ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRSEL MERTEBEDEN HESAPLAMALAR: İLGİLİ TANIMLAR, TEORİLER VE BAZI OLASI SONUÇLAR

Ömer Faruk KULALI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2023

Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Ömer Faruk KULALI tarafından hazırlanan "**Kesirsel Mertebeden Hesaplamalar: İlgili Tanımlar, Teoriler ve Bazı Olası Sonuçlar**" adlı bu tez çalışması 15/05/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. A. Haydar EŞ
Matematik Eğitim Anabilim Dalı
Başkent Üniversitesi

Üye : Prof. Dr. Hüseyin IRMAK
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye : Doç. Dr. Müfit ŞAN
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. HAMİT ALYAR
Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**Kesirsel Mertebeden Hesaplamalar: İlgili Tanımlar, Teoriler ve Bazı Olası Sonuçlar**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programıyla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim. 15/05/2023

Ömer Faruk KULALI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRSEL MERTEBEDEN HESAPLAMALAR:
İLGİLİ TANIMLAR, TEORİLER VE BAZI OLASI SONUÇLAR

Ömer Faruk KULALI

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

Bu sunulan tezin temel amacı, kesirsel mertebeden hesaplamalar ile ilgili temel bilgileri ve bazı operatörleri öncelikli olarak tanıtmak, ardından da kesirsel hesaplamaların bazı analitik fonksiyonlara olan çeşitli etkilerini belirlemek ve bunların olası bazı sonuçlarını sunmaktır.

2023, 71 sayfa

ANAHTAR KELİMELER : Kompleks düzlem, Açık birim disk, Bölge, Kompleks değişkenli fonksiyon, Analitik fonksiyon, Eşitsizlikler, Taylor MacLaurin seri açılımları, Kesirsel mertebeden hesaplamalar, Kesirsel merteden operatörler.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

FRACTIONAL ORDER CALCULUS:
RELATED DEFINITIONS, THEORIES AND SOME IMPLICATIONS

Ömer Faruk KULALI

Çankırı Karatekin University
Graduate Scool of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Hüseyin IRMAK

The main purpose of this present thesis is primarily to introduce basic information and some operators relating to fractional order calculus, and then to determine various effects to certain analytic functions and to present some of those.

2023, 71 pages

Keywords: Complex plane, Open unit disc, Domain, Function with complex variable, Analytic function, Inequalities, Taylor-Maclaurin series expansion, Fractional-order calculus, Operators of fractional order.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Kesirsel mertebeden hesaplamalar ve bunlar yardımıyla tanımlanan (bazı) temel operatörler reel (gerçel) veya kompleks değişkenli fonksiyonlar için literatürde hem teorik hem de uygulamalı bilimlerde oldukça önemli rol oynayan aktif bir bilim alanıdır. Bu açıdan, bu tez araştırmasına yönelik gerekli ön bilgiler, tanımlar, teoriler, bazı uygulamalar öncelikli olarak verilecek ve ardından da analitik fonksiyonlara ilişkin elde edilen çeşitli özgün sonuçlar ile bunların bazı olası sonuçları sunulacak ve ilgili araştırmacılar için çeşitli önerilerde bulunulacaktır. Bu bilimsel araştırma dört bölümden oluşmaktadır ve literatüre kazandırılan özgün sonuçlar da bu tez çalışmasının "Bulgular ve Tartışma" kısmında verilmiştir.

Tez savunma sürecinde ve sonrasında ilgileri, çeşitli yapıcı ve tamamlayıcı önerileri olan Sayın Prof. Dr. A. Haydar EŞ ve Doç. Dr. Müfit ŞAN jüri üyelerime içten teşekkürlerimi sunar ve özellikle bu akademik araştırmanın tüm süreçlerinde bana yön gösteren, farklı bir ufuk açan, yardımlarını da hiç esirgemeyen ve her daim sabırla davranan danışmanım Sayın Prof. Dr. Hüseyin IRMAK'a da çok teşekkür ederim.

Özellikle, yoğun süren iş hayatımda ve tez çalışmalarım sürecinde bana daima anlayış, sabır gösteren ve destek olan değerli eşim Güler KULALI'ya ve sevgili kızlarım Sevde ve Zeynep'e de ayrıca teşekkür ederim.

Ömer Faruk KULALI
Çankırı, 15/05/2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET ... **...i**
ABSTRACT ... **..ii**
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ... **.iii**
İÇİNDEKİLER ... **.iv**
SİMGELER DİZİNİ ... **..v**
ŞEKİLLER DİZİNİ ... **.vi**
1. GİRİŞ ... **..1**
2. MATERYAL VE YÖNTEM ... **..5**
2.1 Ön Bilgiler ... **..5**
2.2 Bazı Kesirsel (Mertebeden) Hesaplamalar ve İlgili Operatörler ... **22**
2.2.1 Kesirsel (Mertebeden) İntegral ve İlgili Operatör ... **22**
2.2.2 Kesirsel (Mertebeden) Türevler ve İlgili Operatörler ... **32**
3. BULGULAR VE TARTIŞMA ... **41**
3.1 $\boldsymbol{\phi^{(m)}(z)}$ Operatörü ... **42**
3.2 $\mathbf{D_{\lambda}^{m}\{\phi(z)\}}$ Operatörü ... **43**
3.3 $\mathbf{\mathbb{D}_{\lambda}^{m}\{\phi(z)\}}$ Operatörü ... **45**
3.4 $\mathbf{\mathfrak{D}_{\lambda}^{m}\{\phi(z)\}}$ Operatörü ... **51**
3.5 $\mathbf{\mathbb{J}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi(z)\}}$ Operatörü ... **53**
4. SONUÇ ... **63**
KAYNAKLAR ... **66**
ÖZGEÇMİŞ ... **71**

SİMGELER DİZİNİ

$\mathrm{Arg}(w)$	Sıfırdan farklı w gibi bir kompleks sayısının esas argümenti
$\mathrm{B}(-,-)$	Beta fonksiyonu
$\mathbb{C}$	Kompleks sayıların oluşturduğu küme
$\mathrm{D}_z^{-\beta}(-)$	β-mertebeden kesirsel integral operatörü
$\mathrm{D}_z^{\beta}(-)$	β-mertebeden kesirsel türev operatörü
$\Im\mathrm{m}(\omega)$	ω gibi bir kompleks ifadenin sanal (imajiner) kısmı
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \cdots\}$ şeklindeki doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, \cdots\}$ şeklindeki küme
$\mathbb{N}_{\mathrm{m}}$	$\mathrm{m} \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\{\mathrm{m}, \mathrm{m}+1, \cdots\}$ şeklindeki doğal sayıların oluşturduğu sonsuz elemanlı küme
$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar kümesi
$\Re\mathrm{e}(\omega)$	ω gibi bir kompleks ifadenin reel kısmı
U	Kompleks düzlemdeki açık birim disk
$\mathbb{Z}$	Tam sayıların oluşturduğu küme
$\mathbb{Z}^-$	Negatif tam sayıların oluşturduğu küme
$\mathbb{Z}_{\bar{0}}^-$	$\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ şeklindeki küme
$\Gamma(-)$	Gamma fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Gamma fonksiyonunun grafiği 10
Şekil 2.2 $f(x) = e^{-x^2}$ üstel fonksiyonunun grafiği 11

1. GİRİŞ

Kesirsel mertebeden hesaplamalar literatür açısından oldukça kapsamlı bir bilimsel çalışma alanı olup, matematiksel analizin birçok alanında (adi ve kısmi diferansiyel denklemler, integral denklemler, çeşitli serisel formlar ve dönüşümler vb.) çeşitli kesirsel mertebeden hesaplamaların operatörleri olarak hem teorik ve hem de uygulamalarının ilginç hesaplarını içerir.

Özellikle bu bilimsel çalışmanın ana amacı, kesirli mertebeden hesaplama operatörlerinin bazı tipleriyle ilgili olan uygulamalarına ve sonsuz serilerle belirlenen bazı elementer fonksiyonların oluşturduğu fonksiyon ailelerine yönelik olası etkilerinin belirlenmesi için, gerekli bazı temel bilgilerin öncelikli tanıtılması ve ardından da bazı özgün sonuçların belirlenmesi ve analizleri planlanmaktadır.

Genellikle, ilgili operatörler karşımıza hem kesirsel mertebeden integraller hem de kesirsel mertebeden türevler olmak üzere iki şekilde çıkan ve integral teorisini esas olan operatörlerdir. Özellikle, kesirsel mertebeden türevle ilgili olan operatörler hem gerçel değişkenli hem de kompleks değişkenli fonksiyonların gerçel veya kompleks mertebeden türevlerini içeren türev operatörleridir. Kesirsel türev açısından, ilk kez 1695 yılında G. W. Leibniz tarafından G. L'Hospital'a yazılan mektup ile literatürde kendine yer edinmiş olan kesirsel türev kavramı, Leibniz'in Bernoulli kardeşlerden birine yazdığı mektupla da tarihsel süreci sürdürmüştür. İlgili mesajları içeren bilgilendirmeler için ve Abel (1823) ve Katugampola (2014)'de verilen kaynaklardır. İntegral ile türev arasındaki ters ilişkiyi içeren kesirsel mertebeden integral açısından da Publubany *et al.* (2017) ile verilen eser temel eserdir. Daha sonra da, vurgulanan kavramların temelleri de Liouville tarafından 1832 yılı itibarıyla yazılı literatürde yerini almıştır. Bunlar için de Liouville (1832) ve Dugowson (1994) eserlerine odaklanılabilir. 1890'lı yıllarda O. Heaviside tarafından kesirsel mertebeden diferansiyel operatörlerin ilk pratik uygulaması literatürde yerini almıştır. Bunun için de Duarte *et al.* (2014) ile verilen eser temel referanstır. Kesirsel mertebeden hesaplamaların teori ve uygulamaları, 19. ve 20. yüzyıllarda büyük ölçüde genişlemesini sürdürdü ve çok sayıda kesirsel mertebeden türev ve kesirsel mertebeden integral içeren yeni tanımlamalar ve

çeşitli uygulamalar kendini gösterdi. Özellikle, Duarte *et al.* (2014) ile verilen eser önemli bir referans olduğunu vurgulamak istiyoruz.

Başlangıçta vurgulanan, yani 1695 tarihli mektupta geçen $1/2$-*mertebeden* türev almak gibi bir paradoks ile başlayan, kesirsel (mertebeden) hesapların bilimsel ve mühendislik problemlerinin önemli öncüleri olarak Niels Henrik Abel, Kenneth- Robert Cole, Andrew Gemant, Andrey N. Gerasimov, Oliver Heaviside, Paul Lévy, Rashid Sh. Nigmatullin, Yuri N. Rabotnov ve George Scott Blair bilinse de, günümüze kadar gelen ve hala canlılığını sürdüren temel kavramlar açısından, yani ilgili hesaplamalar ve bunlar yardımıyla tanımlanan çeşitli operatörler için Letnikov (1868), Samko *et al.* (1993), Kilbas *et al.* (2006), Ross (1992), Srivastava (2020), Debnath (2004), Daftardar-Gejji (2014), Grappe *et al*. (2019), Grozdev (1997) ve Srivastava and Owa (1989) eserleri başlıca kapsamlı referanslar olarak verilebilir. Aynı zamanda, kesirsel hesaplamaların çeşitli uygulamaları olarak da Anastassiou (2011), Bapna and Jain (2008), Diethelm *et al.* (2005), Hermann (2014), Stojanovic (2011), Taberski (1986), Tarasova and Tarasov (2016), Zhuravkov and Romanova (2015), Oldham and Spanier (1974), Podlubny (1999), Herzallah (2014), Hilfer (2000), Luchko (1999), Luo and Raina (2019) ve Meerschaert and Sikorskii (2012) makalelerindeki özel sonuçlara da odaklanılabilir.

Elbette ki, ilgili paradoksun günümüze kadar gelmesinde önemli katkısı olan faktöriyel kavramının Gamma fonksiyonu yardımıyla genellemesi oldukça önemli rol almıştır. Verilen $\phi(z)$ gibi bir (orijini içine alan bir bölgede) analitik olan fonksiyonun kesirsel (λ -) mertebeden türev ve integral için,

$$\mathbf{I}^{n}\{\phi(z)\} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^z (z-\tau)^{n-1}\phi(\tau)d\tau$$

şeklindeki gibi bir operatörde geçen faktöriyel kavramı için Gamma fonksiyonunun dikkate alınması önemli olacaktır. Bu durumda, bilinen Cauchy (Türev veya İntegral) teoremini (formülünü) dayanak kabul ederek ve Gamma fonksiyonu (ile birlikte Beta fonksiyonunu da) göz önüne alarak:

$$\mathbf{I}^{\lambda}\{\phi(z)\} = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^z (z-\tau)^{\lambda-1}f(\tau)d\tau$$

şeklindeki integral ile vurgulanan sav, kesirsel düzene geçiş için dayanağı olan ve geçerli bir operatör savını taşımıştır. Gerekli hipotezler elbette ki hem ilgili integrallere hem de Gamma fonksiyonunun tanımına göre şekillenecektir.

Her iki kesirsel hesaplamaları da içeren, e ($e \in \mathbb{R}$) noktasını içine alan kompleks düzlemdeki herhangi bir bölgede analitik olan $\phi(z)$ gibi bir kompleks (değişkenli) fonksiyonun λ-*mertebeden* kompleks (veya reel) türevi (veya λ-*mertebeden* kompleks (veya reel) integrali):

$$ {}_{e}\mathbf{D}_{z}^{\lambda}\{\phi(z)\} \quad (v \in \mathbb{N}\,; e \in \mathbb{R}\,; \lambda \in \mathbb{C}) $$

şeklindeki gibi bir genel operatör ile gösterilir ve

$$ {}_{e}\mathbf{D}_{z}^{\lambda}\{\phi(z)\} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{e}^{z} (z-\tau)^{-\lambda-1}\phi(\tau)d\tau & \text{eğer } \Re e\,(\lambda) > 0 \text{ ise} \\ \frac{d^{v}}{dz^{v}}\left\{ {}_{e}D_{z}^{\lambda-v}\{\phi(z)\}\right\} & \text{eğer } v-1 \le \Re e(\lambda) < v \text{ ise} \end{cases} $$

şeklindeki integrallerin var olması şeklinde tanımlanır. Burada, özellikle $e \coloneqq 0$ olarak seçilirse,

$$ \mathbf{D}_{z}^{\lambda}\{f(z)\} \coloneqq {}_{0}\mathbf{D}_{z}^{\lambda}\{f(z)\} \qquad (\lambda \in \mathbb{C}) $$

şeklindeki (differ-integral) operatörü elde edilir ki bu operatör de, kesirsel (mertebeden) hesaplamalar teorisinde, λ-*mertebeden* klasik Riemann-Liouville integrali olarak bilinir (Liouville 1932).

Bu tez çalışması kompleks fonksiyonlarla ilgili kesirsel mertebeden türev ve integrallere göre hedef belirleyeceğinden dolayı, vurgulanan hipotezler ve tanımlar daha sonraki bölümlerde netleştirilecektir.

Yukarıda vurgulandığı gibi, doğal olarak, bu araştırma temelde iki bilim alanıyla doğrudan ilgili olacaktır. Bunlardan birincisi, "Kesirsel Mertebeden Hesaplamalar" ve bunlar yardımıyla tanımlanan bazı temel operatörler ve ikincisi de belirtilen operatörlerin uygulama alanıyla ilgili olan Kompleks Fonksiyonlar Teorisi ile alakalı bilim alanı olacaktır. Bu açıdan da, yani, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi ile ilgili olabilecek tüm temel kavramlar ikinci bölümde tanıtılacak olan temel bilgilerini içerecektir. Bu detaylı bilgiler için de Nehari (1952), Pommerenke (1975), Duren

(1983), Wunsch (1994), Kayman (1994), Brown and Churchill (1996) ve Goodman (1983) eserlerinin her biri temel referanslar olacaktır. Ayrıca, fonksiyonlar teorisinin hem kompleks hem de gerçel değişkenli olan çeşitli özel fonksiyonlar (special functions with complex (or real) variable) ile çeşitli yönlerden olası ilişkileri gereği, Artin (1964), Lavoie *et al*. (1976), Srivastava and Owa (1989), Podlubny (1999), Vinagre *et al.* (2005), Saxena (2009), Olver *et al.* (2010), Machado and Kiryakova (2019), Mainardi (2020) and Kiryakova (2021) eserelerine de odaklanılabilinir.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Aşağıda verilen temel olan tanımların tümü için Ahlfors (1979), Brown and Churchill (1996) ve Wunsch (1994) eserleri birer kapsamlı referans teşkil etmektedir.

2.1. Ön Bilgiler

2.1.1 Tanım. Kompleks sayıların belirlediği küme $\mathbb{C}$ notasyonu ile gösterilir ve bu küme de:

$$\mathbb{C} = \{ z = x + iy : x, y \in \mathbb{R} \}$$

şeklinde tanımlanır.

Kompleks sayılar kümesinin öğelerinin bire-bir olarak eşleştirilmiş olduğu düzlem de; "Kompleks Düzlem", "Analitik Düzlem" veya "z–düzlemi" olarak literatürde sıkça karşılaşılan düzlemdir.

2.1.2 Tanım. Kompleks düzlemde veya $\mathbb{C}$'de açık birim disk genellikle $\mathbb{U}$ gösterimi ile gösterilir ve bu küme de:

$$\mathbb{U} = \{ w \in \mathbb{C} : |w| < 1 \}$$

şeklinde tanımlanan orijin merkezli ve 1 br yarıçaplı disktir.

2.1.3 Tanım. Herhangi $\mathbb{E}_1$ ve $\mathbb{E}_2$ şeklindeki boş kümeden farklı iki küme verilsin. Eğer, $\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2 = \emptyset$ ise $\mathbb{E}_1$ ve $\mathbb{E}_2$ kümeleri ayrık kümelerdir denir.

2.1.4 Tanım. Herhangi bir $w_0 \in \mathbb{C}$ gibi bir kompleks sayısının δ – açık komşuluğu genellikle $\mathrm{U}_\delta(w_0)$ $(\delta > 0)$ gösterimi ile ifade edilir ve bu küme de:

$$\mathrm{U}_\delta(w_0) = \{ w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \delta \quad (\delta > 0) \}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.5 Tanım. $\mathbb{E} \subset \mathbb{C}$ gibi bir alt kümesi verilsin $w_0 \in \mathbb{E}$ olsun. Eğer, verilen noktanın $U_\delta(w_0) \subset \mathbb{E}$ olacak şekilde bir komşuluğu var ise, w_0 noktasına $\mathbb{E}$ kümesinin $(\mathbb{C}'\mathrm{de})$ bir iç noktası adı verilir.

2.1.6 Tanım. $\mathbb{E} \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer, $\mathbb{E}$'nin bütün noktaları $(\mathbb{C}'\text{de})$ bir iç nokta ise, $\mathbb{E}$ kümesine $(\mathbb{C}'\text{de})$ bir açık kümedir denir.

2.1.7 Tanım. Ayrık ve açık iki kümenin birleşimi şeklinde yazılamayan kümelere bağlantılı küme adı verilir.

2.1.8 Tanım. Açık ve bağlantılı olan kümelere bölge adı verilir.

2.1.9 Tanım. Boş kümeden farklı herhangi $\mathbb{A} \subset \mathbb{C}$ ve $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}$ şeklindeki iki küme verilsin. Fonksiyon olma koşulları altında, $\mathbb{A}$ kümesinin elemanlarını $\mathbb{B}$ kümesinin elemanlarına götüren kurala Kompleks Fonksiyon adı verilir.

Bilindiği gibi, $z \in \mathbb{A}$ ve $w \in \mathbb{B}$ olmak üzere, üstte vurgulanan kuralı ϕ ile ifade edilirse, ilgili fonksiyon "Kompleks Fonksiyon" adıyla anıldığı gibi "Kompleks Değişkenli Fonksiyon" adıyla da anılır ve genellikle

$$\begin{aligned} \phi &: \mathbb{A} \to \mathbb{B} \\ z &\longmapsto w := \phi(z) \end{aligned}$$

gösterimiyle ifade edilir. Hatta " z-bağımsız değişkenli" ve "w-bağımlı değişkenli kompleks fonksiyon" veya kısaca "Kompleks Değişkenli Fonksiyon" ifadeleriyle sıkça karşılaşılır.

2.1.10. Tanım. Verilen $\phi(z)$ gibi bir kompleks değişkenli fonksiyon herhangi bir z_0 gibi noktanın en az bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\phi(z) - \phi(z_0)}{z - z_0} \tag{2.1}$$

şeklindeki limiti var ise, bu limite $\phi(z)$ kompleks fonksiyonun $z = z_0$ noktasındaki türevi adı verilir ve bilindiği gibi ilgili limit genellikle

$$\phi'(z_0) \quad , \quad \phi'(z)|_{z:=z_0} \quad , \quad \left.\frac{d\phi}{dz}\right|_{z:=z_0} \quad \text{veya} \quad \frac{d\phi(z_0)}{dz}$$

şeklindeki gösterimlerinden herhangi biri ile gösterilir. Özellikle, daha da kullanışlılık açısından, yukarıda sunulan türev tanımı için,

$$z - z_0 = h \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad z \to z_0$$

gibi ilişkiler göz önüne alındığında da, (2.1)'de verilen limite denk gelen konumdaki limit:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(z_0+h)-\phi(z_0)}{h} \tag{2.2}$$

şeklindeki limitle de sıkça karşılaşılır.

Kompleks değişkenli fonksiyonların türevlerine ilişkin uygulamalarda sıkça kullanılan (2.1) veya (2.2)'deki tanımlar, aynı zamanda verilen $\phi := \phi(z)$ gibi bir kompleks fonksiyonunun z (kompleks) bağımsız değişkenine göre türevi için de göz önüne alınır. Bu durumda, ilgili (genel bağımsız değişkene göre) türeve ilişkin limit:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(z+h)-\phi(z)}{h} \tag{2.3}$$

şeklindeki limitle de ifade edilir. Bilindiği gibi, ilgili limit de

$$\phi'(z) \qquad \text{veya} \qquad \frac{d\phi}{dz}$$

şeklindeki notasyonlarıyla ifade edilmektedir.

Bilindiği gibi (2.1) ile (2.3) arasındaki verilen türeve (diferansiyele) ilişkin olan denk üç tanım araştırmamız açısından çok temel kavramlardan biridir. İlgili olabilecek bazı hatırlatmalara geçmeden önce, özellikle, (açık) kümelerinin her bir noktasında türevlenebilen fonksiyonlar için bazı önemli özel tanımlamalar da söz konusu olmaktadır. Bunlar sırasıyla nokta bazında analitik fonksiyon, küme bazında analitik fonksiyon ve tam fonksiyon olarak literatürde karşılaşılan önemli kavramlardır. Şimdi, çeşitli terimler kapsamında kullanılacak olan bu özel kavramları hatırlatalım.

2.1.11 Tanım. Verilen $\phi(z)$ gibi bir kompleks fonksiyonu eğer herhangi bir z_0 noktasının en az bir komşuluğundaki her bir noktada analitik oluyor ise, $\phi(z)$ kompleks (değişkenli) fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

2.1.12 Tanım. $\phi(z)$ gibi bir kompleks (değişkenli) fonksiyon eğer verilen herhangi bir $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ gibi bir açık kümenin her bir noktasında analitik ise, $\phi(z)$ kompleks (değişkenli) fonksiyonuna $\mathbb{D}$ kümesinde analitiktir veya kısaca analitik bir fonksiyondur denir.

