait iki grafiğin 3D boyutlu hali aşağıda gibi sunulmuştur.



Şekil 2.2.18 $z = e^{x}Cos(y)$ gerçel değişkenli fonksiyonuna ilişkin bazı 3D grafikler

vii) $z \in \mathbb{C} \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olduğu için, $x, y \in \mathbb{R}$ olacağı açıktır. Dolayısıyla, ilgili üstel kompleks fonksiyon için;

$$|\rho(z)| = |e^{z}| = \left|e^{x+iy}\right| = e^{x} > 0$$

şeklindeki (modülce) alltan sınırlılık aşakir olmasına rağmen,

$$|\rho(z)| = |e^{z}| = \left|e^{x+iy}\right| = e^{x}$$

şeklindeki gibi bir ifade için ise, (modülce) üstten sınırlılık elbbete ki söz konusu olamaz.

viii) İstenen ispat için, eğer

$$z \in \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq q \ \ (q > 0)\}$$

ise,

$$|z| = \left|qe^{i\theta}\right| = q \quad (q > 0) \tag{3.6}$$

olduğu açıktır. Ayrıca, $\rho(z) = e^z$ kompleks (değişkenli) üstel fonksiyonu için, eğer (3.5) eşitsizliği ve her

$$m \in \mathbb{Z} \ \ , \ \ q > 0 \quad \text{ve} \quad 2m\pi \leq \theta < 2\pi + 2m\pi$$

değerleri göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \rho\left(qe^{i\theta}\right) \\ &= e^{qe^{i\theta}} \\ &= e^{q[Cos\theta + iSin\theta]} \\ &= e^{qCos\theta}e^{iqSin\theta} \\ &= e^{qCos\theta}[\cos(qSin\theta) + iSin(qSin\theta)] \end{aligned}$$

sonucuna varılır. Ve, buradan da,

$$\sigma(\theta) \coloneqq \Re e\{e^z\} = \cos(Sin\theta)\, e^{qCos\theta}$$

şeklindeki gibi (gerçel değişkenli ve gerçel değerli) bir fonksiyon elde edilir. O zaman, $\sigma(\theta)$ fonksiyon için, klasik analiz bilgileri göz önüne alındığında ve bazı elementer işlemeler sonucu, her $\theta \in [2m\pi, 2\pi + 2m\pi)$ için, $\sigma(\theta)$ fonksiyonunun $\theta =: 2m\pi$ noktasında maksimum değerine ve $\theta =: \pi + 2m\pi$ noktasında da minimum değerine ulaştığı kolayca görülebilir.

O halde,

$$\min_{|z|=q} \Re e\{\rho(z)\} = \mathrm{e}^{-q} = \rho(-q)$$

ve

$$\max_{|z|=q} \Re e\{\rho(z)\} = \mathrm{e}^{q} = \rho(q)$$

olur.

Aynı zamanda, (3.3) ve (3.4)'te geçen diğer eşitlikler de, (ii)'de verilen önerme ile elde edilecek olan gerçel değişkenli ve gerçel değerli fonksiyonun $[-q, q]$ aralığındaki kesin artan bir fonksiyon olduğu da göz önüne alınarak, istenenin ispatı kolayca tamamlanabilir.

ix) $\rho(z)$ kompleks fonksiyonun her $z \in \mathbb{C}$ için türevlenebilir olduğu Teorem 2.2.1 gereğince açıktır. Dolayısıyla, ilgili fonksiyon $\mathbb{C}$ uzayında analitik bir fonksiyon olup, bu tür fonksiyonlara, yani $\mathbb{C}$'de analitik olan fonksiyonlara da "tam fonksiyon" dendiğini biliyoruz.

x) Aksi belirtilmedikçe, $\rho(z)$ kompleks fonksiyonun $\mathbb{C}$'de periyodik bir fonksiyon olduğunu Teorem 2.2.4'ün vii)'kısmında belirtmiştik. Dolayısıyla, $\rho(z)$ fonksiyonunun 1-1 olmayacağı açıktır.

Üstteki teoremde geçen $z = x + iy$ kompleks sayılarının seçimi $\mathbb{U}$ açık birim diskine sıkıştırılması sonucu;

$$x \in (-1,1) \quad \text{ve} \quad y \in (-1,1)$$

ve

$$x \in (-1,1) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{ve} \quad y \in (-1,1) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.7}$$

şeklindeki gibi durumların söz konusu olacağı açıktır. Bu gibi durumlarda, verilen $\rho(z)$ kompleks değişkenli fonksiyonunu için oldukça önemli olacağından dolayı, Önerm 3.1 ile verilen ilgili önermelerden bazıları aşağıdaki gibi yeniden düzenlen-mesinde fayda görülmüştür.

