T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEMI-RIEMANN GEOMETRİDE İNTEGRAL FORMÜLLERİ

Mihriban KÜLAHCI

Tez Yöneticisi
Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2008

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEMI-RIEMANN GEOMETRİDE İNTEGRAL FORMÜLLERİ

Mihriban KÜLAHCI

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı

Bu tez, 13/06/2008 tarihinde aşağıda belirtilen juri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT

Üye: Prof. Dr. Sadık KELEŞ

Üye: Prof. Dr. Rifat GÜNEŞ

Üye: Prof. Dr. Vedat ASİL

Üye: Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞ

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ...../...../..... tarih ve ..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimimin her aşamasında; şükran borçlu olduğum, bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, değerli önerileri ve katkılarıyla desteğini hiçbir zaman esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Mahmut ERGÜT' e teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Yine çalışmalarım ve doktora eğitimimin tümünde; her zaman yanımda olan, yakın ilgi gördüğüm, değerli önerileri ve katkılarıyla desteğini hiçbir zaman esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet BEKTAŞ' a teşekkür ederim.

Ayrıca doktora eğitimim boyunca her zaman yanımda olan eşime ve herşeyimi borçlu olduğum, bugünlere gelmemi sağlayan anneme ve babama teşekkür ederim.

Mihriban KÜLAHCI

İÇİNDEKİLER

İçindekiler I
Simgeler Listesi II
Özet III
Abstract IV

0. GİRİŞ 1
1. TEMEL KAVRAMLAR 2
1.1. Tensörler ve Tensör Uzayları 2
1.2. Semi-Riemann İç Çarpım Uzayı 10
1.3. Hodge-Yıldız Operatörü 16
1.4. Kovaryant Türev 18
1.5. Non-dejenere Space-like ve Time-like Sınır 24
2. LAPLACE OPERATÖRÜ 38
2.1. Bazı Diferensiyel Operatörler 38
2.2. Semi-Riemann Uzayında Stokes, Divergens ve Green Teoremleri 44
3. İNTEGRAL FORMÜLLERİ 51
3.1. Non-dejenere Space-like ve Time-like Sınırlı Semi-Riemann Manifoldları İçin İntegral Formülleri 51
Kaynaklar 65

SİMGELER LİSTESİ

$\langle , \rangle_R$	: Riemann İç Çarpımı
$\langle , \rangle_1$	: 1.Tip Semi-Riemann İç Çarpımı
$\langle , \rangle_2$	: 2.Tip Semi-Riemann İç Çarpımı
$\langle , \rangle$	: Semi-Riemann İç Çarpım
R_v^n	: n-boyutlu Semi-Riemann Uzayı
P	: Riemann Manifoldu
N	: (v-1)-indeksli Semi-Riemann Manifoldu
M	: Semi-Riemann Manifoldu
$\wedge^n(M)$	: M Üzerinde Tanımlı n-Formların Cümlesi
$*$	: Hodge-YıldızOperatörü
dv	: Manifold Üzerinde Hacim Elementi
Ric	:Ricci Eğrilik Tensör Alanı
II	:İkinci Temel Form
∂M_+	:Non-dejenere Space-like Sınır
∂M_-	:Non-dejenere Time-like Sınır
$w_{\partial M_+}$	:Non-dejenere Space-like Sınır Üzerinde Hacim Elementi
$w_{\partial M_-}$	:Non-dejenere Time-like Sınır Üzerinde Hacim Elementi
$vol(M)$	:M Manifoldunun Hacmi
div	:Divergens Fonksiyonu
$Grad$	:Riemann Manifoldu Üzerinde Gradient Fonksiyonu
$grad$	:Semi-Riemann Manifoldu Üzerinde Gradient Fonksiyonu
L	:Riemann Manifoldu Üzerinde Laplace Operatörü
Δ	:Semi-Riemann Manifoldu Üzerinde Laplace Operatörü
$Hessf$	:f Fonksiyonunun Hessian Tensörü
H_f	:f Fonksiyonunun Hessian Formu
H	:Ortalama Eğrilik

ÖZET

Doktora Tezi

SEMI-RIEMANN GEOMETRİDE İNTEGRAL FORMÜLLERİ

Mihriban KÜLAHCI

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

2008, Sayfa:66

Bu tez üç bölüm halinde düzenlenmiştir.

Giriş kısmında, çalışmanın kapsamı ve amacı belirtilmiştir.

Birinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanımlar ve teoremler verildi.

İkinci ve üçüncü bölüm çalışmanın orijinal kısımlarını ihtiva etmektedir.

İkinci bölümde, bazı diferensiyel operatörler tanıtıldı. Ayrıca semi-Riemann manifoldları üzerinde Stokes, Divergens ve Green teoremleri elde edildi.

Üçüncü bölümde, non-dejenere space-like ve non-dejenere time-like sınırlı semi-Riemann manifoldları için Reilly integral formülü ve bu integral formülünün herhangi iki diferensiyellenebilir fonksiyon için genelleştirilmişi verildi.

Anahtar Kelimeler: Non-dejenere Space-like Sınır, Non-dejenere Time-like Sınır, Stokes Teoremi, Divergens Teoremi, Green Formülü, Reilly İntegral Formülü.

ABSTRACT

PhD Thesis

INTEGRAL FORMULAS IN SEMI-RIEMANNIAN GEOMETRY

Mihriban KÜLAHCI

Fırat University
Graduate School of Science and Technology
Department of Mathematics

2008, Page:66

This thesis is arranged in three chapters.

In the introduction, the aim and content of the thesis are explained.

In the first chapter, some fundamental definitions and theorems are given which will be used in the later chapters.

Second and third chapter include the original parts of the thesis.

In the second chapter, some differential operators are introduced. Furthermore, Stokes, Divergence and Green theorems are obtained on the semi-Riemannian manifolds.

In the third chapter, the Reilly integral formula for semi-Riemannian manifolds with non-degenerate space-like and non-degenerate time-like boundary and generalized Reilly integral formula for any two differential functions are given.

Key Words: Non-degenerate Space-like Boundary, Non-degenerate Time-like Boundary, Stokes Theorem, Divergence Theorem, Green Formula, Reilly Integral Formula.

GİRİŞ

Matematiğin her dalında kullanılan Stokes, Divergens ve Green teoremlerinin mühendislik alanında da kullanım alanı bulunmaktadır. Bu teoremler teknikte ve matematikte oldukça uygulama alanına sahiptir. Bu teoremleri kulanarak integral formülleri elde edip ispatlamak ve geometrik yapılarını inşa etmek oldukça popüler bir çalışma alanıdır.Ayrıca son zamanlarda Riemann geometride bilinen teorem ve sonuçların semi-Riemann geometrideki karşılıklarını incelemek gerek diferensiyel geometri, gerekse fizik açısından ilginç sonuçlar doğurmaktadır. Çünkü semi-Riemann geometri, Geometri ve Fiziğin geniş kullanım yelpazesinde bulunan Lorentz (Minkowski) geometriden daha genel ve daha orijinal teorileri içermektedir.

Riemann geometride bilinen teorem ve sonuçların semi-Riemann geometrideki karşılıklarını incelemek için önce Riemann geometrideki temel kavramlar ve integral formülleri araştırıldı [1-8].Ayrıca semi-Riemann geometride integral formülleri konusu birçok makale ve kitapta incelendi [9-16].

Semi-Riemann manifoldunun sınırı bazı noktalarda dejenere olup, bu noktalar da dış birim normaller iyi tanımlanamayacağı için gerek Divergens ve gerekse Stokes teoremini ispatlamak zordur. Çünkü bu noktalarda hacim elementi iyi tanımlanamaz.

Duggal [9], semi-Riemann manifoldları için regüler sınır tanımladı. Bu regüler sınır üzerinde ifade ettiği Divergens ve Stokes teoremlerinin Riemann manifoldları için bilinenlerle aynı olduğunu gördü.

İkinci bir yöntem ise, Ünal [27] tarafından tanımlanan non-dejenere sınır kavramının kullanılmasıdır. Burada ki non-dejenere sınır ile dejenere noktalarda ölçümün sıfır olması kastedilmektedir. Bu yöntemle Divergens teoreminin daha genel bir ispatı yapılmıştır.

Üçüncü bir yöntem ise, Bektaş [25] tarafından verilen iki ayrı sınır tanımıdır. Lorentz manifoldlarında sınır kavramı manifold üzerinde alınan iç çarpıma bağlı olarak tanımlanmıştır.

Bu çalışmada da yukarıda belirtilen çalışmalar doğrultusunda, semi-Riemann manifoldları için iki sınır tanımı verildi. Non-dejenere space-like sınır ve non-dejenere time-like sınır. Bu sınırları kullanarak semi-Riemann manifoldları için Stokes, Divergens ve Green formülü ispatlandı. Ayrıca non-dejenere space-like ve non-dejenere time-like sınırlı semi-Riemann manifoldları için Reilly integral formülü ve bu integral formülünün herhangi iki diferensiyellenebilir fonksiyon için genelleştirilmişi ifade ve ispat edildi.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Temel kavramlara ayırdığımız bu bölüm beş kısım olarak düzenlendi. Birinci kısım tensörler ve manifoldlar üzerindeki temel yapılara, ikinci kısım semi-Riemann iç çarpım uzayına, üçüncü kısım Hodge-Yıldız operatörüne ayrıldı. Dördüncü ve beşinci kısımlarda ise, sırasıyla, kovaryant türev ve non-dejenere time-like ve space-like sınır kavramları tanıtıldı.

1.1. Tensör ve Tensör Uzayları

Tanım 1.1.1. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle , \rangle : V \times V \to IR$$

dönüşümü $\forall a, b \epsilon \mathbb{R}$ ve $\forall u, v \epsilon V$ için

i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,

ii)$\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$

$\langle u, av + bw \rangle = a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle$

özelliklerine sahip ise $\langle , \rangle$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir [17].

Tanım 1.1.2. $\langle , \rangle$, V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form olsun. Bu simetrik bilineer form üç değişik durum altında incelenebilir;

1) Definit Durum: Eğer,

i) $\forall v \epsilon V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \rangle 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna pozitif definit,

ii) $\forall v \epsilon V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \langle 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna negatif definit,

2) Semi-definit Durum: Eğer,

i) $\forall v \epsilon V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \geqslant 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna pozitif semi-definit,

ii) $\forall v \epsilon V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle \leqslant 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna negatif semi-definit, denir.

3) Non dejenere Durum:

Eğer, $\forall w \epsilon V$ için $\langle v, w \rangle = 0$ iken $v = 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik formuna non dejenere simetrik form denir [17].

Tanım 1.1.3. Reel sayılar cismi üzerinde, r-tane vektör uzayı, $V_1, ..., V_r$ olsun.

$$f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_r \to IR$$

fonksiyonu, $1 \leq i \leq r$ için $u_i, v_i \epsilon V_i$ ve $a, b \epsilon \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(v_1,...,v_{i-1},av_i+bu_i,v_{i+1},...,v_r) = af(v_1,...,v_{i-1},v_i,v_{i+1},...,v_r) + bf(v_1,...,v_{i-1},u_i,v_{i+1},...,v_r)$$

şeklinde tanımlı ise f ye r-lineer fonksiyon denir [18].

Tanım 1.1.4. $V_1 \times V_2 \times ... \times V_r$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı bütün r-lineer fonksiyonların cümlesini,

$$L(V_1,...,V_r;\mathbb{R})$$

ile gösterelim. Bu cümlede toplama ve skalarla çarpma işlemleri, sırasıyla, $\forall(u_1,u_2,...,u_r)\epsilon V_1 \times V_2 \times ... \times V_r$ için

$$(f_1+f_2)(u_1,u_2,...,u_r) = f_1(u_1,u_2,...,u_r)+f_2(u_1,u_2,...,u_r)$$

ve $\lambda\epsilon\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$(\lambda f)(u_1,u_2,...,u_r) = \lambda f(u_1,u_2,...,u_r)$$

şeklinde tanımlanırsa, bu iki işleme göre $L(V_1,...,V_r;\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına $V_1^*,V_2^*,...,V_r^*$ dual vektör uzaylarının tensör çarpımı denir ve

$$L(V_1,...,V_r;\mathbb{R}) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes ... \otimes V_r^*$$

ile gösterilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes ... \otimes V_r^*$ tensör uzayının herbir elemanına r.dereceden bir tensör denir.

Eğer

$$V_1 = V_2 = ... = V_r = V$$

ise $V^* \otimes V^* \otimes ... \otimes V^*$ uzayına bir kovaryant tensör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da r.dereceden bir kovaryant tensör denir. $T^r(V)$ veya $\otimes^r V^*$ ile gösterilir [18].

Tanım 1.1.5. Kovaryant tensörler için verilen tanımda V yerine $V^*(V$ nin dual uzayı) alınırsa $(V^*)^*$ uzayı V ye izomorf olduğundan V^* üzerinde s-lineer fonksiyonların vektör uzayını elde ederiz. Bu uzaya kontravaryant uzay denir ve $T_s(V^*)$ veya $\otimes^s(V)$ ile gösterilir. Bu uzayın elemanlarına s.dereceden kontravaryant tensörler denir [18].

Tanım 1.1.6. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı V ve V nin duali de V^* olsun.

$$L(V^r,V^{*^s};\mathbb{R}) = \{f \mid f: V^r \times V^s \xrightarrow{r+s-lineer} \mathbb{R}\}$$

cümlesi yukarıda verilen toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Bu uzaya r.dereceden kovaryant ve s.dereceden kontravaryant tensör uzayı denir. Bu uzayın elemanlarına da (r,s)-tipinden tensör denir ve

$$T^r(V) \otimes T_s(V^*) = \otimes^r V^* \otimes \otimes^s (V)$$

veya

$$T_s^r(V)$$

ile gösterilir [18].

Tanım 1.1.7. $\forall \sigma \in S_r$ permütasyonu ve bir V vektör uzayı üzerindeki bir r-lineer f fonksiyonu için

$$\sigma f = f$$

yani

$$f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, ..., u_{\sigma(r)}) = f(u_1, u_2, ..., u_r)$$

ise r-lineer f fonksiyonuna bir simetrik r-lineer fonksiyon veya r.mertebeden simetrik kovaryant tensör denir [19].

Simetrik kovaryant tensörlerin cümlesini $\sum^r V$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.1.8. $\forall \sigma \in S_r$ permütasyonu ve bir V vektör uzayı üzerindeki bir r-lineer f fonksiyonu için

$$\sigma f = (sgn\sigma) f$$

yani

$$f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, ..., u_{\sigma(r)}) = (sgn\sigma) f(u_1, u_2, ..., u_r)$$

ise r-lineer f fonksiyonuna alterne r-lineer fonksiyon veya r.mertebeden alterne kovaryant tensör veya anti-simetrik r-lineer fonksiyon denir [19].

Anti-simetrik tensörlerin cümlesini $\gamma^r(V)$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.1.9. Aşağıdaki şekilde tanımlı $\otimes$ dönüşümüne $p.$ ve $q.$ mertebeden t ve s tensör alanlarının $t \otimes s$ tensör çarpımı denir ve

$$(t \otimes s)(x_1, x_2, ..., x_p, ..., x_{p+q}) = t(x_1, x_2, ..., x_p)s(x_{p+1}, , ..., x_{p+q})$$

şeklinde gösterilir [18].

Tanım 1.1.10. V bir reel vektör uzayı $\theta \epsilon \gamma^r(V)$ ve $\phi \epsilon \gamma^s(V)$ olsun.

$$\theta \wedge \phi = \frac{(r+s)!}{r!s!} A(\theta \otimes \phi)$$

ile tanımlanan çarpıma alterne tensörlerin dış (wedge) çarpımı denir [20].

Teorem 1.1.1. θ_1, θ_2, θ_3, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ler V üzerinde alterne tensörler olmak üzere

1) $\theta_1 \wedge (\phi_1 + \phi_2) = \theta_1 \wedge \phi_1 + \theta_1 \wedge \phi_2$,
$(\phi_1 + \phi_2) \wedge \theta_1 = \phi_1 \wedge \theta_1 + \phi_2 \wedge \theta_1$,

2) $(a\theta_1) \wedge \phi_1 = a(\theta_1 \wedge \phi_1) = \theta_1 \wedge (a\phi_1)$, $a \epsilon \mathbb{R}$,

3) $\theta_1 \wedge (\phi_1 \wedge \phi_2) = (\theta_1 \wedge \phi_1) \wedge \phi_2$,

4) $\theta \epsilon \gamma^r(V)$ ve $\phi \epsilon \gamma^s(V)$,
$\theta \wedge \phi = (-1)^{rs} \phi \wedge \theta$

dir [19].

Tanım 1.1.11. n-boyutlu Öklid uzayı E^n de bir açık cümle U olmak üzere,

$$f : U \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun k-yıncı mertebeden bütün kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^k-sınıfından diferensiyellenebilirdir denir ve

$$C^k(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \to \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ fonksiyonu } C^k - sınıfından\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer f in her mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli iseler f fonksiyonuna C^∞-sınıfından diferensiyelenebilirdir denir ve

$$C^\infty(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \to \mathbb{R} \text{ ve } f \ \epsilon C^k(U, \mathbb{R}),\ k \epsilon \mathbb{IN}\}$$

şeklinde gösterilir [21].

Tanım 1.1.12. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer;

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_p} \quad : \quad & C^\infty(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ & f \ \to \overrightarrow{V_p}[f],\ \forall p \epsilon M,\ \forall f \epsilon C^\infty(M, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

operatörü, $\forall f, g \epsilon C^{\infty}(M, \mathbb{R})$, ve $\lambda, \mu \epsilon \mathbb{R}$ için

1) $\overrightarrow{V_p}[\lambda f + \mu g] = \lambda \overrightarrow{V_p}[f] + \mu \overrightarrow{V_p}[g]$

2) $\overrightarrow{V_p}[f.g] = g(p)\overrightarrow{V_p}[f] + f(p)\overrightarrow{V_p}[g]$

aksiyomlarını sağlıyorsa bu operatöre M manifoldunun $p \epsilon M$ noktasında bir tanjant vektör denir [21].

M manifoldunun bir $p \epsilon M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi,

$$T_p(M) = \{\overrightarrow{V_p} \mid \overrightarrow{V_p} : C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.1.13. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$X : M \to \bigcup_{p \epsilon M} T_p(M)$$

1:1 ve üzerine olarak tanımlanan X fonksiyonuna, M manifoldu üzerinde bir vektör alanı denir.

M üstünde tanımlanan vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir [21].

Tanım 1.1.14. M, $n-$boyutlu bir manifold ve p noktasındaki tanjant uzay $T_p(M)$ olsun.

$$T_p^*(M) = \{f \mid f : T_p(M) \to \mathbb{R}\}$$

uzayına $T_p(M)$ nin dual uzayı veya kotanjant uzayı denir [18].

Tanım 1.1.15. $M, n-$boyutlu bir manifold ve M manifoldunun kotanjant uzayı $T_p^*(M)$ olsun. $W(p) \epsilon T_p^*(M)$ elemanına ko-vektör denir. Ayrıca

$$W : M \to \bigcup_{p \epsilon M} T_p^*(M)$$

fonksiyonu için,

$$\pi \circ W = I : M \to M$$

olacak şekilde

$$\pi : \bigcup_{p \epsilon M} T_p^*(M) \to M$$

fonksiyonu mevcut ise W ya M üzerinde bir 1-form denir [18].