2.1.13 Tanım. Verilen herhangi bir $\phi(z)$ gibi bir kompleks (değişkenli) fonksiyon, $\mathbb{C}$ kümesinin her bir noktasında türevlenebilir ise, $\phi(z)$ kompleks (değişkenli) fonksiyonuna, $\mathbb{C}$ kümesinde analitiktir veya kısaca $\phi(z)$ kompleks (değişkenli) fonksiyonu tam fonksiyondur denir.

2.1.14 Tanım. $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlara, $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri veya kompleks eğri adı verilir. Ayrıca, $\gamma(a)$'ya γ eğrisinin başlangıç noktası ve $\gamma(b)$'ye γ eğrisinin bitiş noktası adları verilir.

2.1.15 Tanım. γ gibi herhangi bir kompleks eğri kendi kendini sadece başlangıç ve bitiş noktalarında kesiyor ise, γ eğrisine basit kapalı eğri adı verilir.

Aşağıda verilen teorem analitik fonksiyonlar teorisinde oldukça önemli rol alan bir teoremdir. Verilen bir bölgede ve sınırında analitik olan bir fonksiyonun her mertebeden türevinin varlığını ifade eden ve analitik fonksiyonların bu durumunun ifadesi gerçel değişkenli fonksiyonlar için geçerli olmamaktadır.

2.1.1 Teorem. Herhangi bir $\phi(z)$ kompleks (değişkenli) fonksiyonu, kompleks düzlemin κ gibi bir noktasını içermeyen bir basit kapalı γ eğrisinin üzerinde ve bu γ eğrisiyle belirlenmiş ve κ noktası hariç olan D_γ gibi bir (basit kapalı) bölgede analitik olsun. Eğer, $\kappa \in D_\gamma$ ise, her $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$\phi^{(n)}(\kappa) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\phi(z)}{(z-\kappa)^{n+1}} dz \tag{2.4}$$

veya

$$\int_{\gamma} \frac{\phi(z)}{(z-\kappa)^{n+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{n!}\, \phi^{(n)}(\kappa) \tag{2.5}$$

dır. Teorem 2.1.1'deki (2.4) ile verilen teorem literatürde Cauchy türev teoremi ve (2.5) ile verilen teorem de Cauchy integral teoremi olarak bilinir (Brown and Churchill 1996).

Ayrıca, her $z \in \mathrm{D}_{\gamma}$ için, (2.4)'te belirtilen fonksiyonun ve her bir türevinin değeri, verilen integral yardımıyla hesaplanabilir. Diğer bir ifadeyle, belirtilen D_{γ} bölgesinde analitik olan herhangi bir kompleks fonksiyonu ilgili bölgede her mertebeden türeve sahiptir ve ilgili türevler de yine D_{γ} bölgesinde birer analitik fonksiyonlardır.

Aşağıda verilen bazı özel fonksiyonlar literatürde hem gerçel hem de kompleks parametreli (değişkenli) olarak karşımıza çıkar. Fakat, bizim tez çalışmamızda gerçel parametreli halleri yeterli olacağından dolayı, sadece bu türlerine odaklanılmıştır. Literatürde de sıkça karşılaşılan ilgili bu özel fonksiyonlara ilişkin tanımlamalar ve çok temel bazda uygulamalar ve teoriler için; Nehari (1952), Artin (1964), Pommerenke (1975), Duren (1983), Wunsh (1994) ve Olver *et al.* (2010) eserleri birer temel referans teşkil etmektedir.

2.1.16 Tanım. Her $t \in \mathbb{R}^{*} \coloneqq \mathbb{R} - \{\mathbb{Z}^{-} \cup \{0\}\}$ için, t değişkenli (parametreli) ve $\Gamma(t)$ notasyonu ile gösterilen Gamma fonksiyonu:

$$\Gamma(\mathrm{t}) = \int_{0}^{\infty} w^{\mathrm{t}-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{w}}\, \mathrm{dw} \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır (Carlson 1977) .

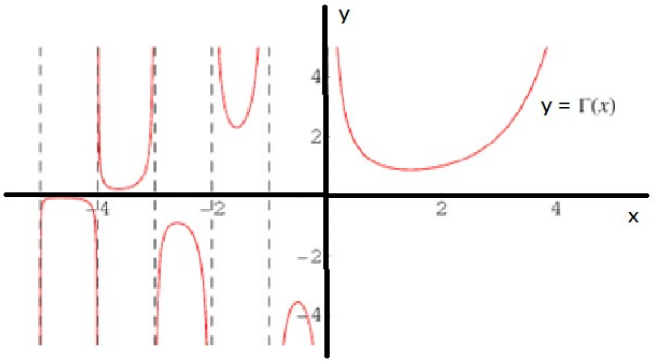
Klasik analiz bilgilerinin ışığında, (6) ile verilen integral bir genelleştirilmiş integral olup ve bu integral göz önüne alındığında da;

- Her $t \in \mathbb{Z}_{0}^{-} \coloneqq \mathbb{Z}^{-} \cup \{0\}$ tamsayıları için ilgili genelleştirilmiş integralin ıraksak olduğu,
- Her $t \in \mathbb{R}^{*}$ değerleri için de ilgili genelleştirilmiş integralin yakınsak olduğu

kolayca görülebilir. (2.6) ile sunulan genelleştirilmiş integralinin yakınsaklık durumlarının matematik bilimine sunduğu ciddi katkı, doğal olarak, sonsuz sayıdaki çeşitli (kompleks (veya reel) parametreli genelleştirilmiş) integrallerin hesaplanabilirliği yadsınamaz. Hem bu açıdan hem de ilgili fonksiyonun araştırmamız açısından önemli olacağından dolayı, her $x \coloneqq t \in \mathbb{R}^*$ saysı için

$$y = f(x) \coloneqq \Gamma(x)$$

şeklindeki bu özel fonksiyona ait olan aşağıdaki grafiğinin sunulmasında fayda görülmektedir.



Şekil 2.1 Gamma fonksiyonunun grafiği

Özellikle, sıkça (kullanılan) karşılaşılan ve aşağıdaki gibi sunulan çok temel bazı özellikler (veya sonuçlar) klasik analiz bilgileri yardımıyla kolayca belirlenebilir ve bunların her biri uygulanabilir özelliktedir (Carlson 1977):

(i) $\Gamma(0^+) \to +\infty$ ve $\Gamma(0^-) \to -\infty$ olup, negatif tam sayılar için benzeri durumlar yine grafikten açıktır.

(ii) Her $x \coloneqq v \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(\mathrm{v}+1) = \mathrm{v}\Gamma(v) = v!$ dır.

(iii) Her $x \in \mathbb{R}^*$ için $\Gamma(\mathrm{x}) = \frac{\Gamma(\mathrm{x}+1)}{x}$ olacağı açıktır.

(iv) (5)'te verilen tanımı göz önüne alarak, aşağıda verilen soldaki genelleştirilmiş integral için $\mathrm{t} = \mathrm{x}^2$ gibi bir değişken değişimi uygulanırsa:

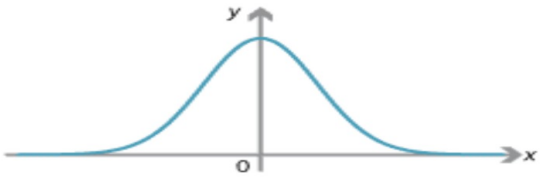
$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\,\mathrm{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{1/2-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\,\mathrm{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

ilişkileri görülür.

(v) $y = f(x) = e^{-x^2}$ (gerçel bağımsız değişkenli) üstel fonksiyonunun;



Şekil 2.2 $f(x) = e^{-x^2}$ fonksiyonunun grafiği

şeklindeki grafiği göz önüne alındığında, üstte geçen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$$

şeklindeki genelleştirilmiş integralinin yakınsak olabileceği ve bu integralin belirlenmesi için de Fubini teoremi dikkate alınırsa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \qquad \text{ve} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy$$

şeklindeki integrallerinden kolayca,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dydx$$

elde edilen iki katlı integral için de

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{Cos}\beta \\ y = \rho \operatorname{Sin}\beta \end{cases} \quad ; \quad p \in [0,\infty) \ , \ \beta \in [0,2\pi]$$

lineer olmayan dönüşümü uygulandığında da aşağıda verilen formdaki bilindik iki katlı integral, yani

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2}\, dy\, dx = \pi$$

sonucu elde edilir.

(vi) Üstteki iki katlı integralden, kolayca,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

ve doğal olarak

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

sonuçları da elde edilir.

(vii) (vi)'de elde edilen sonuç (iv)'te kullanılırsa,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

şeklindeki özel sonuç kolayca elde edilir.

Yukarıda tanıtılan özel fonksiyonların bazı klasik sonuçları için, aşağıda verilen bazı özel hesaplamalar da örnekler olarak sunulabilir.

2.1.1 Örnek. $\Gamma(25) = 24\Gamma(24) = 24 \cdot 23\,\Gamma(23) = 24!$ dır.

2.1.2 Örnek.

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ve

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}$$
$$= -2\sqrt{\pi}$$

olur.

2.1.3 Örnek.

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

ve

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}}$$
$$= \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{5}{2}}$$

$$= -\frac{2}{5}\frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{4}{15}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

dır.

2.1.4 Örnek. Her $v \in \mathbb{N}$ ve her $\gamma \in \mathbb{Z}_0^-$ sayıları için,

$$\Gamma(\gamma) = \frac{\Gamma(v+\gamma)}{\gamma(\gamma+1)\,(\gamma+2)\cdots(v+\gamma-1)}$$

dır (Carlson 1977) .

2.1.17 Tanım. Her $r, s \in \mathbb{R}^*$ sayıları için, r ve s parametreli ve $\mathrm{B}(r,s)$ notasyonu ile gösterilen Beta fonksiyonu:

$$\mathrm{B}(r,s) = \int_0^1 \mathrm{t}^{\mathrm{r}-1}(1-\mathrm{t})^{s-1}\,\mathrm{dt} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır (Artin 1964, Carlson 1977).

2.1.2 Teorem. Her $r, s \in \mathbb{R}^*$ için,

$$\mathrm{B}(r,s) = \frac{\Gamma(\mathrm{r})\,\Gamma(\mathrm{s})}{\Gamma(\mathrm{r+s})} \tag{2.8}$$

dır (Olver *et al.* 2010).

Üstteki teoremde, özellikle; $r, s \in \mathbb{N}$ seçilirse,

$$\mathrm{B}(r,s) = \frac{\Gamma(\mathrm{r})\,\Gamma(\mathrm{s})}{\Gamma(\mathrm{r+s})}$$
$$= \frac{(r-1)!(s-1)!}{(r+s-1)!}$$

olur.

2.1.5 Örnek.

$$\mathrm{B}(3,7) = \frac{\Gamma(3)\,\Gamma(7)}{\Gamma(9)}$$

$$= \frac{2!\,6!}{8!},$$

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},1\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 2\,,$$

$$\mathrm{B}\left(1,-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(1)\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= -2$$

ve

$$\mathrm{B}\left(2\,,\frac{1}{3}\right) = \frac{\Gamma(2)\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(2+\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{4}{3}\Gamma\left(1+\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{9}{4}$$

özel sonuçlar elde edilir.

Teorem 2.1.1'de vurgulanan hipotezleri altında, (2.4)'teki gibi belirtilen bir analitik fonksiyonun her mertebeden türevinin olabildiği göz önüne alındığında, aşağıdaki

tanımla oluşturulan özel formdaki kompleks kuvvet serilerinin tanımları için dayanak teşkil eder.

2.1.18 Tanım. Verilen $\phi \coloneqq \phi(\mathrm{z})$ gibi bir kompleks değişkenli fonksiyonu $\mathrm{z} = z_0$ gibi bir noktanın en az bir komşuluğunda analitik olsun. Bu durumda, aşağıdaki gibi verilen:

$$\phi(\mathrm{z}) = \phi(\mathrm{z}_0) + \phi'(\mathrm{z}_0)(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0) + \frac{\phi''(\mathrm{z}_0)}{2!}(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^2 + \ldots + \frac{\phi^{(\mathrm{n})}(\mathrm{z}_0)}{\mathrm{n}!}(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^{\mathrm{n}} + \cdots$$

$$= \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \frac{\phi^{(\mathrm{n})}(\mathrm{z}_0)}{\mathrm{n}!}(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^{\mathrm{n}} \tag{2.9}$$

şeklindeki kompleks kuvvet serisine, $\phi(\mathrm{z})$ kompleks fonksiyonunun $\mathrm{z} = \mathrm{z}_0$ noktasındaki Taylor seri açılımı adı verilir (Wunsch 1994).

Özellikle, (2.9)'da verilen kuvvet seri açılımında $\mathrm{z}_0 = 0$ alınarak elde edilen kuvvet serisinin de, yani

$$\phi(\mathrm{z}) = \phi(0) + \phi'(0)\mathrm{z} + \frac{\phi'(0)}{2!}\mathrm{z}^2 + \cdots + \frac{\phi^{(\mathrm{n})}(0)}{\mathrm{n}!}\mathrm{z}^{\mathrm{n}} + \cdots$$

$$= \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \frac{\phi^{(\mathrm{n})}(0)}{\mathrm{n}!}\mathrm{z}^{\mathrm{n}} \tag{2.10}$$

şeklindeki gibi elde edilen seri açılımına da $\phi(\mathrm{z})$ kompleks (z-bağımsız değişkenli) fonksiyonunun $\mathrm{z}_0 = 0$ noktasındaki Taylor seri açılımı veya özel olarak MacLaurin seri açılımı adı verilir (Brown and Churchill 1996). Özellikle, üstte sunulan (2.9) ve (2.10)'da ki seri açılımlarında geçen

$$\phi^{(n)}(\mathrm{z}) = \frac{d^n\phi}{dz^n} \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

olduğunu belirtelim. Hatta, (10) ile verilen kuvvet seri açılımını de içeren, Teorem 2.1.1'de verilen (2.4) formülü göz önüne alındığında da, (2.9)'da geçen her bir

$$\phi^{(\mathrm{n})}(\mathrm{z}_0) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

ifadelerinin belirlenmesinde

$$\phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma:|z-z_0|=\epsilon} \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \qquad (\epsilon > 0)$$

şeklindeki bilindik ilişki de vardır (Brown and Churchill 1996).

Üstte belirtilen, yani (2.9)'de ve (2.10)'da verilen kuvvet serileri ile binom açılımları birlikte göz önüne alındığında, (2.9)'deki seriden kolayca (2.10)'da ki gibi bir kompleks seri açılımına varılabileceği kestirilebilir. Doğal olarak, $z_0 = 0$ gibi bir noktada analitik olan herhangi bir $\phi(z)$ gibi bir kompleks fonksiyonun (2.2) formuna benzer bir kuvvet seri açılımı daima mümkündür. Bu açıdan, aşağıdaki gibi verilen kompleks kuvvet serisi açılıma sahip olan genel formdaki kompleks fonksiyonların oluşturduğu ailenin tanımlanması, ileriki araştırmalarımız açısından oldukça önemli ve kapsamlı roller üstlenecektir.

2.1.19 Tanım. $A \neq 0,\ z \in \mathbb{U}$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, $\mathcal{F}_{k}^{A}(n)$ fonksiyonlar ailesini, **U** birim diskinde analitik olan ve

$$\mathcal{F}_{k}^{A}(n) = \{\, \phi(z) :\ \phi(z) = Az^n + A_{n+k}z^{n+k} + A_{n+k+1}z^{n+k+1} + \cdots \,\} \qquad (2.11)$$

şeklindeki seri açılımına sahip olan fonksiyonların oluşturduğu fonksiyonlar ailesi olarak tanımlayalım ((Brown and Churchill 1996, Nehari 1952 ve Kayman 1994).

Özellikle, (2.11) ile sunulan

$$\mathcal{F}_{k}^{A}(n) \quad (A \neq 0\ ;\ k \in \mathbb{N}\ ;\ n \in \mathbb{N}_0)$$

fonksiyonlar ailesinin her bir elemanı olan kompleks (değişkenli) fonksiyonlar $\mathbb{U}$ açık birim diskinde analitik olan tüm fonksiyonların seri açılımlarını içeren en geniş seri açılım formuna sahip analitik fonksiyonların oluşturduğu fonksiyonlar ailesidir. Bu fonksiyonlar ailesinin bazı alt sınıfları da Analitik (ve Geometrik) Fonksiyonlar Teorisi'nde oldukça kullanışlı özel fonksiyonlar ailesini oluşturur. Bu açıdan, ileriki çalışmalarımıza yönelik elementer hesaplamalardaki ciddi sorunlardan dolayı, ilgili aile ve özel halleri bizlere yardımcı olacaktır.

Özellikle;

i) $k := 1$ alınmasıyla elde edilen:

$$\phi(z) = Az^n + A_{n+1}z^{n+1} + A_{n+2}z^{n+2} + \cdots \quad (n \in \mathbb{N}\ ;\ z \in \mathbb{U})$$

şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfı $\mathbb{F}_{n}(A) := \mathcal{F}_{1}^{A}(n)$ ile,

ii) $n:=1$ alınmasıyla elde edilen:

$$\phi(z) = Az + A_{k+1}z^{k+1} + A_{k+2}z^{k+2} + \cdots \quad (k \in \mathbb{N}\,;\, z \in \mathbb{U})$$

şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfı $\mathbf{F}_{\mathrm{A}}(k) \coloneqq \mathcal{F}_k^{\mathrm{A}}(1)$ ile,

iii) $n = 0$ alınmasıyla elde edilen:

$$\phi(z) = A + A_k z^k + A_{k+1}z^{k+1} + \cdots \quad (k \in \mathbb{N}\,;\, z \in \mathbb{U})$$

şeklindeki fonksiyonlar sınıfı da $F_k(\mathrm{A}) \coloneqq \mathcal{F}_k^{\mathrm{A}}(0)$ şeklindeki fonksiyonlar ailesi ile göstersin.

Yine literatür açısından, yukarıda oluşturulan temel bazdaki üç tane fonksiyonlar ailesindeki fonksiyonlar çeşitli isimlerle karşımıza çıkar. Hepsi açısından, özellikle, en genel seri formundaki, yani (2.11) formundaki tüm fonksiyonların ilgili katsayıları, yani A_{n+k} katsayılarının hepsi kompleks sayılardan oluşması durumunda, ilgili analitik fonksiyonlar "*Kompleks Katsayılı Analitik Fonksiyonlar*", ilgili A_{n+k} katsayılarının hepsinin pozitif reel sayı olması durumunda "*Pozitif Katsayılı Analitik Fonksiyonlar*" ve ilgili A_{n+k} katsayılarının hepsinin negatif reel sayı olması durumunda da "*Negatif Katsayılı Analitik Fonksiyonlar*" olarak şeklinde anılır. Aynı zamanda, (2.11) genel formuna sahip olan tüm kompleks fonksiyonlar "*Çok Değerli (Multivalent(ly)) Analitik Fonksiyonlar*" veya "*n-değerli (n-valent(ly)) Analitik Fonksiyonlar*" olarak bilindiği için, önceki belirttiğimiz özel isimlerle birlikte bu özel adlandırmalar da kullanılır. Vurguladığımız gibi, tüm bu özel seri tiplerindeki kompleks (değişkenli) fonksiyonlar çeşitli yönleriyle "*analitik ve geometrik"* özelliklerinin incelenmesinde hala aktif çalışılan analitik fonksiyon sınıflarıdır.

Belirtilen fonksiyon ailelerindeki fonksiyonlarla alakalı olan ve çeşitli bilimsel araştırma alanlarına yönelik Nehari (1952), Duren (1983), Goodman (1983) ve Hayman (1994) eserleri oldukça kapsamlı olan kaynaklardır. Hatta, bu gibi analitik fonksiyonların bazı özel sonuçları için de Chen *et al.* (1997), Owa and Shen (1998), Martinez *et al*. (2000), Khairnar and More (2010), Irmak (2011), Şan and Irmak (2011), Uyanık and Owa (2019), Irmak (2021) ve Lashin and Aouf (2022) makalelerinin farklı içeriklerine de odaklanılabilir.

Tanım 2.1.19'da belirtilen A $(A \neq 0)$ sayısının farklı farklı seçimi ilgili seriye ve dolayısıyla bu serinin belirlediği analitik fonksiyonlara kayda değer etkisi olmadığından dolayı ilgili katsayının genellikle $A := 1$ şeklindeki seçimi ile karşılaşılır. Dolayısıyla, (2.11)'de sunulan n-değerli analitik fonksiyonların oluşturduğu

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{A}}(n)$$

fonksiyonlar sınıfının yerine daha da uygun ve kullanılabilir alt ailesi konumunda olan

$$\mathbb{F}(n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

gibi fonksiyonlar ailesi, yani

$$\begin{aligned}\mathbb{F}(n) &:= \mathcal{F}_1^1(n)\\ &= \{\, \phi(z) : \phi(z) = z^n + A_{n+1}z^{n+1} + A_{n+2}z^{n+2} + \cdots \ (z \in \mathbb{U}) \,\} \end{aligned} \qquad (2.12)$$

şeklindeki fonksiyonlar ailesi tercih edilir.

Ayrıca, (2.12)'de tanımlanan n-değerli analitik fonksiyonların $\mathbb{F}(n)$ sınıfının daha özel hali durumunda olan, yani $n = 1$ alınmasıyla elde edilen ve $\mathbb{F}$ ile göstereceğimiz;

$$\mathbb{F} = \{\, \phi(z) : \phi(z) = z + A_{n+1}z^2 + A_{n+2}z^3 + \cdots \quad (z \in \mathbb{U}) \,\} \qquad (2.13)$$

şeklinde analitik fonksiyonlar ailesi de tercih edilir.

Kompleks Fonksiyonlar Teorisi'nde, üstteki gibi fonksiyonlar "*Normalize Edilmiş Analitik Fonksiyonlar"* olarak bilindiği için, (2.13) ile oluşturulan $\mathbb{F}$ fonksiyonlar ailesi de "*Normalize Edilmiş Analitik Fonksiyonlar Ailesi"* olarak ifade edilir ve bu ailedeki analitik fonksiyonlar üzerinde hala çalışmalar devam etmektedir.

Çeşitli referanslar olarak, ilgili fonksiyonlara ilişkin olarak da; Duren (1983), Goodman (1983) ve Srivastava and Owa (1989) eserleri detaylı oldukça teorik bilgiler içermektedir. Hatta, ilgili fonksiyonlar ile ilgili olan farklı bazı özel sonuçlar için de McBride (1982), Owa et al. (1991), Cho et al. (1993), Altıntaş *et al.* (1995), Raina (1997), Nishimoto (2001), Saxene *et al.* (2009), Owa *et al.* (2003), Agarwal (2012), Ibrahim and Jahangiri (2014), Breaz *et al.* (2016) and Irmak (2021, 2022) makalelerindeki sonuçlar incelenebilir.