3.2 Önerme. $z = x + iy \in \mathbb{U}$ olsun. Bu durmda, $\rho(z) = e^z$ z-bağımsız değişkenli kompleks fonksiyon için, aşağıda verilenler daima doğrudur:

i) $\rho(\mathbb{U}) = \{z \in \mathbb{U} : |ln(z)| < 1\}$ dır.

ii) $Arg\{\rho(z)\} = y$ dir.

iii) $\rho(z) = e^x\{Cos(y) + iSin(y)\}$ dır.

iv) $\Re e\{\rho(z)\} = e^x Cos(y)$ ve $\Im\{\rho(z)\} = e^x Sin(y)$ dır.

v)

$$\Re e\{\rho(z)\} > 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right) \tag{3.8}$$

dır

vi) $\rho(z)$ kompleks üstel fonksiyonu $\mathbb{U}$'da (modülce) sınırlıdır.

vii) $\rho(z)$ kompleks fonksiyonu $\mathbb{U}$ kümesinde 1-1 dir.

İspat.

i)

$$x + iy = z \in \mathbb{U} \iff |z| < 1$$

$$\Longrightarrow (x, y) \in (-1,1) \times (-1,1) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

oldukları göz önüne alınır ve, özellikle, ilgili gerektirmeler, Önerme 3.1 ile verilen **i)**'deki önermenin ispatı yeniden değerlenidirilir ise, istenenen iapatında detayına kolayca ulaşılabilir.

ii) Önerme 3.1 ile verilen **iii)**'teki önermeden açıktır.

iii) Önerme 3.1 ile verilen **iv)**'teki önermeden açıktır.

iv) Önerme 3.1 ile verilen **v)**'teki önermeden açıktır.

iv) Önerme 3.1 ile verilen **vi)**'daki önermede geçen $arg\{\rho(z)\} = y$ seçimi Mod 2π kapsamında düşünülür ve (3.6)'daki kısıtlamaların doğal sonucu da göz önüne alınırsa, istenen ispat kolayca elde edilir.

iv) $z = x + iy \in \mathbb{U} \Rightarrow x \in (-1,1)$ gerektirmesi ile $|\rho(z)| = e^x$ eşitliği birlikte göz önüne alınırsa, $1/e < |\rho(z)| = e^x < e$ şeklindeki gibi (modülce) alttan ve üstten sınırlamalar kolayca elde edilir.

v) $z = x + iy \in \mathbb{U}$ olması ve periyodiklik gibi durumuna da sahip olmaması durumlarında, 1-1'lik durumunu da zorunlu kılacaktır.

Aşağıda verilen önermelerinin ispatlarının verilmesine gerek duyulmamaıştır. Hem Önerme 3.1 hem de Önerme 3.2 ile verilen bilgilendirmeler yardımıyla, istenen ispatlar kolayca oluşturulabilir.

3.3 Önerme. $z = x + iy \in \mathbb{U}_q$ $(q > 0)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^*$ olsun. Bu durmda, $\rho(z) = e^{\lambda z}$ şeklindeki z-bağımsız değişkenli kompleks üstel fonksiyon için, aşağıda verilenler daima doğrudur:

i) $\rho(\mathbb{U}_q) = \{ z \in \mathbb{U} : |ln(z)| < q|\lambda| \}$ dır.

ii) $Arg\{\rho(z)\} = \lambda y$ (Mod 2π) dir.

iii)

$$\Re e\{\rho(z)\} > 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2\lambda} < y < \frac{\pi}{2\lambda}\right) \tag{3.9}$$

dır.

