Çok Fazlı Akışlar için Tam Kütle Korunumlu Keyfi Lagrangian-Eulerian (ALE) Formülasyonu

Proje No:217M358

Prof. Dr. Mehmet ŞAHİN
Çağatay GÜVENTÜRK

HAZİRAN 2020
İSTANBUL

ÖNSÖZ

217M358 no'lu "**Çok Fazlı Akışlar için Tam Kütle Korunumlu Keyfi Lagrangian-Eulerian (ALE) Formülasyonu"** başlıklı proje 1 Mayıs 2018 – 1 Mayıs 2020 tarihleri arasında TÜBİTAK Mühendislik Araştırma Grubu (MAG) tarafından desteklenerek gerçekleştirilmiştir. Proje kapsamında sıkıştırılamaz çok fazlı akış problemlerinin çözümü için Lagrangian ve Eulerian yöntemlerin avantajlarını birleştiren üç boyutlu bir keyfi Lagrangian Eulerian (ALE) çözücüsü geliştirilmiştir. Bu amaçla Guventurk ve Sahin (2017) tarafından gerçekleştirilen iki boyutlu çalışmada önerilen kenar merkezli yapısal olmayan sonlu hacimler yöntemi, üç boyutta sıkıştırılamaz çok fazlı Navier-Stokes denklemlerinin ayrıklaştırılması için kullanılmıştır. Geliştirilen yöntem ile statik tek damla, yükselen tek damla ve Taylor kabarcık problemlerinin üç boyutta simülasyonları gerçekleştirilmiş ve sonuçlar hem nümerik hem deneysel verilerle kıyaslanmıştır. Bu çalışmalarda yer alan doktora öğrencisi Çağatay Güventürk "*An ALE Framework for Multiphase Flows*" isimli tezine başlamış ve Ocak 2020 döneminde ilk ilerleme raporunu teslim etmiştir. Bu projedeki desteklerinden dolayı TÜBİTAK MAG'a teşekkürü borç biliriz. Son olarak da bu projedeki hesaplamaları mümkün kılan Ulusal Yüksek Başarımlı Hesaplama Merkezi (5005772018 numaralı proje) ve Türk Ulusal Bilim e-Altyapısı'na (TRUBA) sonsuz teşekkür ederiz. Bu çalışmaların devamlılığı için bu tür ulusal hesaplama merkezlerinin TÜBİTAK ve benzeri diğer kurumlar tarafından desteklenmesini önemle arz ediyoruz.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ i

İÇİNDEKİLER ii

ŞEKİL LİSTESİ iii

TABLO LİSTESİ vi

ÖZET vii

ABSTRACT viii

1 GİRİŞ 1

2 MATEMATİKSEL VE SAYISAL YÖNTEM 4

2.1 Korunum Denklemleri 4

2.2 Sayısal Ayrıklaştırma 5

2.2.1 Akışkan-Akışkan Arayüzünde Sınır Koşullarının Kütle Korunumunu Sağlayacak Şekilde Uygulanması 11

2.2.2 Ağ Deformasyon Algoritması 13

2.2.3 Ayrık Atlama Koşulu 14

2.2.4 Arayüzde Yüzey Birim Normal Vektörünün Hesaplanması 15

2.2.5 Yarı Kapalı Formda Yüzey Gerilmesi 17

2.2.6 Ağdan Ağa İnterpolasyon 18

2.2.7 Tam Bağlaşık Çözüm Yöntemi 20

3 DOĞRULAMA TESTLERİ 24

3.1 Statik Damla Problemi 24

3.2 Yükselen Kabarcık Problemi: Nümerik Sonuçlarla Kıyas 26

3.2.1 Yükselen Kabarcık Problemi için Oluşturulan Yapısal Olmayan Ağ 27

3.2.2 Yükselen Kabarcık Problemi – Düşük Yoğunluk ve Viskozite Oranı 28

3.2.3 Yükselen Kabarcık Problemi – Yüksek Yoğunluk ve Viskozite Oranı 35

3.3 Taylor Kabarcığı Problemi 40

3.3.1 İki Boyutlu Taylor Kabarcığı Problemi 42

3.3.2 Üç Boyutlu Taylor Kabarcığı Problemi 46

3.4 Yükselen Kabarcık Problemi: Deneysel Sonuçlarla Kıyas 53

4 SONUÇLAR 56

KAYNAKLAR 58

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.2.1: Üç boyutlu yapısal olmayan ağ. Hız bileşenleri için kullanılan, n (mavi hacim) ve n+1 (sarı hacim) zaman adımlarındaki kontrol hacmi Ωd [a] A125 alan vektörü için gradyan hesaplamalarında kullanılan eş hacim (dual volume) (mor hacim) Ωc. 5

Şekil 2.2.2: Üç tane dörtgenüçyüzlünün oluşturulması.....10

Şekil 2.2.3: Arayüz sınır koşulu için kullanılan notasyon 12

Şekil 2.2.4: Arayüzde kontrol hacmine etkiyen kuvvetler 15

Şekil 2.2.5: Yerel koordinat sisteminde yüzey noktasındaki birim normal vektörün hesaplanması.....16

Şekil 2.2.6: Ağdan ağa interpolasyon. 19

Şekil 3.1.1: Statik damla problemi. 24

Şekil 3.1.2: M1 ağ yapısı ve yöntem 2 kullanılarak elde edilen parazitik akımlar (u hızı bileşeni): t=0.025s (a), t=0.25s (b) ve t=2.5s (c).. 26

Şekil 3.2.1: Yükselen kabarcık problemi. 26

Şekil 3.2.2: Yükselen kabarcık problemi için DISTENE MeshGems-Hexa algoritması ile altı yüzlü elemanlardan oluşturulan z=0 düzlemindeki yapısal olmayan ağ: M1 ağı (sol) ve M2 ağı (sağ). 27

Şekil 3.2.3: Kabarcık şeklinin zamana bağlı değişimi t=0 [a], t=1.0 [b], t=1.5 [c], t=2.0 [d] ve t=3.0 [e]. 29

Şekil 3.2.4: Kabarcık kütle merkezinin zamana bağlı değişimi ve Adelsberger v.d. (2014)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]. 30

Şekil 3.2.5: Kabarcık yükselme hızının zamana bağlı değişimi ve Adelsberger v.d. (2014)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]. 31

Şekil 3.2.6: Kabarcık yükselme hızının zamana bağlı değişimi ve Turek v.d. (2017)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]. 31

Şekil 3.2.7: Kabarcık küreselliğinin zamana bağlı değişimi ve Adelsberger v.d. (2014)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]. 32

Şekil 3.2.8: Kabarcık küreselliğinin zamana bağlı değişimi ve Turek v.d. (2017)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]. 33

Şekil 3.2.9: Kabarcık boyutunun zamana bağlı değişimi ve Adelsberger v.d. (2014)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b] 33