2.1.6 Örnek. Her $\alpha \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} - \{0\}$ için, $\phi(z) = e^{\alpha z}$ gibi bir üstel kompleks fonksiyonun $\mathbb{C}$ kümesinde analitik ve dolayısıyla bir tam fonksiyon olduğunu biliyoruz. Doğal olarak, ilgili kompleks fonksiyonun her mertebeden türevi vardır ve her n doğal sayısı için

$$\frac{d^n}{dz^n}\big(\phi(z)\big) = e^{\alpha z} \;\Rightarrow\; \alpha^n e^{\alpha z}\,|_{z:=0} = \alpha^n \qquad (\alpha \in \mathbb{C}^*; n \in \mathbb{N}_0)$$

dır.

Dolayısıyla, üstte elde edilen bilgiler kullanılarak, Tanım 2.1.18 ile sunulan (2.10)'da ki gibi seri formuna sahip olan ilgili kompleks fonksiyonun seri açılımı, yani kompleks formdaki MacLaurin seri açılımı:

$$\begin{aligned}\phi(z) &= e^{\alpha z} \\ &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha^2}{2!}z^2 + \frac{\alpha^3}{3!}z^3 + \frac{\alpha^4}{4!}z^4 + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!}z^n + \cdots \qquad (2.14) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}z^n \quad (\alpha \in \mathbb{C}^*; z \in \mathbb{C})\end{aligned}$$

şeklindeki gibi bir kuvvet serisi olur.

Yukarıda, yani (2.14) ile sunulan kompleks (değişkenli) fonksiyon seri açılımı göz önüne alındığında, ilgili fonksiyon serisinden yararlanarak,

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{A}}(n) \qquad (A \neq 0\,;\; k \in \mathbb{N}\,;\; n \in \mathbb{N}_0)$$

ailesinin sonsuz sayıda ögeleri kolayca belirlenebilir.

Bilindiği gibi, kompleks (değişkenli) fonksiyonların çeşitli dönüşüm ilişkilerinde, ilgili uzaylar arasındaki (analitik veya geometrik) çeşitli ilişkilerinin belirlenmesi kolay bir iş değildir. Bu bağlamda, üçüncü bölümde elde edilecek olan özgün sonuçların bazı özel sonuçlarının vurgulanmasında, ilgili analitik fonksiyonlar ailesinin kapsamında olan bazı elementer kompleks (değişkenli) fonksiyonlar önemli rol oynayacaktır. İşte bu açıdan, ilgili elementer fonksiyonların bazılarını sunmak oldukça faydalı olacaktır.

Örneğin;

$$\left.\begin{aligned} e^{z} &\in \mathcal{F}_1^1(0) \\ 2e^{3z} &\in \mathcal{F}_1^2(0) \\ 2e^{-5z} &\in \mathcal{F}_1^2(0) \\ ie^{2z} &\in \mathcal{F}_1^{\mathrm{i}}(0) \\ ze^{z} &\in \mathcal{F}_1^1(1) \\ e^{z^2} &\in \mathcal{F}_2^1(0) \\ 5e^{z^2} &\in \mathcal{F}_2^5(0) \\ e^{-z}-1 &\in \mathcal{F}_1^{-1}(1) \\ e^{z^2}-1 &\in \mathcal{F}_1^{-1}(2) \\ e^{z^2}-1 &\in \mathcal{F}_1^{-1}(2) \\ 3e^{2z^2}-1 &\in \mathcal{F}_1^{\mathbf{2}}(2) \\ z^2e^{z^2} &\in \mathcal{F}_1^1(2) \\ iz^3e^{z} &\in \mathcal{F}_1^{\mathrm{i}}(3) \\ z\,(e^{-z}-1) &\in \mathcal{F}_1^{-1}(2) \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \qquad (2.15)$$

2.1.7 Örnek. $\alpha \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere, $\phi(z) = \frac{1}{1-\alpha z}$ şeklindeki kompleks (değişkenli) fonksiyonu

$$D = \mathbb{C} - \{\, 1/\alpha \;:\; \alpha \in \mathbb{C}^* \,\}$$

kümesinde analitik bir fonksiyondur ve her $z \in D$ noktasında seri açılım da söz konusudur. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}_0$ için

$$\frac{d^n}{dz^n}\big(\phi(z)\big) = \frac{\alpha^n \mathrm{n}!}{(1-\alpha z)^{n+1}}$$

ve doğal olarak

$$\left.\frac{\alpha^n \mathrm{n}!}{(1-\alpha z)^{n+1}}\right|_{z_0 := 0} = \mathrm{n}!\,\alpha^n \qquad (2.16)$$

dır.

Dolayısıyla, $\alpha \neq 0$ olmak üzere, (2.16)'da elde edilen veriler yardımıyla, Tanım 2.1.18 ile sunulan (2.10)'daki kompleks fonksiyon serisi de

$$\begin{aligned} \phi(z) &:= \frac{1}{1-\alpha z} \\ &= 1 + \alpha \mathrm{z} + \alpha^2 \mathrm{z}^2 + \alpha^3 \mathrm{z}^3 + \alpha^4 \mathrm{z}^4 + \cdots + \alpha^n \mathrm{z}^{\mathrm{n}} + \cdots \end{aligned} \qquad (2.17)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z)^n \quad \left(\alpha \in \mathbb{C}^*; z \in \mathbb{C}\,; |z| < \frac{1}{|\alpha|}\right)$$

şeklindeki MacLaurin serisi olacaktır.

Yine, (2.17)'de oluşturulan kompleks fonksiyon seri açılımından yararlanarak yine çok sayıda farklı farklı elementer kompleks fonksiyonların ilgili tipteki gibi seri açılımları da oluşturulabilir. Aşağıdaki gibi verilen çeşitli $\phi(z)$ analitik fonksiyonlarının seri açılımları ile (2.11)'deki gibi tanımlanmış olan en genel formdaki $\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{A}}(n)$ analitik kompleks fonksiyonlar ailesindeki fonksiyonlar arasındaki bazı özel ilişkileri aşağıda gibi sunulmuştur. Yukarıda da vurguladığımız gibi bu özel ilişkilerin herbiri, daha sonraki bölümlerde elde edilecek olan (kesirsel mertebeden türev veya integrallerle ilgili) olan tüm teorik ve elementer olan özgün sonuçlarımızın birer çıkarımları olarak karşımıza çıkacaktır.

Örneğin;

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{1-z} \in \mathcal{F}_{\mathbf{1}}^{1}(0) \\ \frac{-1}{1+z} \in \mathcal{F}_{\mathbf{1}}^{-1}(0) \\ \frac{z}{1-z} \in \mathcal{F}_{\mathbf{1}}^{1}(1) \\ \frac{-z}{1-z} \in \mathcal{F}_{\mathbf{1}}^{-1}(1) \\ \frac{-z}{1-z} \in \mathcal{F}_{\mathbf{1}}^{-1}(1) \\ \frac{iz}{1-iz} \in \mathcal{F}_{\mathbf{1}}^{-\mathrm{i}}(1) \\ \frac{1}{1-z^2} \in \mathcal{F}_{\mathbf{2}}^{1}(0) \\ \frac{z}{1+z^2} \in \mathcal{F}_{\mathbf{1}}^{1}(1) \\ \frac{z^2}{1-z^2} \in \mathcal{F}_{1}^{1}(2) \\ \frac{z^5}{1-z^3} \in \mathcal{F}_{1}^{1}(5) \\ \vdots \end{array}\right\} \qquad (2.18)$$

2.2 Bazı Kesirsel Mertebeden Hesaplamalar ve İlgili Operatörler

Giriş bölümünde de belirtildiği gibi, bu tez çalışması kompleks değişkenli fonksiyonların kesirsel mertebeden differ-integral hesaplamaları ile ilgili olan bazı konular üzerine planlanmıştır. Bu yüzden ilgili referansların sunumu da bu hedefe göre düzenlenmiştir. Dolayısıyla, bu bölümde geçen kesirsel mertebeden (differ-integral) operatörleriyle ilişkili olan her bir tanım ve ilgili teorik çalışmaların detayları için düşünülen temel kaynaklar olarak Gemant (1942), Debnath (1995), Oldham and Spanier (1977), Ross (1977, 1992), Srivastava and Owa (1989), Samko *et al*. (1993), Owa et al. (1994), Srivastava (2020), Kiryakova (1994, 2021) ve Kilbas *et al.* (2021) eserleri oldukça kapsamlı kaynaklardır.

2.2.1 Kesirsel Mertebeden İntegral ve İlgili Operatör

2.2.1.1 Tanım. Verilen $\phi := \phi(z)$ kompleks (değişkenli) fonksiyonu orijini içine alan herhangi bir basit kapalı bölgede analitik olsun ve $\varphi > 0$ reel değeri verilsin. Bu durumda, ϕ fonksiyonunun *φ-mertebeden kesirsel integrali* :

$$\mathbf{D}_z^{-\varphi}[\phi] \quad , \quad \mathbf{D}_z^{-\varphi}[\phi(z)] \quad , \quad \mathbf{D}_z^{-\varphi}[\phi](z)$$

veya

$$\mathbf{I}_z^{\varphi}[\phi] \quad , \quad \mathbf{I}_z^{\varphi}[\phi(z)] \quad , \quad \mathbf{I}_z^{\varphi}[\phi](z)$$

şeklindeki gösterimlerden herhangi biri ile genellikle gösterilir ve

$$\mathbf{D}_z^{-\varphi}[\phi] = \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^z \frac{\phi(t)}{(z-t)^{1-\varphi}}\, dt \quad (\varphi > 0) \tag{2.19}$$

şeklindeki integralle tanımlanır.

Doğal olarak, $\mathbf{D}_z^{-\varphi}[\phi]$ 'nın varlığı, (2.19)'de verilen eşitliğinin sağ tarafının mevcut olması ile mümkün olacaktır. Ayrıca, (2.19)'da ki integralde geçen $z-t$ ifadesinin pozitif olması durumunda $log(z-t)$ ifadesi gerçel alınarak, verilen integraldeki $(z-t)^{\varphi-1}$ ifadesinin katlılığı kaldırılır (Srivastava and Owa 1989).

Tanım 2.2.1.1 ile verilen (2.19)'da ki integral için $\varphi \to 1$ (veya denk olarak $\varphi \coloneqq 1$) durumu göz önüne alınırsa aşağıdaki özel ilişki kolayca elde edilebilir.

2.2.1.1 Sonuç. $\phi \coloneqq \phi(z)$ gibi bir kompleks fonksiyonu orijini içine alan herhangi bir basit kapalı bölgede (ve sınırında) analitik ise,

$$\varphi \to 1 \implies \mathbf{D}_z^{-\varphi}[\phi] \to \mathbf{D}_z^{-1}[\phi] \equiv \int_0^z \phi(t)dt$$

dır.

Tanım 2.2.1.1 ile (2.19)'da ki gibi tanımlanmış olan kesirsel mertebeden integral operatörü bazı ekstra koşullar altında çok sayıda özellikler bulundurabilmektedir ama aşağıda verilen iki genel özellik her zaman doğru olan genel özelliklerdir. İspatları da Tanım 2.2.1.1 yardımıyla kolayca görülebilir. İlgili özellikler aşağıda verilen teoremlerdir (Srivastava 2020).

Teorem 2.2.1.1. (Skalerle Çarpma Özelliği): $\phi \coloneqq \phi(z)$ gibi bir analitik fonksiyon φ $(\varphi > 0)$ mertebeden kesirsel integrallenebilir olsun ve C_1 de bir kompleks skaleri ifade etsin. O zaman,

$$\mathbf{D}_z^{-\varphi}[C_1\phi] = C_1\mathbf{D}_z^{-\varphi}[\phi] \tag{2.20}$$

dır.

Teorem 2.2.1.2. (Lineerlik Özelliği): $\phi \coloneqq \phi(z)$ ve $\psi \coloneqq \psi(z)$ gibi analitik fonksiyonları φ $(\varphi > 0)$ mertebeden kesirsel türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda, her C_1 ve C_2 kompleks skaleri için,

$$\mathbf{D}_z^{-\varphi}[C_1\phi + C_2\psi] = C_1\mathbf{D}_z^{-\varphi}[\phi] + C_2\mathbf{D}_z^{-\varphi}[\psi] \tag{2.21}$$

dır.

Teorem 2.2.1.3. $\phi \coloneqq \phi(z)$ gibi bir analitik fonksiyonu φ $(\varphi > 0)$ ve ψ $(\psi > 0)$ merbeden integrallenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman,

$$\mathbf{D}_z^{-\varphi}\left(\mathbf{D}_z^{-\psi}[\phi]\right) = \mathbf{D}_z^{-\psi}\left(\mathbf{D}_z^{-\varphi}[\phi]\right) = \mathbf{D}_z^{-\varphi-\psi}[\phi] \tag{2.22}$$

dır.

İspat.

$$\mathbf{D}_z^{-\varphi}\left(\mathbf{D}_z^{-\psi}[\phi]\right) = \mathbf{D}_z^{-\psi}\left(\mathbf{D}_z^{-\varphi}[\phi]\right)$$

şeklindeki kolayca görülebilen ilişkiler araştırmacıların dikkatine sunulmuş olup, sadece

$$\mathbf{D}_z^{-\varphi}\left(\mathbf{D}_z^{-\psi}[\phi]\right) = \mathbf{D}_z^{-\varphi-\psi}[\phi]$$

şeklindeki eşitliğinin gösterilmesinin yeterli olacağı düşünülmüştür. Bunun için de, (2.19) ile verilen kesirsel mertebeden integral operatörü $\mathbf{D}_z^{-\psi}[\phi]$ ifadesi için göz önüne alınırsa:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_z^{-\varphi}\left(\mathbf{D}_z^{-\psi}[\phi]\right) &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)}\left(\int_0^z \frac{1}{(z-t)^{1-\varphi}}\left(\mathbf{D}_z^{-\psi}[\phi]\right)dt\right)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)}\left(\int_0^z \frac{1}{(z-t)^{1-\varphi}}\left\{\frac{1}{\Gamma(\psi)}\int_0^w \frac{\phi(s)}{(w-t)^{1-\psi}}ds\right\}dt\right)\\ &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)}\frac{1}{\Gamma(\psi)}\left(\int_0^z \frac{1}{(z-t)^{1-\varphi}}\left\{\int_0^w \frac{\phi(s)}{(w-t)^{1-\psi}}ds\right\}dt\right)\end{aligned}$$

ve ardından da, Samko *et al.* (1993)'teki (Drichlet Formül'ünü de içeren) detaylı bilgilere odaklanırsa:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_z^{-\varphi}\left(\mathbf{D}_z^{-\psi}[\phi]\right) &= \\ &= \cdots\\ &= \frac{1}{\Gamma(\varphi)\Gamma(\psi)}\left(\int_0^z \phi(s)\left\{\int_z^w (z-t)^{\varphi-1}(w-t)^{\psi-1}dt\right\}ds\right)\end{aligned}$$

şeklindeki sonucuna ve ardından da (içteki integral için) $w - z = (z - s)v$ şeklindeki değişken ve diferansiyel değişimleri yapılırsa, (2.7)'de verilen Beta fonksiyonu ile birlikte (2.6) ve (2.8)'deki gibi Gamma fonksiyonun bir uygulaması daha elde edilir. Bazı elementer işlemler sonucunda, (2.22)'deki istenen ifadeye kolayca varılabilir.

2.2.1.1 Örnek. Tanım 2.2.1.1 tanımı kullanarak, $\phi(z) = C \ \ (C \neq 0)$ gibi bir kompleks (değişkenli) sabit fonksiyonun *φ-mertebeden* kesirsel integralini hesaplayalım. Tanımdaki ilgili fonksiyon için verilen sabit fonksiyon göz önüne alınırsa;

$$\mathbf{D}_z^{-\varphi}[\phi] = \frac{1}{\Gamma(\varphi)}\int_0^z \frac{\phi(t)}{(z-t)^{1-\varphi}}\ dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_0^z \frac{C}{(z-t)^{1-\varphi}}\, dt$$

$$= \frac{C}{\Gamma(\varphi)} \int_0^z (z-t)^{\varphi-1}\, dt \quad (\varphi > 0)$$

şeklindeki integral ilişkileri kolayca elde edilir. Burada, ilgili gerçel değişkenli integral için, eğer

$$wz = z - t \quad \Rightarrow \quad zdw = -dt \quad \Leftrightarrow \quad dt = -zdw$$

şeklindeki değişken ve diferansiyel değişimleri göz önüne alınır, ardından da, (2.7)'de verilen Beta fonksiyonu ve (2.6)'te verilen Gamma fonksiyonu ile birlikte (2.8)'de verilen önemli bağıntı da kullanıldığında:

$$\mathbf{D}_z^{-\varphi}[\mathrm{C}] = \frac{C}{\Gamma(\varphi)} \int_0^z (z-t)^{\varphi-1} dt$$

$$= \frac{C}{\Gamma(\varphi)} z^{\varphi} \int_0^1 w^{\varphi-1}\, dv$$

$$= \frac{C}{\Gamma(\lambda)} z^{\varphi} \int_0^1 w^{\varphi-1}(1-w)^{1-1}\, dv$$

$$= \frac{C}{\Gamma(\varphi)} z^{\varphi}\, \mathrm{B}(\varphi, 1)$$

$$= \frac{C}{\Gamma(\varphi)} \frac{\Gamma(\varphi)\,\Gamma(1)}{\Gamma(1+\varphi)} z^{\varphi}$$

$$= \frac{\mathrm{C}}{\Gamma(1+\varphi)} z^{\varphi}$$

sonucuna varılır.

O halde, verilen herhangi bir $\varphi > 0$ gerçel sayısı için, sıfırdan farklı her $\phi(z) = C$ kompleks (değişkenli) *sabit* fonksiyonun φ*-mertebeden* kesirsel integrali:

$$\mathbf{D}_z^{-\varphi}[C] = \frac{C}{\Gamma(1+\varphi)} z^{\varphi} \quad (\varphi > 0) \tag{2.23}$$

şeklinde olur.

Örnek 2.2.1.1 ile elde edilen (2.23)'teki sonuç bizleri aşağıdaki gibi verilen bazı özel sonuçlara kolayca götürür.

2.2.1.2 Sonuç. $\phi \coloneqq \phi(z) = C$ sabit (kompleks) fonksiyonu için;

$$\varphi \to 0^{+} \implies \mathbf{D}_{z}^{-\varphi}[C] \to \mathbf{D}_{z}^{0}[C] \equiv \frac{C}{\Gamma(1)} = C$$

ve

$$\varphi \coloneqq 1 \implies \mathbf{D}_{z}^{-1}[C] = \int_{0}^{z} C dt = \frac{C}{\Gamma(2)} z = Cz$$

dır.

2.2.1.2 Örnek. Kompleks (bağımsız) değişkenli $\phi(z) = z^{\omega}$ $(\omega > -1)$ gibi bir fonksiyonunun *φ-mertebeden* kesirsel integralini hesaplayalım. Yine, Tanım 2.2.1.1 gereği, $\phi \coloneqq \phi(z) = z^{\omega}$ üstel fonksiyonu göz önüne alınırsa:

$$\mathbf{D}_{z}^{-\varphi}[\phi] = \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_{0}^{z} \frac{\phi(t)}{(z-t)^{1-\varphi}}\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_{0}^{z} \frac{t^{\omega}}{(z-t)^{1-\varphi}}\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_{0}^{z} t^{\omega}(z-t)^{\varphi-1}\, dt$$

integrali için, yine Örnek 2.2.1.1'de uygulanan:

$$z - t = wz$$

şeklindeki değişken değişimi ile birlikte (2.6)-(2.8) bilgileri yeniden kullanılırsa, bazı elementer işlemlerin sonucu olarak,

$$\mathbf{D}_{z}^{-\varphi}[\phi] = \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \int_{0}^{z} t^{\omega}(z-t)^{\varphi-1} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} z^{\omega+\varphi} \int_{0}^{1} w^{\varphi-1}(1-w)^{\omega} dw$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} z^{\omega+\varphi}\, \mathrm{B}(\varphi, \omega+1)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\varphi)} \frac{\Gamma(\varphi)\,\Gamma(\omega+1)}{\Gamma(1+\varphi+\mathrm{M})} z^{\omega+\varphi}$$

$$= \frac{\Gamma(\omega+1)}{\Gamma(1+\varphi+\omega)} z^{\omega+\varphi} \quad (\varphi > 0)$$

ilişkilerine varılır.

O halde, $\phi(z) = z^{\omega}$ gibi kompleks kuvvet fonksiyonunun φ-*mertebeden* kesirsel integrali de:

$$\mathbf{D}_z^{-\varphi}[z^{\omega}] = \frac{\Gamma(\omega+1)}{\Gamma(\omega+\varphi+1)} z^{\omega+\varphi} \qquad (\varphi > 0\,;\ \omega > -1) \tag{2.24}$$

şeklinde olur.

Örnek 2.2.1.2 ile elde edilen (2.24)'teki sonuç bizlere aşağıdaki gibi verilen özel sonuçları yine kolayca sunar.

2.2.1.3 Sonuç. $\phi(z) = z^{\omega}$ kompleks kuvvet fonksiyonu için,

$$\varphi \to 0^{+} \implies \mathbf{D}_z^{-\varphi}[z^{\omega}] \to \mathbf{D}_z^{0}[z^{\omega}] \equiv z^{\omega}$$

ve

$$\varphi := 1 \implies \mathbf{D}_z^{-1}[z^{\omega}] = \frac{\Gamma(\omega+1)}{\Gamma(\omega+2)} z^{\omega+1} \equiv \int_0^z t^{\omega} dt = \frac{1}{\omega+1} z^{\omega+1}$$

dır.

Bazı özel sonuçlar açısından, Örnek 2.2.1.1'de $\varphi = 1/2$ gibi bir seçim göz önüne alınırsa, aşağıdaki özel sonuçta kolayca elde edilir.

2.2.1.3 Örnek. Herhangi bir $\phi(z) = C$ kompleks (sabit) fonksiyonunun $\varphi = 1/2$-*mertebeden* kesirsel integrali de:

$$\mathbf{D}_z^{-1/2}[\,C\,] = \frac{C}{\Gamma(3/2)} z^{1/2} = \frac{2C}{\sqrt{\pi}} \sqrt{z}$$

şeklindeki gibi elde edilir. Doğal olarak, $\phi(z) = i$ gibi bir sabit fonksiyonu için de

$$\mathbf{D}_z^{-1/2}[C] = \frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{z}$$

gibi bir sonuç söz konusu olur.

Örnek 2.2.1.2'de $\varphi = 1$ ve $\omega := 1$ gibi özel seçimler göz önüne alındığında da, aşağıdaki özel sonuç kolayca elde edilebilir.

2.2.1.4 Örnek. $\phi(z) = z$ gibi bir kompleks (değişkenli özdeşlik) fonksiyonun $1/2$-*mertebeden* kesirsel integrali de:

$$\mathbf{D}_z^{-1/2}[\, z \,] = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(5/2)} z^{3/2} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} z\sqrt{z}$$

şeklinde olur.

Teorem 2.2.1.3 ile Örnek 2.2.1.1 ve Örnek 2.2.1.2 örnekleri birlikte dikkate alınır ve sırasıyla Örnek 2.2.1.1 ve Örnek 2.2.1.2 kullanılırsa, aşağıda verilen özel sonuçlar da kolayca elde edilir.