Tanım 1.1.16. M, $n-$ boyutlu bir manifold olsun. $U \subset M$ ve M üzerinde tanımlanan anti-simetrik tensör alanlarının uzayı $\gamma^r(M)$ olmak üzere

$$W \quad : \quad U \subset M \to \bigcup \gamma^r(M)$$
$$P \to W(P) : T_p(M) \times T_p(M) \times ... \times T_p(M) \to \mathbb{R}$$

r-lineer ve anti-simetrik W dönüşümüne U üzerinde $r-$form denir.

M üzerinde tanımlanan $r-$formların cümlesini $\wedge^r(M)$ ile göstereceğiz. Eğer $r = 1$ alınırsa, Tanım 1.1.15 elde edilir.

Bir $P \epsilon M$ noktasındaki lokal koordinat komşuluğu $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olsun. Böylece bir $W, r-$formu

$$A_{i_1...i_r} = W(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_r}) \epsilon C^\infty(U, \mathbb{R}) \tag{1.1.1}$$

olmak üzere,

$$W = \frac{1}{r!} \sum_{i_1, i_2, ..., i_r = 1} A_{i_1...i_r} \, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_r} \tag{1.1.2}$$

veya

$$W = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_r} A_{i_1...i_r} \, dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_r} \tag{1.1.3}$$

olarak tanımlanır [20].

Tanım 1.1.17. $i = 1, 2, ..., r$ için W_i ve X_i ler, sırasıyla, $1-$formlar ve vektör alanları olmak üzere W_i lerin dış(wedge) çarpımı bir $r-$form olup

$$(W_1 \wedge W_2 \wedge ... \wedge W_r)(X_1, X_2, ..., X_r) = \det[W_i(X_i)] \tag{1.1.4}$$

şeklinde tanımlanır [20].

Tanım 1.1.18. M, bir manifold olsun. Eğer M nin her bir noktasındaki tanjant uzaylarda yönlendirme aynı ise M manifolduna uygun yönlendirilmiş manifold, aksi halde M manifolduna uygun yönlendirilmemiş manifold denir [21].

Üzerinde uygun bir yön seçilebilen bir M manifolduna yönlendirilebilir manifold denir. Böyle bir manifold üzerinde seçilmiş olan özel bir μ yönüne M manifoldu üzerinde μ yönü denir. (M, μ) ikilisine de yönlendirilmiş manifold denir [21].

Tanım 1.1.19. W_i ve τ_i $(i = 1, ..., n)$ $1-$formlar olmak üzere $W = W_1 \wedge W_2 \wedge ... \wedge W_n$ ve $\tau = \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge ... \wedge \tau_n$ $n-$formlarının $\wedge^n(M)$ üzerindeki iç çarpımı

$$\langle W, \tau \rangle = \langle W_1 \wedge ... \wedge W_n, \tau_1 \wedge ... \wedge \tau_n \rangle = \det[\langle W_i, \tau_i \rangle]$$

olarak tanımlanır [16].

Tanım 1.1.20. M, manifoldu üzerinde tanımlı $k-$formların cümlesi $\wedge^k(M)$ ve $(k+1)-$formların cümlesi $\wedge^{k+1}(M)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} d \quad &: \quad \wedge^k(M) \to \wedge^{k+1}(M) \\ &\qquad W \ \to \ dW \end{aligned}$$

dir. $A_{i_1 \ldots i_r} = W(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}) \epsilon C^\infty(U, \mathbb{R})$ ve $i_1, ..., i_r$ ler indisler olup

$$dW = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, i_2, ..., i_k, j=1}^{n} (A_{i_1 i_2 \ldots i_k}) j dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

ya da

$$dW = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k} \sum_{j=1}^{n} (A_{i_1 i_2 \ldots i_k}) j dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm, $k-$formların dış türevi (veya dış diferensiyeli) olarak adlandırılır [20].

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 1.1.2. M manifoldu üzerinde tanımlı $k-$formların cümlesi $\wedge^k(M)$ ve $(k+1)-$formların cümlesi $\wedge^{k+1}(M)$ olmak üzere,

$$d : \wedge^k(M) \to \wedge^{k+1}(M)$$

şeklinde tanımlı dış türev $w_1, w_2 \epsilon \wedge^k (M)$ için aşağıdaki şartları sağlar.

1) $d(w_1 + w_2) = d(w_1) + d(w_2)$,

2) $d(\lambda w) = \lambda d(w)$,

3) $d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge w_2 + (-1)^k w_1 \wedge dw_2$,

4) $d^2 w = 0$ (yani $d(dw) = 0$),

5) Eğer $f \epsilon \wedge^0 (M)$ ise df, f in adi türevidir [20].

Tanım 1.1.21.

$$\begin{aligned} R \quad &: \quad \chi(E^n) \times \chi(E^n) \times \chi(E^n) \to \chi(E^n) \\ &\qquad (X, \ Y, \ Z) \qquad \to \ R(X, Y, Z) \ = \ R(X, Y)Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z) &= D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X,Y]}Z \\ &= (D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]})Z \\ &= ([D_X, D_Y] - D_{[X,Y]})Z \end{aligned}$$

olarak tanımlanan R fonksiyonu $\chi(E^n)$ üzerinde 3. mertebeden bir kovaryant tensör alanıdır. Bu kovaryant tensör alanına E^n in eğrilik tensör alanı ve bunun bir $p\epsilon E^n$ noktasındaki değeri olan $R(X_p, Y_p)Z_p$ tensörüne de E^n in p noktasındaki eğrilik tensörü veya kısaca E^n in p deki eğriliği denir [21].

Tanım 1.1.22. M, bir manifold ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. $\forall X, Y, Z, W \epsilon \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} K \quad : \quad & \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, IR) \\ & (X,Y,Z,W) \;\to\; K(X,Y,Z,W) \;=\; \langle X, R\,(Z,W)\,Y \rangle \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

olarak tanımlanan 4.dereceden kovaryant tensöre M üzerinde Riemann-Christoffel eğrilik tensörü denir. Buradaki $R(Z,W)Y$ ifadesi eğrilik tensörü olup,

$$R(Z,W)Y = \nabla_Z \nabla_W Y - \nabla_W \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,W]} Y$$

şeklinde gösterilir. Bir p noktasındaki Riemann-Christoffel eğrilik tensörünün değeri, $\forall X, Y, Z, W \epsilon \chi(M)$ için,

$$K(P) = \langle X, R\,(Z,W)\,Y \rangle$$

şeklinde yazılır [22].

Teorem 1.1.3. Bir M manifoldunun Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki bağıntıları sağlar [22].

1) $R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X = 0$, (1.Bianchi özdeşliği)

2) $\langle R\,(Z,W)\,Y, X \rangle = -\langle R\,(Z,W)\,X, Y \rangle$,

3) $\langle R\,(Z,W)\,Y, X \rangle = -\langle R\,(W,Z)\,Y, X \rangle$,

4) $\langle R\,(Z,W)\,Y, X \rangle = \langle R\,(X,Y)\,W, Z \rangle$.

Tanım 1.1.23. M, $n-$boyutlu bir manifold, M nin p noktasındaki tanjant uzayının, $2-$boyutlu bir alt uzayı ρ ve ρ yı geren birim vektörler x_p ile y_p, yani $\rho = Sp\{x_p, y_p\}$ olsun. O zaman M üzerindeki eğrilik tensörü R ise

$$R(x_p, y_p, x_p, y_p) \tag{1.1.6}$$

değerine M nin p noktasında ki ρ düzlemine göre kesit eğriliği denir [22].

Yardımcı Teorem 1.1.1. (Cartan'ın Yardımcı Teoremi) M, $n-$boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde $i = 1, 2, ..., n$ olmak üzere w_i, $1-$formları verilsin. M üzerinde bu $1-$formlarla lineer bağımsız olan diğer $1-$formlar λ_i olsun. Bu taktirde

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \wedge \lambda_i = 0$$

dir. Buradan $1 \leq i, j \leq n$ için $a_{ij} = a_{ji}$ ve $a_{ij} \epsilon C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j$$

yazılabilir [20].

1.2. Semi-Riemann İç Çarpım Uzayı

Tanım 1.2.1. V bir reel vektör uzayı ve

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

simetrik bilineer form olsun. $W \subset V$ olmak üzere

$$\langle , \rangle_{|W} : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif definit olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formun indeksi denir. Bundan sonraki çalışmamızda indeksi kısaca **V** ile göstereceğiz [17].

Tanım 1.2.2. M, C^{∞}-manifold olmak üzere;

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M, \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlı simetrik, bilineer, non dejenere fonksiyona M üzerinde metrik tensör denir. Bu metrik tensörün indeksine M manifoldunun indeksi denir [17].

Tanım 1.2.3. M, C^{∞}-manifold ve $\langle , \rangle$ de M üzerinde sabit indeksli metrik tensör olmak üzere (M, $\langle , \rangle$) çiftine bir Semi-Riemann manifold denir [17].

Tanım 1.2.4. $boyM = n$ olmak üzere, $(M, \langle , \rangle)$ çifti bir Semi-Riemann manifold olsun. Eğer $\mathbf{V} = 0$ ise $(M, \langle , \rangle)$ çiftine bir Riemann manifoldu denir. Ayrıca $n \geqslant 2$ ve $\mathbf{V} = 1$ ise $(M, \langle , \rangle)$ çiftine bir Lorentz manifoldu denir [17].

Tanım 1.2.5. n -boyutlu reel vektör uzayı $\mathbb{R}^n$ ve $\forall \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \epsilon \mathbb{R}^n$ için Riemann iç çarpımı

$$\begin{aligned} \langle , \rangle_R \quad &: \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ &(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) \quad \to \left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \right\rangle_R = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

şeklinde tanımlanır [21].

Semi- Riemann iç çarpımı:

Semi-Riemann iç çarpımının iki farklı tanımını vereceğiz.

Tanım 1.2.6. (Semi-Riemann İç Çarpımı) n-boyutlu reel vektör uzayı $\mathbb{R}^n$ için semi-Riemann iç çarpımı

$$\begin{aligned} \langle , \rangle_1 \quad &: \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ &(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) \quad \to \left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \right\rangle_1 = \sum_{i=1}^{v} x_i y_i - \sum_{j=v+1}^{n} x_j y_j \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

ya da

$$\begin{aligned} \langle , \rangle_2 \quad &: \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ &(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}) \to \left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \right\rangle_2 = -\sum_{i=1}^{v} x_i y_i + \sum_{j=v+1}^{n} x_j y_j \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca

$$\beta_i = \begin{cases} 1 & , \quad 1 \leq i \leq v \text{ ise} \\ -1 & , \quad v+1 \leq i \leq n \text{ ise} \end{cases} \tag{1.2.4}$$

ve

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 & , \quad 1 \leq i \leq v \text{ ise} \\ 1 & , \quad v+1 \leq i \leq n \text{ ise} \end{cases} \tag{1.2.5}$$

olarak tanımlanır. Bunlar, (1.2.2) ile (1.2.3) eşitliklerinde, sırasıyla, göz önüne alınırsa,

$$\left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \right\rangle_1 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i y_i \tag{1.2.6}$$

ve

$$\left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \right\rangle_2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i y_i \tag{1.2.7}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada tanımlanan $\langle , \rangle_1$ ve $\langle , \rangle_2$ fonksiyonları $\mathbb{R}^n$ de bir semi-Riemann iç çarpımı olup, bu fonksiyonlarla birleşen vektör uzayına da semi-Riemann uzay denir ve R_v^n ile gösterilir.

Şimdi kısalığın hatırı için, her iki semi-Riemann iç çarpım tanımını birleştirip aşağıdaki şekilde ifade edeceğiz:

Eğer

$$\gamma_i = \begin{cases} \beta_i & , \quad \langle , \rangle_1 \text{ ise} \\ \varepsilon_i & , \quad \langle , \rangle_2 \text{ ise} \end{cases}$$

alınırsa semi-Riemann iç çarpımı

$$\left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i y_i \tag{1.2.8}$$

şeklinde tanımlanır.

Yardımcı Teorem 1.2.1. *V, n-boyutlu bir reel vektör uzayı ve V üzerinde rankı r olan simetrik, non dejenere, 2.dereceden kovaryant tensör alanı $\langle , \rangle$ olsun. Bu durumda V nin sıralı bir bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ve bu bazın dual bazı da $\{e^1, e^2, ..., e^n\}$ ise bu iki baz arasında, $\langle , \rangle$ dönüşümü yardımıyla,*

$$\langle , \rangle = \sum_{i=1}^{r} c_i e_i \otimes e^i, \ c_i = \pm 1 \text{ ve } r \leq n,$$

eşitliği vardır ve $\langle , \rangle$ tensör alanının matrisi;

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & c_r & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & . & . & . & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Burada

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \text{ ise} \\ 0 & , \quad i \neq j \text{ ise} \end{cases} \tag{1.2.9}$$

ve

$$\Omega_i = \begin{cases} 1 & , \quad 1 \leq i \leq v \text{ ise} \\ -1 & , \quad v+1 \leq j \leq n \text{ ise} \end{cases}$$

ya da

$$\Omega_i = \begin{cases} -1 & , \quad 1 \leq i \leq v \text{ ise} \\ 1 & , \quad v+1 \leq j \leq n \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $\langle , \rangle$ tensör alanının $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sıralı bazı, sırası ile,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \tag{1.2.10}$$

veya

$$\langle e_i, e_j \rangle = \Omega_i \delta_{ij} \tag{1.2.11}$$

yazılması durumunda $\langle , \rangle$ nın bir ortonormal bazı olarak adlandırılır. Bu durumda $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sıralı bazı (1.2.10) şartını sağlıyorsa Riemann ortonormal bazı veya (1.2.11) şartını sağlıyorsa semi-Riemann ortonormal bazı olarak adlandırılır.

Böylece $\langle e_i, e_j \rangle$ de $+1$ lerin oluşması kadar -1 lerin de meydana gelmesi doğal olup, $+1$ lerin sayısından -1 lerin sayısının farkına, $\langle , \rangle$ nın işareti denir [23].

Tanım 1.2.7. $\forall \overrightarrow{V} \epsilon R_v^n$ olmak üzere,
$\left\langle \overrightarrow{V}, \overrightarrow{V} \right\rangle > 0$ ise $\overrightarrow{V}$ ye space-like vektör,
$\left\langle \overrightarrow{V}, \overrightarrow{V} \right\rangle < 0$ ise $\overrightarrow{V}$ ye time-like vektör,
$\left\langle \overrightarrow{V}, \overrightarrow{V} \right\rangle = 0$, $\overrightarrow{V} \neq 0$, ise $\overrightarrow{V}$ ye light-like veya null vektör denir [17].

Tanım 1.2.8. M, bir semi-Riemann manifoldu olsun. M manifoldunun bir noktasındaki null vektörlerinin cümlesine null koni denir [17].

Tanım 1.2.9. n-boyutlu semi-Riemann uzayı R_v^n nin bütün time-like vektörlerinin cümlesi δ olsun. $\overrightarrow{u} \epsilon \delta$ için

$$C(\overrightarrow{u}) = \{\overrightarrow{v}\epsilon\delta \mid \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle \langle 0\}$$

olmak üzere $C(\overrightarrow{u})$ ya $\overrightarrow{u}$ yu ihtiva eden R_v^n nin time-konisi denir [17].

Tanım 1.2.10. n-boyutlu semi-Riemann uzayı R_v^n nin iki $\overrightarrow{X}$, $\overrightarrow{Y}$ vektörü için

$$\left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \right\rangle = 0$$

ise bu iki vektöre semi-Riemann anlamında diktirler denir [17].

Tanım 1.2.11. n-boyutlu semi-Riemann uzayı R_v^n de bir vektör $\overrightarrow{X}$ ve $\langle , \rangle$, R_v^n de semi-Riemann iç çarpımı olmak üzere, $\overrightarrow{X}$ vektörünün normu;

$$\left\| \overrightarrow{X} \right\| = \sqrt{\left| \left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{X} \right\rangle \right|}$$

şeklinde tanımlanır [17].

Tanım 1.2.12. $\forall p\epsilon M$, $\overrightarrow{V_p}\epsilon T_p(M)$ tanjant vektörü;
$\left\langle \overrightarrow{V_p}, \overrightarrow{V_p} \right\rangle \rangle 0$ ise $\overrightarrow{V_p}$ ye space-like tanjant vektör,
$\left\langle \overrightarrow{V_p}, \overrightarrow{V_p} \right\rangle \langle 0$ ise $\overrightarrow{V_p}$ ye time-like tanjant vektör,
$\left\langle \overrightarrow{V_p}, \overrightarrow{V_p} \right\rangle = 0$, $\overrightarrow{V_p} \neq 0$, ise $\overrightarrow{V_p}$ ye light-like veya null tanjant vektör denir [17].

Tanım 1.2.13.

$n-$boyutlu semi-Riemann uzayı R_v^n de

$$\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$$

sistemi bir vektör alan sistemi olsun. R_v^n de tanımlanan bu n-liye doğal baz vektör alan sistemi veya doğal baz alan sistemi denir. Bu doğal baz alan sistemi için

$$\gamma_i = \begin{cases} \beta_i & , \quad \langle , \rangle_1 \text{ ise} \\ \varepsilon_i & , \quad \langle , \rangle_2 \text{ ise} \end{cases} \tag{1.2.12}$$

ve

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \text{ ise} \\ 1 & , \quad i = j \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$g_{ij} = \gamma_i \delta_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \tag{1.2.13}$$

eşitliği vardır [17].

Teorem 1.2.1. $n-$boyutlu semi-Riemann uzayı R_v^n de $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}$ iki time-like vektör olsun. O zaman

1) $\left|\left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \right\rangle\right| \geqslant \left\|\overrightarrow{X}\right\| . \left\|\overrightarrow{Y}\right\|$ (Semi-Riemann uzayında Schwartz eşitsizliği) dir,

2) Eğer $\overrightarrow{X}$ ve $\overrightarrow{Y}$ vektörleri aynı time-konide ise

$\left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \right\rangle = -\left\|\overrightarrow{X}\right\| . \left\|\overrightarrow{Y}\right\| ch\varphi$

olacak şekilde, bu vektörler arasında hiperbolik açı diye adlandırılan bir tek φ sayısı vardır [17].

Tanım 1.2.14. $J : \overline{M} \to M$ inclusion dönüşümü olmak üzere $J^* (\langle , \rangle)$, $\overline{M}$ üzerinde metrik tensör ise $\overline{M}$ ye M nin semi-Riemann alt manifoldu denir [17].

Tanım 1.2.15. $\overline{M}$, M semi-Riemann manifoldunun alt manifoldu olsun. $\overline{M}$ alt manifoldu üzerinde tanımlanan metrik tensör Riemann metriği ise $\overline{M}$ alt manifolduna space-like alt manifold denir.

$\overline{M}$ alt manifoldu üzerinde tanımlanan metrik tensör semi-Riemann metriği ise $\overline{M}$ alt manifolduna time-like alt manifold denir [17].