Şekil 3.2.10: Kabarcık boyutunun zamana bağlı değişimi ve Turek v.d. (2017)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b] 34

Şekil 3.2.11: Kabarcık hacminin M1 ve M2 ağlarında zamana bağlı değişimi 35

Şekil 3.2.12: Kabarcık şeklinin zamana bağlı değişimi t=0 [a], t=0.5 [b], t=1.0 [c], t=1.5 [d] ve t=2.0 [e]. 36

Şekil 3.2.13: Kabarcık kütle merkezinin zamana bağlı değişimi ve Adelsberger v.d. (2014)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]. 37

Şekil 3.2.14: Kabarcık yükselme hızının zamana bağlı değişimi ve Adelsberger v.d. (2014)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]. 37

Şekil 3.2.15: Kabarcık küreselliğinin zamana bağlı değişimi ve Adelsberger v.d. (2014)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]. 38

Şekil 3.2.16: Kabarcık boyutunun zamana bağlı değişimi ve Adelsberger v.d. (2014)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]. 39

Şekil 3.2.17: Kabarcık hacminin M1 ve M2 ağlarında zamana bağlı değişimi. 39

Şekil 3.3.1: Taylor kabarcığı problemi.....41

Şekil 3.3.2: İki boyutlu Taylor kabarcığı hızının zamana bağlı değişimi.....43

Şekil 3.3.3: Taylor kabarcığı şeklinin zamana bağlı değişimi: t=0s (a), t=0.137s (b), t=0.165s (c) ve t=0.3s (d). 44

Şekil 3.3.4: Taylor kabarcığı ve etrafındaki akışkanın y doğrultusundaki hız alanı konturunun zamana bağlı değişimi: t=0.02s (a), t=0.137s (b), t=0.165s (c) ve t=0.3s (d).....44

Şekil 3.3.5: Taylor kabarcığı tepe noktası etrafındaki hız vektörleri (t=0.3s): y/D=0.504 (a), y/D=0.299 (b), y/D=0.094 (c) ve y/D=-0.111 (d) (eksen takımı kabarcığın tepe noktasına konularak y doğrultusu aşağı yönlü olacak şekilde verilmiştir.). 45

Şekil 3.3.6: Taylor kabarcığı iz bölgesi etrafındaki hız vektörleri (t=0.3s): y/D=0.019 (a), y/D=0.2 (b), y/D=0.499 (c) ve y/D=0.748 (d) (eksen takımı kabarcığın en alt noktasına konularak y doğrultusu aşağı yönlü olacak şekilde verilmiştir.). 45

Şekil 3.3.7: İki ve üç boyutlu Taylor kabarcığı hızının zamana bağlı değişimi. 47

Şekil 3.3.8: Taylor kabarcığı şeklinin zamana bağlı değişimi: t=0s (a), t=0.101s (b), t=0.135s (c) ve t=0.3s (d). 48

Şekil 3.3.9: Taylor kabarcığı ve etrafındaki akışkanın y doğrultusundaki hız alanı konturunun zamana bağlı değişimi: t=0.02s (a), t=0.101s (b), t=0.135s (c) ve t=0.3s (d).....49

Şekil 3.3.10: Taylor kabarcığı hücum kenarı etrafındaki hız vektörleri (t=0.3s): y/D=0.504 (a), y/D=0.299 (b), y/D=0.094 (c) ve y/D=-0.111 (d) (eksen takımı kabarcığın tepe noktasına konularak y doğrultusu aşağı yönlü olacak şekilde verilmiştir.). 49

Şekil 3.3.11: Taylor kabarcığı iz bölgesi etrafındaki hız vektörleri (t=0.3s): y/D=0.019 (a), y/D=0.2 (b), y/D=0.499 (c) ve y/D=0.748 (d) (eksen takımı kabarcığın en alt noktasına konularak y doğrultusu aşağı yönlü olacak şekilde verilmiştir.). 50

Şekil 3.3.12: Taylor kabarcığının üst bölgesinde hızın eksenel bileşenin tüp ekseni doğrultusunda değişimi (t=0.3s): mevcut çalışma (kırmızı), Şekil 4 - Bugg ve Saad (2002)

(siyah) (eksen takımı kabarcığın en üst noktasına konularak z doğrultusu aşağı yönlü olacak şekilde verilmiştir.).....51

Şekil 3.3.13: Taylor kabarcığının üst bölgesinde, y/D=-0.111 konumunda, hızın eksenel ve radyal bileşenin radyal doğrultuda değişimi (t=0.3s): mevcut çalışma (kırmızı/mavi), Şekil 5 - Bugg ve Saad (2002) (siyah) (eksen takımı kabarcığın en üst noktasına konularak z doğrultusu aşağı yönlü olacak şekilde verilmiştir.). 51

Şekil 3.3.14: Taylor kabarcığının üst bölgesinde, y/D=0.504 konumunda, hızın eksenel ve radyal bileşenin radyal doğrultuda değişimi (t=0.3s): mevcut çalışma (kırmızı/mavi), Şekil 6 - Bugg ve Saad (2002) (siyah) (eksen takımı kabarcığın en üst noktasına konularak z doğrultusu aşağı yönlü olacak şekilde verilmiştir.) 52

Şekil 3.3.15: Taylor kabarcığının iz bölgesinde, y/D=0.2 konumunda, hızın eksenel ve radyal bileşenin radyal doğrultuda değişimi (t=0.3s): mevcut çalışma (kırmızı/mavi), Şekil 9 - Bugg ve Saad (2002) (siyah) (eksen takımı kabarcığın en alt noktasına konularak z doğrultusu aşağı yönlü olacak şekilde verilmiştir.).....52

Şekil 3.4.1: Deneysel verilerle kıyas için oluşturulan yükselen kabarcık problemi hesap alanı 54

Şekil 3.4.2: Kabarcık yükselme hızının zamana bağlı değişiminin kıyaslanması.....55

Şekil 3.4.3: Mevcut çalışmada elde edilen kabarcık şeklinin ve kabarcık içerisindeki ve iz alanındaki akım çizgilerinin (soldaki) Hnat ve Buckmaster (1976) tarafından elde edilen deney sonucuyla (sağdaki) kıyaslanması. 55

TABLO LİSTESİ

Tablo 3.1.1: Statik damla problemi için fiziksel özellikler 25

Tablo 3.1.2: Statik damla problemi oluşturulan ağ özellikleri ve zaman adımı değerleri. 25

Tablo 3.1.3: Nokta üzerinde normal hesabı için kullanılan yöntemler 25

Tablo 3.1.4: Statik damla problemi için elde edilen sonuçlar. 25

Tablo 3.2.1: Yükselen kabarcık problemi oluşturulan ağ özellikleri ve zaman adımı değerleri 27

Tablo 3.2.2: Düşük yoğunluk ve viskozite oranlı yükselen kabarcık problemi için fiziksel özellikler. 28