2.2.1.5 Örnek. $\phi(z) = C$ gibi bir kompleks (sabit) fonksiyonunun $\varphi = 3/2$-*mertebeden* kesirsel integrali de:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_z^{-(1+1/2)}[\, C \,] &= \mathbf{D}_z^{-3/2}[\, C \,] \\ &= \frac{C}{\Gamma(7/2)} z^{3/2} \\ &= \frac{C}{\Gamma(5/2)} z^{3/2} \\ &= \frac{4C}{3\sqrt{\pi}} z\sqrt{z}\end{aligned}$$

şeklinde olur.

2.2.1.6 Örnek. $\phi(z) = z$ gibi bir kompleks (birim) fonksiyonunun $\varphi = 3/2$-*mertebeden* kesirsel integrali de:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_z^{-(1+1/2)}[\, z \,] &= \mathbf{D}_z^{-3/2}[\, z \,] \\ &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(7/2)} z^{3/2} \\ &= \frac{1}{5/2\,\Gamma(5/2)} z^{3/2} \\ &= \frac{2}{5\,\Gamma(5/2)} z^{3/2} \\ &= \frac{8}{15\sqrt{\pi}} z\sqrt{z}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Bu tez çalışması açısından, (2.11)'deki gibi tanımlanmış olan analitik fonksiyonların oluşturduğu $\mathcal{F}_k^A(n)$ şeklindeki fonksiyonlar ailesindeki fonksiyonların oldukça kapsamlı (analitik veya geometrik sonuçları ile birlikte) gerekli kesirsel mertebeden hesaplamaları da elbette ki söz konusudur. Özellikle, bu $\mathcal{F}_k^A(n)$ analitik fonksiyonlar ailesinin alt kümelerinden biri olan ve (2.12)'de gibi tanımlanmış olan $\mathbb{F}(n)$ ailesindeki analitik fonksiyonların kesirsel mertebeden integrallerini oluşturmayı yeterli görüyoruz. Ayrıca, $\mathcal{F}_k^A(n)$ ailesinin diğer alt kümelerindeki fonksiyonların kesirsel mertebeden integrallerinin belirlenmesine ilişkin gerekli araştırmaları da ilgilenen araştırmacılara bırakıyoruz.

Teorem 2.2.1.1 ve Teorem 2.2.1.2 ile Örnek 2.2.1.1 ve Örnek 2.2.1.2 bilgilerinin yardımıyla, $\phi \coloneqq \phi(z) \in \mathbb{F}(n)$ şeklindeki herhangi bir n-değerli analitik fonksiyonun *φ-mertebeden kesirsel integralini* veren aşağıdaki önermenin ispatı kolayca oluşturulabilir.

2.2.1.1 Önerme. $z \in \mathbb{U}$ ve $\phi \coloneqq \phi(z) \in \mathbb{F}(n)$ olsun. O zaman, verilen her $\varphi > 0$ sayısı için, $\phi \coloneqq \phi(z)$ fonksiyonunun *φ-mertebeden kesirsel integrali*:

$$\mathbf{D}_z^{-\varphi}[\phi] = \left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\varphi+1)} z^n + \sum_{j=n+1}^{\infty} A_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+\varphi+1)} z^j\right) z^{\varphi} \tag{2.25}$$

şeklindedir.

2.2.1.7 Örnek. Önceden (2.17) ile oluşturulmuş kompleks fonksiyon serisinde, eğer $\alpha \coloneqq 1$ seçimi göz önüne alınırsa, (2.18)'deki gibi tanımlanmış $\mathcal{F}_1^1(0)$ şeklindeki analitik fonksiyonlar sınıfının farklı özel bir üyesi durumunda olan ve yine $\phi(z)$ ile belirttiğimiz kesirsel formda olan (kompleks değişkenli) elementer fonksiyonlarından olan, yani

$$\begin{aligned} \phi(z) &= 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^k + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} z^j \end{aligned} \tag{2.26}$$

gibi bir kompleks değişkenli fonksiyonu $\mathbb{U}$ açık birim diskinde düzgün yakınsayan (ve doğal olarak (modülce) yakınsayan) kompleks (fonksiyon) serisinin ifade ettiği:

$$w = \phi(z) = \frac{1}{1-z} \qquad (z \in \mathbb{U}) \tag{2.27}$$

şeklindeki bir kompleks fonksiyon da söz konusu olur. Özellikle, yol gösterici olarak, klasik (kompleks) analiz bilgileri ile birlikte $w = u + iv$ şeklindeki w kompleks (bağımlı) değişkeni göz önüne alındığında;

$$w = \frac{1}{1-z} \quad \Leftrightarrow \quad z = 1 - \frac{1}{w} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{w-1}{w}$$

gerektirmesi ve $z \in \mathbb{U}$ ilişkisi de dikkate alındığında da:

$$\begin{aligned} |z| = \left|\frac{w-1}{w}\right| < 1 \quad &\Longrightarrow \quad |w-1| < |w| \\ &\Longrightarrow \quad |u+iv-1| < |u+iv| \\ &\Longrightarrow \quad \sqrt{(u-1)^2+v^2} < \sqrt{u^2+v^2} \\ &\Longrightarrow \quad u^2 - 2u + 1 + v^2 < u^2 + v^2 \\ &\Longrightarrow \quad 1 < 2u \\ &\Longrightarrow \quad \Re e(w) > \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{2.28}$$

şeklindeki sonuca varılır. Bu Möbiüs dönüşümlerinin özel bir elemanı olan (2.27) fonksiyonu Kompleks Fonksiyonlar Teorisi açısından önemli rol oynayan bir fonksiyondur. Bu fonksiyon, bu tez araştırmasının olası sonuçları açısından önemli bir somut örnek teşkil edecektir. Özel anlamlar taşıyan bazı sonuçları açısından, ikinci ve üçüncü bölümlerde kullanılacak olan bu elementer kompleks fonksiyon için, eğer (2.28)'de elde edilen eşitsizlik göz önüne alınırsa, (2.27) ile sunulan kompleks dönüşüm ile doğrudan alakalı olan ve $\mathbb{U}$ bölgesiyle ilişkilendirilebilecek olan kümeler arasındaki aşağıdaki özel ilişki:

$$\phi(z) = \frac{1}{1-z} \; : \; \mathbb{U} \; \rightarrow \left\{ z \in \; \mathbb{C} : \; \Re e \; (z) > \frac{1}{2} \right\} \tag{2.29}$$

önemli rol alacaktır. Bu özel kompleks fonksiyonun farklı araştırma alanlarındaki rolü açısından, Nehari (1952), Pommerenke (1975) ve Goodman (1983) eserlerine odaklanılabilir.

Ayrıca, Örnek 2.2.1.1 ve Örnek 2.2.1.2 örneklerinin yardımıyla, her $\varphi > 0$ sayısı ve (2.26) ile verilen fonksiyon serisinin ifade ettiği (2.27)'deki elementer $w = \phi(z)$ kompleks (değişkenli) kesirsel tipteki fonksiyonunun kesirsel mertebeden integrali de:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_z^{-\varphi}\left[\tfrac{1}{1-z}\right] &= \mathbf{D}_z^{-\varphi}\left[1+\textstyle\sum_{j=1}^{\infty} z^j\right] \\ &= \mathbf{D}_z^{-\varphi}[1] + \textstyle\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\mathbf{D}_z^{-\varphi}\left[z^j\right]\right\} \\ &= \tfrac{1}{\Gamma(1+\varphi)} z^{\varphi} + \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{\Gamma(\mathrm{j}+1)}{\Gamma(\mathrm{j}+\varphi+1)} z^{j+\varphi} \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(\mathrm{j}+1)}{\Gamma(\mathrm{j}+\varphi+1)} z^{j+\varphi}\end{aligned} \tag{2.30}$$

şeklindeki hesaplamalarla karşımıza çıkar.

Bu bölümün son ifadeleri olarak, Sonuç 2.2.1.3 ile verilen sonuçlar dikkate alınarak, (2.30)'da ki gibi verilen hesaplamalarda, $\varphi \to 0^+$ ve $\varphi \to 1$ (veya denk olarak $\varphi \coloneqq 1$) özel durumlar göz önüne alındığında, sırasıyla, aşağıdaki gibi özel sonuçlara yine kolayca varılabilir.

2.2.1.8 Sonuç. $z \in \mathbb{U}$ ve $\phi(z) \coloneqq \frac{1}{1-z}$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}\varphi \to 0^+ \implies \mathbf{D}_z^{-\varphi}\left[\tfrac{1}{1-z}\right] \to \mathbf{D}_z^{0}\left[\tfrac{1}{1-z}\right] &\equiv 1 + \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{\Gamma(\mathrm{j}+1)}{\Gamma(\mathrm{j}+1)} z^j \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} z^j \\ &= \tfrac{1}{1-z}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\varphi \to 1 \implies \mathbf{D}_z^{-\varphi}\left[\tfrac{1}{1-z}\right] \to \mathbf{D}_z^{-1}\left[\tfrac{1}{1-z}\right] &\equiv \tfrac{1}{\Gamma(2)} z + \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \tfrac{\Gamma(\mathrm{j}+1)}{\Gamma(\mathrm{j}+2)} z^j \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{\Gamma(\mathrm{j}+1)}{\Gamma(\mathrm{j}+2)} z^j \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} \tfrac{1}{\mathrm{j}+1} z^j \\ &= \textstyle\int_0^z \tfrac{1}{1-t}\, dt \\ &= -\ln(1-z)\end{aligned}$$

olur.

2.2.2 Kesirsel Mertebeden Türevler ve İlgili Operatörler

2.2.2.1 Tanım. $\phi := \phi(z)$ gibi kompleks değişkenli fonksiyonu orijini içine alan basit kapalı bir bölgede analitik olsun. O zaman, $\phi(z)$ fonksiyonunun *φ-mertebeden* kesirsel türevi, genellikle;

$$\mathbf{D}_z^{\varphi}\,[\phi] \quad , \quad \mathbf{D}_z^{\varphi}\,[\phi(z)] \quad \text{veya} \quad \mathbf{D}_z^{\varphi}\,[\phi](z)$$

şeklindeki notasyonlardan herhangi biri ile gösterilir ve

$$\mathbf{D}_z^{\varphi}\,[\phi] = \frac{1}{\Gamma(1-\varphi)}\frac{d}{dz}\left(\int_0^z \frac{\phi(t)}{(z-t)^{\varphi}}\,dt\right) \qquad (0 \le \varphi < 1) \tag{2.31}$$

şeklinde tanımlanır (Srivastava 2020).

Kesirsel mertebeden integral operatörünü tanıtırken, belirttiğimiz gibi burada da tekrar gerekli vurgulamayı yapalım. (2.31)'teki gibi verilen integralin gerçel değişkene göre oluşturulan bir integral olduğu, bu tez araştırmasının hedefinin de kompleks değişkenli fonksiyonlar ile ilgili olduğundan, tabii ki (2.31) ile verilen eşitliğin sağ tarafının mevcut olması durumunda ve ilgili integralin sonucunun da doğal olarak kompleks bir sonuç ile sonuçlanacağı durumu da göz önüne alındığında, aynen kesirsel mertebeden integral operatöründe de belirtildiği gibi, eğer $z - t$ ifadesinin pozitif olması durumunda $log(z - t)$ ifadesi gerçel alınarak, ilgili integralde geçen $(z - t)^{-\varphi}$ şeklindeki ifadenin katlılığı da aynen Tanım 2.2.1.1'de vurgulandığı gibi kaldırılmış olunur (Srivastava 2020).

Tanım 2.2.2.1'e odaklanıldığında, verilen $\phi := \phi(z)$ gibi analitik bir fonksiyonunun kesirsel mertebeden türevinin $\varphi \in [0,1)$ şeklindeki kesirsel sayıların türevini içerdiği açıkça görülmektedir. İlgili kesirsel mertebeden türevlerin hesaplanmasında, Gamma fonksiyonunun kullanışlı işlevsel özelliği önemli rol oynayacağından dolayı ve Şekil 2.1'deki grafik göz önüne alındığında, önceden de vurguladığımız gibi, Tanım 2.2.2.1'in temel hipotezleri uygun her keyfi *φ-mertebesinden* kesirsel türevlerin $[0,1)$ aralığının dışına çıkarılması da elbette ki mümkün olabilmektedir. İşte bu gibi mertebeden türevleri de kapsayan tanımlamalar, yani Tanım 2.2.2.1'in genel halleri de

aşağıdaki gibi sunulmuştur. İlgili detaylar için, Srivastava (2000)'de verilen oldukça kapsamlı bilgiler yeterli olacaktır.

2.2.2.2 Tanım. Orijini içine alan basit kapalı bir bölgede analitik olan $\phi \coloneqq \phi(z)$ gibi herhangi bir kompleks fonksiyonun $m + \varphi$*-mertebeden* türevi ise

$$\mathbf{D}_z^{m+\varphi}[\phi] \qquad (0 \leq \varphi < 1\,; m \in \mathbb{N}_0)$$

şeklindeki benzeri notasyon ile ifade edilir ve

$$\mathbf{D}_z^{m+\varphi}[\phi] = \frac{d^m}{dz^m}\left\{\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi]\right\} \qquad (0 \leq \varphi < 1\,; m \in \mathbb{N}_0) \tag{2.32}$$

şeklinde tanımlanır (Srivastava 2020).

2.2.2.3 Tanım. Tanım 2.2.2.1'in hipotezleri altında, $\phi \coloneqq \phi(z)$ gibi bir analitik $\phi(z)$ fonksiyonunun φ*-mertebeden* kesirsel türevi:

$$\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi] = \frac{d^m}{dz^m}\left\{\mathbf{D}_z^{\varphi-m}[\phi]\right\} \qquad (m \leq \varphi < m+1; m \in \mathbb{N}_0) \tag{2.33}$$

şeklinde tanımlanır (Srivastava 2020).

Özellikle, (2.32) ve (2.33) ile verilen her iki kesirsel mertebeden operatörlere odaklanıldığında, (2.32)'teki operatörde (veya ilgili integral dönüşümünde) eğer

$$\varphi \coloneqq \varphi - m$$

gibi bir seçim göz önüne alınırsa, Tanım 2.2.2.2 ile Tanım 2.2.2.3'ün birbiri için birer gerektirme içerdiği kolayca gözlemlenebilir. Böylece, böylesi ilişki de bizleri, her $m \in \mathbb{N}_0$ için

$$0 \leq \varphi - m < 1 \quad \Leftrightarrow \quad m \leq \varphi < m + 1$$

gerektirmeleri gereğince, malum başlangıçta belirtilen $0 \leq \varphi < 1$ mertebe aralığının da doğal olarak $m \leq \varphi < m + 1$ gibi daha genel aralıklara da genişletilmiş olunur. Hem (2.32)'de hem de (2.33)'te sunulan tanımlarda, $m = 0$ hali açıktır. Özellikle, (2.33) ile verilen tanımla esas amacın, kesirsel mertebeden türevi $[0,1)$ aralığının dışına çıkarmak olduğundan dolayı, orada $m \in \mathbb{N}$ olmasının önemini de vurgulayalım.

(2.32)'den yola çıkarak ve Örnek 2.1.4 kullanılarak (2.33)'e varılabilineceği gibi, (2.19)'daki tanım ile (2.31)'deki tanım arasındaki:

$$\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi] = \frac{d}{dz}\left\{\mathbf{D}_z^{-(1-\varphi)}[\phi]\right\} \left(\equiv \frac{d}{dz}\left\{\mathbf{I}_z^{1-\varphi}[\phi]\right\}\right) \tag{2.44}$$

şeklindeki aşikar olan ilişkiden yola çıkarak, (2.33) ile verilen (oluşturulan) tanımın mantıklı gerekçesi de kolayca görülebilir. Daha detaylı bilgi için Kilbas *et al.* (2006) ve Srivastava (2020) eserleri yeterli olacaktır.

Yukarıdaki gibi sunulan (2.31)-(2.33) arasında genel tanımlar yardımıyla, (2.20)-(2.22) arasında verilen genel özelliklere benzer özellikler de aşağıdaki gibi kesirsel mertebeden türev operatörleri için sunulmuştur.

2.2.2.1 Teorem. (Skalerle Çarpma Özelliği): $\phi \coloneqq \phi(z)$ analitik fonksiyonunun φ-*mertebeden* kesirsel türevi var olsun ve C_1 kompleks skaleri için,

$$\mathbf{D}_z^{\varphi}[C_1\phi] = C_1\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi] \quad (0 \le \varphi < 1) \tag{2.35}$$

dır.

2.2.2.2 Teorem. (Lineerlik Özelliği): $\phi \coloneqq \phi(z)$ ve $\psi \coloneqq \psi(z)$ analitik fonksiyonları φ-*mertebeden* kesirsel türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Her C_1 ve C_2 kompleks skalerleri için,

$$\mathbf{D}_z^{\varphi}[C_1\phi + C_2\psi] = C_1\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi] + C_2\mathbf{D}_z^{\varphi}[\psi] \quad (0 \le \varphi < 1) \tag{2.36}$$

dır.

2.2.2.3 Teorem. $\phi \coloneqq \phi(z)$ analitik fonksiyonları φ ve ψ - mertebeden türevlenebilir olsun. O zaman,

$$\mathbf{D}_z^{\varphi}\left(\mathbf{D}_z^{\psi}[\phi]\right) = \mathbf{D}_z^{\psi}\left(\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi]\right) = \mathbf{D}_z^{\varphi+\psi}[\phi] \tag{2.37}$$

dır.

Ayrıca, kesirsel mertebeden integrallerle ilgili olan, Sonuç 2.2.1.1, Sonuç 2.2.1.2 ve Sonuç 2.2.1.3'teki gibi verilen bazı benzeri ilişkiler elbette ki kesirsel mertebeden türev(ler) için de söz konusudur. Bu özel ilişkilerin ortaya çıkarılması için, ilgili

φ parametresinin uygun (ve amaca) göre kullanılması yeterli olacaktır. Bu açıdan da, Tanım 2.2.2.1 ile Tanım 2.2.2.2. ve/veya Tanım 2.2.2.3 tanımlarının koşulları altında hareket etmek önemlidir. Bunların bazıları da aşağıda sunulmuştur.

2.2.2.1 Sonuç. $m \in \mathbb{N}_0$ ve $0 \leq \varphi < 1$ olmak üzere, $\phi \coloneqq \phi(z)$ gibi bir (orijini kapsayan basit kapalı bölgede ve sınırında) analitik olan fonksiyonu için aşağıdaki önermeler sağlanır:

a) $\varphi \to 0^+ \implies \mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi] \to \phi(z)$,

b) $\varphi \to 1^- \implies \mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi] \to \phi'(z)$.

c) $\varphi \to 0^+ \implies \mathbf{D}_z^{m+\varphi}[\phi] \to \frac{d^m}{dz^m}\big(\phi(z)\big)$.

Kesirsel mertebeden integrallerle ilgili olan ve Örnek 2.2.1.1-Örnek 2.2.1.7 arasında verilen özel örneklendirmeler yine kesirsel mertebeden türevlenme ile ilgili olarak da hesaplanabilir ve bu sonuçların (2.31)-(2.34) arasındaki tanımlarla kapsamlı çok sayıda özel sonuçları da verilebilir. Bunlardan bazıları aşağıdaki gibi sunulmuştur.

2.2.2.1 Örnek. Örnek 2.2.1.1'de uygulanan yollar (2.31) ile verilen tanım ile birlikte yeniden göz önüne alınırsa, $\phi \coloneqq \phi(z) = C \ \ (C \neq 0)$ gibi bir kompleks değişkenli sabit fonksiyonun *φ-mertebeden* kesirsel türevinin:

$$\mathbf{D}_z^{\varphi}[C] = \frac{C}{\Gamma(1-\varphi)}\, z^{-\varphi} \qquad (0 \leq \varphi < 1) \tag{2.38}$$

şeklinde olduğu kolayca görülür.

2.2.2.1 Uyarı. Sıfırdan farklı **s**abit fonksiyonların kesirsel mertebeden türevinin sıfır olmadığı (2.38) ile verilen örnekle açıkça görülmektedir.
Örnek 2.2.2.1'de $\varphi = 1/2$ alınırsa, aşağıdaki gibi özel sonuça da kolayca oluşturulabilir.

2.2.2.2 Örnek. Örnek $\phi \coloneqq \phi(z) = C$ gibi bir kompleks değişkenli sabit fonksiyonunun $1/2$ - *mertebeden* kesirsel türevi:

$$\mathbf{D}_z^{1/2}[\mathrm{C}] = C\,\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{\pi}} \tag{2.39}$$

şeklinde olur.

2.2.2.3 Örnek. Örnek 2.2.1.2'de takip edilen yollar yine (2.31) ile verilen tanım ile birlikte yeniden göz önüne alınırsa, $\phi := \phi(z) = z^{\omega}$ $(\omega > -1)$ gibi bir kompleks değişkenli üstel fonksiyonunun *kesirsel türevi*:

$$\mathbf{D}_z^{\varphi}[z^{\omega}] = \frac{\Gamma(\omega+1)}{\Gamma(\omega-\varphi+1)}\,z^{\omega-\varphi} \qquad (0 \le \varphi < 1) \tag{2.40}$$

şeklinde olur.

Örnek 2.2.2.3'te eğer $\varphi = 1/2$ seçimi yapılırsa, aşağıdaki özel sonuç da kolayca elde edilir.

2.2.2.4 Örnek. $\phi := \phi(z) = z^{\omega}$ $(\omega > -1)$ gibi bir analitik olan kompleks üstel fonksiyonu için,

$$\mathbf{D}_z^{1/2}[z^{\omega}] = \frac{\boldsymbol{\Gamma}(1+\omega)}{\boldsymbol{\Gamma}(1/2+\omega)}\,z^{\omega-1/2} \qquad (\omega > -1) \tag{2.41}$$

şeklinde olur.

Yine Örnek 2.2.2.3'te sırasıyla $\omega = 1$ ve $\omega - 1 = 0 = \varphi - 1/2$ şeklindeki özel seçimler yapılırsa, aşağıdaki iki özel sonuç kolayca elde edilir.

2.2.2.5 Örnek. $\phi := \phi(z) = z$ kompleks *özdeşlik* fonksiyonunun φ-*mertebeden* kesirsel türevi:

$$\mathbf{D}_z^{\varphi}[z] = \frac{1}{\Gamma(2-\varphi)}\,z^{1-\varphi} \qquad (0 \le \varphi < 1) \tag{2.42}$$

şeklinde olur.

2.2.2.6 Örnek. $\phi := \phi(z) = z$ kompleks *özdeşlik* fonksiyonunun $\varphi = 1/2$-*mertebeden* kesirsel türevi:

$$\mathbf{D}_z^{1/2}[z] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\sqrt{z} \tag{2.43}$$

şeklindedir.

Yukarıda elde edilen (2.39) ve (2.41)'deki kesirsel mertebeden türevlere, yani ilgili eşitliklere, $1/2$-*mertebeden* kesirsel türev operatörü tekrar uygulanırsa, kesirsel mertebeden türevlerle ilgili teoremler gereği, aşağıdaki verilen sonuçlar kolayca oluşturulabilir.

2.2.2.7 Örnek.