Tanım 1.2.16. $n-$boyutlu semi-Riemann manifoldu M, $\overline{M}$ de M nin semi-Riemann alt manifoldu olsun. Eğer $boy\overline{M} = (n-1)$ ise $\overline{M}$ ye M nin semi-Riemann hiperyüzeyi denir [17].

Tanım 1.2.17. $\overline{M}$, M nin bir semi-Riemann hiperyüzeyi olsun. $\overline{M}$ nin işareti ε olsun.

i) Eğer M nin ko-indeksi 0 ise, yani her $z \neq 0$ normal vektör için $\langle z, z\rangle 0$ ise, $\varepsilon = +1$ dir.

ii) Eğer M nin ko-indeksi 1 ise, yani her $z \neq 0$ normal vektör için $\langle z, z\rangle \langle 0$ ise, $\varepsilon = -1$ dir [17].

Tanım 1.2.18. M semi-Riemann manifoldu üzerinde herhangi bir X vektör alanı için, X in ko-formu olarak adlandırılan bir $\overline{X}$, $1-$formu vardır ve

$$\overline{X}(e_i) = \langle X, e_i \rangle , \quad i = 1, 2, ..., n$$

şeklinde tanımlanır [17].

Tanım 1.2.19. $n-$boyutlu bir semi-Riemann manifoldu M ve $f \epsilon C^\infty(M, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda f in diferensiyeli

$$\begin{aligned} df_{|p} \quad &: \quad T_p(M) \to \mathbb{R} \\ &\overrightarrow{X}_p \ \to \ df_{|p}(\overrightarrow{X}_p) \ = \ \overrightarrow{X}_p[f] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, p noktasında lokal koordinat sistemi ise $\{dx_{1|p}, dx_{2|p}, ..., dx_{n|p}\}$ de $T_p^*(M)$ için bir bazdır. Ayrıca $\{dx_1, dx_2, ..., dx_n\}$ bazının bileşenleri arasında

$$g^{ij} = \gamma_i \delta_{ij} = \langle dx_i, dx_j \rangle, \qquad 1 \leq i, j \leq n, \tag{1.2.14}$$

bağıntısı vardır.

Burada $\{dx_1, dx_2, ..., dx_n\}$ bazı $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ bazının dual bazı olup g^{ij} de g_{ij} matrisinin invers matrisidir [17].

Yardımcı Teorem 1.2.2. *V, $n-$boyutlu bir reel vektör uzayı ve V üzerinde rankı r olan simetrik, non-dejenere, 2.dereceden kovaryant tensör alanı $\langle , \rangle$ olsun. Bu durumda V nin ortonormal bir bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ve bu bazın dual bazı da $\{e^1, e^2, ..., e^n\}$ ise bu iki baz arasında, $\langle , \rangle$ dönüşümü yardımıyla;*

$$\langle , \rangle = \sum_{i=1}^{r} c_i e_i \otimes e^i, \qquad c_i = \pm 1 \text{ ve } r \leq n$$

ve

$$\left\langle e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_r}, e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_r} \right\rangle = c_{i_1 ... i_r} \tag{1.2.15}$$

eşitlikleri vardır [23].

1.3. Hodge-Yıldız Operatörü

Tanım 1.3.1. *V bir reel vektör uzayı ve V nin bir bazı $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ olmak üzere V de seçilen $n-$tane*

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j, \qquad 1 \leq i \leq n$$

vektörü için bir $W \epsilon \wedge^n (V)$ alterne $n-$ formunun değeri,

$$W(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) = \det[a_{ij}] W(v_1, v_2, ..., v_n) \tag{1.3.1}$$

dir. Bu son ifadeye göre $W \epsilon \wedge^n (V)$ $n-$ formu, V nin bazlarını iki gruba ayırır. Bunlar

$$W(v_1, v_2, ..., v_n) \rangle 0 \text{ ve } W(v_1, v_2, ..., v_n) \langle 0$$

bazlarıdır. Eğer $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ve $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ iki farklı baz iseler; $A = [a_{ij}] \epsilon \mathbb{R}^n$ matrisi bu iki baz arasında bir lineer dönüşümü

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j, \qquad 1 \leq i \leq n$$

şeklinde belirtir. Eğer $\det A \rangle 0$ ise bu iki baz aynı gruptandır. Bu ifadenin tersi de doğrudur.

Bu kriter W nın $\wedge^n(V)$ deki seçilişinden bağımsız olarak V nin bazlarını iki ayrık gruba ayırmak için uygulanabilir. Bu gruplardan her birine V vektör uzayı için bir yönlendirme denir.

$\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ bazının dahil olduğu yönlendirmelerden biri $[v_1, v_2, ..., v_n]$ ve diğeri de $-[v_1, v_2, ..., v_n]$ ile gösterilir [21].

Tanım 1.3.2. $a \epsilon U \subset M$ de $\chi(U)$ nun semi-Riemann ortonormal bazı $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ ve bu bazın dual bazı $\{dx_1, dx_2, ..., dx_n\}$ olsun. $g = \det(g_{ij})$ olmak üzere

$$dv = \sqrt{|g|} dx_1 \wedge ... \wedge dx_n \tag{1.3.2}$$

$n-$formuna M semi-Riemann manifoldunun hacim elementi denir [24].

Tanım 1.3.3. $n-$boyutlu semi-Riemann manifoldu M, M manifoldu üzerinde tanımlanan $k-$formların cümlesi $\wedge^k(M)$ ve hacim elementi de dv olsun. Böylece

$$* : \wedge^k(M) \to \wedge^{n-k}(M)$$

izomorfizmi $\forall \alpha, \beta \epsilon \wedge^k (M)$ için

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \, dv \tag{1.3.3}$$

bağıntısını sağlıyorsa, bu dönüşüme Hodge-Yıldız operatörü denir [20].

Hodge-Yıldız Operatörünün Özellikleri:

1) M, bir semi-Riemann manifoldu ve bunun üzerinde tanımlanan iç çarpımda $\langle , \rangle$ olsun. Eğer M nin ortonormal bir bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ve bu bazın dual bazı da $\{e^1, e^2, ..., e^n\}$ ise o zaman $\sigma \epsilon S_n$, $\sigma(1) \langle \sigma(2) \langle ... \langle \sigma(k)$ ve $\sigma(k+1) \langle \sigma(k+2) \langle ... \langle \sigma(n)$ olmak üzere

$$*(e^{\sigma(1)} \wedge ... \wedge e^{\sigma(k)}) = C_{\sigma(1)...\sigma(k)} sgn(\sigma)(e^{\sigma(k+1)} \wedge ... \wedge e^{\sigma(n)}) \tag{1.3.4}$$

dir.

2) "*" Hodge-Yıldız operatörü tanımı kulanılarak, keyfi yönlendirilmiş bir $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bazının $\{e^1, e^2, ..., e^n\}$ dual bazı

$$\begin{aligned} *(e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_k}) &= \sum sgn \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & n \\ j_1 & . & . & . & j_n \end{pmatrix} \\ &\quad \sqrt{|g|} g^{i_1 j_1} ... g^{i_k j_k} (e^{j_{k+1}} \wedge ... \wedge e^{j_n}) \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

ve

$$*e^i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} (\sqrt{|g|}) g^{ij} e^1 \wedge ... \wedge \widehat{e^j} \wedge ... \wedge e^n \tag{1.3.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\widehat{\ }$ silinmiş eleman anlamına gelir.

3) 2. özellik kullanılarak $\alpha \epsilon \wedge^k (M)$ için $*\alpha$ nın bileşenleri, herhangi bir sıralı baz için hesaplanabilir.

$$\alpha = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k} \alpha_{i_1 ... i_k} e^{i_1} \wedge ... \wedge e^{i_k}$$

ise

$$\begin{aligned} *\alpha \quad = \quad & \sum_{i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k} sgn \begin{pmatrix} 1 & . & . & . & n \\ j_1 & . & . & . & j_n \end{pmatrix} \\ & \sqrt{|g|} \alpha_{i_1 ... i_k} g^{i_1 j_1} ... g^{i_k j_k} e^{j_{k+1}} \wedge ... \wedge e^{j_n} \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

dir.

4) Özel olarak $\overline{X} \epsilon \wedge^1 (M)$ için $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i dx_i$ olmak üzere $*\overline{X}$ ifadesi

$$*\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \overline{x}_i (\sqrt{|g|}) g^{ii} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n \tag{1.3.8}$$

şeklindedir.

1.4. Kovaryant Türev

Tanım 1.4.1. M bir manifold ve M üzerinde bir lineer operatör $\forall X, Y, Z \epsilon \chi(M)$ ve $\forall f \epsilon C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

$$\begin{aligned} \overline{V} \quad : \quad & \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \\ & (X, Y) \quad \to \overline{V}_X Y \end{aligned}$$

1) $\overline{V}_{fX+gY} Z = f \overline{V}_X Z + g \overline{V}_Y Z$

2) $\overline{V}_X fY = f \overline{V}_X Y + X[f] Y$

özelliklerini sağlıyorsa, $\overline{V}$ ya M üzerinde bir afin konneksiyon veya lineer konneksiyon, $\overline{V}_X$ e de X vektör alanı yönünde kovaryant türev denir [21].

Tanım 1.4.2. $u^1, ..., u^n$ ler R_v^n de doğal koordinatlar olsun. Eğer V ve $W = \sum W^i \frac{\partial}{\partial_i}$, R_v^n de vektör alanları iseler,

$$\overline{V}_V W = \sum V(W^i)\frac{\partial}{\partial_i}$$

vektör alanına da W nın V ye göre doğal kovaryant türevi denir [17].

Tanım 1.4.3. Bir M semi-Riemann manifoldu üzerinde konneksiyon aşağıdaki şartları sağlayan $\overline{V} : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ fonksiyonudur.

(D1) $\overline{V}_V W$, V de $\Im(M)-$lineerdir,

(D2) $\overline{V}_V W$, W da $R-$lineerdir,

(D3) $\overline{V}_V(fW) = (Vf)W + f\overline{V}_V W$, $f \epsilon \Im(M)$

$\overline{V}_V W$ ye V ye göre W nın kovaryant türevi denir [17].

Tanım 1.4.4. V, bir M semi-Riemann manifoldu üzerinde bir vektör alanı olsun. $\overline{V}_V$ (Levi-Civita) kovaryant türevi M üzerinde $f \epsilon \Im(M)$ için

$$\overline{V}_V f = Vf$$

olacak şekilde bir tek tensör türevidir. Ayrıca her $W \epsilon \chi(M)$ için $\overline{V}_V W$ de Levi-Civita kovaryant türevi adı verilir [17].

Tanım 1.4.5. $x^1, ...x^n$ ler bir M semi-Riemann manifoldunun bir U komşuluğunda koordinat sistemi olsun. Bu koordinat sistemi için Christoffel sembolleri,

$$\overline{V}_{\frac{\partial}{\partial_i}}(\frac{\partial}{\partial_j}) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial_k} \ (1 \leq i, j \leq n)$$

olacak şekilde Γ_{ij}^k reel değerli fonksiyonlardır [17].

Aşağıda verilen Tanım 1.4.6. ve Tanım 1.4.7. Lorentz manifoldları için yapılan tanımlamadan [25] faydalanılarak semi-Riemann manifoldları için ifade edildi.

Tanım 1.4.6. M, $n-$boyutlu bir semi- Riemann manifoldu, M nin bir açık cümlesi U ve U nun bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. Bu durumda Z bir vektör alanı olmak üzere bir W_i, $1-$formu

$$W_i(Z) = \langle e_i, Z \rangle \tag{1.4.1}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca konneksiyon katsayıları W_j^i olan $1-$formlar ise

$$W_j^i(e_k) = \left\langle e_i, \overline{V}_{e_k} e_j \right\rangle, \qquad 1 \leq i, j, k \leq n \tag{1.4.2}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.4.7. M, bir semi-Riemann manifoldu ve M üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$F : \chi(M) \times \chi(M) \times ... \times \chi(M) \to \chi(M)$$

bir $r-$lineer dönüşüm olsun. $a\epsilon U \subset M$ noktasında $v\epsilon T_aM$ ile temsil edilen F in kovaryant türevi bir $(r+1)-$lineer dönüşümdür. Yani $i = 1, 2, ..., r$ olmak üzere $x_i\epsilon\chi(M)$ için

$$\begin{aligned} \overline{V}F \quad : \quad & T_aM \times \chi(M) \times ... \times \chi(M) \to T_aM \\ & (v, x_1, x_2, ..., x_r) \quad \to \ (\overline{V}F)(v, x_1, x_2, ..., x_r) \\ & \qquad\qquad\qquad = \ (\overline{V}_V F)(x_1, x_2, ..., x_r) \end{aligned}$$

dir. Burada

$$\begin{aligned} (\overline{V}_V F)(x_1, x_2, ..., x_r) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{r} F(x_1, ..., \overline{V}_V x_i, ..., x_r) \\ & -\overline{V}_V F(x_1, ..., x_r) \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

şeklinde tanımlanır.

Lokal koordinatlarda $a\epsilon M$ noktasında bir komşuluk $U \subset M$ ve $a\epsilon U$ noktasında bir semi-Riemann ortonormal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. Böylece F, $r-$lineer dönüşüm olduğundan $a\epsilon U$ da F yi, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bazının bir lineer kombinasyonu olarak

$$F(v_1, v_2..., v_r) = \sum_{k,i_1,...,i_r=1}^{n} F^k_{i_1...i_r} v_1^{i_1} ... v_r^{i_r} e_k$$

tanımlayalım. Burada

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} v_j^{i_j} e_{i_j} \qquad j = 1, 2, ..., r$$

dir. Ayrıca

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$$

olmak üzere $\overline{V}F$, $(r+1)-$ lineer dönüşümü

$$\overline{V}F(v_1, v_2..., v_r, v) = \sum_{i,k,i_1,...,i_r=1}^{n} \overline{V}_i F^k_{i_1...i_r} v_1^{i_1} ... v_r^{i_r} v_i e_k$$

dir. Burada $\overline{V}_i F^k_{i_1...i_r}$ fonksiyonları,

$$dF^k_{i_1\ldots i_r} - \sum_{i,s=1}^{n} \gamma_i F_{i_1\ldots i_{s-1} i i_{s+1}\ldots i_r} w^i_{i_s} = \sum_{i=1}^{n} \overline{V}_i F^k_{i_1\ldots i_r} w_i \tag{1.4.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.4.1. (Semi-Riemann Geometrinin Temel Teoremi)

M, bir $n-$boyutlu manifold olsun. M üzerinde

a) Torsiyon tensörü sıfırdır,

b) Bir eğri boyunca paralel öteleme $T_p(M)$ tanjant uzayında iç çarpımı korur.

Bu özelliklere sahip bir ve yalnız bir ∇ afin konneksiyon vardır [20].

Sonuç 1.4.1. D, bir Riemann konneksiyonu ve $\chi(R^n_v)$ de semi-Riemann uzayında vektör alanları cümlesi olmak üzere, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(R^n_v)$ vektör alanları için,

$$\begin{aligned} 2\langle D_V W, X\rangle &= V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle - \langle V, [W, X]\rangle \\ &\quad + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle \end{aligned} \tag{1.4.5}$$

dır. Bu formül KOZSUL EŞİTLİĞİ olarak adlandırılır [22].

Sonuç 1.4.2. M, bir semi-Riemann manifoldu ve M nin koordinat komşuluğunda bir koordinat sistemi de $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olsun. O zaman

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{km} \{ \frac{\partial(g_{jm})}{\partial x_i} + \frac{\partial(g_{im})}{\partial x_j} - \frac{\partial(g_{ij})}{\partial x_m} \} \tag{1.4.6}$$

dir.

İspat. (1.4.5) de $V = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $W = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $X = \frac{\partial}{\partial x_m}$ alınır, (1.2.10) ve Tanım 1.4.5 kullanılırsa, (1.4.6) elde edilir.

Tanım 1.4.8. M, semi-Riemann manifoldunun bir açık cümlesi U ve $w_1, w_2, ..., w_n$ ler U üzerinde $1-$formlar olsun. Ayrıca w^i_j ler konneksiyon katsayıları olmak üzere;

1. E. Cartan Yapı Denklemi;

$$dw_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_i w^i_j \wedge w_j, \qquad w^i_j + w^j_i = 0, \tag{1.4.7}$$

ve **2.** E. Cartan Yapı Denklemi;

$$dw^i_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k w^i_k \wedge w^k_j + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} \gamma_k \gamma_l R_{ijkl} w_k \wedge w_l \tag{1.4.8}$$

şeklinde tanımlanır. Burada R_{ijkl} Riemann-Christoffel eğrilik tensörünün bileşenleridir [25].

Tanım 1.4.9. $n-$boyutlu bir semi-Riemann manifoldu M ve R de M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $T_p(M)$ nin semi-Riemann ortonormal bir bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} Ric \quad &: \quad T_p(M) \times T_p(M) \to IR \\ &\qquad (U,V) \qquad \to \; Ric(U,V) \end{aligned} \tag{1.4.9}$$

öyle ki,

$$Ric(U,V) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \left\langle R(e_i,V)U, e_i \right\rangle \tag{1.4.10}$$

şeklinde tanımlı Ric eğrilik tensör alanına, Ricci eğrilik tensör alanı ve $Ric(U,V)$ nin $p \epsilon M$ noktasındaki değerine de M nin Ricci eğriliği denir [17].

Eğer (1.4.10) eşitliğinde

$$U = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad V = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon \chi(M)$$

olarak alınır ve

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^{n} R_{ikj}^{k} \tag{1.4.11}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu durumda

$$Ric(U,V) = \sum_{i,j=1}^{n} R_{ij} u_i v_j \tag{1.4.12}$$

yazılabilir.

Ayrıca Ricci eğriliği aşağıdaki özellikleri sağlar.

1) Ricci eğriliği simetriktir. Yani

$$Ric(U,V) = Ric(V,U) \tag{1.4.13}$$

dir.

2)

$$Ric(U+V, U+V) = Ric(U,U) + Ric(V,V) + 2Ric(U,V).$$

Teorem 1.4.2. M, bir semi-Riemann manifoldu ve M nin bir açık alt cümlesi U olsun. $U \subset M$ üzerinde $1-$formlar $w_1, w_2, ..., w_n$ ve herhangi bir differensiyellenebilir fonksiyon f ise

$$f_{ijk} - f_{ikj} = \sum_{l=1}^{n} \gamma_i \gamma_j R^k_{jil} f_l \tag{1.4.14}$$

dir. Burada i, j, $k = 1, ..., n$ dir.