Tablo 3.2.3: Su ve hava için fiziksel özellikler (15°C) 28

Tablo 3.2.4: Düşük yoğunluk ve viskozite oranlı yükselen kabarcık problemi için fiziksel özellikler. 36

Tablo 3.3.1: Taylor kabarcığı hesap alanı parametreleri 41

Tablo 3.3.2: Taylor kabarcığı için fiziksel özellikler 41

Tablo 3.3.3: İki boyutlu Taylor kabarcığı için oluşturulan ağ özellikleri ve zaman adımı değerleri 42

Tablo 3.3.4: Üç boyutlu Taylor kabarcığı için oluşturulan ağ özellikleri ve zaman adımı değerleri 46

Tablo 3.3.5: Daimi hızların ve hata yüzdelerinin karşılaştırılması 46

Tablo 3.4.1: Hesap alanına ilişkin parametreler 53

Tablo 3.4.2: Akışkanlara ilişkin parametreler 53

ÖZET

Bu proje kapsamında sıkıştırılamaz çok fazlı akış problemlerinin çözümü için Lagrangian ve Eulerian yöntemlerin avantajlarını birleştiren üç boyutlu bir keyfi Lagrangian Eulerian (ALE) çözücüsü geliştirilmiştir. Bu amaçla Guventurk ve Sahin (2017) tarafından gerçekleştirilen iki boyutlu çalışmada önerilen kenar merkezli yapısal olmayan sonlu hacimler yöntemi, üç boyutta sıkıştırılamaz çok fazlı Navier-Stokes denklemlerinin ayrıklaştırılması için kullanılmıştır. Bu yöntemde hız vektör bileşenleri her bir hücre yüzeyinin merkezinde tanımlanırken, basınç terimi ise her bir elemanın geometrik merkezinde tanımlanmıştır. Böylelikle mevcut kararlı (div-stable) ayrıklaştırma yöntemi herhangi bir yapay stabilizasyon yöntemi kullanmadığından toplam kütle korunumu makina hassasiyetinde sağlanmıştır. Ayrıca çok fazlı akışlarda buna ek olarak iki farklı akışkan kütlelerinin ayrı ayrı korunumunun yine makina hassasiyetinde sağlanması için arayüzdeki kinematik sınır koşulunun uygulanmasında ayrık geometrik korunum yasasının (DGCL) sağlanmasına özel bir özen gösterilmiştir. Ek olarak, basınç alanı ile birlikte arayüzde yoğunluk ve viskozitenin süreksiz olarak değiştiği hesaba katılarak süreksiz olarak ayrıklaştırılmıştır. Böylelikle parazit akımlar (parasitic currents) sayısal yöntemde makina hassasiyetine indirilmiştir. Yüzeydeki yüzey gerilmesi terimi arayüze paralel bir kuvvet olarak ele alınmış ve bu kuvvet teğet vektörlerin integrasyonu ile hesaplanmıştır. Her bir akışkan alanındaki ağ noktasının yer değiştirmesi ve arayüzdeki teğetsel yer değiştirmeler, lineer elastisite denklemlerinin çözümü ile elde edilmiştir. Elde edilen cebirsel denklemler tam bağlaşıklı olarak çözülmüş ve bu tam bağlaşıklı yöntem için her bir alt hesap bölgesi içerisinde tam olmayan LU ayrıklaşması (ILU) ile birlikte tek seviyeli kısıtlı katkı (restricted additive) Schwarz önkoşullandırıcısı kullanılmıştır. Geliştirilen yöntem ile statik tek damla, yükselen tek damla ve Taylor kabarcık problemlerinin üç boyutta simülasyonları gerçekleştirilmiş ve sonuçlar hem nümerik hem deneysel verilerle kıyaslanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yapısal Olmayan Sonlu Hacimler Yöntemi, ALE Yöntemleri, İki Fazlı Akışlar, Sıkıştırılamaz Viskoz Akışlar, Geometrik Korunum Yasası, Kütle Korunumu, Bağlaşık Çözücüler.

ABSTRACT

An Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) framework which combines the advantages of both Lagrangian and Eulerian methods is developed to solve incompressible multiphase flow problems. For this purpose, the two-dimensional side-centered unstructured finite volume method presented in Guventurk and Sahin (2017) is used to discretize the incompressible three-dimensional Navier-Stokes equations. In this approach, the velocity vector components are defined at the mid-point of each cell face, while the pressure term is defined at element centroids. The present arrangement of the primitive variables leads to exact total mass conservation at machine precision due to the present stable numerical discretization with no *ad-hoc* modifications. In addition, a special attention is given to satisfy global discrete geometric conservation law (DGCL) at discrete level for the application of the interface kinematic boundary condition in order to conserve the total mass for each species for multiphase flow problems. Furthermore, the pressure field is treated to be discontinuous across the interface with the discontinuous treatment of density and viscosity. Therefore, the parasitic currents are reduced to the machine precision. The surface tension term at the interface is treated as a force tangent to the interface and computed using the line integral of tangent vectors at the interface. The mesh vertices are deformed by solving the linear elasticity equations due to the normal displacement of interface. The resulting algebraic equations are solved in a fully coupled manner and a one-level restricted additive Schwarz preconditioner with a block-incomplete factorization (ILU) within each partitioned sub-domains is utilized for the resulting fully coupled system. The method is validated by simulating the classical benchmark problems of a single static bubble problem, a single rising bubble problem in a viscous fluid due to buoyancy and a Taylor bubble problem in three-dimensions.

Keywords: Unstructured Finite Volume, ALE Methods, Two-phase Fluid, Incompressible Viscous Flow, Geometric Conservation Law, Mass Conservation, Coupled Solvers.

1 GİRİŞ

Hareketli yüzeye sahip viskoz, sıkıştırılamaz, çok fazlı akışların nümerik simülasyonu son yıllarda daha fazla önem kazanmaya başladı. Bu akışlar eritme ve katılaştırma, polimer karıştırma, fiber kaplama, emülsiyonlaştırma, hedeflenmiş ilaç taşınımı, damla oluşumu, gıda işleme, kristal büyümesi, cam ve metal şekillendirme işlemleri gibi pek çok önemli endüstriyel uygulamalarda ve doğada karşımıza çıkmaktadır. Bu işlemlerde arayüz dinamiği önemli bir rol oynar ve ürününün kalitesini önemli ölçüde belirler. Bununla birlikte çok fazlı akışların karmaşık davranışı hem teorik hem de sayısal açıdan hâlâ araştırma zorluğu oluşturmaktadır. Arayüzde yoğunluk, viskozite gibi malzeme özelliklerinin süreksiz olması ve arayüzün yerinin önceden bilinmemesi, birbirine karışmayan iki akışkanın simülasyonunda ana zorluklardan birisidir. İlâveten, her bir zaman adımında her iki akışkanın da kütleleri ayrı ayrı korunmalıdır. Mevcut çalışmada sıkıştırılamaz, birbirine karışmayan iki fazlı akışların doğrudan üç boyutlu simülasyonu için her iki akışkanın kütlelerinin ayrı ayrı makine hassasiyetinde korunduğu keyfi Lagrangian-Eulerian yaklaşımına dayanan özgün bir sonlu hacimler yöntemi geliştirilmiştir.