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_z^{1/2}\{\,\mathbf{D}_z^{1/2}[\mathrm{C}]\,\} &= \mathbf{D}_z^{1/2}\left\{\frac{C}{\sqrt{\pi}\sqrt{z}}\right\} \\
&= \frac{C}{\sqrt{\pi}}\,\mathbf{D}_z^{1/2}\{\,z^{-1/2}\,\} \\
&= \frac{C}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(-1/2+1)}{\Gamma(-1/2-1/2+1)}\,z^{-1/2\,-1/2} \\
&= \frac{C}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(0^+)}\,z^{-1} \to 0 \qquad (\Gamma(0^+) \to \infty\,) \\
&\equiv \mathbf{D}_z^{1/2+1/2}[C] \\
&\equiv \mathbf{D}_z^{1}[C] \\
&\equiv \frac{d}{dz}(C)
\end{aligned}$$

olup ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_z^{1/2}\{\,\mathbf{D}_z^{1/2}\,[z]\,\} &= \mathbf{D}_z^{1/2}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\sqrt{z}\right\} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\mathbf{D}_z^{1/2}\{\,z^{1/2}\,\} \\
&= 1 \\
&\equiv \mathbf{D}_z^{1/2+1/2}[z] \\
&\equiv \mathbf{D}_z^{1}[z] \\
&\equiv \frac{d}{dz}(z)
\end{aligned}$$

dır.

Son olarak, (2.11)'de tanımlanan ve Önerme 2.2.1.1 ile sunulan *n*-değerli analitik fonksiyonların kesirsel mertebeden integralleri ile ilgili bilgiler ve onların çeşitli

sonuçlarını içeren ve sadece (2.24) ve (2.25) şeklindeki önceden sunulan hesaplamalar benzeri şekilde kesirsel mertebeden türev(ler) için de oluşturulabilir. Burada, sadece $\mathbb{F}(n)$ analitik fonsiyonlar sınıfında olan kompleks (değişkenli) fonksiyonlara ilişkin bazı kesirsel mertebeden hesaplamalar sunulacaktır. Önceki bölümde de vurgulandığı gibi, diğer fonksiyonlar ailesindeki analitik fonksiyonlara ilişkin kesirsel mertebeden türevlerin belirlenmesi ve hatta mümkün olan daha özel formlarının oluşturulması yine araştırmacıların ilgisine bırakılmıştır.

2.2.2.1 Önerme. $z \in \mathbb{U}$ ve $\phi \coloneqq \phi(z) \in \mathbb{F}(n)$ olsun. O zaman, $0 \leq \varphi < 1$ koşulunu sağlayan her φ reel sayısı için,

$$\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi] = \left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\mathrm{n}-\varphi+1)} z^n + \sum_{j=n+k}^{\infty} A_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\mathrm{j}-\varphi+1)} z^j\right) z^{-\varphi} \tag{2.44}$$

şeklindedir.

2.2.2.2 Önerme. $z \in \mathbb{U}$ ve $\phi \coloneqq \phi(z) \in \mathbb{F}(n)$ olsun. O zaman, $0 \leq \varphi < 1$ koşulunu sağlayan her φ gerçel sayısı için,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_z^{1+\varphi}[\phi] &\equiv \mathbf{D}_z^{1}\left\{\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi]\right\} \\ &\equiv \frac{d}{dz}\left\{\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi]\right\} \\ &= \left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\mathrm{n}-\varphi)} z^n + \sum_{j=n+k}^{\infty} A_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(\mathrm{j}-\varphi)} z^j\right) z^{-\varphi-1} \end{aligned} \tag{2.45}$$

şeklindedir.

Bu bölümün son özel örneği de, Örnek 2.2.1.7'deki gibi verilen ve (2.26)'da ki fonksiyon serisi formunda olan elementer kompleks fonksiyon değişkenli ve (2.27) ile verilmiş olan ve kesirsel mertebeden türevini içeren özel kompleks fonksiyonudur. İlgili hesaplamanın detayı için, (2.30)'da ki bilgilerin ışığında, Tanım 2.2.2.1 ve Önerme 2.2.2.1 ile Örnek 2.2.2.1 ve Örnek 2.2.2.3 örneklerinde geçen bilgilere odaklanmak yeterli olacaktır.

2.2.2.8 Örnek. $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere,

$$w = \phi(z) = \frac{1}{1-z}$$

kompleks (değişkenli) fonksiyonunun $\varphi\ (0 \leq \varphi < 1) -$ *mertebeden kesirsel* türevi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_z^{\varphi}[w] &= \mathbf{D}_z^{\varphi}\left[\frac{1}{1-z}\right] \\
&= \mathbf{D}_z^{\varphi}\left[\sum_{j=0}^{\infty} z^j\right] \\
&= \mathbf{D}_z^{\varphi}\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} z^j\right] \\
&= \mathbf{D}_z^{\varphi}[1] + \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\mathbf{D}_z^{\varphi}\left[z^j\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\varphi)} z^{-\varphi} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-\varphi+1)} z^{j-\varphi} \qquad (2.46) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-\varphi+1)} z^{j-\varphi}
\end{aligned}$$

şeklinde olur.

Özellikle, Sonuç 2.2.1.8'deki özel sonuç ile ve Gamma fonksiyonuna ilişkin sayfa 10'da vurgulanan **(i)**'deki özel bilgilendirmeler ışığında, (2.29) ile verilen rasyonel tipteki $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik olan fonksiyon için, (2.30)'da sunulmuş olan kesirsel integrallenme ile ilgili özel hesaplamalar elbette ki yine (2.46)'da verilen sonuç için de mümkündür. Onlar için de, $\varphi \to 0^+$ ve $\varphi \to 1^-$ özel durumlar (2.46)'da verilen sonuç için göz önüne alınırsa, ilgili elementer fonksiyona ilişkin aşağıdaki özel sonuçlar kolayca hesaplanabilir.

2.2.1.8 Sonuç. $z \in \mathbb{U}$ ve $\phi(z) \coloneqq \frac{1}{1-z}$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\varphi \to 0^+ \implies \mathbf{D}_z^{\varphi}\left[\frac{1}{1-z}\right] \to \mathbf{D}_z^{0}\left[\frac{1}{1-z}\right] &\equiv 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1)} z^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} z^j \\
&= \frac{1}{1-z}
\end{aligned}$$

ve

$$\varphi \to 1^{-} \implies \mathbf{D}_z^{\varphi}\left[\frac{1}{1-z}\right] \to \mathbf{D}_z^{1}\left[\frac{1}{1-z}\right]$$

$$= 0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j)} z^j$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j)} z^j$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j z^j$$

$$= \frac{1}{(1-z)^2}$$

$$\equiv \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

olur.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, tez araştırmamızın özgün kısmını oluşturan teorik sonuçlarımız, bunların olası sonuçları, çeşitli karşılaştırmalar ve öneriler yer alacaktır. Sunulacak olan bu ilgili bilgilerin, yani teorilerin ve bunların çeşitli olası sonuçları Irmak and Kulalı (2021) ve Kulalı ve Irmak (2023) tarafından literatüre kazandırılan özgün sonuçları içermektedir.

Odaklanılması planlanan ilgili teorilerin hem oluşturulmasında hem de ispatlarında aşağıda verilen yardımcı teorem (Lemma) önemli rol alacaktır. İlgili Lemma için, $\mathbb{U}$ açık diskinde tanımlanmış olan ve $\mathbb{P}(n) \coloneqq \mathcal{F}_{n+1}^{1}(0)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ gibi bir analitik fonksiyonlarının oluşturduğu özel fonksiyonlar ailesine ihtiyaç vardır. Özellikle, bu fonksiyonlar ailesindeki kompleks (değişkenli) fonksiyonlar Kompleks Fonksiyonlar Teorisi açısından da oldukça önemli bir fonksiyonlar ailesidir. Bu açıdan, çeşitli kavramların ve teorilerin detayları için de Nehari (1952), Duren (1983) ve Goodman (1983) temel eserleri önemli kaynaklardır.

İkinci bölümde (2.11) ile tanımlanan fonksiyonlar ailesine özel alt sınıflarına odaklanıldığında, araştırmamız için ihtiyaç duyulan $\mathbb{P}(n)$ fonksiyonlar ailesinin

$$\mathbb{P}(n) = \{\, \phi(z) : \phi(z) = 1 + A_{n+1}z^{n+1} + A_{n+2}z^{n+2} + \cdots \quad (z \in \mathbb{U}) \,\} \tag{3.1}$$

şeklindeki bir aile olduğu ve

$$\phi(z) \in \mathbb{P}(n) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(0) = 1$$

olduğu açıkça görülmektedir. Özellikle, bu ailedeki fonksiyonlara ilişkin bazı temel bilgileri içeren çalışmalar için Hayman (1961) ve Robertson (1963) temel makalelerine odaklanılabilir.

3.1 Lemma. $z \in \mathbb{U}$, $\mathrm{W}(z) \in \mathbb{P}(n)$ ve $v \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ olsun. Eğer,

$$\Re e\left(\mathrm{W}(z)\right) > 0 \qquad (|z| \leq |z_0| < r < 1) \tag{3.2}$$

$$\mathrm{W}(z_0) \neq 0 \tag{3.3}$$

ve

$$\Re e\left(\mathrm{W}(z_0)\right) = 0 \tag{3.4}$$

koşulları sağlanacak şekilde $\mathbb{U}$ kümesinde z_0 gibi bir kompleks sayısı var ise, o zaman,

$$z_0 \mathrm{W}'(z_0) = i\, v\, \mathrm{W}(z_0) \tag{3.5}$$

koşulu da sağlanır (Nunokowa 1992).

Irmak and Kulalı (2021) tarafından tanımlanmış ve $\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{A}}(n)$ ile gösterilmiş kompleks değişkenli fonksiyonlar sınıfının n-değerli analitik fonksiyonlardan oluştuğunu önceden de belirtilmişti. Her $m \in \mathbb{N}_0$ $(m < n\,;\, n \in \mathbb{N})$ doğal sayısı için, hem $\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{A}}(n)$ sınıfında yer alan her analitik fonksiyonu göz önüne almak hem de bu tez çalışmasının kapsamını daha da geniş tutmak adına, ilgili ailedeki her bir $\phi := \phi(z)$ gibi (analitik ve n-değerli olan) fonksiyonların çeşitli türevleri içeren:

$$\phi^{(m)}(z) \equiv \frac{d^m}{dz^m}\{\phi(z)\} \quad , \quad D_\lambda^m[\phi] \equiv D_\lambda^m[\phi(z)] \quad \text{ve} \quad \mathbb{D}_\lambda^m[\phi] \equiv \mathbb{D}_\lambda^m[\phi(z)]$$

şeklindeki dönüşümlere (operatörlere) ihtiyaç duyulmaktadır. Şimdi, elementer fonksiyonlar ile olan çok daha özel sonuçlarına girmeden, sadece o özel fonksiyonların bazılarını hem tanımlayalım hem de bazı özel hallerini vurgulayalım.

3.1 $\boldsymbol{\phi^{(m)}(z)}$ Operatörü (Dönüşümü)

$\mathbb{U}$ birim diskinde analitik olan

$$\phi(z) \in \mathbb{F}(n) \subset \mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{A}}(n)$$

şeklindeki n-değerli analitik fonksiyonun m. türevini:

$$\phi^{(m)}(z) := \frac{d^m}{dz^m}\{\phi(z)\} \qquad (m < n\,;\, n \in \mathbb{N}\,;\, m \in \mathbb{N}_0) \tag{3.6}$$

şeklinde ifade edelim ve bunun da

$$\begin{aligned} \phi^{(m)}(z) &= \frac{n!}{(n-m)!}\, z^{n-m} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{j!}{(j-m)!} A_j z^{j-m} \\ &= \left(\frac{n!}{(n-m)!}\, z^n + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{j!}{(j-m)!}\, A_j\, z^{j-m}\right) z^{-m} \end{aligned} \tag{3.7}$$

şeklindeki gibi tanımlanması yerinde olacaktır. Eğer (3.6) yardımıyla oluşturulan (3.7) ile verilen tanıma odaklanılırsa, yine $m < n$ koşulunu sağlayacak şekildeki her $n \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{N}_0$ doğal sayıları için;

$$m \coloneqq 0 \implies \phi^{(0)}(z) \equiv \phi(z)$$
$$= z^n + \sum_{j=n+1}^{\infty} A_j\, z^j \in \mathcal{F}_1^1(n)\,, \tag{3.8}$$

$$m \coloneqq 1 \implies \phi^{(1)}(z) \equiv \phi'(z)$$
$$= nz^{n-1} + \sum_{j=n+1}^{\infty} jA_j\, z^{j-1} \in \mathcal{F}_0^n(n-1)\,, \tag{3.9}$$

$$m \coloneqq 2 \implies \phi^{(2)}(z) \equiv \phi''(z)$$
$$= n(n-1)z^{n-2}$$
$$+ \sum_{j=n+1}^{\infty} j(j-1)A_j\, z^{j-2} \in \mathcal{F}_1^{n(n-1)}(n-2), \tag{3.10}$$
$$\vdots$$
$$m \coloneqq q \implies \phi^{(q)}(z) \equiv \frac{d^q}{dz^q}\big(\phi(z)\big)$$
$$= \frac{n!}{(n-q)!}\, z^{n-q}$$
$$+ \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{j!}{(j-q)!} A_j z^{j-q} \in \mathcal{F}_1^B(n-q) \tag{3.11}$$
$$\left(B \coloneqq \frac{n!}{(n-q)!}\ ;\ q < n\ ;\ n \in \mathbb{N}\ ;\ q \in \mathbb{N}_0\right)$$

ilişkileri kolayca gözlenebilir olup, bunun da ϕ gibi bir analitik fonksiyonunun z bağımsız değişkenine göre *m.* türevini ifade eden bir (türev) operatörünü açıkça belirttiği ve (3.6)-(3.11) arasında vurgulanan benzeri ilişkilerin bir sonucu olarak da;

$$\phi^{(m)}(z) : \mathbb{F}(n) \to \mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{A}}(n)$$

şeklindeki analitik fonksiyon aileleri arasındaki ilişkilere sahip bir türev operatörünü açıkça gösterir.

3.2 $D_{\lambda}^{m}[\phi(z)]$ Operatörü (Dönüşümü)

$$0 \le \lambda \le 1 \quad , \quad m < n \quad , \quad n \in \mathbb{N} \quad , \quad m \in \mathbb{N}_0 \quad \text{ve} \quad z \in \mathbb{U} \tag{3.12}$$

koşulları altında, verilen $\phi \coloneqq \phi(z) \in \mathbb{F}(n)$ gibi bir *n*-değerli analitik fonksiyonunun yardımıyla,

$$D_{\lambda}^{m}[\phi] \equiv D_{\lambda}^{m}[\phi(z)]$$

gibi bir operatörü

$$D_{\lambda}^{m}[\phi] \coloneqq \lambda\, \phi^{(m)}(z) + (1-\lambda)\, z\phi^{(1+m)}(z) \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlayalım. Bazı karmaşık elementer işlemlerin sonucunda ve (3.7)'nin yardımıyla, (3.13) ile verilen ifadenin dengi ise,

$$\begin{aligned} D_{\lambda}^{m}[\phi] &= \lambda\, \phi^{(m)}(z) + (1-\lambda) z \phi^{(1+m)}(z) \\ &= \lambda \left(\tfrac{n!}{(n-m)!} z^{n-m} + \textstyle\sum_{j=n+1}^{\infty} \tfrac{j!}{(j-m)!} A_j z^{j-m} \right) \\ &\qquad + (1-\lambda) \left(\tfrac{n!}{(n-m-1)!} z^{n-m} \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \textstyle\sum_{j=n+1}^{\infty} \tfrac{j!}{(j-m-1)!} A_j z^{j-m-1} \right) \\ &= \delta_n(\lambda\,; m) z^{n-m} + \textstyle\sum_{j=n+1}^{\infty} \beta_n(\lambda\,; m) z^{j-m} \end{aligned} \tag{3.14}$$

şeklindeki denk ifadeler olup, (3.12) ile verilen koşullar altında, yukarıda kullanılan $\delta_n(\lambda\,; m)$ ve $\beta_j(\lambda\,; m)$ fonksiyonları da:

$$\delta_n(\lambda\,; m) = [\lambda + (1-\lambda)(n-m)] \, \frac{n!}{(n-m)!} \tag{3.15}$$

ve

$$\beta_j(\lambda\,; m) = [\lambda + (1-\lambda)(j-m)] \, A_j \, \frac{n!}{(n-m)!} \tag{3.16}$$

şeklindeki fonksiyonlardır. Özellikle, (3.7) ve (3.13)'te sunulan sonuçlar göz önüne alındığında:

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dz}(D_{\lambda}^{m}[\phi]) &= \tfrac{d}{dz}\left(\lambda\, \phi^{(m)}(z) + (1-\lambda)\, z\, \phi^{(1+m)}(z) \right) \\ &= \lambda\, \phi^{(1+m)}(z) + (1-\lambda)\left[\phi^{(1+m)}(z) + z\, \phi^{(2+m)}(z) \right] \\ &= \phi^{(1+m)}(z) + (1-\lambda) z\, \phi^{(2+m)}(z) \\ &\equiv D_{\lambda}^{1+m}[\phi] \end{aligned} \tag{3.17}$$

şeklindeki (olması gereken) ilişkiler de kolayca görülür. Eğer (3.17) ifadesi (3.7) ile birlikte göz önüne alınırsa, yine ilgili operatör için

$$D_{\lambda}^{m}[\phi] \; : \; \mathbb{F}(n) \; \rightarrow \; \mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{A}}(n)$$

şeklindeki fonksiyon sınıfları arasındaki ilişki de açıkça gözlemlenebilir. Özellikle, mantıklı koşullar altında, λ ve m parametrelerinin farklı (ve uygun) seçimleri bizleri çok sayıda kesirsel tipte fonksiyonlarla ilgili olan çeşitli sonuçlara götürür. Özgün

sonuçlarımız açısından da önemli roller oynayacak olan bazı sonuçları vurgulamak istiyoruz. Aşağıda sadece bazıları sunulmuştur. Her biri için, eğer (3.8)-(3.11) ile verilen seri formları göz önüne alındığında, verilenlerin $\mathcal{F}_{k}^{A}(n)$ fonksiyonlar ailesinde yer aldıkları yine görülür:

$$\lambda = 0 \implies D_0^m[\phi] = z\phi^{(1+m)}(z)\,, \tag{3.18}$$

$$\lambda = 1 \implies D_0^m[\phi] = \phi^{(m)}(z)\,, \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} m = 0 \implies D_\lambda^0[\phi] &= \lambda\,\phi^{(0)}(z) + (1-\lambda)z\phi^{(1)}(z) \\ &= \lambda\,\phi(z) + (1-\lambda)z\phi'(z) \end{aligned} \tag{3.20}$$

ve

$$\begin{aligned} m = 1 \implies D_\lambda^1[\phi] &= \lambda\,\phi^{(1)}(z) + (1-\lambda)z\phi^{(2)}(z) \\ &= \lambda\,\phi'(z) + (1-\lambda)z\phi''(z)\,. \end{aligned} \tag{3.21}$$

3.3 $\mathbb{D}_{\lambda}^{m}[\phi(z)]$ Operatörü (Dönüşümü)

$\phi \coloneqq \phi(z) \in \mathbb{F}(n)$ olmak üzere ve (3.13) ile (3.17)'nin yardımıyla,

$$\mathbb{D}_\lambda^m[\phi] \equiv \mathbb{D}_\lambda^m[\phi(z)]$$

gibi gösterilen bir operatörü de:

$$\mathbb{D}_\lambda^m[\phi] \coloneqq \frac{zD_\lambda^{1+m}[\phi]}{D_\lambda^m[\phi]} \quad (m < n\,;\; n \in \mathbb{N}\,;\; m \in \mathbb{N}_0) \tag{3.22}$$

şeklinde tanımlar ve (3.6) ile birlikte $\phi \coloneqq \phi(z) \in \mathbb{F}(n)$ fonksiyonun (2.14) formundaki seri açılımları göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_\lambda^m[\phi] &= \frac{zD_\lambda^{1+m}[\phi]}{D_\lambda^m[\phi]} \\ &= \frac{z\phi^{(1+m)}(z)+(1-\lambda)z^2\phi^{(2+m)}(z)}{\lambda\phi^{(m)}(z)+(1-\lambda)\,z\,\phi^{(1+m)}(z)} \\ &= \frac{\gamma_n(\lambda\,;m) + \sum_{j=n+1}^{\infty}\alpha_j(\lambda\,;m)z^{j-m}}{\delta_n(\lambda\,;m) + \sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j(\lambda\,;m)z^{j-m}} \end{aligned} \tag{3.23}$$

şeklindeki gibi denk olan ilişkiler kolayca elde edilir. (3.22)'deki oldukça karmaşık sonuçlar içeren elementer işlemler yapılırsa, yukarı geçen:

$$\delta_n(\lambda\,;m) \quad \text{ve} \quad \beta_j(\lambda\,;m)$$

şeklindeki ifadeler sırasıyla (3.15) ve (3.16)'da ki gibi tanımlanan fonksiyonlar olup, $\gamma_n(\lambda\,;m)$ ile $\alpha_n(\lambda\,;m)$ ifadeleri de:

$$\gamma_n(\lambda\,;m) = [\lambda + (1-\lambda)(n-m-1)]\,\frac{n!}{(n-m-1)!} \tag{3.24}$$

ve

$$\alpha_j(\lambda\,;m) = [\lambda + (1-\lambda)(j-m-1)]\,A_j\,\frac{n!}{(j-m-1)!} \tag{3.25}$$

şeklinde tanımlanmış fonksiyonlardır.

Birbirine denk konumda olan (3.22) ve (3.23) ile verilen kesirsel yapıdaki fonksiyonlara odaklanılırsa, $z=0$ noktasının ilgili fonksiyonların herbiri için birer kaldırılabilir tipteki singüler noktanın olduğu ve dolayısıyla o fonksiyonların $\mathbb{U}$ açık kümesinde yine analitikliğinin de korunduğu kolayca görülebilir. Hatta, (3.15), (3.16), (3.24) ve (3.25) ile verilen bilgilerinin (3.23)'te kullanılması sonucu, (3.21) ile verilen kompleks dönüşümün:

$$\mathbb{D}_\lambda^m[\phi] \;:\; \mathbb{F}(n) \;\rightarrow\; \mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{n}}(n)$$

şeklindeki fonksiyon sınıfları arasındaki ilişkileri de yine görülebilir. Aynı zamanda, λ ve m parametrelerinin uygun şekildeki seçimleri yine bizleri çok sayıda kesirsel tipteki özel sonuçlara götürür.