İspat. $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $w_i \in \chi^*(M)$ olmak üzere f in diferensiyeli

$$df = \sum_{i=1}^{n} f_i w_i$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin dış türevi alınırsa,

$$df_i \wedge w_i - \sum_{j=1}^{n} f_j dw_j = 0$$

olur. Burada (1.4.8) eşitliği göz önüne alınır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\sum_{i=1}^{n} \left[df_i - \sum_{j=1}^{n} \gamma_i f_j dw_i^j \right] \wedge w_i = 0$$

elde edilir. Ayrıca Yardımcı Teorem 1.1.1 den M nin bir açık alt cümlesi olan U üzerinde f_{ij} fonksiyonlarının varlığını garanti eder. Bu durumda $f_{ij} = f_{ji}$ alınabileceğinden yukarıdaki eşitlik,

$$df_i - \sum_{j=1}^{n} \gamma_i f_j dw_i^j = \sum_{j=1}^{n} f_{ij} w_j \tag{1.4.15}$$

olur. Bu son eşitliğin tekrar dış türevi alınırsa

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} (df_{ij} - \sum_{k=1}^{n} \gamma_i f_{kj} dw_i^k - \sum_{k=1}^{n} \gamma_i f_{ik} dw_j^k) \wedge w_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l,k,j=1}^{n} \gamma_i \gamma_l R^k_{lij} w_k \wedge w_l \end{aligned} \tag{1.4.16}$$

bulunur. Yine Yardımcı Teorem 1.1.1 den M nin bir açık alt cümlesi olan U üzerinde f_{ijk} fonksiyonlarının varlığını garanti edeceğinden,

$$df_{ij} - \sum_{k=1}^{n} \gamma_i f_{kj} w_i^k - \sum_{k=1}^{n} \gamma_i f_{ik} w_j^k = \sum_{k=1}^{n} f_{ijk} w_k \tag{1.4.17}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$f_{ijk} = f_{jik} \tag{1.4.18}$$

olsun. Burada (1.4.17) eşitliğinin bir benzeri f_{ikj} için yazılır ve (1.4.16) denklemi göz önüne alınırsa

$$f_{ijk} - f_{ikj} = \sum_{l=1}^{n} \gamma_i \gamma_j R^k_{jil} f_l$$

bulunur. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Tanım 1.4.13. M, bir semi-Riemann manifoldu ve M nin bir semi-Riemann alt manifolduda $\overline{M}$ olsun. M ve $\overline{M}$ deki konneksiyonlar, sırasıyla, $\bigtriangledown$ ve $\overline{\bigtriangledown}$ olmak üzere Genelleştirilmiş Gauss denklemi,

$$\overline{\bigtriangledown}_X Y = \bigtriangledown_X Y + II(X, Y) \tag{1.4.19}$$

şeklinde tanımlanır [17].

1.5. Non dejenere Space-like ve Time-like Sınır

Tanım 1.5.1. M, $n-$boyutlu bir semi-Riemann manifoldu ve N bir $(v-1)-$indeksli semi-Riemann alt manifoldu olsun.

$$\tau : N \to M$$

izometrik immersiyonunu göz önüne alalım. Bu izometrik immersiyon ile N nin bir U koordinat komşuluğundaki lokal semi-Riemann ortonormal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$ ve N nin timlike dış birim normali e_n, M nin bir lokal semi-Riemann ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bazına dönüşür. Ayrıca $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ lokal semi-Riemann ortonormal bazının dual bazı olan $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ $1-$formları bu dönüşüm altında N nin

$$\theta_i = \tau^*(w_i), \qquad 1 \leq i \leq n, \tag{1.5.1}$$

dual $1-$formlarına, w^i_j, $1 \leq i, j \leq n$, konneksiyon katsayıları da N nin

$$\theta^i_j = \tau^*(w^i_j), \qquad 1 \leq i, j \leq n, \tag{1.5.2}$$

dual konneksiyon katsayılarına dönüşür. Yani w_i, $1 \leq i \leq n$, $1-$formları τ dönüşümü ile

$$\theta_n = 0 \tag{1.5.3}$$

olmak üzere, N üzerinde $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}$ $1-$formlarına karşılık getirilir. Bu $1-$formlara kısaca **koçatı** denir.

Diğer taraftan (1.5.3) eşitliğinde dış türevi alınırsa $d\theta_n = 0$ olur. Ayrıca, N nin ikinci temel formunun bileşenleri $II_{ij} = II_{ji}$ olmak üzere, bu $1-$formlar

$$\theta_i^n = -\sum_{j=1}^{n-1} II_{ij}\theta_j \tag{1.5.4}$$

ve

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \theta_j^i \wedge \theta_j \qquad , \qquad \theta_j^i = -\theta_i^j \tag{1.5.5}$$

olarak tanımlanır [26].

Tanım 1.5.2. M ve $\overline{M}$, sırasıyla, $n-$boyutlu ve $(n-1)-$boyutlu semi-Riemann manifoldu olsun.

$$\tau : \overline{M} \to M$$

izometrik immersiyonunu göz önüne alalım. Bu izometrik immersiyon ile $\overline{M}$ nin bir U koordinat komşuluğundaki lokal semi-Riemann ortonormal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$ ve $\overline{M}$ nin space-like dış birim normali e_n, M nin bir lokal semi-Riemann ortonormal $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ bazına dönüşür. Ayrıca $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ lokal semi-Riemann ortonormal bazının dual bazı olan $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ $1-$formları bu dönüşüm altında $\overline{M}$ nin

$$\theta_i = \tau^*(w_i), \qquad 1 \leq i \leq n, \tag{1.5.6}$$

dual $1-$formlarına, w_j^i, $1 \leq i, j \leq n$, konneksiyon katsayıları da $\overline{M}$ nin

$$\theta_j^i = \tau^*(w_j^i), \qquad 1 \leq i, j \leq n, \tag{1.5.7}$$

dual konneksiyon katsayılarına dönüşür. Yani w_i, $1 \leq i \leq n$, $1-$formları τ dönüşümü ile

$$\theta_n = 0 \tag{1.5.8}$$

olmak üzere $\overline{M}$ üzerinde $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{n-1}$ $1-$formlarına karşılık getirilir. Bu $1-$formlara semi-Riemann anlamında **ko-çatı** denir.

Diğer taraftan (1.5.8) eşitliğinde dış türevi alınırsa $d\theta_n = 0$ olur. Ayrıca, $\overline{M}$ nin ikinci temel formunun bileşenleri $II_{ij} = II_{ji}$ olmak üzere, bu $1-$formlar

$$\theta_i^n = -\sum_{j=1}^{n} II_{ij}\theta_j \tag{1.5.9}$$

ve

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j \theta_j^i \wedge \theta_j \qquad\qquad \theta_j^i = -\theta_i^j \tag{1.5.10}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.5.3. R_v^n, $n-$boyutlu semi-Riemann uzayı olsun. R_v^n de yarı-uzay diye öyle bir $H^k \subset R_v^n$ alt cümlesine denir ki

$$H^k = \{x \epsilon R_v^n \mid x_k \geqslant 0\} \tag{1.5.11}$$

dir [23].

Tanım 1.5.4. M, R_v^n de bir $k-$boyutlu alt manifold olsun. h, M nin U ve V açıkları üzerinde bir diferensiyellenebilir dönüşüm olmak üzere

$$\begin{aligned} h(U \cap M) &= V \cap (H^k \times \{0\}) \\ &= \{y \epsilon V \mid y_k \geq 0 \text{ ve } y_{k+1} = ... = y_n = 0\} \end{aligned} \tag{1.5.12}$$

eşitliği M de sağlanırsa, M ye sınırlıdır denir.

M nin bütün x noktaları için bu eşitliğin sağlanamayacağı açıktır. Ancak bazı $x \epsilon M$ noktaları için bu sağlanabilir. Bu eşitliğin sağlanabileceği $x \epsilon M$ noktalarının cümlesine M nin sınırı denir ve ∂M ile gösterilir. ∂M nin boyutu $(k-1)$ dir.

Şimdi, semi-Riemann manifoldu ve onun sınırı için Tanım 1.5.1 ve Tanım 1.5.2 deki kavramları ele almadan, öncelikle bu manifoldların sınırları için özel olan durumları inceleyelim:

Semi-Riemann manifoldunun sınırı bazı noktalarda dejenere olup, bu noktalar da dış birim normaller iyi tanımlanamayacağı için gerek Divergens ve gerekse Stokes teoremini ispatlamak zordur. Çünkü bu noktalarda hacim elementi iyi tanımlanamaz. Öyleyse bu teoremleri semi-Riemann manifoldları için ispatlamanın bir yöntemi bunlar için regüler bir sınır tanımlamaktır.

Duggal [9], 1992 yılında yayınlanan "Affine Conformal Vector Fields in Semi-Riemann Manifolds" adlı makalesinde semi-Riemann manifoldları için regüler sınır tanımladı. Bu regüler sınır üzerinde ifade ettiği Divergens ve Stokes teoremlerinin Riemann manifoldları için bilinenlerle aynı olduğunu gördü.

İkinci bir yöntem ise Ünal [27] tarafından tanımlanan non-dejenere sınır kavramının kullanılmasıdır. Burada ki non dejenere sınır ile dejenere noktalarda ölçümün sıfır olması kastedilmektedir. Bu yöntemle Divergens teoreminin daha genel bir ispatı yapılmıştır.

Bu iki çalışmanın tek ortak noktası ise semi-Riemann manifoldları üzerinde bazı kısıtlamalar sonucunda bu manifoldların sınırlarının var olmasıdır.

Bektaş [25] ise Lorentz manifoldları için iki sınır tanımı verdi. Burada sınır kavramı manifold üzerinde alınan iç çarpıma bağlıdır. Bu bakımdan Lorentz iç çarpımının iki şekli bir arada tanımlanmıştır.

Biz ise, bu çalışmamızda yukarıda belirtilen çalışmalar doğrultusunda, aşağıda semi-Riemann manifoldları için iki sınır tanımı verdik.

Tanım 1.5.5. M, $n-$boyutlu bir ∂M sınırlı semi-Riemann manifoldu olsun. Dış birim normali time-like ve indeksi $v-1$ olan ∂M nin bir açık alt manifolduna M nin non-dejenere space-like sınırı denir ve ∂M_+ ile gösterilir.

Tanım 1.5.6. M, $n-$boyutlu bir ∂M sınırlı semi-Riemann manifoldu olsun. Dış birim normali space-like ve indeksi v olan ∂M nin bir açık alt manifolduna M nin non-dejenere time-like sınırı denir ve ∂M_- ile gösterilir.

Çalışmanın bundan sonraki kısmında non-dejenere sınırlar olarak tanımlanan ∂M_+ ve ∂M_- alınacaktır. Eğer M semi-Riemann manifoldu ∂M_+ sınırına sahip ise üzerindeki iç çarpım 1. tipten iç çarpımdır. ∂M_- sınırına sahip ise üzerindeki iç çarpım 2. tipten iç çarpımdır. Şimdi bu non-dejenere sınırlar üzerinde ki hacim elementlerini tanımlayalım.

Tanım 1.5.7. $n-$boyutlu semi-Riemann manifoldu üzerinde hacim elementi C^∞ sınıfından bir $n-$formdur öyleki M üzerindeki her çatı için $w(e_1,...,e_n)=\pm 1$ dir [17].

Tanım 1.5.8. M, $n-$boyutlu non-dejenere space-like sınırlı ve dış birim normali time-like olan bir semi-Riemann manifoldu olsun. Ayrıca $T_a\partial M_+$ nın bir ortonormal bazı $\{u_1,...,u_{n-1}\}$ ve ∂M_+ nin dış time-like birim normali de $D=(n_1,...,n_n)$ olsun. O zaman

$$w_{\partial M_+}(u_1,u_2,...,u_{n-1})=\det\begin{bmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-1} \\ D \end{bmatrix}=\langle u_1\wedge u_2\wedge ...\wedge u_{n-1},D\rangle_1 \tag{1.5.13}$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe ∂M_+ nın hacim elementi denir.

Tanım 1.5.9. M, $n-$boyutlu non-dejenere time-like sınırlı ve dış birim normali space-like olan bir semi-Riemann manifoldu olsun. Ayrıca $T_a\partial M_-$ nın bir ortonormal bazı $\{u_1,...,u_{n-1}\}$ ve ∂M_- nin dış space-like birim normali de $D=(n_1,...,n_n)$ olsun. O zaman

$$w_{\partial M_-}(u_1,u_2,...,u_{n-1}) = \det \begin{bmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-1} \\ D \end{bmatrix} = \langle u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_{n-1}, D \rangle_2 \tag{1.5.14}$$

olarak tanımlanan eşitliğe ∂M_- nin hacim elementi denir.

1−boyutlu hacim elementi uzunluk, 2−boyutlu hacim elementi ise alan elementi olarak adlandırılır.

Şimdi hacim elementi ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 1.5.1. M, n−boyutlu ve non-dejenere sınırı $\partial M^{'}$ $(\partial M^{'} = \partial M_+ \cup \partial M_-)$ olan semi-Riemann manifoldu olsun. Ayrıca M manifoldunun dış birim normali $D = (n_1,...,n_n)$ ve semi-Riemann koordinat sistemi de $\{x_1,...,x_n\}$ olsun.

i) ∂M_+ space-like sınır ve D dış birim normali time-like iken ∂M_+ nın $w_{\partial M_+}$ hacim elementi:

$$w_{\partial M_+} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} n_j dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_j} \wedge ... \wedge dx_n \tag{1.5.15}$$

veya

$$-\beta_j . n_j . w_{\partial M_+} = (-1)^{j-1} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_j} \wedge ... \wedge dx_n,\ 1 \leq j \leq n \tag{1.5.16}$$

dir. Burada β_j ile (1.2.4) eşitliği ifade edilmiştir.

ii) ∂M_- time-like sınır ve D dış birim normali space-like iken ∂M_- nin $w_{\partial M_-}$ hacim elementi:

$$w_{\partial M_-} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} n_j dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_j} \wedge ... \wedge dx_n \tag{1.5.17}$$

veya

$$\varepsilon_j . n_j . w_{\partial M_-} = (-1)^{j-1} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_j} \wedge ... \wedge dx_n,\ 1 \leq j \leq n \tag{1.5.18}$$

dir. Burada ε_j ile (1.2.5) eşitliği ifade edilmiştir.

İspat. $boy \wedge^{n-1} (T_x^*(M)) = \begin{pmatrix} n \\ n-1 \end{pmatrix} = n$ olduğundan, $u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_{n-1}$, $T_x(M)$ nin bir elemanıdır [28]. Eğer $T_x(\partial M_+)$ deki Riemann ortonormal baz sistemi $\{u_1,...,u_{n-1}\}$ ise o zaman (1.5.13) den

$$w_{\partial M_+}(u_1,u_2,...,u_{n-1}) = \det \begin{bmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_{n-1} \\ D \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & . & . & . & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & . & . & . & u_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ u_{n-11} & u_{n-12} & . & . & . & u_{n-1n} \\ n_1 & n_2 & . & . & . & n_n \end{vmatrix}$$

$$= n_1 \begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} & . & . & . & u_{1n} \\ u_{22} & u_{23} & . & . & . & u_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ u_{n-12} & u_{n-13} & . & . & . & u_{n-1n} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)n_2 \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} & . & . & . & u_{1n} \\ u_{21} & u_{23} & . & . & . & u_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ u_{n-11} & u_{n-13} & . & . & . & u_{n-1n} \end{vmatrix} \tag{1.5.19}$$

$$+...+(-1)^{n-1}n_n \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & . & . & . & u_{1n-1} \\ u_{21} & u_{22} & . & . & . & u_{2n-1} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ u_{n-11} & u_{n-12} & . & . & . & u_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

bulunur. Tanım 1.1.10 dan

$$dx_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge ... \wedge dx_{i_n} = \frac{(1+...+1)!}{1!.1!...1!} A(dx_{i_1} \otimes ... \otimes \widehat{dx_{i_j}} \otimes ... \otimes dx_{i_n})$$

$$= \frac{n!}{1!.1!...1!}.\frac{1}{n!}\sum_{\sigma \epsilon S_{n-1}} S(\sigma)(dx_{\sigma(i_1)} \otimes ... \otimes \widehat{dx_{\sigma(i_j)}} \otimes ... \otimes dx_{\sigma(i_n)})$$

yazılabilir. Burada

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & . & . & . & n \\ i_1 & i_2 & . & . & . & i_n \end{pmatrix}$$

dir. Bu son eşitlik $\forall u_i \epsilon T_x(\partial M_+)$, $1 \leq i \leq n-1$, için

$$(dx_{i_1} \wedge ... \wedge \widehat{dx_{i_j}} \wedge ... \wedge dx_{i_n})(u_1, ..., u_{n-1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} dx_{i_1}(u_1) & dx_{i_1}(u_2) & . & . & . & dx_{i_1}(u_{n-1}) \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ dx_{i_j}(u_1) & dx_{i_j}(u_2) & . & . & . & dx_{i_j}(u_{n-1}) \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ dx_{i_n}(u_1) & dx_{i_n}(u_2) & . & . & . & dx_{i_n}(u_{n-1}) \end{vmatrix}$$

olur. Burada $i_j = 1$ ve $dx_{i_p} = dx_p$ olması göz önüne alınırsa,

$$(\widehat{dx_1} \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n)(u_1, ..., u_{n-1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} dx_2(u_1) & dx_2(u_2) & . & . & . & dx_2(u_{n-1}) \\ dx_3(u_1) & dx_3(u_2) & . & . & . & dx_3(u_{n-1}) \\ . & . & & & & \\ . & . & & & & \\ . & . & & & & \\ dx_n(u_1) & dx_n(u_2) & . & . & . & dx_n(u_{n-1}) \end{vmatrix}$$

bulunur. Bu eşitlikte $dx_{i_p}(u_q)$ yerine u_{qp} yazılırsa,

$$= \begin{vmatrix} u_{12} & u_{22} & . & . & . & u_{n-12} \\ u_{13} & u_{23} & . & . & . & u_{n-13} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ u_{1n} & u_{2n} & . & . & . & u_{n-1n} \end{vmatrix}$$

olur. Bu ifadenin transpozu alınırsa,

$$(\widehat{dx_1} \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n)(u_1, ..., u_{n-1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} u_{12} & u_{13} & . & . & . & u_{1n} \\ u_{22} & u_{23} & . & . & . & u_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ u_{n-12} & u_{n-13} & . & . & . & u_{n-1n} \end{vmatrix} \tag{1.5.20}$$

elde edilir. Benzer düşünceyle devam edilirse, o zaman $i_j = n$ için

$$(dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge \widehat{dx_n})(u_1, ..., u_{n-1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & . & . & . & u_{1n-1} \\ u_{21} & u_{22} & . & . & . & u_{2n-1} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ u_{n-11} & u_{n-12} & . & . & . & u_{n-1n-1} \end{vmatrix} \tag{1.5.21}$$

bulunur. (1.5.20) ve (1.5.21) eşitlikleri (1.5.19) da göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} w_{\partial M_+}(u_1, u_2, ..., u_{n-1}) &= n_1(\widehat{dx_1} \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n)(u_1, ..., u_{n-1}) \\ &\quad -n_2(dx_1 \wedge \widehat{dx_2} \wedge ... \wedge dx_n)(u_1, ..., u_{n-1}) \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\quad +(-1)^{n-1} n_n(dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge \widehat{dx_n})(u_1, ..., u_{n-1}) \end{aligned}$$

olur. Bu ifade $\forall u_i \epsilon T_x(\partial M_+)$ için doğru olduğundan

$$w_{\partial M_+} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} n_j dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_j} \wedge ... \wedge dx_n$$

elde edilir.