İki fazlı akışlar için geliştirilen nümerik yöntemler genel olarak sabit Kartezyen ağ yapısına dayanmaktadır. Harlow ve Welch (1965) tarafından geliştirilen "Marker-and-Cell" (MAC) yöntemi, akışkan bölgesini belirleyebilmek için bir boyutlu, kütlesiz, işaretçi Lagrangian parçacıklar kullanmaktadır. "Volume of Fluid" (VOF) yöntemi (Hirt ve Nichols, 1981) hacimsel oran fonksiyonu fikrine dayanmakta ve ara bölgenin fazla yayılmasını önleyecek şekilde hacimsel oran için taşınım denklemini çözmektedir. Bu yöntem kütle korunumunu ayrık formda tam olarak sağlasa da ayrık delta fonksiyonu kullanılmasından ötürü keskin arayüz kalınlaşır ve genel problemler için sadece birinci mertebeden doğruluğa sahip bir yöntem oluşur. "Level Set" (LS) yöntemi (Osher ve Sethian, 1988) VOF yöntemine benzer fakat arayüz sıfır seviye mesafe fonksiyonu (signed distance function) ile temsil edilmektedir. Bu yöntem yüzey gerilim kuvvetlerinin daha hassas hesaplanmasına olanak verse de kütleler makine hassasiyetinde korunamaz. "Moment-of-Fluid" (MOF) yöntemi arayüzün yeniden oluşturulmasında hacimsel oranın yanı sıra geometrik merkez bilgisini de hesaba katmaktadır. Bu yöntem VOF yönteminin genelleştirilmiş hali gibi düşünülebilir. Bu yöntemlerde arayüz yakınlarında nümerik kararsızlıkların oluşmasından kaçınmak amacıyla arayüzde meydana gelen yoğunluk atlaması, viskozite atlaması ve yüzey gerilmesi düzleştirilir (smoothed). Bu yüzden arayüz keskin değil sonlu bir kalınlığa sahiptir. Bu varsayım beraberinde pek çok sorunu da getirmektedir. Bu sorunlardan biri ayrık delta fonksiyonu kullanılmasından ötürü keskin arayüzün kalınlaşması ve genel problemler için

sadece birinci mertebeden doğruluğa sahip bir yöntem oluşmasıdır. İlâveten, düzeltmenin (smoothing) birkaç ağ hücresi üzerinde olması gerekmektedir ve bu da nispeten oldukça ince bir ağ ya da dinamik olarak uyarlanabilen ağ iyileştirmesi (adaptive mesh refinement) (AMR) kullanılmasını gerektirir. Dahası arayüzde taşınım özelliklerindeki yüksek değişimler nispeten çözülmesi oldukça zor lineer sistemlere (stiff linear systems) sebep olmaktadır. Peskin (2002) tarafından sunulan "Immersed Boundary" yöntemine (IBM) benzeyen ön (front) takip yöntemi (Unverdi ve Tryggvason, 1992) de kararlılığı ve düzgün geçişi (smoothness) sağlamak için ağ boyutu (mesh size) derecesinde sonlu bir kalınlık kullanmaktadır. Fakat bu sonlu kalınlık tüm simülasyon boyunca sabit kalmaktadır. Bu yöntem nispeten daha hassas sonuçlar verse de kütleler makine hassasiyetinde korunamaz. Sonlu elemanlar çerçevesinde, yüksek ağ çözünürlüğünün kısıtlamalarından kaçmak için FEM yönteminin geliştirilmiş hali olan ve arayüzde süreksiz biçim fonksiyonları kullanarak arayüz süreksizlikleriyle başa çıkılmasına imkân tanıyan “eXtended Finite Element" (XFEM) yöntemi kullanılmaktadır (Moës v.d., 1999). Çok fazlı akışlar için daha yakın geçmişte geliştirilen nümerik yöntemlere örnek olarak mezoskopik (mesoscopic) kinetik denklemlere dayanan "Lattice Boltzmann" yöntemi (LBM) (Gunstensen v.d., 1991) ve kısmi diferansiyel denklemlerin ağsız ayrıklaştırılmasına dayanan ve Lagrangian bir yöntem olan "Smoothed Particle Hydrodynamics" yöntemi (SPH) (Monaghan, 1994) verilebilir. "LS-VOF" yöntemleri, "Particle-LS" yöntemleri gibi pek çok hibrit yöntem de literatürde mevcuttur.

Çok fazlı akışlar için geliştirilen nümerik yöntemlerin bir diğer sınıfı ise "Arbitrary Lagrangian Eulerian" (ALE) formülasyonuna dayanmaktadır (Hirt v.d., 1974). ALE yönteminde ağ, iki faz arasında arayüzü izlemektedir ve korunum denklemleri yapısal olmayan hareketli ağ üzerinde ayrıklaştırılmaktadır. Bu yüzden ALE formülasyonu yüzey gerilmesi, membran etkileri gibi yüzey kuvvetlerinin doğru/hassas temsilini mümkün kılmaktadır ve arayüz keskin bir şekilde tanımlanmaktadır. Keyfi Lagrangian-Eulerian sistemi kullanılarak arayüze sahip akışların nümerik simülasyonu pek çok araştırmacı tarafından yapılmıştır. Örneğin Walkley ve diğerleri (2005), dinamik temas hattının oluştuğu üç boyutlu serbest yüzeyli akış problemlerinin çözümü için uyarlanabilen ALE sonlu elemanlar yöntemi sunmuştur. Duarte ve diğerleri (2004) yeniden ağ oluşturulmasını geciktirmek için uygun bir ağ hız alanı seçen ALE yöntemini kullanmıştır. Perot ve Nallapati (2003), serbest yüzey akışlarını çözmek için yapısal olmayan ağ kalitesini kontrol etmek için yayların kullanıldığı hareketli ağ tekniği sunmuştur. ALE yönteminde, yoğunluk ve viskozite atlamalarının olduğu arayüz bölgesinde sıkıştırılamazlık koşulu sebebiyle oluşabilecek hatalardan kaçmak için, süreksiz basınç alanı elde edilebilir. Fakat hareketli ağlar, zaman integrasyon yönteminin kararlılığının ve doğruluğunun sağlanabilmesi için özel bir koşulu sağlamak zorundadır. Bu koşul geometrik