Örneğin;

$$\lambda = 0 \implies D_0^m[\phi] = 1 + \frac{z\phi^{(2+m)}(z)}{\phi^{(1+m)}(z)}\,, \tag{3.26}$$

$$\lambda = 1 \implies D_0^m[\phi] = \frac{z\phi^{(1+m)}(z)}{\phi^{(m)}(z)}\,, \tag{3.27}$$

$$m = 0 \implies D_\lambda^0[\phi] = \frac{\phi^{(1)}(z)+(1-\lambda)z\phi^{(2)}(z)}{\lambda\phi^{(0)}(z)+(1-\lambda)z\phi^{(1)}(z)}$$

$$= \frac{\phi'(z)+(1-\lambda)z\phi''(z)}{\lambda\phi(z)+(1-\lambda)z\phi'(z)} \quad , \tag{3.28}$$

$$m = 1 \implies D_{\lambda}^{0}[\phi] = \frac{\phi^{(2)}(z)+(1-\lambda)z\phi^{(3)}(z)}{\lambda\phi^{(1)}(z)+(1-\lambda)z\phi^{(2)}(z)}$$

$$= \frac{\phi''(z)+(1-\lambda)z\phi'''(z)}{\lambda\phi'(z)+(1-\lambda)z\phi''(z)}, \tag{3.29}$$

$$\lambda := 0 =: m \implies D_{0}^{0}[\phi] = 1 + \frac{z\phi''(z)}{\phi'(z)} \quad , \tag{3.30}$$

$$\lambda := 0 =: m-1 \implies D_{0}^{1}[\phi] = 1 + \frac{z\,\phi'''(z)}{\phi''(z)}, \tag{3.31}$$

$$\lambda - 1 := 0 =: m \implies D_{1}^{0}[\phi] = \frac{z\phi''(z)}{\phi'(z)}, \tag{3.32}$$

ve

$$\lambda := 1 =: m \implies D_{1}^{1}[\phi] = \frac{z\phi''(z)}{\phi'(z)} \tag{3.33}$$

gibi kesirsel tipteki fonksiyonların yine $\mathbb{U}$ kümesinde analitik olan özel sonuçların herbiri için, (3.6)'nın yardımıyla tanımlanan $\phi(z)$ fonksiyonunun (2.13)'teki seri açılımı kullanılarak, $\mathcal{F}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{n}}(n)$ sınıfındaki durumları da netleştirilebilir. Elbette ki üstte verilen kesirsel tipteki tüm fonksiyonların paydaları sıfırdan farklı olacak şekildeki serilerin belirlediği fonksiyonlar şeklinde olmak durumunda olmalıdır.

Şimdi, $\mathbb{U}$ bölgesinde analitik olan:

$$\forall\, \phi := \phi(z) \in \mathbb{F}(n) \quad (m < n\,;\; n \in \mathbb{N}\,;\; m \in \mathbb{N}_0)$$

şeklindeki *n*-değerli kompleks fonksiyonları için, başlangıçta tanımlamış olduğumuz operatörler, yani

$$\phi^{(m)}(z) \quad , \quad D_{\lambda}^{m}[\phi] \quad \text{ve} \quad \mathbb{D}_{\lambda}^{m}[\phi]$$

elementer operatörler (dönüşümler) ile (doğrudan veya dolaylı) ilişkili olan bazı (kapsamlı) argüment özelliklerini veren teorilerimizi önce sunalım, ardından da bu teorilerin bazı özgün sonuçları ile birlikte çeşitli önerilerimizi ve tartışmalarımızı vurgulayalım. Önceden de belirttiğimiz gibi, bu vurgulanacak olan her bir teori ve bunlara ilişkin olası tüm (özel) sonuçlar, ilgili tartışmalar ve hatta önerilerin detayları

Irmak and Kulalı (2021) tarafından literatüre kazandırılmış bilgilerin oluşturduğu bir araştırma çalışması kapsamındadır.

3.1 Teorem. (3.6), (3.7), (3.12), (3.13) ve (3.22) ile verilen koşullar altında ve/veya tanımlamalar ışığında,

$$\Omega_n(m) \coloneqq n - m \quad \text{ve} \quad 0 \leq \kappa < \frac{1}{\Omega_n(m)} \tag{3.34}$$

olsun. Bu durumda, $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, her $\phi \coloneqq \phi(n) \in \mathbb{F}(n)$ analitik fonksiyonu için,

$$\operatorname{Arg}\left\{z\frac{d}{dz}\left(\mathbb{D}_\lambda^m[\phi]\right)\right\} \notin \{0,\pi\} \implies \Re e\left\{\mathbb{D}_\lambda^m[\phi]\right\} > \kappa\,\Omega_n(m) \tag{3.35}$$

daima doğrudur. (Irmak and Kulalı 2021).

İspat. İstenilen ispat için, (3.12)'de verilen koşullar ile (3.6), (3.7), (3.13) ve (3.22) ile ifade edilen ilgili operatörlerin tanımları ışığında, $z \in \mathbb{U}$ ve $\phi \coloneqq \phi(n) \in \mathbb{F}(n)$ olsun. O zaman, (3.14), (3.15) ile (3.21)-(3.25) bilgilerinin ışığında ve (3.23)'te verilen operatörün tanımından,

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_\lambda^m[\phi] &= \frac{zD_\lambda^{1+m}[\phi]}{D_\lambda^m[\phi]} \\
&= \frac{z\phi^{(1+m)}(z)+(1-\lambda)z^2\phi^{(2+m)}(z)}{\lambda\phi^{(m)}(z)+(1-\lambda)\,z\,\phi^{(1+m)}(z)} \\
&= \frac{\gamma_n(\lambda\,;m)+\sum_{j=n+1}^{\infty}\alpha_j(\lambda\,;m)z^{j-m}}{\delta_n(\lambda\,;m)+\sum_{j=n+1}^{\infty}\beta_j(\lambda\,;m)z^{j-m}} \\
&= \frac{\gamma_n(\lambda\,;m)\,(\,1+c_1z+c_2z^2+\cdots\,)}{\delta_n(\lambda\,;m)\,(\,1+e_1z+e_2z^2+\cdots\,)} \\
&= \frac{\gamma_n(\lambda\,;m)}{\delta_n(\lambda\,;m)}\left(\frac{1+c_1z+c_2z^2+\cdots}{1+e_1z+e_2z^2+\cdots}\right) \\
&= \frac{\gamma_n(\lambda\,;m)}{\delta_n(\lambda\,;m)}\,(1+q_1z+q_2z^2+\cdots\,)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

gibi ilişkileri karmaşık da olsa elde edilebilir. Elbette ki, yukarıda geçen ve birbiri ile ilişkili olan $\delta_n(\lambda\,;m)$, $\beta_j(\lambda\,;m)$, $\gamma_n(\lambda\,;m)$ ve $\alpha_j(\lambda\,;m)$ şeklindeki ifadeleri sırasıyla (3.15), (3.16), (3.24) ve (3.25)'teki gibi tanımlanmış fonksiyonlardır. Önceden de

vurguladığımız gibi, (3.36) ile verilen rasyonel tipteki fonksiyon için $z_0 = 0 \in \mathbb{U}$ noktası bir kaldırılabilir nokta olduğundan dolayı, $\mathbb{D}_\lambda^m[\phi]$ operatörünün ifade ettiği fonksiyon $\mathbb{U}$ kümesinde analitik bir fonksiyon formundadır.

İlgili teoremin ispatı için, Lemma 3.1'i kullanmak istiyoruz. Bu açıdan, ilgili Lemma'da geçen $W(z)$ gibi bir fonksiyona gerek vardır. Bu açıdan, (3.36)'nın yardımıyla,

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_\lambda^m[\phi] &= \frac{\gamma_n(\lambda;m)}{\delta_n(\lambda;m)}\,(1 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots) \\ &= \frac{\gamma_n(\lambda;m)}{\delta_n(\lambda;m)}\,[\kappa + (1-\kappa)W(z)] \\ &= \Omega_n(m)\,[\kappa + (1-\kappa)W(z)]\end{aligned} \tag{3.37}$$

şeklindeki gibi kapalı formda olan bir $W(z)$ fonksiyonu tanımlayabiliriz. Elbette ki, yukarıda geçen κ ve $\Omega_n(m)$ ifaleri (3.34)'te geçen koşulların belirttiği ifadelerdir. Dikkat edilirse, (3.37)'de ifade edilen $W(z)$ kompleks (değişkenli) fonksiyonu $\mathbb{U}$'da analitik olmakla birlikte, Lemma 3.1'de vurgulanan $W(0) = 1$ koşulunu da sağladığı açıkça görülmektedir. Şimdi, ilgili Lemma'yı verilen teoremin ispatı için kullanmaya çalışalım. Bunun için de, öncelikli olarak, (3.37)'nin türevini alarak işe başlayalım:

$$\begin{aligned}z\,\frac{d}{dz}\{\mathbb{D}_\lambda^m[\phi]\} &\equiv z\,\mathbb{D}_\lambda^{1+m}[\phi] \\ &= z\,\frac{d}{dz}\,\{\Omega_n(m)\,[\kappa + (1-\kappa)W(z)]\} \\ &= z\,(1-\kappa)W'(z) \quad (z \in \mathbb{U})\end{aligned} \tag{3.38}$$

olup ve Lemma 3.1'in üç temel hipotezi olan (3.3) ve (3.4)'teki iki temel hipotezini sağlayacak şekildeki, yani Lemma 3.1'in bizlere sunduğu (3.3) ve (3.4) ile vurgulananlara denk olan:

$$W(z_0) = i\Delta \;\; (\Delta \neq 0) \quad \text{ve} \quad \Re e\left(W(z_0)\right) = 0 \tag{3.39}$$

şeklindeki koşulları sağlayan $z_0 \in \mathbb{U} - \{0\}$ gibi bir noktanın var olduğunu kabul edelim. O zaman, Lemma 3.1'in sunduğu (3.38) ve (3.37)'deki verilen bilgilerin yardımıyla;

$$\operatorname{Arg}\left\{z\,\mathbb{D}_\lambda^m[\phi]|_{z:=z_0}\right\} = \operatorname{Arg}\{z_0 \mathbb{D}_\lambda^m[\phi(z_0)]\}$$

$$= \mathrm{Arg}\,\{(1-\kappa)\,\Omega_n(m)\,z_0 W'(z_0)\}$$

$$= \mathrm{Arg}\,\{(1-\kappa)\,\Omega_n(m)\,i\,v\,\mathrm{W}(z_0)\}$$

$$= \mathrm{Arg}\,\{-(1-\kappa)\,\Omega_n(m)\,v\,\Delta\,\}$$

$$= \begin{cases} \pi & eğer \quad v \geq 1 \quad ve \quad \Delta > 0 \\ \pi & eğer \quad v \leq -1 \quad ve \quad \Delta < 0 \\ 0 & eğer \quad v \geq 1 \quad ve \quad \Delta < 0 \\ 0 & eğer \quad v \leq -1 \quad ve \quad \Delta > 0 \end{cases} \tag{3.40}$$

şeklindeki sonuçlar elde edilir. Burada, eğer yukarıdaki (3.40) ile verilen sonuçlar Teorem 2.1'in (3.35)'teki hipotezi ile karşılaştırıldığında aşikar olan bir çelişkinin olduğu kolayca görülür. Bu da bize, (3.39)'da ki gibi verilen koşulları sağlayan ilgili $\mathbb{U}-\{0\}$ kümesinde z_0 gibi bir noktanın mümkün olmadığını ifade eder. Bu durumda, ilgili Lemma'nın (3.2) ile belirtilen hipotezi gereğince, (3.37)'de verilen ifadeden;

$$\Re e\,\{\mathbb{D}_\lambda^m[\phi]\} = \Re e\,\{\Omega_n(m)\,[\kappa + (1-\kappa)W(z)]\}$$

$$= \kappa\,\Omega_n(m) + (1-\kappa)\,\Re e\,\{W(z)\}$$

$$> \kappa\,\Omega_n(m) \quad (z \in \mathbb{U})$$

eşitsizliği kolayca elde edilir. Doğal olarak, bu eşitsizlik de (3.35) ile verilen ilgili teoremin hükmünü gerektirir. Böylece, Teorem 2.1'in ispatı tamamlanır.

Üstte verilen kapsamlı teorem, herhangi bir $\phi \coloneqq \phi(n) \in \mathbb{F}(n)$ gibi analitik fonksiyonlarının çeşitli mertebeden bilindik (âdi) türevlerinin belirlediği ve kapsamlı argüment özelliğini içeren bir özgün sonuçtan oluşmaktadır. İlgili teorem *m. mertebeden* türevlenme ile ilgili olduğundan dolayı, ilgili teoremi $m+\varphi$ *- mertebeden kesirsel türeve* genişletmek yoluyla bu tez araştırmasının kapsamına da uygun bir akışı oluşturacaktır. Bu genelleştirme için de, Tanım 2.2.2.1 ile Tanım 2.2.2.2'nin yardımıyla önceden oluşturulmuş olan, $\phi \coloneqq \phi(n) \in \mathbb{F}(n)$ fonksiyonlarınca belirlenmiş ve (3.6)'daki gibi tanımlanan $\phi^{(m)}(z)$, (3.12)'deki gibi tanımlanan $D_\lambda^m[\phi]$ ve (3.22)'deki gibi tanımlanan $\mathbb{D}_\lambda^m[\phi]$ operatörlerini içeren ve kesirsel mertebeden türev(ler)i de kapsayacak şekilde yeni bir düzenlenmesi veya tanımlanması ile mümkün olacaktır. Çeşitli farklı düzenlemelerle literatürde zaman zaman ve farklı alanlarda karşılaşılan ve

çeşitli mantıkları olan çalışmalar söz konusu olabilmektedir. Bundan dolayı, bu vurgulanan farklı düzenlemelere ek olarak, yine önceden Irmak and Kulalı (2021) ve Kulalı and Irmak (2023) tarafından düşünülen (ileri sürülen) önerileri içeren çeşitli bilgilendirme de aşağıdaki gibi gerçekleştirilmiştir.

3.4 $\mathfrak{D}_{\lambda}^{m+\varphi}[\phi(z)]$ Operatörü (Dönüşümü)

Bu operatör, (2.44), (2.45) ve (3.6) verilen bilgilendirmeler ışığında ve (3.12)'de verilen koşullar altında, $\phi \coloneqq \phi(z) \in \mathbb{F}(n)$ gibi bir n-değerli analitik fonksiyon yardımıyla oluşturulmuş ve (3.13)'teki gibi bir operatöre, *φ-mertebeden kesirsel* türev operatörünün uygulanması sonucu elde edilecek olan bu operatör:

$$\mathfrak{D}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\} \equiv \mathfrak{D}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi(z)\} \quad (0 \leq \varphi < 1; m \in \mathbb{N}_0;\ z \in \mathbb{U})$$

şeklinde gösterilsin ve

$$\mathfrak{D}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\} \coloneqq \mathbf{D}_{z}^{\varphi}\left[D_{\lambda}^{m}[\phi]\right] \quad (0 \leq \varphi < 1; m \in \mathbb{N}_0) \tag{3.41}$$

şeklinde tanımlansın. Dikkat edilirse, (3.12)'deki koşullar altında, (3.41)'de kullanılan operatörlerin detayına odaklanıldığında:

$$\phi_{\lambda}(z) \coloneqq \lambda\phi(z) + (1-\lambda)z\phi'(z) \quad (0 \leq \lambda \leq 1; z \in \mathbb{U}) \tag{3.42}$$

şeklindeki gibi bir ifade göz önüne alındığında ve elbette ki

$$m < n\ ;\ 0 \leq \lambda \leq 1\ ;\ 0 \leq \varphi < 1\ ;\ \phi \coloneqq \phi(z) \in \mathbb{F}(n)\ ;\ n \in \mathbb{N} \text{ ve } m \in \mathbb{N}_0 \tag{3.43}$$

şeklindeki koşullar altında, (3.41) ile oluşturulan operatörün:

$$\mathfrak{D}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\} \equiv \mathbf{D}_{z}^{m+\varphi}\left[\phi_{\lambda}(z)\right] \quad (z \in \mathbb{U}) \tag{3.44}$$

şeklindeki gibi denk matematiksel bir yapının söz konusu olduğu da kolayca görülebilir. Aynı zamanda, $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, (3.43)'te verilen koşullar altında, (3.13)'te tanımlanan $D_{\lambda}^{m}\{\cdot\}$ operatörü ile (2.31)'deki gibi tanımlanan $\mathbf{D}_{z}^{\varphi}[\cdot]$ kesirsel mertebeden türev operatörü birlikte göz önüne alındığında ve (3.43)'teki koşullar altında; (3.41), (3.42) ve (3.44) ile sunulan operatörleri arasındaki:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\} &\equiv \mathbf{D}_{z}^{\varphi}\left[D_{\lambda}^{m}[\phi]\right]\\ &= \mathbf{D}_{z}^{\varphi}\left[\lambda\,\phi^{(m)}(z)+(1-\lambda)\,z\,\phi^{(1+m)}(z)\right]\\ &= \lambda\,\mathbf{D}_{z}^{\varphi}\left[\,\phi^{(m)}(z)\right]+(1-\lambda)\mathbf{D}_{z}^{\varphi}\left[\,z\,\phi^{(1+m)}(z)\right] \qquad (3.45)\\ &\equiv \mathbf{D}_{z}^{m+\varphi}\left[\phi_{\lambda}(z)\right] \quad (z\in\mathbb{U})\end{aligned}$$

şeklindeki gibi birbiri ile denk konumda olan yapıların söz konusu olduğu bir tanımlamadır. Özellikle, ikinci bölümde tanıtılan kesirsel mertebeden hesaplamalarla ilgili her iki operatörünün hesaplanabilirliği açısından, ilgili fonksiyonların ifade ettiği fonksiyon serileri dikkate alındığında vurgulanan denklikleri sağladığı kolayca görülür. Bunun için, (3.45) ile verilen denk ilişkileri de daha rahat bir şekilde ifade etmek adına, (3.6) ile verilen $\phi(z)$ fonksiyonuna ait olan hesaplamaların kullanılması durumunda, (3.41) ile verilen operatörün serilerle olan denk ilişkileri de:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\} &\equiv \mathbf{D}_{z}^{\varphi}\left[\lambda\,\phi^{(m)}(z)+(1-\lambda)z\phi^{(1+m)}(z)\right] \quad (m<n)\\ &\equiv \lambda\,\mathbf{D}_{z}^{\varphi}\left[\,\phi^{(m)}(z)\right]+(1-\lambda)\mathbf{D}_{z}^{\varphi}\left[\,z\,\phi^{(1+m)}(z)\right]\\ &= \lambda\,\mathbf{D}_{z}^{\varphi}\left[\frac{n!}{(n-m)!}\,z^{n-m}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{j!}{(j-m)!}A_{j}z^{j-m}\right] \qquad (3.46)\\ &\qquad +(1-\lambda)\mathbf{D}_{z}^{\varphi}\left[\frac{n!}{(n-m-1)!}\,z^{n-m}\right.\\ &\qquad\qquad \left.+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{j!}{(j-m-1)!}A_{j}z^{j-m}\right]\end{aligned}$$

şeklindeki gibi serilerle olan ilişkileri içeren bir denk yapının elde edileceği, (2.35) ve (2.36) özellikleri kullanılıp ve ardından bazı elementer hesaplamalar yapıldıktan sonra da:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\} &\equiv \lambda\,\mathbf{D}_{z}^{\varphi}\left[\,\phi^{(m)}(z)\right]+(1-\lambda)\mathbf{D}_{z}^{\varphi}\left[\,z\,\phi^{(1+m)}(z)\right] \quad (m<n)\\ &= \lambda\,\mathbf{D}_{z}^{\varphi}\left[\frac{n!}{(n-m)!}\,z^{n-m}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{j!}{(j-m)!}A_{j}z^{j-m}\right]\\ &\qquad +(1-\lambda)\mathbf{D}_{z}^{\varphi}\left[\frac{n!}{(n-m-1)!}\,z^{n-m}\right.\\ &\qquad\qquad \left.+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{j!}{(j-m-1)!}A_{j}z^{j-m}\right]\end{aligned}$$

$$= \mathbf{D}_z^{\varphi}\left[\left(\lambda\frac{n!}{(n-m)!}+(1-\lambda)\frac{n!}{(n-m-1)!}\right)z^{n-m}\right]$$

$$+\mathbf{D}_z^{\varphi}\left[\sum_{j=n+1}^{\infty}\left(\lambda\frac{j!}{(j-m)!}+(1-\lambda)\frac{j!}{(j-m-1)!}\right)A_j z^{j-m}\right]$$

$$= \left(\lambda\frac{n!}{(n-m)!}+(1-\lambda)\frac{n!}{(n-m-1)!}\right)\mathbf{D}_z^{\varphi}[z^{n-m}]$$

$$+\sum_{j=n+1}^{\infty}\left\{\left(\lambda\frac{j!}{(j-m)!}+(1-\lambda)\frac{j!}{(j-m-1)!}\right)A_j\mathbf{D}_z^{\varphi}\left[z^{j-m}\right]\right\}$$

$$= \left(\lambda\frac{n!}{(n-m)!}+(1-\lambda)\frac{n!}{(n-m-1)!}\right)\frac{\Gamma(n-m+1)}{\Gamma(n-m-\varphi+1)}z^{n-m-\varphi}$$

$$+\sum_{j=n+1}^{\infty}\left\{\left(\lambda\frac{j!}{(j-m)!}+(1-\lambda)\frac{j!}{(j-m-1)!}\right)A_j \cdot\frac{\Gamma(j-m+1)}{\Gamma(j-m-\varphi+1)}z^{j-m-\varphi}\right\} \quad (3.47)$$

şeklindeki gibi oldukça karmaşık elementer işlemler içeren bir sonuca varılır. Eğer, (3.47)'deki oldukça karmaşık işlemleri daha da sade bir şekle getirmek adına;

$$\mho_k(v,\lambda,\varphi) \coloneqq \left(\lambda\frac{k!}{v!}+(1-\lambda)\frac{k!}{(v-1)!}\right)\frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v-\varphi+1)} \quad (3.48)$$

şeklindeki gibi bir fonksiyon tanımlaması kullanırsak, bir birine denk olan (3.44)-(3.47) arasındaki ifadeler için,

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi(z)\} &\equiv \mathfrak{D}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\}\\ &\equiv \mathbf{D}_z^{\varphi}\left[\lambda\,\phi^{(m)}(z)+(1-\lambda)z\phi^{(1+m)}(z)\right]\\ &\equiv \lambda\,\mathbf{D}_z^{\varphi}\left[\,\phi^{(m)}(z)\right]+(1-\lambda)\mathbf{D}_z^{\varphi}\left[z\,\phi^{(1+m)}(z)\right] \quad (3.49)\\ &= \mho_n(n-m,\lambda,\varphi)z^{n-m-\varphi}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\mho_j(n-m,\lambda,\varphi)A_j\,z^{j-m-\varphi}\\ &= \left(\mho_n(n-m,\lambda,\varphi)z^{n}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\mho_j(n-m,\lambda,\varphi)A_j\,z^{j}\right)z^{-m-\varphi}\end{aligned}$$

şeklindeki gibi çeşitli kesirsel tipteki kuvvetlerin oluşturduğu ve daha da kolay takip edilebilinen seri formundaki sonuç oluşturulmuş olunur.

Son olarak, Irmak ve Kulalı (2021) tarafından ilgilenen araştırmacılar için önerilen çeşitli operatörlerden biri olan [Sayfa 14, Eq. (33)] operatörünü de burada hem tanıtalım hem de detaylandıralım. Bunun için, (3.43)'te verilen koşullar ve bilgiler ışığında,

Tanım 2.2.2.1 ve Tanım 2.2.2.2 tanımlarıyla verilmiş *kesirsel mertebeden türev operatörü* yardımıyla tanımlanan (3.44)'teki gibi oluşturulmuş olan $\mathfrak{D}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\}$ operatörünü göz önüne alarak aşağıdaki gibi bir operatörü de son olarak tanımlayalım.