$\forall z \epsilon T_x(M)$ ve $\lambda D = u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_{n-1}$, $\lambda \epsilon IR$ için

$$\begin{aligned} \langle z, D \rangle_1 . \langle u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_{n-1}, D \rangle_1 &= \langle z, D \rangle_1 \langle \lambda D, D \rangle_1 \\ &= -\langle z, D \rangle_1 . \lambda \\ &= -\langle z, \lambda . D \rangle_1 \end{aligned}$$

yazılır. Burada (1.5.13) ve $\lambda D = u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_{n-1}$ göz önünde tutulursa,

$$\langle z, D\rangle_1 .w_{\partial M_+}(u_1, u_2, ..., u_{n-1}) = -\langle u_1 \wedge u_2 \wedge ... \wedge u_{n-1}, z\rangle_1 \tag{1.5.22}$$

olur. Eğer $z = \frac{\partial}{\partial x_1} = (1, 0, ..., 0)$ alınırsa,

$$\begin{aligned} n_1.w_{\partial M_+}(u_1, u_2, ..., u_{n-1}) &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ u_{11} & u_{12} & . & . & . & u_{1n} \\ . & . & & & & \\ . & . & & & & \\ . & . & & & & \\ u_{n-11} & u_{n-12} & . & . & . & u_{n-1n} \end{vmatrix} \\ &= -(dx_2 \wedge ... \wedge dx_n).(u_1, u_2, ..., u_{n-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade $\forall u_i \epsilon T_x(\partial M_+)$ için doğru olduğundan

$$-n_1.w_{\partial M_+} = (dx_2 \wedge ... \wedge dx_n)$$

bulunur. Eğer z nin, sırasıyla,

$$\begin{aligned} z &= \frac{\partial}{\partial x_2} = (0, 1, ..., 0) \\ &. \\ &. \\ &. \\ z &= \frac{\partial}{\partial x_n} = (0, 0, ..., 1) \end{aligned}$$

değerleri (1.5.22) de göz önüne alınıp, gerekli işlemler yapılırsa, $1 \leq j \leq n$ için

$$-\beta_j.n_j.w_{\partial M_+} = (-1)^{j-1} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_j} \wedge ... \wedge dx_n$$

elde edilir.

ii) i) şıkkının ispatına benzer şekilde yapılır.

Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Bu teorem ispatlanırken Kosif ve Hacısalihoğlu [28] makalesinin ve Bektaş [25] tezinin ispat yöntemleri kullanıldı.

Şimdi bir semi-Riemann manifoldu ve onun non-dejenere sınırı üzerinde bulunan fonksiyonunun kovaryant türevleri arasındaki bağıntıyı verelim.

Bu bağıntı tanımlanırken Bektaş [25] de, Lorentz manifoldları için yapılan tanımlama gözönünde tutuldu.

Tanım 1.5.10. (∂M_+ ile M üzerindeki bir fonksiyonun kovaryant türevleri arasında ki bağıntı):

M, ∂M_+ non-dejenere space-like sınırlı bir semi-Riemann manifoldu olsun. $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$, ∂M_+ nın lokal semi-Riemann ortonormal çatısı ve e_n de ∂M_+ nın dış time-like birim normali olsun. Böylece $\{e_1, ..., e_n\}$, M nin lokal semi-Riemann ortonormal çatısı olur. $\{w_1, ..., w_n\}$ bu lokal semi-Riemann ortonormal çatının dual ko-çatısı ve f, M üzerindeki bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun.

Şimdi Tanım 1.5.1 de N yerine ∂M_+ alıp f fonksiyonunun durumunu inceleyelim. Bu durumda ∂M_+ nın bir noktasında ki f_i, f_{ij}, f_{ni} yi hesaplayalım. Bunun için;

$$\tau : \partial M_+ \to M$$

inclusion dönüşümü olmak üzere,

$$z = \tau^*(f)$$

alalım. Buradan

$$dz = \tau^*(df) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i \mid_{\partial M_+} \theta_i \tag{1.5.23}$$

yazılır. Burada

$$z_i = f_i \mid_{\partial M_+} \tag{1.5.24}$$

denirse,

$$dz = \sum_{i=1}^{n-1} f_i \theta_i \tag{1.5.25}$$

olur. (1.5.25) in dış türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1} z_{ij}\theta_j &= dz_i - \sum_{j=1}^{n-1}\beta_j z_j \theta_i^j \\ &= \tau^*(df_i - \sum_{j=1}^{n-1}\beta_j f_j w_i^j) \\ &= \tau^*(df_i - \sum_{j=1}^{n}\beta_j f_j w_i^j - f_n w_i^n) \\ &= \tau^*(df_i - \sum_{j=1}^{n}\beta_j f_j w_i^j) - f_n\tau^*(w_i^n)\end{aligned}$$

dir. Burada f_n yerine u alınır (1.4.17) ve (1.5.2) eşitlikleri kullanılırsa,

$$= \tau^*(\sum_{j=1}^{n} f_{ij} w_j) - u\theta_i^n \tag{1.5.26}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (1.5.1) ve (1.5.4) eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$\sum_{j=1}^{n-1} z_{ij}\theta_j = \sum_{j=1}^{n-1} f_{ij} \mid_{\partial M_+} \theta_j + u\sum_{j=1}^{n-1} II_{ij} \mid_{\partial M_+} \theta_j$$

ya da

$$f_{ij} \mid_{\partial M_+} = z_{ij} - uII_{ij} \tag{1.5.27}$$

bulunur. Şimdi de f_{ni} yi hesaplamak için (1.5.23) eşitliğini göz önüne alalım. Buna göre,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} f_{ni} \quad \mid \quad {}_{\partial M_+}\theta_i &= \tau^*(\sum_{i=1}^{n} f_{ni} w_i) \\ &= \tau^*(df_n - \sum_{i=1}^{n}\beta_i f_i w_n^i) \\ &= \tau^*(df_n) - \tau^*(\sum_{i=1}^{n}\beta_i f_i w_n^i) \\ &= du - \sum_{i=1}^{n-1} z_i\tau^*(w_n^i) \\ &= du - \sum_{i=1}^{n-1} z_i\theta_n^i, \qquad \theta_n^i = -\theta_i^n \\ &= du + \sum_{i=1}^{n-1} z_i\theta_i^n\end{aligned}$$

olur. Bu son ifade de (1.5.4) kullanılırsa,

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_{ni} \mid_{\partial M_+} \theta_i = du - \sum_{i,j=1}^{n-1} \beta_i z_i II_{ij} \theta_j$$

ya da

$$f_{ni} \mid_{\partial M_+} = u_i - \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j z_j II_{ij} \tag{1.5.28}$$

bulunur.

Böylece ∂M_+ non-dejenere space-like sınırlı semi-Riemann manifoldları için f_i, f_{ij}, f_{ni} kovaryant türevleri elde edildi.

Şimdi, non-dejenere time-like sınırlı semi-Riemann manifoldları için bu türevleri hesaplayalım.

Tanım 1.5.11. (∂M_- ile M üzerindeki bir fonksiyonun kovaryant türevleri arasında ki bağıntı):

M, ∂M_- non-dejenere time-like sınırlı bir semi-Riemann manifoldu olsun. $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$, ∂M_- nin lokal semi-Riemann ortonormal çatısı ve e_n de ∂M_- nin dış space-like birim normali olsun. Böylece $\{e_1, ..., e_n\}$, M nin lokal semi-Riemann ortonormal çatısı olur. $\{w_1, ..., w_n\}$ bu lokal semi-Riemann ortonormal dual çatının ko-çatısı ve f, M üzerindeki bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun.

Şimdi Tanım 1.5.2 de $\overline{M}$ yerine ∂M_- alıp f fonksiyonunun durumunu inceleyelim. Bu durumda ∂M_- nin bir noktasında ki f_i, f_{ij}, f_{ni} yi hesaplayalım. Bunun için;

$$\tau : \partial M_- \to M$$

inclusion dönüşümü olmak üzere,

$$z = \tau^*(f)$$

alalım. Buradan

$$dz = \tau^*(df) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i \mid_{\partial M_-} \theta_i \tag{1.5.29}$$

yazılır. Burada

$$z_i = f_i \mid_{\partial M_-} \tag{1.5.30}$$

denirse,

$$dz = \sum_{i=1}^{n-1} f_i \theta_i \tag{1.5.31}$$

olur. (1.5.31) den dış türev alınırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1} z_{ij}\theta_j &= dz_i - \sum_{j=1}^{n-1}\varepsilon_j z_j \theta_i^j \\ &= \tau^*(df_i - \sum_{j=1}^{n-1}\varepsilon_j f_j w_i^j) \\ &= \tau^*(df_i - \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j f_j w_i^j + f_n w_i^n) \\ &= \tau^*(df_i - \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j f_j w_i^j) + f_n\tau^*(w_i^n)\end{aligned}$$

dir. Burada f_n yerine u alınır (1.4.17), (1.5.6) ve (1.5.7) eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$= \sum_{j=1}^{n-1} f_{ij} \mid_{\partial M_-} \theta_j + u\theta_i^n$$

ve (1.5.9) eşitliği kullanılırsa,

$$= \sum_{j=1}^{n-1} f_{ij} \mid_{\partial M_-} \theta_j - u\sum_{j=1}^{n-1} II_{ij}\theta_j$$

veya

$$f_{ij} \mid_{\partial M_-} = z_{ij} + uII_{ij} \tag{1.5.32}$$

bulunur. Şimdi de f_{ni} yi hesaplamak için (1.5.29) eşitliğini göz önüne alalım. Buna göre,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} f_{ni} \quad \mid \quad {}_{\partial M_-}\theta_i &= \tau^*(\sum_{i=1}^{n} f_{ni} w_i) \\ &= \tau^*(df_n - \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f_i w_n^i) \\ &= \tau^*(df_n) - \tau^*(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f_i w_n^i) \\ &= du + \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i z_i \theta_i^n\end{aligned}$$

olur. Bu son ifade de (1.5.9) kullanılırsa,

$$= du - \sum_{i,j=1}^{n-1}\varepsilon_i z_i II_{ij}\theta_j$$

ya da

$$f_{ni} \mid_{\partial M_-} = u_i - \sum_{j=1}^{n-1}\varepsilon_j z_j II_{ij} \tag{1.5.33}$$

bulunur.

Tanım 1.5.12. Non-dejenere ∂M_+ space-like sınırının U ve V gibi iki vektör alanının ikinci temel formu,

$$II(U,V) = \langle \bigtriangledown_U e_n, V \rangle_1 \tag{1.5.34}$$

dir.

Non-dejenere ∂M_- time-like sınırının U ve V gibi iki vektör alanının ikinci temel formu da

$$II(U,V) = \langle \bigtriangledown_U e_n, V \rangle_2 \tag{1.5.35}$$

dir.

Burada e_n, sırasıyla, ∂M_+ nın time-like, ∂M_- nin space-like dış birim normalidir.

Eğer $U = e_i$ ve $V = e_j$ alınırsa (1.5.34) ve (1.5.35), sırasıyla,

$$II_{ij} = \langle \bigtriangledown_{e_i} e_n, e_j \rangle_1 \tag{1.5.36}$$

ve

$$II_{ij} = \langle \bigtriangledown_{e_i} e_n, e_j \rangle_2 \tag{1.5.37}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.5.13. M, bir semi-Riemann manifoldu ve dv de M nin hacim elementi olsun. O zaman

$$vol(M) = \int_M dv \tag{1.5.38}$$

ifadesine M nin hacmi denir [25].

2. LAPLACE OPERATÖRÜ

Bu bölümde; semi-Riemann manifoldları üzerinde tanımlı Divergens, Gradient ve Laplace operatörlerinin tanımı verildi. Ayrıca bu çalışmanın orjinal kısımlarından biri olan bu bölümde Stokes, Divergens teoremleri ve Green formülü, semi-Riemann manifoldları için ispatlandı. Bilindiği gibi klasik anlamda bu teoremler diferensiyel formlarla açıklanabilir. Diferensiyel formların da fizik, mühendislik ve matematikte uygulama alanları çok fazladır. Dolayısıyla bu teoremler bu dallarda fazla uygulama alanına sahiptir. Böylece bu teoremlerin semi-Riemann uzayında ispatlanmasının, fizik ve mühendislik sahalarında yeni uygulama alanları ortaya çıkaracağına inanmaktayız.

2.1. Bazı Diferensiyel Operatörler

Tanım 2.1.1. (Divergens Fonksiyonu) M, semi-Riemann manifoldunun bir lokal koordinat sistemi $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olsun.

$$\begin{aligned} div \quad &: \quad \chi(M) \to C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \\ &\qquad x \quad \to div(x) \end{aligned}$$

dönüşümünde

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

alınırsa,

$$div(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \tag{2.1.1}$$

ya da X in ko-formu $\overline{X}$ olmak üzere,

$$(divX)dv = d * \overline{X} \tag{2.1.2}$$

şeklinde tanımlı div fonksiyonuna, M de $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ koordinat sistemine göre X vektör alanının divergens fonksiyonu denir [23].

Diğer taraftan modern diferensiyel geometride bir vektör alanının divergens fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1.2. M, semi-Riemann manifoldu üzerinde C^{∞}-sınıfından bir vektör alanı X olsun. X in divergens fonksiyonu

$$divX = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{|g|} a_i) \tag{2.1.3}$$

şeklinde tanımlanır [20].

Tanım 2.1.3. P bir Riemann manifoldu, P üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(P)$ ve C^∞-sınıfından fonksiyonların cümlesi $C^\infty(P,\mathbb{R})$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} Grad \quad &: \quad C^\infty(P,\mathbb{R}) \to \chi(P) \\ & \qquad f \quad \to Gradf = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

olarak tanımlanan fonksiyona f fonksiyonunun gradienti denir [18].

Tanım 2.1.4. M bir semi-Riemann manifoldu, M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve C^∞-sınıfından fonksiyonların cümlesi $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} grad \quad &: \quad C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \chi(M) \\ & \qquad f \quad \to gradf = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, f fonksiyonunun gradienti denir [17].

(2.1.5) eşitliğinde, $i = j$ için (1.2.11) göz önüne alınırsa,

$$gradf = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{2.1.6}$$

bulunur.

Lorentz manifoldları için ispatlanmış olan aşağıdaki teorem benzer şekilde semi-Riemann manifoldları için ifade ve ispat edildi.

Teorem 2.1.1. M bir semi-Riemann manifoldu olmak üzere, $\forall f, h \epsilon C^\infty(M,\mathbb{R})$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

1) $\|gradf\|^2 = \left|\sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_i^2\right|$

2) $\langle gradf, gradh\rangle = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_i h_i$ (2.1.7)

3) $grad(f.h) = f.grad(h) + h.grad(f)$

İspat 1) (2.1.6) eşitliğinde $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ yerine f_i alınıp Tanım 1.2.11 de göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} \|gradf\|^2 &= \left|\left\langle \sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 f_i^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle\right| \end{aligned}$$

bulunur. Burada $\gamma_i^2 = 1$ olması ve (1.2.13) den

$$\|gradf\|^2 = \left| \sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_i^2 \right|$$

elde edilir.

2) (2.1.6) eşitliğini h fonksiyonu için yazıp $\frac{\partial h}{\partial x_j}$ yerine h_j alınırsa,

$$gradh = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j h_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

olur. *gradf* ile *gradh* iç çarpıma tabii tututlursa,

$$\begin{aligned} \langle gradf, gradh \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^{n} \gamma_j h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_i \gamma_j f_i h_j \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (1.2.13) eşitliğinin $i = j$ olması göz önüne alınırsa,

$$\langle gradf, gradh \rangle = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_i h_i$$

bulunur.

3) (2.1.5) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} grad(f.h) &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial (f.h)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}.h + \frac{\partial h}{\partial x_i}.f \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.h + \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}.f \\ &= h \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + f \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \frac{\partial h}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned}$$

ya da

$$grad(f.h) = f.grad(h) + h.grad(f)$$

elde edilir.

Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Tanım 2.1.5. P bir $n-$boyutlu Riemann manifoldu ve $C^\infty-$sınıfından fonksiyonların cümlesi $C^\infty(P,\mathbb{R})$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} L \quad : \quad & C^\infty(P,\mathbb{R}) \to C^\infty(P,\mathbb{R}) \\ & f \quad \to L(f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

veya

$$f_{ii} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

olmak üzere

$$L(f) = \sum_{i=1}^{n} f_{ii} \tag{2.1.8}$$

şeklinde tanımlanan $L(f)$ fonksiyonuna $f \epsilon C^\infty(P,\mathbb{R})$ fonksiyonunun Laplace operatörü denir [25].

Tanım 2.1.6. $n-$boyutlu bir semi-Riemann manifoldu M ve $C^\infty-$sınıfından fonksiyonların cümlesi $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned} \Delta \quad : \quad & C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R}) \\ & f \quad \to \Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

veya

$$f_{ii} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

olmak üzere

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_{ii} \tag{2.1.9}$$

şeklinde tanımlanan $\Delta(f)$ fonksiyonuna $f \epsilon C^\infty(M,\mathbb{R})$ fonksiyonunun Laplace operatörü denir [17].

Tanım 2.1.7. M, $n-$boyutlu semi-Riemann manifoldu olmak üzere M üzerinde bilinen Laplace operatörü,

$$\Delta(f) = div(gradf) \tag{2.1.10}$$

şeklinde tanımlanır [17].

Laplace operatörünün bu tanımının genelleştirilmesiyle elde edilen tanım, $f \epsilon C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\Delta(f) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \bigtriangledown_{e_i} \bigtriangledown_{e_j} f$$

şeklinde veya burada j yerine i alınır ve (1.2.14) gözönünde tutulursa,

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \bigtriangledown_{e_i} \bigtriangledown_{e_i} f \tag{2.1.11}$$

dir.

Ayrıca lokal koordinatlarda; bir lokal koordinat sistemi $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ olmak üzere, (2.1.3), (2.1.5) ve (2.1.10) eşitlikleri kullanılarak, Laplace operatörünün başka bir tanımı

$$\Delta(f) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}) \tag{2.1.12}$$

şeklinde yazılabilir.

Lorentz manifoldları için Bektaş [25] tarafından ispatlanmış olan aşağıdaki teorem benzer şekilde semi-Riemann manifoldları için ifade ve ispat edildi.

Teorem 2.1.2. $n-$boyutlu bir semi-Riemann manifoldu M, M üzerindeki diferensiyellenebilir iki fonksiyon f ile h ve " $*$ " Hodge-Yıldız operatörü olmak üzere;

1) $d * df = \Delta(f) dv,$ (2.1.13)

2) $d * (f.dh) = (\langle gradf, gradh \rangle + f.\Delta(h)) dv$ (2.1.14)

3) $\Delta(f.h) = 2 \langle gradf, gradh \rangle + f.\Delta(h) + h.\Delta(f)$ (2.1.15)

eşitlikleri vardır.