korunum yasasının (GCL) (Thomas ve Lombard, 1979) uygulanmasıyla sağlanır. ALE yöntemlerinde doğru ve kararlı bir zaman integrasyon yönteminin geliştirilmesi ve doğruluk ve kararlılık açısından ayrıklaştırılmış geometrik korunum yasasının (DGCL) rolünü belirleyebilmek için ciddi derecede araştırma yapılmıştır (Étienne v.d., 2009, Formaggia ve Nobile, 2004, Geuzaine v.d., 2003, Koobus ve Farhat, 1999). Formaggia ve Nobile (2004), zaman integrasyon şemasının dikkatli seçiminin ve ağ hızının yeniden oluşturulmasının, hareketli hesap alanı problemlerine uygulanan nümerik yöntemin yüksek dereceden doğruluğunun sağlanmasına imkân tanıdığını göstermiştir. Dahası DGCL'yi sağlayan nümerik yöntem genellikle bu koşulu sağlamayan yöntemlere nazaran daha büyük bir zaman adımı kullanılmasına imkân tanımaktadır (Étienne v.d., 2009, Formaggia ve Nobile, 2004, Koobus ve Farhat, 1999). ALE temelli çok fazlı akış simülasyonlarında kütlenin kesin olarak korunumu, süreklilik denkleminin her bir elemanda makine hassasiyetinde (div-stable ayrıklaştırma) sağlanmasının yanı sıra akışkan-akışkan arayüzünde uyumlu sınır koşulunun sağlanmasını da gerektirdiğinden hâlâ üstesinden gelmesi zor bir problemdir. Bu projede önerilen uyumlu sınır koşulu, arayüz hızının küresel ayrık geometrik korunum yasasıyla (DGCL) uyumlu olmasını sağlamaktadır. Böylece her bir akışkanın kütlesinin ayrı ayrı makina hassasiyetinde korunmasını sağlamaktadır. Yazarların bilgisi dahilinde literatürde sıkıştırılamaz çok fazlı akışlar için tam kütle korunumunu sağlayan herhangi bir ALE yöntemi geliştirilmemiştir (bkz: (Duarte v.d., 2004, Perot ve Nallapati, 2003, Walkley v.d., 2005)). Bu özellik, özellikle akım karasızlıklarının analizinde olduğu gibi uzun süreli çok fazlı akışların simülasyonlarının doğruluğu açısından da çok önemlidir. Her ne kadar Montefuscolo ve diğerleri (Montefuscolo v.d., 2014) ufak kütle kayıplarıyla (P2 / P1, P1+ / P1) sonlu elemanlara dayanan yüksek mertebeden ALE formülasyonları sunsa da toplam kütle hatası zaman adımının bir fonksiyonudur ve nispeten oldukça ufak zaman adımları gerektirmektedir. Bu çalışmada ise çok fazlı akışların nümerik simülasyonları için kütlenin kesin olarak korunduğu (zaman adımından ve ağ boyutundan bağımsız olarak) özgün bir ALE yöntemi üç boyutta geliştirilmiştir.

Bu rapor şu bölümlerden oluşmaktadır: İkinci bölümde temel ALE sayısal yöntemi ve algoritma geliştirilirken yapılan ayrıklaştırmalar açıklanmıştır. Üçüncü bölümde geliştirilen algoritmayı doğrulama amacıyla gerçekleştirilen statik damla problemi, yükselen kabarcık problemi (nümerik), Taylor kabarcık problemi ve yükselen kabarcık problemi (deneysel) simülasyonlarının detayları sunulmuştur. Son bölümde ise sonuçlar sunulmuş ve ileride yapılması planlanan konulardan bahsedilmiştir.

2 MATEMATİKSEL VE SAYISAL YÖNTEM

2.1 Korunum Denklemleri

Çok fazlı akışlar için ∂Ω(t) yüzeyli keyfi hareketli kontrol hacmi Ω(t) için sıkıştırılamaz Navier-Stokes denklemlerinin integral formu Kartezyen koordinat sisteminde tek akışkan yaklaşımı için aşağıdaki gibi yazılabilir: Süreklilik denklemi:

$$-\oint_{\partial\Omega_e} \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}\, dS = 0 \tag{1}$$

Momentum denklemi

$$\rho\int_{\Omega_d}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}dV + \rho\oint_{\partial\Omega_d}\left[\mathbf{n}\cdot(\mathbf{u}-\dot{\mathbf{x}})\right]\mathbf{u}dS + \oint_{\partial\Omega_d}\mathbf{n}pdS = \mu\oint_{\partial\Omega_d}\mathbf{n}\cdot(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^{\top})dS + \rho\int_{\Omega_d}\mathbf{g}dV \tag{2}$$

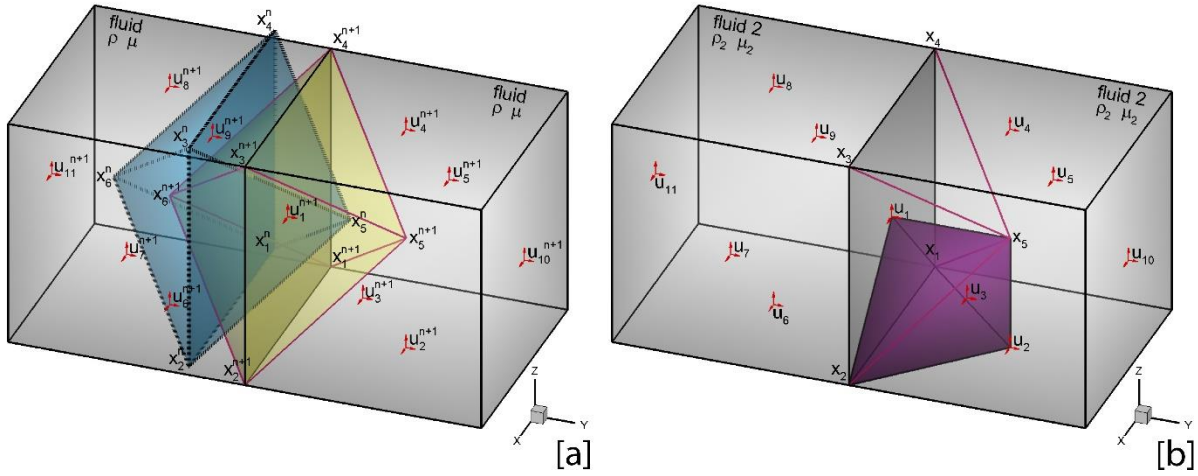
Akışkan-akışkan arayüzünde aşağıdaki atlama koşulları (jump conditions) sağlanmalıdır:

$$[\![\mu(\nabla\mathbf{u}+\nabla\mathbf{u}^{\top})-p\mathbf{I}]\!]\cdot\mathbf{n} = -\sigma\kappa\mathbf{n} \tag{3}$$