3.5 $\mathbb{J}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi(z)\}$ Operatörü (Dönüşümü)

$\phi \coloneqq \phi(z) \in \mathbb{F}(n)$ olmak üzere,

$$\mathbb{J}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\} \equiv \mathbb{J}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi(z)\}$$

şeklindeki gibi bir notasyonla ifade edilen operatörü (dönüşümü):

$$\mathbb{J}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\} \coloneqq \frac{z\,\mathfrak{D}_{\lambda}^{1+m+\varphi}\{\phi\}}{\mathfrak{D}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\}} \qquad (0 \leq \varphi < 1;\ m \in \mathbb{N}_0\ ;\ z \in \mathbb{U}) \tag{3.50}$$

şeklindeki kesirsel formla tanımlayalım.

Bu üstteki kompleks operatöre (dönüşüme) odaklanıldığında ve (3.43)'teki koşulları sağlayan her bir parametrenin farklı farklı seçimlik durumları da dikkate alındığında, (3.50) ile verilen operatörünün kapsamlı bir operatör olduğu ve çok sayıda özel sonuçların varlığı görülebilir. Özellikle, en basitten, $\varphi \coloneqq 0$ hali (3.49) ile verilen bilgilerle birlikte (3.50)'deki kesirsel tipteki dönüşümü için göz önüne alınırsa, (3.34) verilen ve bunun bazı özel sonuçlarını da içeren ve (3.26)-(3.33) arsında vurgulanan kesirsel yapıya sahip olan çok sayıda ve yine oldukça kapsamlı olan dönüşümün elde edilebileceği açıkca gözlemlenebilir. Çünkü, (3.12) veya (3.43)'ün koşulları altında ve $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, (3.6), (3.13), (3.17) ve (3.41) bilgilerinin ışığında, $\mathbb{F}(n)$ fonsiyonlar ailesindeki her $\phi \coloneqq \phi(z)$ gibi analitik fonksiyonları için;

$$\begin{aligned}
\varphi \coloneqq 0 \ \Rightarrow\ \mathbb{J}_{\lambda}^{m+0}\{\phi\} &\coloneqq \frac{z\,\mathfrak{D}_{\lambda}^{1+m}\{\phi\}}{\mathfrak{D}_{\lambda}^{m}\{\phi\}} \\
&\equiv \left.\frac{z\,\mathbf{D}_{z}^{1+\varphi}[D_{\lambda}^{m}\{\phi\}]}{\mathbf{D}_{z}^{\varphi}[D_{\lambda}^{m}\{\phi\}]}\right|_{\varphi:=0} \\
&\equiv \frac{z\,\mathbf{D}_{z}^{1}[D_{\lambda}^{m}\{\phi\}]}{\mathbf{D}_{z}^{0}[D_{\lambda}^{m}\{\phi\}]}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$= \frac{\mathrm{z}\, D_{\lambda}^{1+m}[\phi\,]}{D_{\lambda}^{m}[\phi]}$$

$$\equiv \frac{z\,\phi^{(m+1)}(z)+\lambda\, z^{2}\,\phi^{(m+1)}(z)}{\lambda\,\phi^{(m+1)}(z)+(1-\lambda)\, z^{2}\,\phi^{(m+1)}(z)}$$

$$\equiv \mathbb{D}_{\lambda}^{m}[\phi]$$

ve

$$\varphi \to 1^{-} \;\Rightarrow\; \mathbb{J}_{\lambda}^{\,m+\varphi}\{\phi\} \;\to\; \mathbb{J}_{\lambda}^{\,m+1}\{\phi\} \equiv \frac{z\,\mathfrak{D}_{\lambda}^{2+m}\{\phi\}}{\mathfrak{D}_{\lambda}^{1+m}\{\phi\}}$$

$$\equiv \frac{z\,\mathbf{D}_{z}^{2+\varphi}\left[D_{\lambda}^{m}\{\phi\}\right]}{\mathbf{D}_{z}^{1+\varphi}\left[D_{\lambda}^{m}\{\phi\}\right]}\Bigg|_{\varphi\to 1^{-}}$$

$$\equiv \frac{z\,\mathbf{D}_{z}^{2}\left[D_{\lambda}^{m}\{\phi\}\right]}{\mathbf{D}_{z}^{1}\left[D_{\lambda}^{m}\{\phi\}\right]} \tag{3.52}$$

$$= \frac{\mathrm{z}\, D_{\lambda}^{2+m}[\phi\,]}{D_{\lambda}^{1+m}[\phi]}$$

$$\equiv \frac{z\,\phi^{(m+1)}(z)+\lambda\, z^{2}\,\phi^{(m+1)}(z)}{\lambda\,\phi^{(m+1)}(z)+(1-\lambda)\, z^{2}\,\phi^{(m+1)}(z)}$$

$$\equiv \mathbb{D}_{\lambda}^{1+m}[\phi]$$

şeklindeki ilişkiler kolayca elde edilir.

Özellikle, aynen (3.22) için vurgulandığı gibi, $z = 0 \in \mathbb{U}$ öğesi (3.50)'de tanımlanan (kompleks tipteki) kesirsel dönüşüm için bir kaldırılabilir bir noktadır. Doğal olarak, bu (3.50)'deki kesirsel dönüşüm yine $\mathbb{U}$ açık kümesinde analitik olur. Bu önemli durumu görmek açısında, (3.49)'da elde edilmiş olan seri açılımına sahip fonksiyonu hem (3.50)'de verilen operatörde hem de bu operatörün tüm özel durumları içeren kesirsel formlarında kullanmak ve ardından da mümkün olan tüm elementer işlemeleri sonuçlandırmak yeterli olacaktır.

Şimde de, Teorem 3.1'i ve bu teoremin tüm olası sonuçlarını da kapsayan ve kesirsel mertebeden türev operatörü yardımıyla tanımlandığı için de farklı farklı çok sayıda sonuçları da içeren aşağıdaki teoremi öncelikli olarak sunalım.

3.2 Teorem. (3.43), (3.45), (3.46) ve (3.49) ve (3.50) ile verilen koşullar altında ve/veya tanımlamalar ışığında,

$$\aleph_n(m) \coloneqq n - m - \varphi \quad \text{ve} \quad 0 \leq \eta < \frac{1}{\aleph_n(m)} \tag{3.53}$$

olsun. Bu durumda, $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, her $\phi \coloneqq \phi(z) \in \mathbb{F}(n)$ analitik fonksiyonu için, aşağıda verilen önerme:

$$\operatorname{Arg}\left\{z\frac{d}{dz}\left(\mathbb{J}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\}\right)\right\} \notin \{0,\pi\} \implies \Re e\left\{\mathbb{J}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\}\right\} > \eta\,\aleph_n(m) \tag{3.54}$$

daima doğrudur.

İspat. Bu teoremin ispatı için de yine Lemma 3.1'i kullanmak istiyoruz. Bunun için de, Teorem 3.1'in ispatında oluşturulan mantığı burada da oluşturmak ve ardından da o ispatta izlenen yolların aynen uygulanabilmesi için gerekli ve yeterli olan temel bazı adımları ve tanımlamaları oluşturmayı yeterli görüyoruz. Öncelikli olarak, $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, (3.43)'te verilen bilgiler ışığında, (2.12) ile verilen $\mathbb{F}(n)$ analitik olan her $\phi \coloneqq \phi(z) \in$ için, (3.45)-(3.49) ile verilen bilgilerin (3.50)'de kullanılması ve ardından da detaylı elementer işlemler yapılması sonucu, aynen Teorem 3.1'in ispatındaki ve (3.36)'daki benzeri mantıkla, aşağıdaki gibi:

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\} &\coloneqq \frac{\mathbf{z}\,\mathfrak{D}_{\lambda}^{1+m+\varphi}\{\phi\}}{\mathfrak{D}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\}} \\
&\equiv \frac{z\,\mathbf{D}_{z}^{1+\varphi}\left[D_{\lambda}^{m}\{\phi\}\right]}{\mathbf{D}_{z}^{\varphi}\left[D_{\lambda}^{m}\{\phi\}\right]} \\
&= \frac{z\left(\mathbf{D}_{z}^{1+\varphi}\left[\,\lambda\,\phi^{(m)}(z)+(1-\lambda)z\,\phi^{(1+m)}(z)\,\right]\right)}{\mathbf{D}_{z}^{\varphi}\left[\,\lambda\,\phi^{(m)}(z)+(1-\lambda)z\,\phi^{(1+m)}(z)\,\right]} \\
&= \frac{z\frac{d}{dz}\left(\mho_n(n-m,\lambda,\varphi)z^{n-m-\varphi}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\mho_j(n-m,\lambda,\varphi)A_j z^{j-m-\varphi}\right)}{\mho_n(n-m,\lambda,\varphi)z^{n-m-\varphi}+\sum_{j=n+1}^{\infty}\mho_j(n-m,\lambda,\varphi)A_j z^{j-m-\varphi}} \\
&= \cdots \\
&= \frac{(n-m-\varphi)\mho_n(n-m,\lambda,\varphi)+\sum_{j=n+1}^{\infty}(j-m-\varphi)\mho_j(n-m,\lambda,\varphi)A_j z^{j-n}}{\mho_n(n-m,\lambda,\varphi)+\sum_{j=n+1}^{\infty}\mho_j(n-m,\lambda,\varphi)A_j z^{j-n}}
\end{aligned}$$

$$= \cdots$$

$$= (n-m-\varphi)\,(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots) \tag{3.55}$$

şeklinde ve birbirine eşit (veya denk) konumda olan sonuçları elde ederiz. Bu (2.55) ile vurgulanan ilişki dikkate alındığında, üstte geçen:

$$1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

şeklindeki fonksiyon serisinin belirleyeceği fonksiyonun Lemma 3.1'de belirtilen $\mathbb{F}(n)$ fonksiyonlar sınıfında olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla, aynen Teorem 2.1'in ispatında tanımlanan $W(z)$ fonksiyonunu yine, (3.55)'teki bilgiler ışığında, eğer

$$\mathbb{J}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\} := \frac{\mathrm{z}\,\mathfrak{D}_{\lambda}^{1+m+\varphi}\{\phi\}}{\mathfrak{D}_{\lambda}^{m+\varphi}\{\phi\}}$$

$$= (n-m-\varphi)(1 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots) \tag{3.56}$$

$$= (n-m-\varphi)[\eta + (1-\eta)\mathrm{w(z)}]$$

şeklinde tanımlanırsa, Lemma 3.1'de vurgulandığı gibi $\mathrm{w(z)} \in \mathbb{F}(n)$ şeklinde bir kompleks (değişkenli) fonksiyonunun varlığı kendini yine gösterir. O halde, (3.53)'te belirtilen koşullar altında, Teorem 2.1'in ispatındaki geçen (3.38)-(3.40) arasındaki adımların her biri tekrar (3.55) ve (3.56)'dan elde edilecek olan analitiklikle (ilgili ispatta geçen benzeri) ilgili sonuçlar için uygulanırsa, (3.54)'te geçen gerektirmenin hipotez kısmı ile olan çelişkiye ve ardından da ilgili hükme varılarak istenen ispat da kolayca tamamlanabilir. İlgili detaylar, ilgilenen araştırmacıların ilgisine bırakılmıştır.

Teorem 3.2'nin, Teorem 3.1'in kesirsel mertebeden türev(ler) yardımıyla bir genellemesi olduğunu hem Irmak and Kulalı (2021) tarafından yayımlanmış makalede hem de bu tez çalışmasında zaman zaman vurgulanmıştı ve her iki teoremde de elde edilen tüm özgün teorilerin ve bunların olası tüm sonuçlarının doğrudan (2.12)'de tanıtılan $\mathbb{F}(n)$ kompleks (değişkenli) fonksiyonlar sınıfındaki analitik fonksiyonlarla doğrudan alakalıdır. Doğal olarak, Teorem 3.2'deki bazı özel seçimlerin Teorem 3.1'de de karşılığı olacağından ve kullanılan ilgili tüm parametrelerin uygun seçilmesiyle elde edilebilecek özel sonuçların bazıların yine (3.26)-(3.33) arasında verilen kesirsel tipteki fonksiyonlar ile alakalı olacağı kaçınılmazdır.

Şimdi, hem ilgili iki teorem arasındaki bazı ilişkileri ortaya çıkarmak hem de teoremlerin bazı özel sonuçlarını sunmak için aşağıdaki gibi verilen sadece altı özel sonuca odaklanmak istiyoruz. Diğer tüm (olası) sonuçlar için de, Irmak and Kulalı (2021) tarafından verilen makaledeki teoreme ve aynı zamanda ilgili teoremden elde edilen tüm önermelere ve o önermelerle ilgili olan diğer tüm sonuçlara (önerilere) odaklanmalarını öneriyoruz.

Özellikle, (3.51) ile verilen denklikler göz önüne alındığında, verilen iki (temel) teorem arasındaki oldukça temel ilişkiyi barındıran birinci esas olan sonuç, aşağıdaki gibi vurgulanmıştır.

3.1 Sonuç. Toerem 3.2'de $\varphi \coloneqq 0$ alınırsa, Teorem 3.1 elde edilir.

İlgili iki teorem arasındaki ilişkileri içeren ikinci önemli (ve kapsamlı) sonuç ise, $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, Teorem 3.2'de $\lambda \coloneqq 1$ seçimi ve (2.32), (2.33), (3.13) ve (3.17)'deki bilgiler ile birlikte dikkate alınırsa;

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_1^{m+\varphi}\{\phi\} &\equiv \frac{z\,\mathfrak{D}_1^{1+m+\varphi}\{\phi\}}{\mathfrak{D}_1^{m+\varphi}\{\phi\}} \\ &\equiv \frac{z\,\mathbf{D}_z^{1+\varphi}[\phi^{(m)}(z)]}{\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi^{(m)}(z)]} \\ &\equiv \frac{z\,\mathbf{D}_z^{\varphi}\{D_z^1[\phi^{(m)}(z)]\}}{\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi^{(m)}(z)]} \\ &\equiv \frac{z\,\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi^{(1+m)}(z)]}{\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi^{(m)}(z)]} \end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\left(m < n; 0 \leq \varphi < 1;\ n \in \mathbb{N}; m \in \mathbb{N}_0;\ \phi \coloneqq \phi(z) \in \mathbb{F}(n)\right)$$

şeklindeki birbirine denk ilişkiler elde edilir. Bu durumda, (3.57) ile verilen detaylı ilişkilerin bazı özel sonuçları olarak, aşağıdaki gibi, Teorem 3.2'nin bazı özel çıkarımlarına yer verilmiştir.

3.2 Sonuç. $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, $\aleph_n(m) \coloneqq n - m - \varphi$ olsun ve η gerçel parametresi de aşağıdaki gibi verilen şartı sağlasın:

$$0 \leq \eta < \frac{1}{\aleph_n(m)} \qquad (m < n;\ 0 \leq \varphi < 1;\ n \in \mathbb{N};\ m \in \mathbb{N}_0).$$

Bu durumda, eğer herhangi bir $\phi \coloneqq \phi(z)$ gibi kompleks (değişkenli) fonksiyon $\mathbb{F}(n)$ sınıfında ise, aşağıda verilen gerektirme:

$$\operatorname{Arg}\left\{z\frac{d}{dz}\left(\frac{z\,\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi^{(1+m)}(z)]}{\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi^{(m)}(z)]}\right)\right\} \notin \{0,\pi\}$$

$$\Longrightarrow\ \Re e\left\{\frac{z\,\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi^{(1+m)}(z)]}{\mathbf{D}_z^{\varphi}[\phi^{(m)}(z)]}\right\} > \eta\,\aleph_n(m) \qquad (3.58)$$

daima doğrudur.

Eğer Teorem 3.2'de $\varphi \coloneqq 0$ ve $\lambda \coloneqq 1$ seçimleri (veya denk olarak, örneğin, Sonuç 3.2'deki (3.58) önermesinde $\varphi \coloneqq 0$ seçimi) dikkate alınırsa, Irmak and Kulalı (2021) tarafından vurgulanan önerme de aşağıdaki gibi verilen üçüncü sonuç aşağıdaki gibi elde edilir. (Bunu için de, ilgili makalede yer alan Sayfa 11'deki Önerme 1'e bakılabilir.)

3.3 Sonuç. $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere, $\aleph_n(m) \coloneqq n - m$ olsun ve η reel parametresi de:

$$0 \leq \eta < \frac{1}{\aleph_n(m)} \quad (m < n;\ n \in \mathbb{N};\ m \in \mathbb{N}_0).$$

şeklindeki koşulu sağlasın. O zaman, her bir $\phi \coloneqq \phi(z) \in \mathbb{F}(n)$ n-değerli analitik fonksiyonu için, aşağıda verilen gerektirme her zaman doğru olur:

$$\operatorname{Arg}\left\{z\frac{d}{dz}\left(\frac{z\,\phi^{(1+m)}(z)}{\phi^{(m)}(z)}\right)\right\} \notin \{0,\pi\} \Longrightarrow \Re e\left\{\frac{z\,\phi^{(1+m)}(z)}{\phi^{(m)}(z)}\right\} > \eta\,\aleph_n(m). \qquad (3.59)$$

Teorem 3.2'nin (veya bu teoremin (3.58) ve (3.59) gibi çeşitli sonuçlarının) çok daha özel halleri olan ve genellikle aşina olunan iki elementer kompleks fonksiyonlarla ilgili olan çok özel sonuçlarla alakalı bilgilendirmelerle sonlandıralım.

İlgili elementer (kompleks değişkenli) fonksiyonla alakalı olan birinci özel sonuç, (2.13) ile tanımlanmış $\mathbb{F} \equiv \mathbb{F}(1)$ normalize edilmiş analitik fonksiyonlar sınıfındaki sonsuz sayıda oluşturulabileceğini kendini gösterir. Eğer (2.15)'deki gibi vurgulan $\phi \coloneqq \phi(z) \in \mathbb{F}$ fonksiyonu olarak:

$$w \coloneqq \phi(z) \coloneqq ze^z \qquad (z \in \mathbb{U})$$

şeklindeki kompleks (değişkenli) elementer fonksiyonunu seçelim. Bu fonksiyona ilişkin seri açılımı ise, (1.14)'teki fonksiyon seri açılımının yardımıyla:

$$\begin{aligned} w \coloneqq \phi(z) &\coloneqq ze^z \\ &= z\left(1 + \tfrac{1}{1!}z^1 + \tfrac{1}{2!}z^2 + \tfrac{1}{3!}z^3 + \cdots + \tfrac{1}{j!}z^j + \cdots\right) \\ &= z + \tfrac{1}{1!}z^2 + \tfrac{1}{2!}z^3 + \tfrac{1}{3!}z^4 + \cdots + \tfrac{1}{j!}z^{j+1} + \cdots \quad \in \mathbb{F} \end{aligned} \tag{3.60}$$

şeklindeki fonksiyon serisidir. Şimdi bu fonksiyonu, Teorem 3.2'nin özel bir sonucu haline dönüştürmek için, ilgili teoremde geçen $\phi(z)$ kompleks fonksiyonunu ifade edecek şekilde belirlemek durumundayız. $\mathbb{F} \equiv \mathbb{F}(1)$ fonksiyonlar sınıfına basit bir odaklanma sonucu, (3.60)'ı ifade edecek olan sınıf açısından, (2.13) ile belirlenen ilgili fonksiyon sınıfında geçen n doğal sayısının öncelikli olarak $n \coloneqq 1$ şeklinde ve doğal olarak ilgili A_k katsayıların da:

$$A_k = \frac{1}{k!} \;\; (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

şeklinde seçilmesi yeterli olacaktır. O halde, bu aydınlatmalar dahilinde, (3.50) ile oluşturulmuş ilgili (kompleks) operatörde:

$$\varphi \coloneqq 0 \quad , \quad m \coloneqq 0 \quad , \quad \lambda \coloneqq 1 \quad \text{ve} \quad n \coloneqq 1$$

şeklindeki gibi özel seçimler göz önüne alınırsa, aşağıdaki ilişkiler:

$$\begin{aligned} \mathbb{J}\{w\} \equiv \mathbb{J}_1^{0+0}\{\phi(z)\} &\equiv \frac{\mathrm{z}\,\mathfrak{D}_1^{1+0+0}\{ze^z\}}{\mathfrak{D}_1^{0+0}\{ze^z\}} \\ &= \cdots \\ &\equiv \frac{z\,D_1^1\{ze^z\}}{D_1^0[ze^z]} \end{aligned} \tag{3.61}$$

$$= \cdots$$

$$\equiv 1 + z$$

özel ilişkiler kolayca elde edilir. İlgili özel seçimlerle birlikte, bu üstteki özel ilişki Teorem 3.2 için dikkate alınırsa, aşağıdaki gibi verilen ve çok özel önermeleri de içeren elementer bir örnek oluşturulmuş olunur.

3.4 Sonuç. Verilen her bir $z \in \{w \in \mathbb{U} : \ \Re e(w) > 0 \text{ ve } \Im m(w) \neq 0\} \subset \mathbb{U}$ kompleks sayısı için,

$$\operatorname{Arg}\left\{z\frac{d}{dz}\left(\mathbb{J}_1^{0+0}\{ze^z\}\right)\right\} = \operatorname{Arg}\left\{z\frac{d}{dz}(\mathrm{z}+1)\right\} = \operatorname{Arg}\{z\} \notin \{0, \pi\}$$

olup ve

$$1 < \Re e\left\{\mathbb{J}_1^{0+0}\{ze^z\}\right\} = 1 + \Re e\{z\} < 2$$

dır.

Teorem 3.2'nin (veya bu teoremin olası denk olan sonuçlarının) üreteceği ikinci özel kompleks elementer fonksiyon olarak da, ikinci bölümde oluşturduğumuz ve detaylı bilgi verdiğimiz, (2.17) ile sunduğumuz kompleks değişkenli elementer fonksiyonunun çok sayıda özel sonuçlarının sunulduğu, (2.18)'deki özel hallerinden biri olan ve (2.26) ifade ettiği aşağıdaki özel elementer fonksiyon olsun:

$$w := \phi(z) = \frac{1}{1-z}$$
$$= 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^j + \cdots \ \in \mathcal{F}_1^1(0) \equiv \mathbb{F}(0). \qquad (3.62)$$

O zaman, (3.62)'deki bu fonksiyonun Teorem 3.2'de geçen fonksiyonla aynı olması, Teorem 3.2'nin özel sonucu içinde önemli olacağından dolayı, Teorem 3.2'de geçen $\phi := \phi(z)$ kompleks değişkenli fonksiyonuna benzeyen analitik fonksiyona ihtiyacımız var. Bunun için de, ilgili teorem de geçen n doğal sayısını $n \to 0$ (veya denk olarak $n := 0$) ve ilgili A_k katsayılarının da:

$$A_k = 1 \ \ (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

şeklinde seçilmesi yeterli olacaktır. O halde, bu aydınlatıcı bilgiler ışığında, (3.50) tanımlanmış olan ilgili (kompleks) operatörde eğer

$$\varphi \coloneqq 0 \quad , \quad m \coloneqq 0 \quad , \quad \lambda \coloneqq 1 \quad \text{ve} \quad n \coloneqq 0$$

şeklindeki gibi özel seçimler göz önüne alınırsa, aşağıdaki ilişkiler:

$$\begin{aligned} \mathbb{J}\{w\} &\equiv \mathbb{J}_1^{0+0}\{\phi(z)\} \\ &\equiv \frac{z\,\mathfrak{D}_1^{1+0+0}\{1/(1-z)\}}{\mathfrak{D}_1^{0+0}\{1/(1-z)\}} \\ &= \cdots \\ &\equiv \frac{z\,D_1^1\{1/(1-z)\}}{D_1^0[1/(1-z)]} \\ &= \cdots \\ &\equiv \frac{1}{1-z} \end{aligned} \tag{3.63}$$

şeklindeki gibi özel ilişkilerin belirlediği özel sonuç elde edilir. Yukarıda belirtilen zorunlu seçimlerle birlikte (3.63)'teki bilgiler Teorem 3.2 için dikkate alınırsa, aşağıdaki gibi verilen ve özel anlam taşıyan önermeleri de kapsayan ikinci bir elementer örnek daha sunulmuş olur. Özellikle, hem Teorem 3.2 hem de aşağıda verilen önermeler açısından, ilgilenen araştırmacıların Örnek 2.2.1.7 ile verilen (2.28)'deki detaylı bilgilendirmelere odaklanılması önerilmiştir.