İspat. 1) Kabul edelim ki M semi-Riemann manifoldunun bir koordinat sistemi $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ve $\chi(M)$ üzerinde ki doğal baz vektör alan sistemi $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ ve sistemin dual bazı da $\{dx_1, dx_2, ..., dx_n\}$ olsun. Böylece $f \epsilon C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \tag{2.1.16}$$

dir. (2.1.16) eşitliğine Hodge-Yıldız operatörü uygulanırsa,

$$*df = \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{j-1} g^{ij} \sqrt{|g|} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_j} \wedge ... \wedge dx_n$$

bulunur. Burada $i = j$ için

$$*df = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \gamma_j \sqrt{|g|} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_j} \wedge ... \wedge dx_n$$

olur. Bu son eşitliğin dış türevi alınırsa,

$$d * df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}(\gamma_j \frac{\partial f}{\partial x_j})\sqrt{|g|}dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$$

elde edilir. Son ifade de (1.3.2) ve (2.1.9) eşitlikleri, göz önüne alınırsa,

$$d * df = \Delta(f)dv$$

bulunur.

2) $h \epsilon C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olmak üzere (2.1.16) dan

$$dh = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanı $f \epsilon C^{\infty}(M, IR)$ ile çarpılırsa,

$$f.dh = \sum_{i=1}^{n} f.\frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i$$

olur. Bu eşitliğe Hodge-Yıldız operatörü uygulanırsa,

$$*fdh = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} g^{ij} \sqrt{|g|} f \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_j} \wedge ... \wedge dx_n$$

bulunur. Burada $j = i$ olması durumunda (1.2.14), Tanım 1.1.20 ve (1.3.2) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} d * f.dh &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\gamma_i f \frac{\partial h}{\partial x_i})dv \\ &= (\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.\frac{\partial h}{\partial x_i} + f.\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2})dv \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (2.1.7) ve (2.1.9) dan

$$d * (f.dh) = (\langle gradf, gradh \rangle + f.\Delta(h))dv$$

olur.

Benzer düşünceyle

$$d * (h.df) = (\langle gradf, gradh \rangle + h.\Delta(f))dv \tag{2.1.17}$$

olduğu da gösterilir.

3) $f, h \epsilon C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ ve " $*$ " da Hodge-Yıldız operatörü olmak üzere

$$\begin{aligned} d * (d(f.h)) &= d * (f.dh + h.df) \\ &= d * (f.dh) + d * (h.df) \end{aligned}$$

olur. (2.1.14) ve (2.1.17) den

$$\begin{aligned} d*(d(f.h)) &= (\langle gradf, gradh\rangle + f.\Delta(h))dv \\ &\quad +(\langle gradf, gradh\rangle + h.\Delta(f))dv \end{aligned}$$

$$d*(d(f.h)) = (2\langle gradf, gradh\rangle + f.\Delta(h) + h.\Delta(f))dv \tag{2.1.18}$$

bulunur.

Diğer taraftan, (2.1.13) eşitliğinden

$$d*(d(f.h)) = \Delta(f.h)dv$$

yazılır. Bu (2.1.18) de göz önüne alınırsa,

$$\Delta(f.h) = 2\langle gradf, gradh\rangle + f.\Delta(h) + h.\Delta(f)$$

elde edilir.

Bu da teoremin ispatını tamamlar.

2.2. Semi-Riemann Uzayında Stokes, Divergens ve Green Teoremleri

Bu bölümde Stokes, Divergens ve Green teoremleri semi-Riemann uzayında, semi-Riemann manifoldlar üzerinde tanımlanan iki non dejenere sınırlarda ifade ve ispat edildi.

Teorem 2.2.1. (Stokes Teoremi) M, yönlendirilmiş, non-dejenere space-like ∂M_+ sınırlı ve non-dejenere time-like ∂M_- sınırlı $n-$boyutlu bir semi-Riemann manifoldu olsun. Eğer $\alpha\epsilon \wedge^{n-1}(M)$ ise

$$\int_M d\alpha = -\int_{\partial M_+} \alpha - \int_{\partial M_-} \alpha \tag{2.2.1}$$

dir.

İspat.

i) Kabul edelim ki, $U \subset IR^n_+$ de $\alpha\epsilon\wedge^{n-1}(M)$ ve $\{dx_1, dx_2, ..., dx_n\}$ dual baz alan sistemi olmak üzere

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\alpha_i dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n \tag{2.2.2}$$

olsun. Buradan dış türev alınırsa,

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}dx_1 \wedge ... \wedge dx_n \tag{2.2.3}$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanının U ve IR^n bölgeleri için integrali alınırsa,

$$\int_U d\alpha = \sum_{i=1}^{n} \int_{IR^n} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} dx_1 ... dx_n \tag{2.2.4}$$

bulunur. Burada toplamdaki i. terimin integrali

$$\int_{IR^{n-1}} (\int_{IR} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_i} dx_i) dx_1 ... (\widehat{dx_i}) ... dx_n \tag{2.2.5}$$

şeklinde yazılabilir. Hipoteze göre (sınırlı manifoldlar üzerinde çalışıldığından) $\partial U \neq \phi$ olduğu için (2.2.5) den

$$\int_{IR^{n-1}} (\int_0^{+\infty} \frac{\partial \alpha_n}{\partial x_n} dx_n) dx_1 ... dx_{n-1} = - \int_{IR^{n-1}} \alpha_n(x_1, ..., x_{n-1}, 0) dx_1 ... dx_{n-1} \tag{2.2.6}$$

olur. (2.2.6), (2.2.4) de göz önüne alınırsa,

$$\int_U d\alpha = - \int_{IR^{n-1}} \alpha_n(x_1, ..., x_{n-1}, 0) dx_1 ... dx_{n-1} \tag{2.2.7}$$

bulunur. Diğer taraftan, $U \subset IR^n_+$ olduğundan

$$\int_{\partial U} \alpha = \int_{\partial IR^n_+} \alpha = \int_{\partial IR^n_+} (-1)^{n-1} \alpha_n(x_1, ..., x_{n-1}, 0) dx_1 \wedge ... \wedge dx_{n-1} \tag{2.2.8}$$

yazılabilir. Fakat IR^n uygun yönlendirilebilir olmasına rağmen sınır (yani $IR^n = \partial IR^n_+$) yönlendirilemez. Eğer dış birim normali time-like, yani

$$-e_n = (0, ..., -1)$$

olarak seçersek, o zaman space-like sınır yönlendirilebilirdir ve $\{-e_n, e_1, ..., -e_{v+1}, -e_{n-1}\}$ bazının işareti $(-1)^{v-1}$ olur. Bu taktirde (2.2.8) eşitliği,

$$\begin{aligned} \int_{\partial U} \alpha &= \int_{\partial IR^n_+} (-1)^{v-1} \alpha_n(x_1, ..., x_{n-1}, 0) dx_1 ... dx_{n-1} \\ &= (-1)^{2v-2} \int_{IR^{n-1}} \alpha_n(x_1, ..., x_{n-1}, 0) dx_1 ... dx_{n-1} \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

şeklinde yazılır. $(-1)^{2v-2} = +1$ olduğundan (2.2.7) ve (2.2.9) dan

$$\int_{\partial U} \alpha = \int_U d\alpha$$

veya

$$- \int_{\partial M_+} \alpha = \int_M d\alpha$$

elde edilir.

ii) Kabul edelim ki, $U \subset IR^n_+$ de $\alpha\epsilon \wedge^{n-1}(M)$ ve $\{dx_1, dx_2, ..., dx_n\}$ dual baz alan sistemi olmak üzere

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\alpha_i dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n \tag{2.2.10}$$

olsun. Buradan dış türev alınırsa,

$$d\alpha = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}dx_1 \wedge ... \wedge dx_n \tag{2.2.11}$$

olur. Bu eşitliğin her iki yanının U ve IR^n bölgeleri için integrali alınırsa,

$$\int_U d\alpha = \sum_{i=1}^{n}\int_{IR^n}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}dx_1...dx_n \tag{2.2.12}$$

bulunur. Burada toplamdaki i. terimin integrali

$$\int_{IR^{n-1}}(\int_{IR}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_i}dx_i)dx_1...(\widehat{dx_i})...dx_n \tag{2.2.13}$$

şeklinde yazılabilir. Hipoteze göre (sınırlı manifoldlar üzerinde çalışıldığından) $\partial U \neq \phi$ olduğu için (2.2.13) den

$$\int_{IR^{n-1}}(\int_0^{+\infty}\frac{\partial\alpha_n}{\partial x_n}dx_n)dx_1...dx_{n-1} = \int_{IR^{n-1}}\alpha_n(x_1, ..., x_{n-1}, 0)dx_1...dx_{n-1} \tag{2.2.14}$$

olur. (2.2.14), (2.2.12) de göz önüne alınırsa,

$$\int_U d\alpha = \int_{IR^{n-1}}\alpha_n(x_1, ..., x_{n-1}, 0)dx_1...dx_{n-1} \tag{2.2.15}$$

bulunur. Diğer taraftan, $U \subset IR^n_+$ olduğundan

$$\int_{\partial U}\alpha = \int_{\partial IR^n_+}\alpha = \int_{\partial IR^n_+}(-1)^{n-1}\alpha_n(x_1, ..., x_{n-1}, 0)dx_1 \wedge ... \wedge dx_{n-1} \tag{2.2.16}$$

yazılabilir. Fakat IR^n uygun yönlendirilebilir olmasına rağmen sınır (yani $IR^n = \partial IR^n_+$) yönlendirilemez. Eğer dış birim normali space-like, yani

$$e_n = (0, ..., 1)$$

olarak seçersek, o zaman time-like sınır yönlendirilebilirdir ve $\{e_n, -e_1, ..., -e_v, ..., e_{n-1}\}$ bazının işareti $(-1)^v$ olur. Bu taktirde (2.2.16) eşitliği,

$$\begin{aligned}\int_{\partial U}\alpha &= \int_{\partial IR^n_+}(-1)^{v-1}\alpha_n(x_1, ..., x_{n-1}, 0)dx_1...dx_{n-1} \\ &= (-1)^{2v-1}\int_{IR^{n-1}}\alpha_n(x_1, ..., x_{n-1}, 0)dx_1...dx_{n-1}\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

şeklinde yazılır. $(-1)^{2v-1} = -1$ olduğundan (2.2.15) ve (2.2.17) dan

$$\int_{\partial U} \alpha = -\int_{U} d\alpha$$

veya

$$-\int_{\partial M_-} \alpha = \int_{M} d\alpha$$

elde edilir.

$\partial M = \partial M_+ \cup \partial M_-$ olduğundan

$$\int_{M} d\alpha = \int_{\partial M_+} \alpha + \int_{\partial M_-} \alpha$$

ifadesinden

$$\int_{M} d\alpha = -\int_{\partial M_+} \alpha - \int_{\partial M_-} \alpha$$

elde edilir.

Teorem 2.2.2. (Divergens Teoremi) M, non-dejenere ∂M_+ space-like sınırlı (dış birim normali time-like) ve ∂M_- time-like sınırlı (dış birim normali space-like), $n-$boyutlu bir semi-Riemann manifoldu olsun. Bu manifold üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere,

$$\int_{M} (divX) dv = \int_{\partial M_+} \langle X, e_n \rangle_1 \, w_{\partial M_+} - \int_{\partial M_-} \langle X, e_n \rangle_2 \, w_{\partial M_-} \tag{2.2.18}$$

dir. Burada dv, $w_{\partial M_+}$, $w_{\partial M_-}$, sırasıyla, M, ∂M_+, ∂M_- üzerindeki hacim elementleridir.

İspat.

i) Kabul edelim ki M üzerinde bu X vektör alanının ko-formu $\overline{X}$ olsun. Böylece (2.1.2) nin M üzerinden integrali alınırsa,

$$\int_{M} (divX) dv = \int_{M} d * \overline{X}$$

elde edilir. Teorem 2.2.1 den

$$\int_{M} (divX) dv = \int_{M} d * \overline{X} = -\int_{\partial M_+} * \overline{X} \tag{2.2.19}$$

olur. Diğer taraftan $\overline{X}\epsilon \wedge^1 (M)$ olmak üzere (1.3.8) den

$$\begin{aligned} *\overline{X} &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}g^{ii}\sqrt{|g|}\overline{x}_i dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n \\ &= (-1)^{1-1}g^{11}\sqrt{|g|}\overline{x}_1\widehat{dx_1} \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n \\ &\quad +(-1)^{2-1}g^{22}\sqrt{|g|}\overline{x}_2 dx_1 \wedge \widehat{dx_2} \wedge ... \wedge dx_n \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\quad . \\ &\quad +(-1)^{n-1}g^{nn}\sqrt{|g|}\overline{x}_n dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge \widehat{dx_n} \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

yazılır. Burada (1.5.15) ve Tanım 1.2.18 göz önüne alınırsa,

$$*\overline{X} = -\langle X, e_n\rangle_1 w_{\partial M_+} \tag{2.2.21}$$

bulunur. ((1.5.15) de ∂M_+ nın time-like dış birim normali e_n olarak alınmıştır.) Elde edilen bu son eşitlik (2.2.19) da göz önüne alınırsa,

$$\int_M (divX)dv = \int_{\partial M_+} \langle X, e_n\rangle_1 w_{\partial M_+} \tag{2.2.22}$$

olur.

ii) Kabul edelim ki M üzerinde bu X vektör alanının ko-formu $\overline{X}$ olsun. (2.1.2) nin her iki yanının M üzerinden integrali alınırsa,

$$\int_M (divX)dv = \int_M d * \overline{X}$$

olur. Dolayısıyla Teorem 2.2.1 den

$$\int_M (divX)dv = \int_M d * \overline{X} = -\int_{\partial M_-} * \overline{X} \tag{2.2.23}$$

yazılır. Diğer taraftan (2.2.20) de (1.5.18) ve Tanım 1.2.18 birlikte göz önüne alınırsa,

$$*\overline{X} = \langle X, e_n\rangle_2 w_{\partial M_-} \tag{2.2.24}$$

bulunur. Burada e_n, ∂M_- nin space-like dış birim normalidir. O halde (2.2.24), (2.2.23) de yerine yazılırsa,

$$\int_M (divX)dv = -\int_{\partial M_-} \langle X, e_n\rangle_2 w_{\partial M_-}$$

elde edilir.

$\partial M = \partial M_+ \cup \partial M_-$ olduğundan

$$\int_M (divX)dv = \int_{\partial M_+} \langle X, e_n \rangle_1 \, w_{\partial M_+} - \int_{\partial M_-} \langle X, e_n \rangle_2 \, w_{\partial M_-}$$

bulunur.

Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 2.2.3. Kabul edelim ki, M semi-Riemann manifoldu ∂M_+ non-dejenere space-like sınırına ve ∂M_- non-dejenere time-like sınırına sahip ve M üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon f olsun. Böylece

$$\int_M \Delta f dv = \int_{\partial M_+} f_n w_{\partial M_+} - \int_{\partial M_-} f_n w_{\partial M_-} \tag{2.2.25}$$

dir. Burada dv, $w_{\partial M_+}$, $w_{\partial M_-}$, sırasıyla, M, ∂M_+, ∂M_- üzerindeki hacim elementleridir.

İspat. Teorem 2.2.2 de X vektör alanı yerine $gradf$ alınırsa,

$$\int_M div(gradf)dv = \int_{\partial M_+} \langle gradf, e_n \rangle_1 \, w_{\partial M_+} - \int_{\partial M_-} \langle gradf, e_n \rangle_2 \, w_{\partial M_-}$$

bulunur. Burada (2.1.10) ve (2.1.6) göz önüne alınırsa, (2.2.25) elde edilir.

Bu da istenendir.

Teorem 2.2.4. (Green Formülü) Kabul edelim ki, M semi-Riemann manifoldu ∂M_+ non-dejenere space-like sınırına ve ∂M_- non-dejenere time-like sınırına sahip ve üzerinde iki diferensiyellenebilir fonksiyon f ve h olsun. Bu taktirde,

$$\int_M (\langle gradf, gradh \rangle + f\Delta h)dv = \int_{\partial M_+} f h_n w_{\partial M_+} - \int_{\partial M_-} f h_n w_{\partial M_-} \tag{2.2.26}$$

dir. Burada dv, $w_{\partial M_+}$, $w_{\partial M_-}$, sırasıyla, M, ∂M_+, ∂M_- üzerindeki hacim elementleridir.

İspat.

i) $f.dh$, $1-$formunu göz önüne alalım. Bu $1-$form (2.2.19) dan

$$\int_M div(fdh)dv = \int_M d * fdh = -\int_{\partial M_+} * fdh$$

veya

$$\int_M d * fdh = -\int_{\partial M_+} * fdh$$

şeklinde yazılabilir. Burada (2.1.14) den $d * (f.dh)$ nin değeri yazılırsa,

$$\int_M (\langle gradf, gradh \rangle + f\Delta h)dv = -\int_{\partial M_+} * (fdh) \tag{2.2.27}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.2.20) den $*(f.dh)$ ifadesi

$$*fdh = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}g^{ii}\sqrt{|g|}f\frac{\partial h}{\partial x_i}dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n$$

şeklinde olur. Burada Teorem 1.5.1 i) göz önüne alınırsa,

$$*fdh = -fh_n w_{\partial M_+} \tag{2.2.28}$$

bulunur. (Teorem 1.5.1 i) de ∂M_+ nın time-like dış birim normali e_n olarak alınmıştır.) (2.2.28), (2.2.27) de yerine yazılırsa,

$$\int_M (\langle gradf, gradh\rangle + f\Delta h)dv = \int_{\partial M_+} fh_n w_{\partial M_+}$$

elde edilir.

ii) $f.dh$, $1-$formunu göz önüne alalım. Bu $1-$form (2.2.23) den

$$\int_M div(fdh)dv = \int_M d*fdh = -\int_{\partial M_-} *fdh$$

veya

$$\int_M d*fdh = -\int_{\partial M_-} *fdh$$

şeklinde yazılabilir. Burada (2.1.14) den $d*(f.dh)$ nin değeri yazılırsa,

$$\int_M (\langle gradf, gradh\rangle + f\Delta h)dv = -\int_{\partial M_-} *(fdh) \tag{2.2.29}$$

olur. Diğer taraftan $*(f.dh)$ ifadesinin değeri (2.2.28) dekine benzer şekilde hesaplanırsa,

$$*fdh = fh_n w_{\partial M_-} \tag{2.2.30}$$

bulunur. Bu ifade (2.2.29) da göz önüne alınırsa,

$$\int_M (\langle gradf, gradh\rangle + f\Delta h)dv = -\int_{\partial M_-} fh_n w_{\partial M_-}$$

elde edilir.

$\partial M = \partial M_+ \cup \partial M_-$ olduğundan

$$\int_M (\langle gradf, gradh\rangle + f\Delta h)dv = \int_{\partial M_+} fh_n w_{\partial M_+} - \int_{\partial M_-} fh_n w_{\partial M_-}$$

bulunur.

Bu da teoremin ispatını tamamlar.

3. İNTEGRAL FORMÜLLERİ

Bu bölüm, çalışmanın ikinci orijinal kısmını oluşturmaktadır. Burada non-dejenere space-like ve time-like sınırlı semi-Riemann manifoldları için Reilly integral formülü ve bu integral formülünün herhangi iki diferensiyellenebilir fonksiyon için genelleştirilmişinin ispatını vereceğiz. Bu iki sınırlı semi-Riemann manifoldu için Reilly integral formülünün ispatını yaparken özel olarak seçilen bir $1-$formu kullanacağız. Bu integral formülünün herhangi iki diferensiyellenebilir fonksiyon için genelleştirilmişinin ispatında da bu yöntemin kullanılacağını göstereceğiz.