3.4 Önerme. $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, kompleks (değişkenli standart) Sigmoid fonksiyonu için, aşağıda verilen önermeler doğrudur:

i)

$$\frac{1}{|1+e^{-\Re e(z)}|} \leq |s(z)| \leq \frac{1}{|1-e^{-\Re e(z)}|} \tag{3.10}$$

ii) $$Arg(s(z)) = arctan\left(\frac{e^{-\Re e(z)}\, Sin\,[\Im m(z)]}{e^{-\Re e(z)}\, Cos\,[\Im m(z)]}\right) \tag{3.11}$$

iii) $$\Re e(s(z)) = \frac{e^{-\Re e(z)} Cos\,[\Im m(z)]}{|1+e^{-z}|^2} \tag{3.12}$$

iv) $$\Im m(s(z)) = \frac{e^{-\Re e(z)} Sin[\Im m(z)]}{|1+e^{-z}|^2} \tag{3.13}$$

İspat.

i) : $z \in \mathbb{U}$ olsun. İlgili $s(z)$ kompleks değişkenli fonksiyonu için modül ve ardından da ters üçgen eşitsizliğini öncelikli olarak uygulayalım:

$$\begin{aligned} |s(z)| &= \left|\frac{1}{1+e^{-z}}\right| \\ &= \frac{1}{|1+e^{-z}|} \\ &\leq \frac{1}{|1-|e^{-z}||} \end{aligned} \tag{3.14}$$

olup;

$$\begin{aligned} |1+e^{-z}|^2 &= \left|1+e^{-x-iy}\right|^2 \\ &= \left|1+e^{-x}e^{-iy}\right|^2 \\ &= |1+e^{-x}[\cos y - isiny]|^2 \\ &= (1+e^{-x}\cos y)^2 + (-e^{-x}siny)^2 \\ &= 1+2e^{-x}\cos y + e^{-2x} \end{aligned} \tag{3.15}$$

ifadesi ile

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos y \leq 1 \implies & -2e^{-x} \leq 2e^{-x}\cos y \leq 2e^{-x} \\ \Leftrightarrow\ & 1-2e^{-x} \leq 1+2e^{-x}\cos y \leq 1+2e^{-x} \\ \Leftrightarrow\ & 1-2e^{-x}+e^{-2x} \leq 1+2e^{-x}\cos y + 2e^{-x} \\ & \leq 1+2e^{-x}+e^{-2x} \\ \Leftrightarrow\ & (1-e^{-x})^2 \leq 1+2e^{-x}\cos y + e^{-2x} \leq (1+e^{-x})^2 \end{aligned} \tag{3.16}$$

ifadesi birlikte göz önüne alındığında,

$$\begin{gathered}(1-e^{-x})^2 \leq |1+e^{-z}|^2 = 1+2e^{-x}\cos y + e^{-2x} \leq (1+e^{-x})^2 \\ \Leftrightarrow \\ |1-e^{-x}| \leq |1+e^{-z}| \leq |1+e^{-x}| \\ \Leftrightarrow \\ \frac{1}{|1+e^{-x}|} \leq \frac{1}{|1+e^{-z}|} \leq \frac{1}{|1-e^{-x}|}\end{gathered} \tag{3.17}$$

gerektirmeleri elde edilir. Özellikle, yukarıda elde edilen sağdan sınırlık durumunda $x = 0$ hali söz konusu olamaz. Çünkü, $x + iy = z \in \mathbb{U}$ olması ve (3.6) ile sunulan bilgilerin de göz önüne alınması durumunmda, $y = \overline{+}\pi/2$ gibi durumlar söz konusu olmaz.

O halde,

$$\begin{aligned}\left|1+e^{-iy}\right|^2 &= |1+\cos y - isiny|^2 \\ &= (1+\cos y)^2 + (-siny)^2 \\ &= 2(1+\cos y) \\ &\neq 0\end{aligned} \tag{3.18}$$

sonucu kaçınılmaz olur. Böylece, (3.11) ve (3.12) ile verilen bilgiler (3.10) için göz önüne alınırsa, **i)** ile verilen eşitsizlik kolayca görülür.

ii) - iv) : $z \in \mathbb{U}$ olmak şartı ile, $s(z)$ kompleks değişkenli fonksiyonunun tanımından haraketle,

$$\begin{aligned}s(z) &= \frac{1}{1+e^{-z}} \\ &= \frac{1}{1+e^{-z}} \frac{\overline{1+e^{-z}}}{\overline{1+e^{-z}}} \\ &= \frac{\overline{1+e^{-z}}}{|1+e^{-z}|^2} \\ &= \frac{1+e^{-\bar{z}}}{|1+e^{-z}|^2}\end{aligned} \tag{3.19}$$

elemter sonucu ile

$$\begin{aligned} 1 + e^{-\bar{z}} &= 1 + e^{-x+iy} \\ &= 1 + e^{-x}(\cos y + isiny) \\ &= 1 + e^{-x}\cos y + ie^{-x}siny \end{aligned} \tag{3.20}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla, (3.11)-(3.13) arasında verilen önermelerin doğrulukları için, eğer (3.15) ve (3.20) sonuçları ile birlikte temel kompleks analiz bilgileri kullanılırsa, istenenlerin doğruluklarına kolayca varılabilir. Bu gizli tutulan detaylar, ilgilenen araştırmacıların dikkatine sunulmuştur.