3.5 Sonuç. $z \in \mathbb{U}$ olsun ve

$$w := \phi(z) = \frac{1}{1-z}$$

kompleks değişkenli fonksiyonu için,

$$\operatorname{Arg}\left\{z\frac{d}{dz}[\mathbb{J}\{w\}]\right\} = \operatorname{Arg}\left\{z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right)\right\} = \operatorname{Arg}\left\{\frac{z}{(1-z)^2}\right\} \notin \{0,\pi\}$$

koşulu sağlansın. O zaman,

$$\Re e\{\mathbb{J}\{w\}\} = \Re e\left\{\frac{1}{1-z}\right\} > \frac{1}{2}$$

olur.

4. SONUÇ

Üç bölümden oluşan bu özgün tez çalışmasının temel amacının Kesirsel Mertebeden Hesaplamalar ve ilgili iki temel operatör olan Kesirsel (Mertebeden) İntegral Operatörü ile Kesirsel (Mertebeden) Türev Operatörü hakkında temel bilgilendirmeleri ve teorileri öncelikli olarak sunmak ve ardından da ilgili operatörlerin kompleks değişkenli çeşitli fonksiyonlara olası bazı uygulamalarını elde etmektir. Belirtilen kompleks değişkenli fonksiyonlar, açık birim diskinde analitik olan ve literatürde genellikle n-değerli (n-valently) analitik fonksiyonlar olarak bilinen kompleks değişkenli fonksiyonlar temel hedef olduğundan dolayı, bu tür analitik fonksiyonların oluşturduğu mümkün olan en kapsamlı (fonksiyon) aileleri öncelikli belirlenmiş, bu ailelerdeki fonksiyonların çeşitli özellikleri ile birlikte kesirsel mertebeden (integral-türev) hesapları yapılmış, ilgili hesaplamaların bazı özel sonuçları ile birlikte kompleks değişkenli elementer fonksiyonlarla ilgili olan çeşitli özellikleri belirlenerek sunulmuştur. Tüm bu akışlar gerçekleştirilirken, genel teorilerin belirlenmesinden hareketle daha özel teorilere, bu teorilerin olası uygulamalarına ve bunların da çok özel sonuçlarına doğru akış esas alınmıştır. Aynı zamanda, 3. Bölümde vurgulanan ilgili tüm akışlar gerçekleştirilirken, bu tez araştırması ile ilgili olan çeşitli tartışmalara, karşılaştırmalara ve özellikle ilgilenen ilgili araştırmacılara yol gösterici bilgiler içeren önerilere de yer verilmiştir. Kapsamlı önermeler veya sonuçlar bağlamında, özellikle ilgilenen araştırmacılar açısından, aşağıdaki gibi ek özel bilgilendirmeleri vurgulamakta fayda görmekteyiz:

- İkinci bölümde verilen teoremler $\mathbb{F}(n)$ fonksiyonlar sınıfındaki sadece n-değerli analitik fonksiyonların kesirsel mertebeden integral ve türevleri için hesaplanmıştı. Benzeri hesaplamalar elbette ki (2.11)'de verilen genel formdaki fonksiyonlar ailesindeki tüm analitik fonksiyonlar için de hesaplanabilir. Bu elde edilecek hesaplamaların yardımıyla, (2.11)'de belirtilen fonksiyon serilerinin belirlediği alt (veya özel) fonksiyon sınıflarındaki çeşitli kompleks (değişkenli) fonksiyonlara ve hatta çok sayıdaki elementer fonksiyonlarla alakalı olan, (2.15) ve (2.18) ile verilen analitik fonksiyonlar için de istenilen kesirsel mertebeden hesaplamalar da yapılabilir. Aynı zamanda, belirtilen her bir analitik fonksiyon için, burada vurgulanmış bu özel hesaplamaların her biri, yine Tanım 2.2.2.2 veya

Tanım 2.2.2.3 tanımları kapsamında düşünülerek farklı mertebeden hesaplamalara da genişletilebilir. Özellikle, Örnek 2.2.1.7 ve Örnek 2.2.2.8'de verildiği gibi, kompleks değişkenli elementer fonksiyonlar için özel (kesirsel mertebeden) hesaplamalar da sunulmuştu. Bu gibi özel hesaplamalar için, (2.15) ve (2.18) ile verilen kompleks değişkenli elementer fonksiyonlarına odaklanmak hedefler için yeterli olacaktır.

- Teorem 2.1 ve Teorem 3.2 ile verilen teoremlerdeki parametrelerin uygun (ve mantıklı) seçilerek, bu belirtilen teoremler hem üstte vurgulanan diğer analitik fonksiyon ailelerindeki fonksiyonlarla alakalı önermeler veya sonuçlara hem de (2.15) ve (2.18)'de verilen elementer kompleks değişkenli fonksiyonlarla ilgili çeşitli önermeler veya özel sonuçlara varılabilir. Bu bağlamda, (3.60) ve (3.61)'de verilen gerekli özel oluşumlarla elde edilen $\mathbb{F}$ analitik fonksiyonlar sınıfındaki elementer fonksiyonla ilişkili olan ve Teorem 3.2'nin kompleks değişkenli fonksiyonuyla ilgili olan bir özel örneklendirmesi gerçekleştirilmiştir. Aynı zamanda, (3.62) ve (3.63) ile verilen bilgiler yardımıyla oluşturulan Sonuç 3.5'e de odaklanılabilir.

- Kompleks değişkenli fonksiyonlar düzlemler arasındaki ilişkileri gereği birer (kompleks) dönüşüm özelliğine sahiptir. Bu gibi dönüşüm ilişkilerinde, elementer işlemler yaparak ve elde edilen olası (elbette ki mantıklı olan) sonuçların ilgili düzlemlerdeki gösterimleri, yani grafik çizimleri kolay bir iş olmadığından dolayı, ilgili parametrelere (değişkenlere) bazı kısıtlamalar koyarak ve çeşitli paket (MATLAB, Mathematica gibi) programlar kullanılarak, elde edilen teorilerin ve doğal (elementer) sonuçlarının ilgili uzaylardaki hem analitik hem geometrik ilişkilerini ifade eden 2D ve 3D boyutlarında örneklendirmelerine de sıkça gidilmektedir. Bu açıdan, örnek olarak, Ibrahim *et al.* (2020), Kanas and Masih (2021) ve Wang *et al.* (2022)'de verilen üç bilimsel makalenin sonuçlarına ilişkin bazı ilginç özel durumlara ait olan 2D ve/veya 3D boyutlarındaki bazı özel hesaplamaları içeren sonuçların grafiksel bilgilerine bakılabilir. Bu açıdan, Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 teoremlerinde veya bunların her bir özel sonuçlarında geçen parametrelere kısıtlama getirerek ve çeşitli hazır bilgisayar programları yardımıyla vurgulanan boyutlardaki istenilen grafik dökümleri sunulabilir.

Örneğin, Teorem 3.2'den elde edilen Sonuç 3.2 ve Sonuç 3.3 için üstte vurgulanan örneklendirmeler kaçınılmaz olmasına rağmen, daha özel durumdaki sonuçları içeren Sonuç 3.4 ve Sonuç 3.5 ile elementer kompleks fonksiyonlar için herhangi bir paket programa gerek görülmemiştir. Benzeri durumlar için, ilgili teoremlerinin özel sonuçları ile ilişkili olabilecek (2.15) ve (2.18)'deki gibi verilen kompleks elementer fonksiyonlarla olan ilişkilerine odaklanılabilir.

KAYNAKLAR

Abel, N. H. 1823. Oplösning af et par opgaver ved hjelp af bestemte integraler: Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies, Solution of a couple of problems by means of definite integrals. Magazin for Naturvidenskaberne. Kristiania (Oslo): 55-68.

Agarwal, P. 2012. Further results on fractional calculus of Saigo operators. Appl. Appl Math., 7 (2): 585-594.

Ahlfors , H. 1979. Complex analysis. McGraww-Hill, 331, New York.

Altıntaş, O., Irmak, H. and Srivastava, H. M. 1995. Fractional calculus and certain starlike functions. Comput. Math. Appl., 30 (2): 9-15.

Anastassiou, G. A. 2011. Basics of right nabla fractional calculus on time scales. J. Nonlinear Evol. Equ. Appl., 1: 111-118.

Artin, E. 1964. The gamma function. Holt, Rinehart & Winston, 39, New York.

Babosa, R. S., Machado, J. A. T., Vinagre, B. M. and Calderon, A. J. 2007. Analysis of the van der pol oscillator containing derivatives of fractional order. Journal of Vibration and Control, 13 (9-10), 1291-1301.

Bapna, I. B. and Jain, N. 2008. Application of modified fractional calculus operators in statistical distributions. Math. Sci. Res. J., 12 (11): 258-269.

Breaz, N., Breaz, D. and Owa, S. 2016. Fractional calculus of analytic functions concerned with Möbius transformations. J. Funct. Spaces**,** Art. ID 6086409, 9 pp.

Brown, J. W. and Churchill, R. V. 1996. Complex variables and applications, McGraw-Hill, 468, USA.

Cafagna, D. 2007. Fractional calculus: A mathematical tool from the past for present engineers. IEEE Industrial Electronics Magazine, 1: 35-40.

Carlson, B. C. 1977. Special functions of applied mathematics, 343, New York.

Chen, M. P., Irmak, H. and Srivastava, H. M. 1997. Some families of multivalently analytic functions with negative coefficients. J. Math. Anal. Appl., 214 (2): 674-690.

Cho, N. E., Owa, S., Srivastava, H. M. 1993. Some remarks on a conjectured upper bound for the fractional derivative of univalent functions. Internat. J. Math. Statist. Sci*.,* 2 (1): 117-125.

Daftardar-Gejji V. 2014. Fractional Calculus: Theory and Applications, Narosa Publishing House, 232, New Delhi.

Debnath, L. 1995. Integral Transformations and Their Applicatiobns. CRC Press, 457, New York.

Debnath, L. 2004. A brief historical introduction to fractional calculus. Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech., 35 (4): 487-501.

Diethelm K., Ford, N. J., Freed, A. D. and Luchko, Y. 2005. Algorithms for the fractional calculus: Aselection of numerical method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194 (6-8): 743-773.

Duarte, V., Machado, J., Kiryakova, V. 2014 Some pioneers of the applications of fractional calculus. Frac. Cal. Appl. Anal., 17 (2): 552-578.

Dugowson, S. 1994. Les différentielles métaphysiques (histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation), Thèse, 444 page, Université Paris Nord, Paris.

Duren, P. L. 1983. Univalent Functions, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 259, Springer-Verlag, 383, New York, Berlin, Heilderberg and Tokyo.

Garra, R. and Polito, F. 2012. Fractional calculus modelling for insteady unidirectional flow of incomplete fluids with time-dependent viscosity. Commun. in Non-linear Sci. and Numer. Simulation 17: 5073-5078.

Garrappa, R., Kaslik, E. and Popolizio, M. 2019. Evaluation of fractional integrals and derivatives of elementary functions: Overview and tutorial. Mathematics, 7: 407.

Gemant, A. 1942. On fractional differentials. Philosophical Magazine, 7 (25): 540-549.

Goodman, A. W. 1983. Univalent functions, Vols, I and II, Polygonal Publishing Company, 246, Florida, USA.

Grozdev, S. 1997. On the appearance of the fractional calculus. J. Theoret. Appl. Mech., 27 (3): 11-20.

Hayman, W. K. 1961. On functions with positive real part. *J. London Math. Soc.* 36: 35-48.

Herrmann, R. 2014. Fractional calculus: An introduction for physicists. World Scientic, 500, Hackensack, NJ.

Herzallah, M. A. E. 2014. Notes on some fractional calculus operators and their properties. J. Fract. Calc. Appl., 5 (19): 10 pp.

Hilfer, R. 2000. Applications of fractional calculus in physics. World Scientic Publishing Company, 472, Singapore, New Jersey, London and Hong Kong.

Ibrahim, R. W., Hadid, S. B. and Momani, S. 2020. Generalized Briot-Bouquet differential equation by a quantum difference operator in a complex domain. Int. J. Dyn. Control, 8 (3): 762-771.

Irmak, H. and Kulalı, Ö. F. 2021. An extensive study on various multivalently analytic functions with complex coefficients and some of their argument properties. J. Orissa Math. Soc., 40: 1-16.

Irmak, H. 2021. A variety of multivalently analytic functions with complex coefficients and some argument properties of their applications. Punjab Univ. J. Math., 53 (6), 367-376.

Irmak, H. 2021. Characterizations of some fractional-order operators in complex domains and their extensive implications to certain analytic functions. An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform., 48 (2): 349-357.

Irmak, H. 2022. Various operators in relation to fractional order calculus and some of their applications to normalized analytic functions in the open unit disk. Turkish J. Math., 46 (1): 167-176.

Lashin, A. M. Y. and Aouf, M. K. 2022. Hadamard Product of Certain Multivalent Analytic Functions with Positive Real Parts. Mathematics, 10: 1506.

Liouville, J. 1832. Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions. Journal de l'École Polytechnique, Paris, 13: 1-69.

Liouville, J. 1832. Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques. Journal de l'École Polytechnique, Paris, 13, 71-162.

Kanas, S. and Masih, V. S. (2021). On the behaviour of analytic representation of the generalized Pascal snail. Anal. Math. Phys., 11 (2): Paper No. 77, 27 pp.
Katugampola, U. N. 2014. A new approach to generalized fractional derivatives. Bull. Math. Anal. & Appl., 6 (4): 1-15.
Kayman, W. K. 1994. Multivalent Functions, Cambridge University Press, 263, Cambridge, USA.
Khairnar, S. M. and More, M. 2010. Application of fractional calculus to a class of multivalent β-uniformly convex functions. Appl. Math. Inf. Sci., 4 (3):429-445.
Kilbas, A. A., Srivastava, H. M. and Trujillo, J. J. 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations; Elsevier, Amsterdam Etc.: Amsterdam, The Netherlands.
Kiryakova, V. 2021. A Guide to special functions in fractional calculus. Mathematics, 9: 106.
Kulalı, Ö. F. and Irmak, H. 2023. An extensive note on characteristic properties and possible implications of some operators designated by various type derivatives. (Yayına sunuldu)
Kiryakova, V. 1994. Generalized Fractional Calculus and Applications; Longman - J. Wiley, Harlow - New York, Chapman and Hal l / CRC: 388, London, UK.
Lavoie, J. L., Osler, T. J. and Tremblay, R. 1976. Fractional derivatives and special functions. SIAM Rev., 18: 240-268.
Letnikov, A. V. 1868. Theory of differentiation of fractional order (in Russian). Matematicheskii Sbornik, 3: 1-68
Luchko, Y. 1999. Operational method in fractonal calculus. Fract. Calc. Appl. Anal., 2: 463-488.
Luo, M. J. and Raina, R. K., 2019. The decompositional structure of certain fractional integral operators. Hokkaido Math. J., 48 (3): 611-650.
Machado, J. A. T. and Kiryakova, V. 2019. Recent history of the fractional calculus: Data and statistics. In Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 1: Basic Theory; Kochubei, A., Luchko, Y., Eds.; De Gryuter: Berlin, Germany, 2019; pp. 1-21.
Magin, R. L. 2004. Fractional Calculus in Bioengineering, 183, Begell House, USA.
Mainardi, F. A. 2020. A tutorial on the basic special functions of fractional calculus. WSEAS Trans. Math., 19: 74-98.
Martinez, C., Sanz, M. and Pastor, J. 2000. A functional calculus and fractional powers for multivalued linear operators. Osaka J. Math., 37 (3): 551-576.
Meerschaert, M. M. and Sikorskii, A. 2012. Stochastic models for fractional calculus. Vol. 43 of De-Gruyter Studies in Mathematics, Walter de Gruyter, Germany.
McBride, A. 1982. Fractional powers of a class of ordinary differential operators. Proc. Lond. Math. Soc. (III), 45: 519-546.
Mikolás, M. 1975. On the recent trends in the development, theory and applications of fractional calculus. In: Fractional Calculus and Its Applications (Proc. Intern. Conf., New Haven Univ., 1974), Lect. Notes in Math., 457: 357-375.
Miller, K. S. and Ross, B. 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. J. Wiley, 376, New York.
Nehari, Z. 1952. Conformal Mapping. McGraw-Hill Book Company, 414, New York, Toronto and London.

Nishimoto, K., 2001. Some equalities and N-fractional calculus for Riemann's zeta function. Adv. Appl., Clifford Algebras, 11 (S2): 247.

Nunokawa, M. 1992. On properties of non-Caratheodory functions. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 68 (6): 152-153.

Oldham, K. B. and Spanier, J. 1974. The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration of arbitrary order. Academic press, 322, New York and London.

Olver, F. W. J., Lozier, D. W., Boisvert, R. F. and Clark, C. W. 2010. NIST handbook of mathematical functions. Cambridge University Press, 968, New York.

Ortigueira, M. D. and Machado, J. A. T. 2015. What is a fractional derivative? Journal of Computational Physics, 293 (1): 413.

Owa, S., Saigo, M., Megumi, F. and David, M. 1991. On a certain fractional operator. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 67 (5): 151-153.

Owa, S., Tsurumi, K., Nunokawa, M. and Sekine, T. 2003. On integral means for fractional calculus of analytic functions. Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 31 (4): 243-255.

Owa, S. and Shen, C. Y. 1998. An application of certain fractional operator. Indian J. Pure Appl. Math., 29 (3): 221-226.

Podlubny, I. 1999. Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications, volume 198 of Mathematicsin Science and Engineering. Academic Press, 340, New York, London, Sydey, Tokyo and Toronto.

Podlubny, I., Magin, R. L. and Trymorush, I. 2017. Niels Henrik Abel and the birth of fractional calculus. Frac. Cal. Appl. Anal., 20 (5): 1068-1075.

Pommerenke, C. 1975. Univalent functions. With a chapter on quadratic differentials by Gerd Jensen. Studia Mathematica / Mathematische Lehrbücher, Band XXV. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 376 pp.

Raina, R. K. 1997. On certain classes of analytic functions and applications to fractional calculus operators. Integral Transform. Spec. Funct., 5 (3-4): 247-260.

Robertson, M. S. 1963. Extremal problems for analytic functions with positive real part and applications. *Trans. Amer. Math. Soc.* 106, 236-253.

Ross, B., 1977. The development of fractional calculus 1695–1900. Historia Mathematica, 4: 75-89.

Ross, B., 1992. Origins of fractional calculus and some applications, Internat. J. Math. Statist. Sci., 1 (1): 21-34.

Samko, S. G., Kilbas A. A. and Marichev, O. I. 1993. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications; Gordon and Breach, 976, Yverdon, Switzerland.

Saxena, R. K., Ram, J. and Suthar, D. L. 2009. Fractional calculus of generalized Mittag-Leffler functions. J. Indian Acad. Math., 31 (1): 165-172.

Srivastava, H. M. and Owa, S. 1989. Univalent functions, fractional calculus and their applications. Halsted Press, John Wiley and Sons, New york, Chieschester, Brisbane, Toronto.

Srivastava, H. M. 2020. Fractional-order derivatives and integrals: introductory overview and recent developments. Kyungpook Math. J., 60 (1), 73-116.

Şan, M. and Irmak, H. 2011. Ordinary differential operator and some of its applications to certain meromorphically *p*-valent functions. Appl. Math. Comput., 218 (3): 817-821.

Stojanovic, M. 2011. Fractional derivatives in spaces of generalized functions. Fractional Calculus and Applied Analysis, 14 (1): 125-137.

Taberski, R. 1986. Contributions to fractional calculus and exponential approximation. Funct. Approx. Comment. Math., 15: 81-106.

Tarasova, V. V. and Tarasov, V. E. 2016. Elasticity for economic processes with memory: fractional differential calculus approach. Fract. Differ. Calc., 6 (2): 219-232.

Uyanık, N. and Owa, S. 2019. Notes on vertain analytic functions. Turk J. Math., 43 (5): 279-283.

Vinagre, J., Blas, M., Calderon, G., Antonio, J., Suarez, M., Jose, I., Monje, M. and Concepcion, A. 2005. Control theory and fractional calculus. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat., 99 (2): 241-258.

Wunsch, A. D. 1994. Complex variables with applications. Addison-Wesley Publishing Company, 622, USA.

Wang, Y., Zhou, B., Wang, B., Zhao, R., Liu, Q. and Dai, M. (2022). On the Highly Accurate Evaluation of the Voigt/Complex Error Function with Small Imaginary Argument. Mathematics, 10: 308.

Zhuravkov, M. and Romanova, N. 2015. Modification of Hertz contact problem solution on the basis of fractional calculus for biostructures mechanical properties determination. Nonlinear Phenom. Complex Syst., 18 (1): 31-37.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı	Ömer Faruk KULALI

Eğitim

Yüksek Lisans	T.C. Marmara Üniversitesi Ortadoğu Araştırmaları Enstitüsü Ortadoğu İktisadı	2008-2010
Yüksek Lisans	T.C. Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2020-2023
Lisans	T.C. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Bölümü Almanca Matematik Öğretmenliği	1989-1994
Lisans	T.C. Hitit Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Siyaset Bilimi ve Kamu Yönetimi Bölümü	2012-2017

İş Deneyimi

Yıl	**Kurum**	**Görev**
1994-1997	İstanbul Kağıthane Lisesi	Öğretmen
1997-1999	Çorum Özel Tek Seçenek Dershanesi	Öğretmen
1999-2002	Tokat Özel Yükseliş Dershanesi	Öğretmen
2002-2010	Çorum Özel Final Dergisi Dershanesi	Öğretmen
2010-2012	Havza Endüstri Meslek Lisesi	Öğretmen
2012-2013	Çorum Endüstri Meslek Lisesi	Öğretmen
2013-Halen	Çorum Şehit Erol Olçok Anadolu İmam hatip Lisesi	Öğretmen

Akademik Aktiviteler

1. H**.** Irmak and Ö. F. Kulalı, An extensive study on various multivalently analytic functions with complex coefficients and some of their argument properties, J. Orissa Math. Soc. 40 (1-2) (2021), 1-16.
2. Ö. F. Kulalı and H**.** Irmak, An extensive note on characteristics properties and possible implications of some operators designated by various type derivatives, Turkish J. Math. (2023) (appear).