3.1. Non-dejenere Space-like ve Time-like Sınırlı Semi-Riemann Manifoldları İçin İntegral Formülleri

$M, \partial M_+$ non-dejenere space-like ve ∂M_- non-dejenere time-like sınırlarına sahip, yönlendirilmiş, bir semi-Riemann manifoldu olsun. Böylece $w\epsilon \wedge^1 (M)$ için Stokes teoreminden

$$-\int\limits_{\partial M_+} *\, w - \int\limits_{\partial M_-} *\, w = \int\limits_{M} d * w \tag{3.1.1}$$

yazılabilir. Burada $*$ Hodge-Yıldız operatörüdür. (Burada Δ_1 ile ∂M_+ üzerindeki Laplace operatörü ve Δ_2 ile de ∂M_- üzerindeki Laplace operatörü gösterilecektir.)

Tanım 3.1.1. M, bir semi-Riemann manifoldu ve bu manifold üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon f olsun. Bu fonksiyonun Hessian tensörü Hessf ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} Hessf \quad &: \quad T_a(M) \to T_a(M) \\ &\qquad v \quad \to Hessf(v) \;=\; \bigtriangledown_v \, gradf \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

olarak tanımlanır [17].

Tanım 3.1.2. M, bir semi-Riemann manifoldu ve bu manifold üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon f olmak üzere, f fonksiyonunun Hessian formu H_f şeklinde gösterilir ve

$$\begin{aligned} H_f \quad &: \quad T_a(M) \times T_a(M) \to IR \\ &\qquad (u,v) \qquad \to H_f(u,v) \;=\; \langle \bigtriangledown_u gradf, v \rangle \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

olarak tanımlanır [17].

Burada

$$H_f(e_i, e_j) = f_{ij} \tag{3.1.4}$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca $f, h \epsilon C^{\infty}(M, IR)$ gibi diferensiyellenebilir herhangi iki fonksiyon için

$$Hessf.Hessh = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \ \langle Hessf(e_i), Hessh(e_i) \rangle$$

olarak tanımlanır. Burada (3.1.2) göz önüne alınırsa

$$Hessf.Hessh = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \ \langle \bigtriangledown_{e_i} gradf, \bigtriangledown_{e_i} gradh \rangle \tag{3.1.5}$$

veya

$$Hessf.Hessh = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_i \gamma_j \ \langle \bigtriangledown_{e_i} gradf, e_j \rangle . \langle \bigtriangledown_{e_i} gradh, e_j \rangle$$

olur. (3.1.3) den

$$Hessf.Hessh = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_i \gamma_j \ H_f(e_i, e_j).H_h(e_i, e_j)$$

yazılır. Burada (3.1.4) göz önüne alınırsa;

$$Hessf.Hessh = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_i \gamma_j \ f_{ij}.h_{ij} \tag{3.1.6}$$

bulunur. Son eşitlikte $h = f$ alınırsa

$$Hessf.Hessh = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_i \gamma_j \ f_{ij}^2 \tag{3.1.7}$$

yazılır.

Teorem 3.1.1. M, ∂M_+ non-dejenere space-like sınırına sahip (e_n dış birim normali time-like olan) ve ∂M_- non-dejenere time-like sınırına sahip (e_n dış birim normali space-like olan) bir semi-Riemann manifoldu olsun. M, semi-Riemann manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon f ve M nin hacim elementi dv olmak üzere;

$$\begin{aligned} &\int_M [Ric(gradf, gradf) + \langle gradf, grad\Delta f \rangle + Hessf.Hessf] dv \qquad (3.1.8) \\ &= -\int_{\partial M_+} \sum_{i,j=1}^{n} \beta_j (f_j f_{ji}) (-1)^{i-1} \sqrt{|g|} g^{ii} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n \\ &\quad -\int_{\partial M_-} \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j (f_j f_{ji}) (-1)^{i-1} \sqrt{|g|} g^{ii} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n \end{aligned}$$

dir.

İspat.

i) $w \epsilon \wedge^1 (M)$ 1−formunu özel olarak

$$w = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_j (f_j f_{ji}) dx_i$$

şeklinde seçelim. Burada (1.3.8) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$*w = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_j (f_j f_{ji})(-1)^{i-1} \sqrt{|g|} g^{ii} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n \tag{3.1.9}$$

bulunur. (3.1.9) eşitliğinin dış diferensiyeli alınır, (1.2.14) ve (1.3.2) eşitlikleri kullanılırsa,

$$d * w = [\sum_{i,j=1}^{n} \beta_i \beta_j f_{ji} f_{ji} + \sum_{i,j=1}^{n} \beta_i \beta_j f_j f_{jii}] dv \tag{3.1.10}$$

elde edilir. (3.1.10) da, sırasıyla, (3.1.7), (1.4.18) ve (1.4.14) göz önüne alınırsa,

$$d * w = [\, Hessf.Hessf + \sum_{i,j=1}^{n} R^i_{jij} f_j f_j + \sum_{i,j=1}^{n} \beta_i \beta_j] dv \tag{3.1.11}$$

bulunur. (3.1.11) eşitliğinin ikinci teriminde (1.4.11) ve (1.4.12), son teriminde de (2.1.6), (2.1.9) ve (1.2.8) eşitlikleri kullanılırsa,

$$d * w = [\, Hessf.Hessf + Ric(gradf, gradf) + \langle gradf, grad\Delta f \rangle] dv \tag{3.1.12}$$

olur. Dolayısıyla, (3.1.9) ve (3.1.12) eşitlikleri (3.1.1) de göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} &\int_M [Ric(gradf, gradf) + \langle gradf, grad\Delta f \rangle + Hessf.Hessf] dv \\ &= - \int_{\partial M_+} \sum_{i,j=1}^{n} \beta_j (f_j f_{ji})(-1)^{i-1} \sqrt{|g|} g^{ii} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

elde edilir.

ii) Kabul edelim ki, $w \epsilon \wedge^1 (M)$ yani,

$$w = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j (f_j f_{ji}) dx_i$$

olsun. Burada (1.3.8) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$*w = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j (f_j f_{ji})(-1)^{i-1} \sqrt{|g|} g^{ii} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n \tag{3.1.14}$$

bulunur. (3.1.14) den dış diferensiyel alınır ve (1.2.14) ile (1.3.2) eşitlikleri kullanılırsa,

$$d * w = [\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j f_{ji} f_{ji} + \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j f_j f_{jii}] dv \tag{3.1.15}$$

elde edilir. (3.1.15) in sağ tarafındaki ilk terimde (3.1.7) eşitliği yazılırsa,

$$d * w = [\, Hessf.Hessf + \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j f_j f_{jii}] dv$$

olur. Bu ifadenin ikinci teriminde (1.4.18) ve (1.4.14) eşitlikleri kullanılırsa,

$$d*w=[\ Hessf.Hessf+\sum_{i,j=1}^{n}R^{i}_{jij}f_jf_j+\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_jf_jf_{iij}]dv \tag{3.1.16}$$

bulunur. (3.1.16) eşitliğinin ikinci teriminde (1.4.11) ve (1.4.12), son teriminde de (2.1.6), (2.1.9) ve (1.2.8) eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$d*w=[\ Hessf.Hessf+Ric(gradf,gradf)+\langle gradf,grad\Delta f\rangle]dv$$

olur. Dolayısıyla yukarıdaki eşitlik ve (3.1.14) eşitliği (3.1.1) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}&\int_M[Ric(gradf,gradf)+\langle gradf,grad\Delta f\rangle+Hessf.Hessf]dv \\ &=\ -\int_{\partial M_-}\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_j(f_jf_{ji})(-1)^{i-1}\sqrt{|g|}g^{ii}dx_1\wedge...\wedge\widehat{dx_i}\wedge...\wedge dx_n\end{aligned} \tag{3.1.17}$$

elde edilir.

$\partial M=\partial M_+\cup\partial M_-$ olduğundan (3.1.13) ve (3.1.17) birlikte düşünülürse,

$$\begin{aligned}&\int_M[Ric(gradf,gradf)+\langle gradf,grad\Delta f\rangle+Hessf.Hessf]dv \\ &=\ -\int_{\partial M_+}\sum_{i,j=1}^{n}\beta_j(f_jf_{ji})(-1)^{i-1}\sqrt{|g|}g^{ii}dx_1\wedge...\wedge\widehat{dx_i}\wedge...\wedge dx_n \\ &\quad\ -\int_{\partial M_-}\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_j(f_jf_{ji})(-1)^{i-1}\sqrt{|g|}g^{ii}dx_1\wedge...\wedge\widehat{dx_i}\wedge...\wedge dx_n\end{aligned}$$

bulunur.

Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.1.2. M, ∂M_+ non-dejenere space-like sınırına sahip (e_n dış birim normali time-like olan) ve ∂M_- non-dejenere time-like sınırına sahip (e_n dış birim normali space-like olan) bir semi-Riemann manifoldu olsun. M, semi-Riemann manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon f ve M, ∂M_+, ∂M_- nin hacim elementleri, sırasıyla, dv, $w_{\partial M_+}$, $w_{\partial M_-}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}&\int_M[Ric(gradf,gradf)+\langle gradf,grad\Delta f\rangle+Hessf.Hessf]dv \\ &=\int_{\partial M_+}\sum_{j=1}^{n}\beta_j(f_jf_{jn})w_{\partial M_+}-\int_{\partial M_-}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j(f_jf_{jn})w_{\partial M_-}\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

dir.

İspat. i) Teorem 3.1.1 de (3.1.8) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terim $i = 1, 2, ..., n$ için

$$\begin{aligned} *w &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j (f_j f_{j1}) (-1)^{1-1} g^{11} \sqrt{|g|} \widehat{dx_1} \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \beta_j (f_j f_{j2}) (-1)^{2-1} g^{22} \sqrt{|g|} dx_1 \wedge \widehat{dx_2} \wedge ... \wedge dx_n \\ &. \\ &. \\ &. \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \beta_j (f_j f_{jn}) (-1)^{n-1} g^{nn} \sqrt{|g|} dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge \widehat{dx_n} \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

şeklinde yazılır. Bu ifade de (1.5.15) ve (1.5.16) eşitlikleri kullanılırsa,

$$*w = \sum_{j=1}^{n} \beta_j (f_j f_{jn}) g^{nn} \sqrt{|g|} w_{\partial M_+} \tag{3.1.20}$$

olur. ((1.5.16) da ∂M_+ nin e_n dış birim normali time-like olarak alınmıştır.) Burada $\sqrt{|g|} = 1$ ve $g^{nn} = -1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$*w = -\sum_{j=1}^{n} \beta_j (f_j f_{jn}) w_{\partial M_+} \tag{3.1.21}$$

bulunur.

ii) Teorem 3.1.1 de (3.1.8) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim $i = 1, 2, ..., n$ için

$$\begin{aligned} *w &= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (f_j f_{j1}) (-1)^{1-1} g^{11} \sqrt{|g|} \widehat{dx_1} \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (f_j f_{j2}) (-1)^{2-1} g^{22} \sqrt{|g|} dx_1 \wedge \widehat{dx_2} \wedge ... \wedge dx_n \\ &. \\ &. \\ &. \\ &+ \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (f_j f_{jn}) (-1)^{n-1} g^{nn} \sqrt{|g|} dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge \widehat{dx_n} \end{aligned} \tag{3.1.22}$$

olarak yazılır. (1.5.18) de e_n, ∂M_- nin space-like dış birim normali olarak alınıp (3.1.22) de yerine yazılırsa,

$$*w = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (f_j f_{jn}) g^{nn} \sqrt{|g|} w_{\partial M_-} \tag{3.1.23}$$

bulunur. Burada $\sqrt{|g|} = 1$ ve $g^{nn} = 1$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$*w = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (f_j f_{jn}) w_{\partial M_-} \tag{3.1.24}$$

olur.

(3.1.21) ve (3.1.24) eşitlikleri (3.1.8) in sağ tarafında yerine yazılırsa,

$$\int_M [Ric(gradf, gradf) + \langle gradf, grad\Delta f\rangle + Hessf.Hessf]dv$$
$$= \int_{\partial M_+} \sum_{j=1}^{n} \beta_j (f_j f_{jn}) w_{\partial M_+} - \int_{\partial M_-} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (f_j f_{jn}) w_{\partial M_-}$$

elde edilir.

Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.1.3. (Reilly Formülü) M, non-dejenere space-like ∂M_+ sınırına sahip (e_n dış birim normali time-like olan) ve non-dejenere time-like ∂M_- sınırına sahip (e_n dış birim normali space-like olan) yönlendirilmiş bir semi-Riemann manifoldu olsun. M semi-Riemann manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon f,

$$z_1 = f\mid_{\partial M_+}, \qquad u_1 = f_n, \qquad H_1 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i II_{ii} \tag{3.1.25}$$

ve

$$z_2 = f\mid_{\partial M_-}, \qquad u_2 = f_n, \qquad H_2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i II_{ii} \tag{3.1.26}$$

olmak üzere,

$$\int_M [(\Delta f)^2 - Ric(gradf, gradf) - Hessf.Hessf]dv$$
$$= \{ \int_{\partial M_+} [(\Delta_1 z)u - (n-1)Hu^2 - \langle gradz, gradu\rangle_1$$
$$+ II(gradz, gradz)]w_{\partial M_+}\}$$
$$-\{ \int_{\partial M_-} [(\Delta_2 z)u + (n-1)Hu^2 - \langle gradz, gradu\rangle_2$$
$$+ II(gradz, gradz)]w_{\partial M_-}\}$$

dir. Burada $w_{\partial M_+}$, $w_{\partial M_-}$, dv, sırasıyla, ∂M_+, ∂M_- ve M nin hacim elementleridir.

İspat. Teorem 3.1.2 deki (3.1.18) eşitliğinde (2.2.26) göz önüne alınır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\int_M [(\Delta f)^2 - Ric(gradf, gradf) - Hessf.Hessf]dv$$
$$= \int_{\partial M_+} [f_n \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_{ii} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_i f_{in}]w_{\partial M_+} \tag{3.1.27}$$
$$- \int_{\partial M_-} [f_n \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i f_{ii} - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i f_i f_{in}]w_{\partial M_-}$$

olur. (3.1.27) nin sağ tarafındaki ilk terimde f_{ii} nin değeri (1.5.27) den

$$f_{ii} = z_{ii} - uII_{ii}$$

yazılır. Bu son eşitlikte $i = 1, 2, ..., n-1$ üzerinden toplam alınır, $\beta_i$ve f_n ile çarpılırsa,

$$f_n \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_{ii} = (\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i z_{ii} - u \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i II_{ii}) f_n \tag{3.1.28}$$

bulunur. (3.1.28) de (2.1.9) ve (3.1.25) eşitlikleri kullanılırsa,

$$f_n \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_{ii} = (\Delta_1 z - (n-1)Hu)u \tag{3.1.29}$$

elde edilir. (3.1.27) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terim ise şu şekilde hesaplanır: (1.5.28) eşitliği $\beta_i f_i$ ile çarpılır ve $i = 1, 2, ..., n-1$ üzerinden toplam alınırsa,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_i f_{ni} = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i u_i f_i - \sum_{i,j=1}^{n-1} \beta_i \beta_j II_{ij} z_j f_i$$

veya

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i f_{ni} = \langle gradz, gradu \rangle_1 - II(gradz, gradz) \tag{3.1.30}$$

şeklinde olur. (3.1.27) eşitliğinin sağ tarafındaki üçüncü terim ise (1.5.33) den

$$f_{ni} = u_i - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j z_j II_{ij}$$

yazılır. Bu son eşitlik $\varepsilon_i f_i$ ile çarpılıp $i = 1, 2, ..., n-1$ üzerinden toplam alınırsa,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i f_i f_{ni} = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i f_i u_i - \sum_{i,j=1}^{n-1} \varepsilon_i \varepsilon_j f_i z_j II_{ij}$$

veya

$$\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i f_i f_{ni} = \langle gradz, gradu \rangle_2 - II(gradz, gradz) \tag{3.1.31}$$

bulunur. (3.1.27) eşitliğinin sağ tarafındaki dördüncü terim de ise (1.5.32) eşitliği kullanılırsa,

$$f_{ii} = z_{ii} + uII_{ii} \tag{3.1.32}$$

yazılır. Bu son eşitlik ε_i ile çarpılıp $i = 1, 2, ..., n-1$ üzerinden toplam alınırsa,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i f_{ii} = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i z_{ii} + u \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i II_{ii}$$

olur. Burada (2.1.9) ve (3.1.26) eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$f_n \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i f_{ii} = (\Delta_2 z + (n-1)Hu)u \tag{3.1.33}$$

bulunur. Dolayısıyla (3.1.29), (3.1.30), (3.1.31) ve (3.1.33) eşitlikleri (3.1.27) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_M [(\Delta f)^2 - Ric(gradf, gradf) - Hessf.Hessf]dv \\
&= \{ \int_{\partial M_+} [(\Delta_1 z)u - (n-1)Hu^2 - \langle gradz, gradu\rangle_1 \\
&\quad + II(gradz, gradz)]w_{\partial M_+}\} \\
&\quad -\{ \int_{\partial M_-} [(\Delta_2 z)u + (n-1)Hu^2 - \langle gradz, gradu\rangle_2 \\
&\quad + II(gradz, gradz)]w_{\partial M_-}\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.1.4. M, non-dejenere ∂M_+ space-like sınırına sahip (e_n dış birim normali time-like olan) ve non-dejenere ∂M_- time-like sınırına sahip (e_n dış birim normali space-like olan) yönlendirilmiş bir semi-Riemann manifoldu olsun. M, semi-Riemann manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir iki fonksiyon f *ve* h olsun. Ayrıca M nin hacim elementi dv olmak üzere;

$$\begin{aligned}
&\int_M [(\Delta f)(\Delta h) - Hessf.Hessh - Ric(gradf, gradh)]dv \qquad (3.1.34)\\
&= -\int_{\partial M_+} \sum_{i,j=1}^{n} \beta_j (f_i h_{jj} - f_j h_{ij})(-1)^{i-1}\sqrt{|g|}g^{ii}dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n \\
&-\int_{\partial M_-} \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j (f_i h_{jj} - f_j h_{ij})(-1)^{i-1}\sqrt{|g|}g^{ii}dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n
\end{aligned}$$

dir.