Bu denklemlerde V kontrol hacmini, S kontrol hacmi yüzey alanını, **n** dışarı yönlü yüzey normal vektörünü, **u** yerel akışkan hız vektörünü, **ẋ** ağ hızını, p basıncı, ρ akışkan yoğunluğunu, μ dinamik viskoziteyi, **g** yerçekimi vektörünü, σ yüzey gerilmesi katsayısını ve κ eğriselliği göstermektedir. Bu kenar merkezli sonlu hacim metoduna dayanan sayısal yöntemde hız vektör bileşenleri her bir hücre yüzeyinin merkezinde tanımlanırken, basınç terimi ise her bir elemanın geometrik merkezinde tanımlanmaktadır. Böylelikle mevcut kararlı (div-stable) ayrıklaştırma yöntemi herhangi bir yapay stabilizasyon yöntemi kullanmadığından toplam kütle korunumu makina hassasiyetinde sağlanmıştır. Yüzeydeki yüzey gerilmesi terimi arayüze paralel bir kuvvet olarak ele alınmış ve bu kuvvet teğet vektörlerin integrasyonu ile hesaplanmıştır. Her bir akışkan alanındaki ağ noktasının yer değiştirmesi ve arayüzdeki teğetsel yer değiştirme, lineer elastisite denklemlerinin çözümü ile elde edilmiştir. Ayrıca mevcut yaklaşımda, süreklilik denklemi her bir eleman içerisinde tam olarak sağlanmakta ve bu süreklilik denklemlerinin toplamı hesaplama bölgesinin sınırlarında tanımlanan küresel süreklilik denklemini vermektedir.

2.2 Sayısal Ayrıklaştırma

Yerel akışkan hız vektör bileşenleri Şekil 2.2.1a'da görüleceği üzere her bir yüzeyin orta noktasında tanımlanırken basınç her bir elemanın geometrik merkezinde tanımlanmıştır. Kısım 2.1'de verilen süreklilik denklemi her bir altı yüzlü eleman Ω_e içerisinde ayrıklaştırılırken momentum denklemleri sonlu kontrol hacmi (dual volume) Ω_d üzerinde ayrıklaştırılmıştır.



Şekil 2.2.1: Üç boyutlu yapısal olmayan ağ. Hız bileşenleri için kullanılan, *n* (mavi hacim) ve *n+1* (sarı hacim) zaman adımlarındaki kontrol hacmi Ω_d [a] $\mathbf{A_{125}}$ alan vektörü için gradyan hesaplamalarında kullanılan eş hacim (dual volume) (mor hacim) Ω_c.

Momentum denklemleri x-, y- ve z- yönlerinde Şekil 2.2.1a'da gösterildiği üzere sonlu kontrol hacmi üzerinde ayrıklaştırılmıştır. Belirtilmelidir ki hız gradyanları ve basınç değerleri gibi terimlerin arayüz yakınlarında hesaplanma yöntemi, arayüzde süreksizliği sağlaması açısından farklılık göstermektedir. Bu sebeple, ayrıklaştırma yapılırken arayüzün diğer tarafından gelen katkılar hesaba katılmamıştır (örneğin arayüzdeki basınç hesabı). Şekil 2.2.1a'da görülen sağdaki hücreden gelen katkılar x- yönündeki momentum denkleminde yer alan her bir terim için aşağıda verilmiştir.

Zaman türevi:

$$\frac{3\rho_2}{2}\left[\frac{3u_1^{n+1}}{4\Delta t}+\frac{\sum_i u_i^{n+1}}{6\cdot 4\Delta t}\right]V_{12345}^{n+1}-\frac{4\rho_2}{2}\left[\frac{3u_1^{n}}{4\Delta t}+\frac{\sum_i u_i^{n}}{6\cdot 4\Delta t}\right]V_{12345}^{n}+\frac{\rho_2}{2}\left[\frac{3u_1^{n-1}}{4\Delta t}+\frac{\sum_i u_i^{n-1}}{6\cdot 4\Delta t}\right]V_{12345}^{n-1}$$
$$\text{with}\quad i=1,2,3,4,5,10 \qquad (4)$$

Akışkan hızından dolayı taşınım terimi:

$$\begin{aligned} & \rho_2 \left[\mathbf{u}_{125}^{n+1} \cdot \mathbf{A}_{125}^{n+1}\right] u_{125}^{n+1} + \rho_2 \left[\mathbf{u}_{235}^{n+1} \cdot \mathbf{A}_{235}^{n+1}\right] u_{235}^{n+1} \\ + \quad & \rho_2 \left[\mathbf{u}_{345}^{n+1} \cdot \mathbf{A}_{345}^{n+1}\right] u_{345}^{n+1} + \rho_2 \left[\mathbf{u}_{415}^{n+1} \cdot \mathbf{A}_{415}^{n+1}\right] u_{415}^{n+1} \end{aligned} \tag{5}$$

Ağ yapısının hızından dolayı taşınım terimi:

$$\begin{aligned} - \quad & \rho_2 \left[\dot{\mathbf{x}}_{125}^{n+1} \cdot \mathbf{A}_{125}^{n+1}\right] u_{125}^{n+1} - \rho_2 \left[\dot{\mathbf{x}}_{235}^{n+1} \cdot \mathbf{A}_{235}^{n+1}\right] u_{235}^{n+1} \\ - \quad & \rho_2 \left[\dot{\mathbf{x}}_{345}^{n+1} \cdot \mathbf{A}_{345}^{n+1}\right] u_{345}^{n+1} - \rho_2 \left[\dot{\mathbf{x}}_{415}^{n+1} \cdot \mathbf{A}_{415}^{n+1}\right] u_{415}^{n+1} \end{aligned} \tag{6}$$

Basınç terimi:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{p_1 + p_2 + p_5}{3}\right]^{n+1} \mathbf{A}_{125}^{n+1} \cdot \mathbf{i} + \left[\frac{p_2 + p_3 + p_5}{3}\right]^{n+1} \mathbf{A}_{235}^{n+1} \cdot \mathbf{i} \\ + & \left[\frac{p_3 + p_4 + p_5}{3}\right]^{n+1} \mathbf{A}_{345}^{n+1} \cdot \mathbf{i} + \left[\frac{p_4 + p_1 + p_5}{3}\right]^{n+1} \mathbf{A}_{415}^{n+1} \cdot \mathbf{i} \end{aligned} \tag{7}$$

Viskoz terim:

$$\begin{aligned} - \quad & \mu_2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{125}^{n+1} \mathbf{A}_{125}^{n+1} \cdot \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{125}^{n+1} \mathbf{A}_{125}^{n+1} \cdot \mathbf{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)_{125}^{n+1} \mathbf{A}_{125}^{n+1} \cdot \mathbf{k} \right] \\ - \quad & \mu_2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{235}^{n+1} \mathbf{A}_{235}^{n+1} \cdot \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{235}^{n+1} \mathbf{A}_{235}^{n+1} \cdot \mathbf{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)_{235}^{n+1} \mathbf{A}_{235}^{n+1} \cdot \mathbf{k} \right] \\ - \quad & \mu_2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{345}^{n+1} \mathbf{A}_{345}^{n+1} \cdot \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{345}^{n+1} \mathbf{A}_{345}^{n+1} \cdot \mathbf{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)_{345}^{n+1} \mathbf{A}_{345}^{n+1} \cdot \mathbf{k} \right] \\ - \quad & \mu_2 \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{415}^{n+1} \mathbf{A}_{415}^{n+1} \cdot \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_{415}^{n+1} \mathbf{A}_{415}^{n+1} \cdot \mathbf{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)_{415}^{n+1} \mathbf{A}_{415}^{n+1} \cdot \mathbf{k} \right] \end{aligned} \tag{8}$$