Euler polinomları ve Bernoulli sayı dizileri yardımıyla, gerçel (değişkenli standart) Sigmoid fonksiyonunun seri açılımı (2.45)'te sunulmuştur. Bu fonksiyon serisinden kolayca kompleks (değişkenli standart) Sigmoid fonksiyonunun seri açılımı da kolayca oluşturulabilir. Özellikle, ilgili özel kompleks değişkenli fonksiyonuna ait fonksiyon serisini detaylandırmak ve bu bölümün son teorilerini de sunmak için, kompleks (standart) Sigmoid fonksiyonu ile ilgili aşağıdaki gibi verilen bazı önermeleri sunmanın faydalı olacağı kanısındayız.

3.5 Önerme. $s(z)$ kompleks değişkenli (standart) Sigmoid fonksiyonu için, aşağıda verilenler doğrudur:

i) $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $z = (2n+1)\pi i$ noktaları $s(z)$ fonksiyonunun singülar noktalarıdır.

ii) $\int_{\gamma:\partial(\mathbb{U})} s(z)dz = 0$ dır. (3.21)

iii) $s(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-nz}$ dır. (3.22)

iv) $s(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!}\right)^n$ dır. (3.23)

v) $D = \{z \in \mathbb{C} : |e^{-z}| \leq q < 1\}$ kümesinde verilen kompleks fonksiyon serileri yakınsak ve düzgün yakınsaktır.

İspat.

i) Kompleks düzlemde, $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, (2.51)'deki gibi tanımlanan $s(z)$ kompleks fonksiyonu için, singülar olabilecek noktalar:

$$1 + e^{-z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-z} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z = -(1 + 2n)\pi i$$

şeklindeki noktalar olur.

ii) Kompleks integral için verilen eğri $\gamma : |z| = 1$ gibi bir kompleks paramtereli eğri olup ve bu eğri basit kapalı bir eğridir. Yukarıda belirlenen singülar noktalar böylesi bir eğri için göz önüne alındığında, ilgili noktaların hepsi γ'nın belirlediği basit kapalı bölgenin dışındadır. Dolayısıyla, Couhy theorermi gereğince, ilgili kompleks integral 0 (sıfır) olmak zorunda kalır.

iii) Örnek 2.1.3'taki (2.20) ile verilen fonksiyon serisinde $\omega \coloneqq -e^{-z}$ alınırsa, (3.22) kompleks seri kolayca elde edilir.

iv) Örnek 2.1.3'taki (2.20) ile verilen fonksiyon serisinde $\omega \coloneqq -z$ şeklindeki gibi bir seçim dikkate alınırsa,

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots \tag{3.24}$$

şeklinde kompleks kuvvet serisi kolayca elde edilir. Bu kompleks serisinin $|z| < q < 1$ koşulu altında, yani $\mathbb{U}$'da yakınsak ve hatta düzgün yakınsak olduğu, (2.16) (veya (2.17)) kriterleri ve doğal olarak Teorem 2.1.8 gereğince görülebilir. Eğer bu seride $z \coloneqq e^{-z}$ şeklindeki gibi bir seçim tekrar göz aönüne alınırsa, (3.22) ile verilen kompleks fonksiyon serisine kolayca varılır. Ayrıca, (2.35) ile verilen kompleks fonksiyon sersinde, eğer $z \coloneqq -z$ şeklindeki gibi bir seçim dikkate alınırsa,

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!} z^k + \cdots \tag{3.25}$$

serisi kolayca elde edilir. Eğer bu seri açılımı (2.24)'te verilen kompleks fonksiyon serisinde göz önüne alınırsa, (3.23) ile verilen seri kolayca elde edilir. Bu süreçte elde edilen tüm kompleks fonksiyon serilerinin $\mathbb{U}$ bölgesinde yakınsak ve düzgün yakınsak olduklarını özellikle belirtelim.

v)

$$z \in D \iff |e^{-z}| = e^{-\Re e(z)} = e^{-x} \leq q < 1 \iff \Re e(z) = x \leq lnq < 0$$

ilişkileri göz önüne alınır ve Teorem 2.1.8 göz önüne alınırsa, (3.22) ve (3.23) ile verilen fonksiyon serilerinin düzgün yakınsaklıkları, dolayısıyla, (modülce) yakınsakılkları kolayca görülebilir.