İspat.

i) $w\epsilon \wedge^1 (M)$ 1−formunu özel olarak

$$w = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_j (f_i h_{jj} - f_j h_{ij})dx_i$$

şeklinde seçelim. Burada (1.3.8) göz önüne alınırsa,

$$*w = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_j (f_i h_{jj} - f_j h_{ij})(-1)^{i-1}\sqrt{|g|}g^{ii}dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n \qquad (3.1.35)$$

bulunur. (3.1.35) in dış diferensiyeli alınır, (1.2.14) ve (1.3.2) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
d*w &= [(\sum_{i=1}^{n}\beta_i f_{ii})(\sum_{j=1}^{n}\beta_j h_{jj}) - \sum_{i,j=1}^{n}\beta_i\beta_j f_{ij}h_{ij} \qquad (3.1.36)\\
&\quad + \sum_{i,j=1}^{n}\beta_i\beta_j f_j(h_{jji} - h_{iji})dv
\end{aligned}$$

bulunur. (3.1.36) nın sağ tarafındaki ilk terimde (2.1.9), ikinci terim de ise (3.1.6) eşitlikleri kulanılırsa,

$$d*w=[(\Delta f)(\Delta h)-Hessf.Hessh+\sum_{i,j=1}^{n}\beta_i\beta_j f_j(h_{jji}-h_{iji})]dv \tag{3.1.37}$$

elde edilir. (3.1.37) nin en son terimi

$$\sum_{i,j=1}^{n}\beta_i\beta_j f_j(h_{jji}-h_{iji})=-\sum_{i,j=1}^{n}\beta_i\beta_j f_j(h_{iji}-h_{jji})$$

şeklinde yazılıp, (1.4.14) göz önüne alınırsa,

$$\sum_{i,j=1}^{n}\beta_i\beta_j f_j(h_{jji}-h_{iji})=-\sum_{i,j=1}^{n}R^{i}_{jij}f_j h_j \tag{3.1.38}$$

bulunur. (3.1.38) de (1.4.11) ve (1.4.12) yazılırsa,

$$\sum_{i,j=1}^{n}\beta_i\beta_j f_j(h_{jji}-h_{iji})=-Ric(gradf,gradh) \tag{3.1.39}$$

elde edilir. (3.1.39) eşitliği (3.1.37) de göz önüne alınırsa,

$$d*w=[(\Delta f)(\Delta h)-Hessf.Hessh-Ric(gradf,gradh)] \tag{3.1.40}$$

bulunur. (3.1.40) ve (3.1.35), (3.1.1) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}&\int_M[(\Delta f)(\Delta h)-Hessf.Hessh-Ric(gradf,gradh)]dv \qquad (3.1.41)\\ &=-\int_{\partial M_+}\sum_{i,j=1}^{n}\beta_j(f_i h_{jj}-f_j h_{ij})(-1)^{i-1}\sqrt{|g|}g^{ii}dx_1\wedge...\wedge\widehat{dx_i}\wedge...\wedge dx_n\end{aligned}$$

olur.

ii) Kabul edelim ki, $w\epsilon\wedge^1(M)$ 1−formu

$$w=\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_j(f_i h_{jj}-f_j h_{ij})dx_i$$

şeklinde verilsin. Benzer şekilde, space-like sınır için yapılan işlemler time-like sınır için yapılırsa,

$$\begin{aligned}&\int_M[(\Delta f)(\Delta h)-Hessf.Hessh-Ric(gradf,gradh)]dv \qquad (3.1.42)\\ &=-\int_{\partial M_-}\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_j(f_i h_{jj}-f_j h_{ij})(-1)^{i-1}\sqrt{|g|}g^{ii}dx_1\wedge...\wedge\widehat{dx_i}\wedge...\wedge dx_n\end{aligned}$$

elde edilir.

$\partial M=\partial M_+\cup\partial M_-$ olduğundan (3.1.41) ve (3.1.42) birlikte düşünülürse,

$$\begin{aligned}
&\int_M [(\Delta f)(\Delta h) - Hessf.Hessh - Ric(gradf, gradh)]dv \\
&= -\int_{\partial M_+} \sum_{i,j=1}^{n} \beta_j (f_i h_{jj} - f_j h_{ij})(-1)^{i-1} \sqrt{|g|} g^{ii} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n \\
&\quad -\int_{\partial M_-} \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_j (f_i h_{jj} - f_j h_{ij})(-1)^{i-1} \sqrt{|g|} g^{ii} dx_1 \wedge ... \wedge \widehat{dx_i} \wedge ... \wedge dx_n
\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 1.5.1 ve Teorem 3.1.4 ü kullanarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.5. M, non-dejenere space-like ∂M_+ sınırına sahip (e_n dış birim normali time-like olan) ve non-dejenere time-like ∂M_- sınırına sahip (e_n dış birim normali space-like olan) yönlendirilmiş bir semi-Riemann manifoldu olsun. M semi-Riemann manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir iki fonksiyon f ve h olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\int_M [(\Delta f)(\Delta h) - Hessf.Hessh - Ric(gradf, gradh)]dv \\
&= \{\int_{\partial M_+} [f_n \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i h_{ii} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_i h_{ni}] w_{\partial M_+}\} \\
&\quad -\{\int_{\partial M_-} [f_n \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i h_{ii} - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i f_i h_{ni}] w_{\partial M_-}\}
\end{aligned} \tag{3.1.43}$$

dir. Burada $w_{\partial M_+}$, $w_{\partial M_-}$, dv, sırasıyla, ∂M_+, ∂M_- ve M nin hacim elementleridir.

İspat. Teorem 3.1.4 deki (3.1.34) eşitliğinin sağ tarafındaki ifade

$$\begin{aligned}
*w &= \sum_{j=1}^{n} \beta_j (f_1 h_{jj} - f_j h_{1j})(-1)^{1-1} g^{11} \sqrt{|g|} \widehat{dx_1} \wedge dx_2 \wedge ... \wedge dx_n \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \beta_j (f_2 h_{jj} - f_j h_{2j})(-1)^{2-1} g^{22} \sqrt{|g|} dx_1 \wedge \widehat{dx_2} \wedge ... \wedge dx_n \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \beta_j (f_n h_{jj} - f_j h_{nj})(-1)^{n-1} g^{nn} \sqrt{|g|} dx_1 \wedge dx_2 \wedge ... \wedge \widehat{dx_n}
\end{aligned} \tag{3.1.44}$$

şeklinde yazılabilir. (1.5.16) da ∂M_+ nın e_n dış birim normalinin time-like olduğu gözönüne alınıp (3.1.44) de yerine yazılırsa,

$$*w = -\sum_{j=1}^{n} \beta_j (f_n h_{jj} - f_j h_{nj}) w_{\partial M_+}$$

veya

$$*w = -[f_n \sum_{i=1}^{n-1} \beta_j h_{ii} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_j f_i h_{ni}] w_{\partial M_+} \tag{3.1.45}$$

elde edilir. Burada $\sqrt{|g|} = 1$ ve $g^{nn} = -1$ olarak alınmıştır.

Benzer şekilde işlem yapılarak time-like sınır için

$$*w = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j (f_n h_{jj} - f_j h_{nj}) w_{\partial M_-}$$

veya

$$*w = [f_n \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i h_{ii} - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i f_i h_{ni}] w_{\partial M_-} \tag{3.1.46}$$

bulunur. Burada $\sqrt{|g|} = 1$ ve $g^{nn} = 1$ olarak alınmıştır. (3.1.45) ve (3.1.46) eşitlikleri (3.1.34) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} &\int_M [(\Delta f)(\Delta h) - Hessf.Hessh - Ric(gradf, gradh)] dv \\ &= \{ \int_{\partial M_+} [f_n \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i h_{ii} - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_i h_{ni}] w_{\partial M_+} \} \\ &\quad -\{ \int_{\partial M_+} [f_n \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i h_{ii} - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i f_i h_{ni}] w_{\partial M_-} \} \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.1.6. (Reilly Formülünün Genelleştirilmişi) M, non-dejenere space-like ∂M_+ sınırına sahip (e_n dış birim normali time-like olan) ve non-dejenere time-like ∂M_- sınırına sahip (e_n dış birim normali space-like olan) yönlendirilmiş bir semi-Riemann manifoldu olsun. M semi-Riemann manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir iki fonksiyon f ve h, ayrıca

$$z_1 = f\mid_{\partial M_+}, \qquad u_1 = f_n, \qquad \xi_1 = h\mid_{\partial M_+}, \qquad v_1 = h_n \tag{3.1.47}$$

ve

$$z_2 = f\mid_{\partial M_-}, \qquad u_2 = f_n, \qquad \xi_2 = h\mid_{\partial M_-}, \qquad v_2 = h_n \tag{3.1.48}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\int_M [(\Delta f)(\Delta h) - Ric(gradf, gradh) - Hessf.Hessh)]dv \\
&= \{ \int_{\partial M_+} [(\Delta_1 \xi)u - (n-1)Huv - \langle gradz, gradv \rangle_1 \\
&\quad + II(gradz, gradz)]w_{\partial M_+}\} \\
&\quad -\{ \int_{\partial M_-} [(\Delta_2 \xi)u + (n-1)Huv - \langle gradz, gradv \rangle_2 \\
&\quad + II(gradz, gradz)]w_{\partial M_-}\}
\end{aligned} \tag{3.1.49}$$

dir. Burada $w_{\partial M_+}$, $w_{\partial M_-}$, dv, sırasıyla, ∂M_+, ∂M_- ve M nin hacim elementleridir.

İspat. Teorem 3.1.5 deki (3.1.43) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci kısmı göz önüne alalım. Bu durumda $h \epsilon C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu için, sırasıyla, (1.5.24), (1.5.27) ve (1.5.28) den

$$\xi_i = h_i \mid_{\partial M_+} \tag{3.1.50}$$

$$h_{ij} \mid_{\partial M_+} = \xi_{ij} - vII_{ij} \tag{3.1.51}$$

$$h_{ni} \mid_{\partial M_+} = v_i - \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j II_{ij} \tag{3.1.52}$$

yazılır. Bu taktirde (3.1.51) eşitliğinde, $i = j$ alınıp $i = 1, 2, ..., n-1$ üzerinden toplam alınır ve β_i ile çarpılırsa,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i h_{ii} = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \xi_{ii} - v \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i II_{ii}$$

olur. Burada (2.1.9) ve (3.1.25) göz önüne alınırsa,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i h_{ii} = \Delta_1 \xi - (n-1)Hv \tag{3.1.53}$$

elde edilir. (3.1.53) eşitliği $f_n = u$ ile taraf tarafa çarpılırsa,

$$f_n \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i h_{ii} = (\Delta_1 \xi)u - (n-1)Huv \tag{3.1.54}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.1.52) eşitliği (1.5.24) deki $f_i = z_i$ ile taraf tarafa çarpılıp $i = 1, 2, ..., n-1$ üzerinden toplam alınırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i f_i h_{ni} &= \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i z_i v_i - \sum_{i,j=1}^{n-1} \beta_i \beta_j z_i \xi_j II_{ij} \\
&= \langle gradz, gradv \rangle_1 - II(gradz, gradz)
\end{aligned} \tag{3.1.55}$$

şeklinde yazılır.

Benzer şekilde Teorem 3.1.5 deki (3.1.43) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci kısmı göz önüne alalım. (1.5.30) dan

$$z_i = f_i \mid_{\partial M_-} \tag{3.1.56}$$

dir. Bu durumda $h \epsilon C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu için, sırasıyla, (1.5.30), (1.5.32) ve (1.5.33) eşitliklerinden,

$$\xi_i = h_i \mid_{\partial M_-} \tag{3.1.57}$$

$$h_{ij} \mid_{\partial M_-} = \xi_{ij} + vII_{ij} \tag{3.1.58}$$

$$h_{ni} \mid_{\partial M_-} = v_i - \sum_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j z_j II_{ij} \tag{3.1.59}$$

yazılır. Bu taktirde (3.1.58) eşitliğinde $i = j$ alınıp $i = 1, 2, ..., n-1$ üzerinden toplam alınır ve ε_i ile çarpılırsa,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i h_{ii} = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \xi_{ii} + v \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i II_{ii}$$

olur. Burada (2.1.9) ve (3.1.26) eşitlikleri göz önüne alınırsa,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i h_{ii} = \Delta_2 \xi + (n-1) Hv \tag{3.1.60}$$

elde edilir. (3.1.60) eşitliği $f_n = u$ ile taraf tarafa çarpılırsa,

$$f_n \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i h_{ii} = (\Delta_2 \xi) u + (n-1) Huv \tag{3.1.61}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.1.59) eşitliği $\varepsilon_i f_i$ ile çarpılıp $i = 1, 2, ..., n-1$ üzerinden toplam alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i f_i h_{ni} &= \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i f_i v_i - \sum_{i,j=1}^{n-1} \varepsilon_i \varepsilon_j f_i \xi_j II_{ij} \\ &= \langle gradz, gradv \rangle_2 - II(gradz, gradz) \end{aligned} \tag{3.1.62}$$

yazılır. Böylece (3.1.54), (3.1.55), (3.1.61) ve (3.1.62) eşitlikleri (3.1.43) eşitliğinin sağ tarafında yerine yazılırsa, o zaman diferensiyellenebilir f ve h fonksiyonları için integral formülü;

$$\begin{aligned} &\int_M [(\Delta f)(\Delta h) - Ric(gradf, gradh) - Hessf.Hessh] dv \\ &= \{ \int_{\partial M_+} [(\Delta_1 \xi) u - (n-1) Huv - \langle gradz, gradv \rangle_1 \\ &\quad + II(gradz, gradz)] w_{\partial M_+} \} \\ &\quad - \{ \int_{\partial M_-} [(\Delta_2 \xi) u + (n-1) Huv - \langle gradz, gradv \rangle_2 \\ &\quad + II(gradz, gradz)] w_{\partial M_-} \} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

Bu da istenendir. Buradan M üzerinde diferensiyellenebilir bir f fonksiyonu için Reilly formülünün aşağıdaki sonucunu ifade edebiliriz.

Sonuç 3.1.1. Son bulunan ifade de h yerine f alınır ve (3.1.47) ve (3.1.48) eşitlikleri gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_M [(\Delta f)^2 - Ric(gradf, gradf) - Hessf.Hessf]dv \\
&= \{ \int_{\partial M_+} [(\Delta_1 z)u - (n-1)Hu^2 - \langle gradz, gradu\rangle_1 \\
&\quad + II(gradz, gradz)]w_{\partial M_+}\} \\
&\quad -\{ \int_{\partial M_-} [(\Delta_2 z)u + (n-1)Hu^2 - \langle gradz, gradu\rangle_2 \\
&\quad + II(gradz, gradz)]w_{\partial M_-}\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Hacısalihoğlu, H.H., 2004, Diferensiyel Geometri, IV. Baskı, Cilt III, Ankara, 206s.

[2] Kobayashi, S., and Nomizu, K., 1963, Foundations of Differential Geometry, Vol.I, New York-London, 329p.

[3] Kobayashi, S., and Nomizu, K., 1963, Foundations of Differential Geometry, Vol.II, New York-London, 470p.

[4] Blachke, W., 1949, Diferensiyel Geometri Dersleri, İstanbul Üniversitesi Yayınları, 399s.

[5] Gallot, S., Hulin, D., and Lafontaine J., 1993, Riemannian Geometry, Printed in the USA, Second Printing, 248p.

[6] Reilly, R.C., 1977, Applications of the Hessian Operator in a Riemannian Manifold, Indiana University Mathematics Journal, 26(3), 459-472.

[7] Xia, C., 1997, Rigidity of Compact Manifolds with Boundary and Nonnegative Ricci Curvature, Proceedings of the American Mathematical Society, 125(6), 1801-1806.

[8] Ergüt, M., 1983, Genelleştirilmiş Regle Yüzeylere Dair, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Elazığ, 53s.

[9] Duggal, K.L., 1991, Affine Conformal Vector Fields in Semi-Riemannian Manifolds, Acta Applicandae Mathematicae 23, 275-294.

[10] Garcio-Rio, E., and Küpeli, D.N., 2001, The Generalized Divergence Theorem and Its Application to Harmonic Maps, Nonlinear Analysis, 47, 2995-3004.

[11] Montiel, S., 1988, An Integral Inequality for Compact Spacelike Hypersurfaces in De Sitter Space and Applications to the Case of Constant Mean Curvature, Indiana University Mathematics Journal, 37(4), 909-917.

[12] Yamada, K., 1988, Complete Space-like Surfaces with Constant Mean Curvature in the Minkowski 3-Space, Tokyo J. Math., 11(2), 329-338.

[13] Cheng, S.Y., and Yau, S.T., 1976, Maximal Space-like Hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski Spaces, Annals of Mathematics, 104, 407-419.

[14] Liu, L.H., 1992, Minimal Immersions of Pseudo-Riemannian Manifols, Tsukuba J. Math., 16(1), 1-10.

[15] Romero A., and Sanchez, M., 1996, An Integral Inequality on Compact Lorentz Manifolds and Its Applications, Bull. London Math. Soc. 28, 509-513.

[16] Aiyama, R., 1995, Compact Space-like m-Submanifolds in a Pseudo-Riemannian Sphere $S_p^{m+p}(c)$, Tokyo J. Math., 18(1), 81-90.

[17] O'neill, B., 1983, Semi-Riemannian Geometry, Academic Press. New York, 468p.

[18] Hacısalihoğlu, H.H.,1993, Diferensiyel Geometri, II.Baskı, Cilt I, Ankara, 269s.

[**19**] Hacısalihoğlu, H.H.,1980, Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, No.2 , İstanbul, 439s.

[**20**] Martin, D., 1991, Manifolds Theory, Ellis Horwood Lmt., West Sussex, PO191EB, England, 423p.

[**21**] Hacısalihoğlu, H.H.,1994, Diferensiyel Geometri, II.Baskı, Cilt II, Ankara, 340s.

[**22**] Hacısalihoğlu, H.H., ve Ekmekçi, N., 2003, Tensör Geometri, Ankara, 251s.

[**23**] Abraham, R., Marsden, J.E., and Ratiu, T., 1988, Manifolds, Tensor Analysis and Applications, Second Press, Springer Verlag, New York, 654p.

[**24**] Curtis, W.D., and Miller, F.R., 1985, Differential Manifolds and Theoretical Physics, Academic Press Inc., London, 393p.

[**25**] Bektaş, M., 1998, Lorentz Uzayının İntegral Geometrisi, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 140s.

[**26**] Al-Medhadi, N.S., and Marzouk, M.D., 1992, An Integral Formula and Applications, Bull. Cal. Math. Soc., 84, 137-144.

[**27**] Ünal, B., 1994, Divergence Theorems in Semi-Riemannian Geometry, Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 10p.

[**28**] Kosif, C., and Hacısalihoğlu, H.H., 1984, The Theory of Integration on Manifolds and the Volume for Parallel Hypersurfaces, Communications, 33, 255-271.

ÖZGEÇMİŞ

1978 Elazığ doğumluyum. İlk öğrenimimi Elazığ Atatürk İlkokulunda tamamladım. 1989 yılında Elazığ Anadolu Lisesi'ni kazandım ve 1996 yılında bu okuldan mezun oldum. Yine 1996 yılında Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım ve 2000 yılında bu bölümden mezun oldum. Ekim 2000 tarihinde Elazığ Karşıyaka İlköğretim Okulu'na Matematik Öğretmeni olarak atandım. Şubat 2000 tarihinde mezun olduğum Matematik Bölümünde Yüksek Lisans'a başladım. 14 Ocak 2002 tarihinde öğretmenlikten ayrıldım ve Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak işe başladım. 2000-2001 yılı Bahar döneminde Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimime başladım. 2003 yılında Yüksek Lisans öğrenimimi tamamladım. Aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda Doktora öğrenimime başladım. Halen Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktayım. Evli ve bir çocuk annesiyim.

Mihriban KÜLAHCI