Yerçekimi kuvveti

$$\rho_2 \, V_{12345}^{n+1} \, g_x \tag{9}$$

x_1, **x_2**, **x_3**, **x_4** ve **x_5** noktaları arasında kalan piramidin hacmi V_{12345}, bu hacmin 4 adet dörtüçgenyüzlü (tetrahedron) elemana bölünmesiyle aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$V_{12345}^{n+1} = \left(\mathbf{A}_1^{n+1} + \mathbf{A}_2^{n+1} + \mathbf{A}_3^{n+1} + \mathbf{A}_4^{n+1}\right) \cdot \left(\mathbf{x}_5^{n+1} - \mathbf{x}_{f,1}^{n+1}\right)$$

Burada $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$ ve $\mathbf{A_4}$ alan vektörleri, piramidin tabanının (Şekil 2.2.1a'da $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_4}$, $\mathbf{x_3}$ ve $\mathbf{x_2}$ noktaları arasında kalan yüzey) 4 adet üçgene bölünmesiyle elde edilmiştir. Akışkan – akışkan arayüzündeki toplam yüzey gerilme kuvveti

$$\sum_{i=1}^{4} \sigma \mathbf{t}_i \times \left(\frac{\mathbf{n}_i + \mathbf{n}_{i+1}}{2} \right) \Delta l_i.$$

Yüzey gerilme kuvvetinin ayrıklaştırılmasında Tryggvason v.d. (2011) tarafından sunulan üç boyutlu arayüz için eğrisellik tanımı $\kappa \boldsymbol{n} = (\boldsymbol{n} \times \nabla) \times \boldsymbol{n}$ kullanılmıştır. Burada **i**, **j** ve **k** orthogonal birim baz vektörlerini, $\mathbf{A_{125}}$, $\mathbf{A_{235}}$, $\mathbf{A_{345}}$ ve $\mathbf{A_{415}}$ kontrol hacminin üçgen yüzeylerinin alan vektörlerini (Şekil 2.2.1a) ve Δt zaman adımını ifade etmektedir. Alan vektörleri, vektörel çarpım ile hesaplanmıştır (örneğin, $\mathbf{A}_{125}=0.5(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_5)\times(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_5)$). Aslında arayüz için yukarıda verilen sağ hücrenin katkısı, yüzey normali dışarı yönlü olacak şekilde $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ ve $\mathbf{x_4}$ noktaları arasında kalan yüzey için taşınım, basınç ve viskoz akıların katkısını da içermelidir. Fakat arayüzdeki kuvvet dengesi düşünüldüğünde, sağ ve sol elemanlardan gelen katkıların toplamı atlama koşulu denkleminin sol tarafını vermektedir. Dolayısıyla, bu akıların katkıları akışkan-akışkan arayüzünde atlama koşulu sağlanırken, bu denklemin sağ tarafı cinsinden ifade edilebilir. $\mathbf{u_{125}}$, $\mathbf{u_{235}}$, $\mathbf{u_{345}}$ ve $\mathbf{u_{415}}$ her bir kontrol hacmi üçgen yüzeyinin orta noktasında tanımlanan hız vektörleri ve p1, p2, p3, p4 ve p5 sırasıyla $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$, $\mathbf{x_4}$ ve $\mathbf{x_5}$ noktalarındaki basınç değerleridir. Bununla birlikte basınç değerleri sadece elemanların geometrik merkezlerinde bilinmektedir. Bu yüzden $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ ve $\mathbf{x_4}$ noktalarında basınç değerleri hesaplanmalıdır. Örneğin, x1 noktasındaki basınç değerini hesaplamak için ikinci dereceden Taylor serisi aşağıdaki gibi yazılmıştır:

$$p_i = p_1 + \frac{\partial p}{\partial x}\,|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}\,(x_{c,i} - x_1) + \frac{\partial p}{\partial y}\,|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}\,(y_{c,i} - y_1) + \frac{\partial p}{\partial z}\,|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}\,(z_{c,i} - z_1) \quad \text{with} \quad i = 1, 2, .., m \qquad (10)$$

Burada m, $\mathbf{x_1}$ noktasına bağlı olan altı yüzeyli elemanların sayısını ve $\mathbf{x_{c,i}}$ komşu elemanların geometrik merkezini göstermektedir. Belirtilmelidir ki arayüzde eğer komşu eleman, arayüzün sol tarafında ise Taylor serisi bu noktadaki basınç değerinin hesabında bu elemandan gelen katkıyı içermemektedir. Böylelikle basınç atlama koşulu arayüzde uygulanmış olur. Basınç değerleri ve basınç gradyan değerlerinin hesabı için elde edilen bu aşırı tanımlı (overdetermined) lineer denklem sistemi her iki tarafın transpoz ile çarpıldığı normal denklem yaklaşımı kullanılarak en küçük kareler yöntemi ile çözülmüştür. Bu amaçla LAPACK kütüphanesi tarafından sağlanan tekil değer ayrışımı kullanılarak, elde edilen aşırı tanımlı lineer denklem sistemi çözülmüştür. Yukarıdaki ikinci dereceden Taylor serisi kullanılarak elde edilen aşırı tanımlı lineer denklem sistemi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{c,1}-x_1 & y_{c,1}-y_1 & z_{c,1}-z_1 \\ 1 & x_{c,2}-x_1 & y_{c,2}-y_1 & z_{c,2}-z_1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{c,m}-x_1 & y_{c,m}-y_1 & z_{c,m}-z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{x1} \\ \partial p_{x1}/\partial x \\ \partial p_{x1}/\partial y \\ \partial p_{x1}/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{c,1} \\ p_{c,2} \\ \dots \\ p_{c,m} \end{bmatrix},$$

Benzer şekilde $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$ ve $\mathbf{x_4}$ noktalarındaki u-hız bileşenleri de aynı yaklaşımla çözülmüştür. $\mathbf{x_1}$ noktasındaki *u*-hız bileşenini hesaplamak için ikinci dereceden Taylor serisi aşağıdaki gibi yazılmıştır:

$$u_i = u_1 + \frac{\partial u}{\partial x}\,|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}\,(x_{f,i}-x_1) + \frac{\partial u}{\partial y}\,|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}\,(y_{f,i}-y_1) + \frac{\partial u}{\partial z}\,|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}\,(z_{f,i}-z_1) \quad \text{with} \quad i=1,2,..,l \tag{11}$$