Bu bölümün son bilgilendirmeleri olarak, bu tez çalışmasının sunduğu teoriler (bulgular) ve özellikle bunlara yönelik olabilecek çeşitli öneriler kapsamında, kompleks Lojistik fonksiyonunun en kullanışlı hali olan kompleks değişkenli (standart) Sigmoid fonksiyonu ele alınmış ve bu kompleks değişkenli özel fonksiyonla ilgili olan çeşitli önermler oluşturulmuş ve bunların bazıları da ispatlanmıştır. Giriş bölümünde, litearatür bilgilendirmeleri kapsamında, ilgili fonksiyonların hem gerçel hem de kompleks değişkenli hallerine ilişkin, çeşitli sonuçları içeren bilimsel çalışmalardan da bahsedilmişti. Özellikle, ilgili parametrelrin bazı kısıtlamaları sonucu, yaklaşım hesaplamalarına ilişkin teorilerde, her iki tipteki fonksiyonların seri açılımları oldukça kullanışlı olmasına rağmen, çeşitli modellemelerin sonucu olarak, istenilen çalışma alanını ifade eden fonksiyonlar veya denkelemler en gerçekçi halleriyle oluşturlabilmektedir. Bu gibi fonksiyonların çeşitli tipleri veya bunlarla ilişkili olan bazı fonksiyonel ilişkileri içeren grafikler Şekil 2.2.10-Şekil 2.2.17 arasında kapsamlı olarak sunulmuştu. Gerçek değişkeli (standart) Sigmoid fonksiyonu ile elementer işlemleri gerçekleşimek, diğer tipteki, yani kompleks değişkenli (standart) Sigmoid fonksiyona göre daha kolaydır. Bu açıdan, özellikle, bu tezin de gerçek hedefine uygunluğu bakımından, kompleks değişkenli fonksiyonlarla ilişkin olan Sigmoid fonksiyonlarının kompleks fonksiyon teorisi kapsamında ele alınması, doğal olarak, kaçınılmaz olmuştur. Bu gibi araştırmalarda, ilgili kompleks fonksiyonların seri açılımları da önemli rol oynamakla birlikte, özellikle, kompleks düzlemin özel bir alt kümesi

konumunda olan $\mathbb{U}$ bölgesinde çalışmak, hem teorik hem de uygulama boyutlarında sıkça görülmeketedir. Bu gibi çalışmaları içeren çeşitli bilimsel eserler, giriş bölümünde detaylıca vurgulanmıştı. Şimdi, bu tez çalışmasından haraket ederek, kompleks değişkenli (standart) Sigmoid fonksiyonu ilgili olabilecek bazı önerileri veya tartışma ortamlarını hatırlatma istiyoruz.

İlk kapsamlı öneri olarak, kompleks değişkenli Sigmoid ile bu fonksiyonun tersi ve tanımlanmasında önemli rolü olan üstel (veya logaritmik) formlarını da içeren tüm önermler, Logistik fonksiyonunun Tanım 2.3.2.1 ile verilen (2.48) ve (2.50) formlarına genişletilebilinir. Bu gibi genellemelerin birincisi olarak, elbette ki, Önerme 3.3.'te geçen kompleks değişkenli üstel fonksiyonun kapsamı ve önemi kendini göterecektir. Örneğin, (2.47)-(2.50) arasında yer alan bilgiler kapsamında, yani;

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(z) &\equiv \mathrm{L}_{\lambda,\ell}(z_0;\, z) \\ &= \frac{\ell}{1+e^{-\lambda(z-z_0)}} \\ &\equiv \ell \sum_{n=0}^{\infty} \left(-e^{-\lambda(z-z_0)}\right)^n \\ &\equiv \frac{\ell}{1+e^{\lambda z_0} e^{-\lambda z}} \\ &\equiv \frac{\ell}{1+e^{\lambda x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\lambda z)^n} \\ &\equiv \ell \sum_{j=0}^{\infty} \left(-e^{\lambda z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\lambda z)^n\right)^j \end{aligned} \tag{3.26}$$

şeklindeki kompleks parametreli Lojistik fonksiyonu ve yukarıdaki denk ilişklerde önemli rol alan

$$q(z) = e^{-\lambda z} \quad (\lambda \in \mathbb{C}^*\,;\, z \in \mathbb{U}) \tag{3.27}$$

şeklindeki gibi oldukça en genel formu olan kompleks değişkenli üstel fonksiyonunun rolü oldukça önemli olacaktır. Dahası, ilgili üsttel formdaki fonksiyona ait olan:

$$q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\lambda z)^n \quad (\lambda \in \mathbb{C}^*\,;\, z \in \mathbb{U}) \tag{3.28}$$

şeklindeki kompleks seri açılımı da, bu bölümde sunulan tüm önermelerin yeniden düzenlenmesine ve çeşitli özel sonuçlarının da yeniden oluşturmasına yol açacaktır.

İkinci kapsamlı öneri olarak, özellikle, (2.55) ile verilen başlangıç değer pronleminin esas dayanağı olan:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\,(s(z)) &= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1+e^{-z}}\right)\\ &= \frac{e^{-z}}{(1+e^{-z})^2}\\ &= \frac{e^{-z}}{1+e^{-z}}\frac{1}{1+e^{-z}}\\ &= \frac{-1+1+e^{-z}}{1+e^{-z}}\frac{1}{1+e^{-z}}\\ &= \left(\frac{-1}{1+e^{-z}}+\frac{1+e^{-z}}{1+e^{-z}}\right)\frac{1}{1+e^{-z}}\\ &= \left(1-\frac{1}{1+e^{-z}}\right)\frac{1}{1+e^{-z}}\\ &= \big(1-s(z)\big)s(z)\end{aligned} \tag{3.29}$$

şeklindeki sıradan hesaplamaların belirtilen özel bir sonucu kendini kolayca gösterir ve doğal olarak, elde edilen ilgili diferansiyel denleminin çözümünün de (standart) Sigmoid fonksiyonu olduğu açıkça görülmektedir. Elbette ki, bu mantık art arda sürdürüldüğünde, daha yüksek mertebeden diferansiyel deklemler veya başlangıç değer problemleri de kolayca oluşrturulabilinir. Örneğin; üstteki eşitliğin türevi bir kez daha z'ye göre alınır ve elde edilecek sonuçta $s' = s(1-s)$ sonucu tekrar kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dz^2}(s(z)) &= -s'(z)\,s(z) + \big(1-s(z)\big)s'(z)\\ &= s(z)\big(1-s(z)\big)(1-2s(z))\\ &= \frac{1}{1+e^{-z}}\left(1-\frac{1}{1+e^{-z}}\right)\left(1-\frac{2}{1+e^{-z}}\right)\end{aligned} \tag{3.30}$$

veya, $s \coloneqq s(z)$ olmak üzere,

$$\begin{cases} \frac{d^2s}{dz^2} = s(1-s)(1-2s) \\ s(0) = \frac{1}{2} \\ s'(0) = \frac{1}{4} \end{cases} \tag{3.31}$$

şeklindeki başlangıç değer problemi elde edilir. Elbette ki, belirlenencek olan rekürsiv form mantıklı bir şekilde uygulanarak, Sigmoid fonksiyonunun çözümü olduğu (olacağı) daha yüksek mertebeden diferansiyel denklemlere veya başlangıç değer problemlerine doğru gidilebilir.

Bu çalışmanın son önerisi olarak; (3.31)-(3.36) arasında vurgulanan tüm kapsamlı genel sonuçlar (önermeler) daha da özel sonuçlara (önermlere) doğru sürüklenebilir. Bunların oluşturulması (vey belirlenmesi) için de, ilgili oluşturulmuş genel yapılardaki her bir teoremde yer alan paramaterlerin uygun ve mantıklı şekilde seçilmesi ile birlikte ilgili açık birim diskinin istenilen amaca göre belirlenmesi ve ögelerinin de buna göre eçilmesi önemli rol alacaktır. Örneğin, üstte vurgulana genel yapıların daha özel sonuçları olarak, (2.40) ile tanımlanan kompleks (modified) Sigmoid fonksiyonu ile (2.53)-(2.55) arasındaki tüm özel bilgileri içeren kompleks fonksiyonları, kompleks denklemelerin veya eşitsizliklerin belirledikleri sonuçlar olabilir. İlgili parametrelerin daha karmaşık olarak seçilmesi durumunda, özellikle, elde edilecek özel sonuçaların çeşitli analitik veya geometrik sonuçlarının gözlemelenmesinde; (2.25) (veya (2.26)) ile vurgulanan kompleks dönüşüm ilişkilerinin kullanılması veya bunun uygulanamaması durumunda da çeşitli mathematiksel programlar yardımıyla 2D veya 3D boyutlarındaki analizlerinin göz önüne alınması da söz konusudur.

4. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, tez konusunun temelini teşkil edecek şekilde gerekli olan çeşitli tanımlamalar, teoriler ve örnekler öncelikli olarak sunulmuş ve ardından da bu araştırmanın esas dayanğı konumunda olan kompleks (bağımsız değişkenli) üstel (exponential) fonksiyonlar, bunların tersleri ve hatta bunların yardımyla oluşturulmuş bazı özel (elementer) fonksiyonlarla ilişkili olan ve gerçel parametreli (değişkenli) özel fonksiyonları içeren ek bilgilere, teorilere ve örneklendirmelere de yer verilmiştir. Daha sonra da, kompleks parametreli (değişkenli) Logistik fonksiyonun en kullanışlı hali durumundaki kompleks (standart) Sigmoid fonksiyonu üzerine odaklanılmış ve bunlarla ilgili olan çeşitli önermeler öncelikli olarak verilmiş ve ardından da ispatlanmıştır. Bu araştırmanın bulgularına yönelik çeşitli olası sonuçlar için de, "Bulgular ve Tartışma" kısmında elde edilen temel önermeler genelleştirilerek en genel formdaki kompleks parametreli (değişkenli) Lojistik fonksiyonana genişletimesi için gerekli olabilecek çeşitli önerilerde bulunulmuştur. Bu tez araştırmasında sunulan gerek gerçel (reel) değişkenli (parametreli) gerekse kompleks değişkenli (parametreli) hem ilgili temel fonksiyonlara hem de onların çeşitli modellemeleri ile belirlenecek olan çeşitli grafiklere ışık tutması amacıyla, bazı 2D ve 3D boyutlarındaki grafiksel örneklendirmeler de sunulmuştur.

KAYNAKLAR

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions. New York, USA.

Area, I., Losada, J. and Nieto, J. J. 2016. A note on the fractional logistic equation. Phys. A Stat. Mech. Its Appl., 444: 182-187.

Bell, W. W. 1968. Special functions for scientists and engineers. D. Van Nostrand Company Ltd, 247, Reinhold, New York.

Boas, R. P. 1954. Entire Functions. Academic Press, 276, Cambridge.

Carrillo, M. and Gonzalez, J. M. 2002. A new approach to modelling sigmoidal curve. Technological Forecasting and Social Change, 69: 233-241.

Chen Z. and Cao, F. 2009. The approximation operators with sigmoidal functions. Comput. Math. Appl.,58: 758-765.

Costarelli, D. and Spigler, R. 2013. Approximation results for neural network operators activated by sigmoidal functions. Neural Networks, 44: 101-106.

Cramer, J. S. 2002. The origins of logistic regression. Tinbergen Institute, vol. 119: p. 167-178.

El-Sayed, A. M. A., El-Mesiry A. E. and El-Saka, H. A. A. 2007. On the fractional-order logistic equations. Appl. Math. Lett., 20: 817-823.

Fadipe-Joseph, O. A., Oladipo, A. T. And Ezeafulukwe, U. A. 2013. Modified sigmoid function in univalent function theory. Int. J. Math. Sci. Eng. Appl., 7: 313-317.

Goel, P. and Kumar, S. 2019. Certain class of starlike functions associated with modified sigmoid function. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 43: 957-991.

Hamzat, J. O. and Oladipo, A. T. 2022. On a comprehensive class of analytic p-valent functions associated with shell-like curve and modified sigmoid function. Malaysian J. Comput., 7 (1): 995-1010.

Iliev, A., Kyurkchiev, N. and Markov, S. 2016. Approximation of the cut function by Stannard and Richards sigmoid functions. IJPAM, 109 (1): 119-128.

Irmak, H. 2023. A special note on the Logistic functions with complex parameters and some of related Implications. WSEAS Transactions on Mathematics, 22: 388-394.

Kyurkchiev, N. and Svetoslav, M. 2015. Sigmoid Functions in: Some Approximation and Modelling Aspects, Lap Lambert Academic Publishing, 120, Saarbrucken.

Kyurkchiev, N. and Markov, S. 2016. On the Hausdorff distance between the Heaviside step function and Verhulst logistic function. J. Math. Chem., 54 (1): 109-119.

Lebedev, N. N. 1965. Special functions and their applications. Prentice Hall, 308, New Jersey.

Mendiratta, R. Nagpal, S. and Ravichandran, V. 2015. On a subclass of strongly starlike functions associated with exponential function. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 38 (1): 365-386.

Murugusundaramoorthy, G. and Janani, T. 2015. Sigmoid function in the space of univalent λ-pseudo starlike functions. Int. J. Pure Appl. Math., 101: 33-41.

Nascimento, J. D., Damasceno, R. L. C., Oliveira, G. L. and Ramos, R. V. 2018. Quantum-chaotic key distribution in optical networks: From secrecy to implementa- tion with logistic map. Quantum Inf. Process., 17 (12): 329-336.

Nehari, Z. 1952. Conformal Mapping. MacGraw-Hill, 383, New York.

Nieto, J. J. 2022. Solution of a fractional logistic ordinary differential equation, Appl. Math. Lett., 123: Paper No. 107568, 5 pp.

Olver, F. W. J., Lozier, D. W., Boisvert , R. F. and Clark, C. W. 2010. NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, 951, New York, USA.

Pelinovsky, E., Kurkin, A., Kurkina, O., Kokoulina, M. and Epifanova, A. 2020. Logistic equation and COVID-19. Chaos Solitions Fractals, 140: 110241.

Shi, L. Wang, Z.-G. Su, R.-L. and Arif, M. 2020. Initial successive coefficients for certain classes of univalent functions involving the exponential function. J. Math. Inequal. 14 (4): 1183-1201.

Singh, G. and Singh, G. 2018. Subclasses of multivalent functions of complex order related to sigmoid function. J. Computer Math. Sci., 9: 38-48.

Srivastava, H. M. and Area, I. and Nieto, J. J. 2021. Power-series solution of compartmental epidemiological models. Math. Biosci. Eng., 18 (4): 3274-3290.

Tarasova, V. V. and Tarasov, V. E. 2017. Logistic map with memory from economic model. Chaos Solitons Fractals, 95: 84-91.

Thieme, H. R. 2003. Mathematics in Population Biology in: Princeton Series in Theoretical and Computational Biology, 568, Princeton University Press.

Titchmarsh, E. C. 1964. The Theory of Functions. Oxford University Press, 452, Oxford.

Verhulst, P. F. 1838. Notice Sur la Loi Que la Population Poursuit dans Son Accroissement. Correspondance Mathematique et Physique, 10: 113-121.

Verhulst, P. F. 1845. Recherches Mathematiques sur la Loi D'accroissement de la Population (Mathematical Researches into the Law of Population Growth Increase). Nouveaux Memoires de l'Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles,18: 1-42.

Verhulst, P. F. 1847. Deuxieme Memoire sur la Loi Daccroissement de la Population. Memoires de lAcademie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, 20: 1-32.

Wang, Z. X. and Guo, D. R. 2010. Special Functions. World Scientific, 695, Singapore.

Wang, X. and Wang, Z. 2018. Coefficients inequality for a new subclass of analytic and uni- valent functions related to sigmoid function. International Journal of Modern Mathematical Sciences, 16 (1): 51-57.

West, B. J. 2015. Exact solution to fractional logistic equation. Phys. A Stat. Mech. Its Appl., 429: 103-108.

Whittaker, E. T. and Watson, G. N. 1963. A Course of Modern Analysis in: An Introduction to the General Theory of Infinite Processes of Analytic Functions; with an Account of the Principal Transcendental Functions. Cambridge University Press. 435, Cambridge.

Zaprawa, P. 2019. Henkel determinants for univalent functions related to the exponential functions. Symmetry, 11: Art. 1211.

Zhang, S. and Jin, J. 1966. Computation of Special Functions, 717, Wiley.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı	Ahlam MOHAMMED SAEED SAEED

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2020-2023
Lisans	Al-Musul Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Anabilim Dalı	2007-2012

İş Deneyimi

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2013-Halen	Marakış Kız Ortaokulu, Iraq	Öğretmen