Burada *l*, $\mathbf{x_1}$ noktasına bağlı olan yüzeylerin sayısını ve $\mathbf{x_{f,i}}$ yüzeylerin orta noktasını göstermektedir. Belirtilmelidir ki arayüzde sağ hücreden gelen katkılar için Taylor serisi yazılırken arayüzün sol tarafındaki yüzey hızları hesaba katılmamıştır. Böylelikle arayüzde hız gradyanının süreksizliği dikkate alınmıştır. Hesaplanan *u*-hız bileşenleri, Green-Gauss teoremi kullanılarak her bir kontrol hacmi üçgen yüzeylerinin orta noktasında tanımlı olan hız gradyanlarının hesabında kullanılmıştır:

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} = \frac{1}{V_c}\oint_{\partial\Omega_c} u d\mathbf{A} \tag{12}$$

Bu integrasyon V_c eşhacmi (covolume) üzerinde alınmış ve Şekil 2.2.1b'de gösterilmiştir. Bu üçgen yüzeylerden ($\mathbf{A}_{125}$ gibi) oluşan kontrol eşhacim Ω_c gösterilmiştir. Taşınım hız vektör bileşenleri u_{125}, u_{235}, u_{345} ve u_{415} akım önü (upwind) en küçük kareler yöntemi interpolasyonu (Anderson ve Bonhaus, (1994) ve Erzincanli ve Sahin, (2013)) kullanılarak kontrol hacmi üçgen yüzeylerinin orta noktasında hesaplanmıştır. Örneğin;

$$u_{125} = \beta\left[u_1 + \nabla u_1 \cdot (\mathbf{x}_{125} - \mathbf{x}_{f,1})\right] + (1-\beta)\left[u_2 + \nabla u_2 \cdot (\mathbf{x}_{125} - \mathbf{x}_{f,2})\right] \tag{13}$$

Burada β taşınım yönteminin tipini belirlemek için kullanılan ağırlık faktörünü, ∇u_1 ve ∇u_2, u_1 ve u_2 hız bileşenlerinin tanımlı olduğu yüzeylerin orta noktalarında hız gradyanlarını göstermektedir. Burada kontrol yüzeyi koordinatı $\mathbf{x}_{125}=(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\mathbf{x}_5)/3$ şeklinde hesaplanmıştır. ∇u_1 ve ∇u_2 gradyan terimleri hızların lineer olduğunu varsayılarak en küçük kareler yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Örneğin, Şekil 2.2.1a referans gösterilerek, ∇u_1 terimi için aşağıdaki sistem oluşturulmuştur:

$$\begin{bmatrix} x_{f,2}-x_{f,1} & y_{f,2}-y_{f,1} & z_{f,2}-z_{f,1} \\ x_{f,3}-x_{f,1} & y_{f,3}-y_{f,1} & z_{f,3}-z_{f,1} \\ x_{f,4}-x_{f,1} & y_{f,4}-y_{f,1} & z_{f,4}-z_{f,1} \\ x_{f,5}-x_{f,1} & y_{f,5}-y_{f,1} & z_{f,5}-z_{f,1} \\ x_{f,6}-x_{f,1} & y_{f,6}-y_{f,1} & z_{f,6}-z_{f,1} \\ x_{f,7}-x_{f,1} & y_{f,7}-y_{f,1} & z_{f,7}-z_{f,1} \\ x_{f,8}-x_{f,1} & y_{f,8}-y_{f,1} & z_{f,8}-z_{f,1} \\ x_{f,9}-x_{f,1} & y_{f,9}-y_{f,1} & z_{f,9}-z_{f,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial x \\ \partial u_1/\partial y \\ \partial u_1/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2-u_1 \\ u_3-u_1 \\ u_4-u_1 \\ u_5-u_1 \\ u_6-u_1 \\ u_7-u_1 \\ u_8-u_1 \\ u_9-u_1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Arayüz durumunda arayüzün sol tarafında kalan terimler kullanılmamıştır ve sağ hücrenin katkısı için yukarıdaki aşırı tanımlı lineer denklem aşağıdaki formu alır:

$$\begin{bmatrix} x_{f,2}-x_{f,1} & y_{f,2}-y_{f,1} & z_{f,2}-z_{f,1} \\ x_{f,3}-x_{f,1} & y_{f,3}-y_{f,1} & z_{f,3}-z_{f,1} \\ x_{f,4}-x_{f,1} & y_{f,4}-y_{f,1} & z_{f,4}-z_{f,1} \\ x_{f,5}-x_{f,1} & y_{f,5}-y_{f,1} & z_{f,5}-z_{f,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial u_1/\partial x \\ \partial u_1/\partial y \\ \partial u_1/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2-u_1 \\ u_3-u_1 \\ u_4-u_1 \\ u_5-u_1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Bu aşırı tanımlı lineer denklem sistemi ∇u_1 için normal denklem yaklaşımı kullanılarak en küçük kareler yöntemiyle çözülmüştür. Ağ hareketinden dolayı gelen akıları hesaplamak için ayrık geometrik korunum yasasını (DGCL) (Thomas ve Lombard, 1979) sağlamaya dikkat edilmiştir. DGCL hareket eden bir elemanın hacimsel artışının bu hacmi çevreleyen yüzeyler tarafından taranan hacimlerin toplamına eşit olması gerektiğini belirtir. Böylelikle ağ hareketi akısı aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

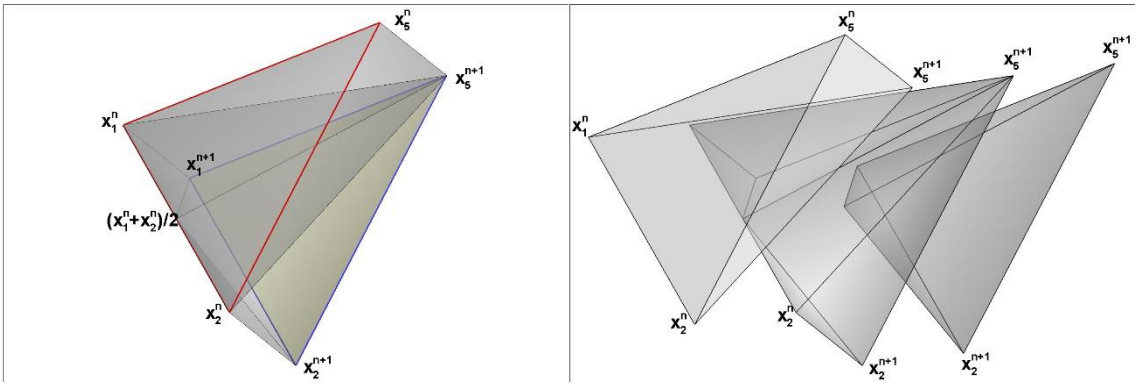
$$\dot{\mathbf{x}}_{125}^{n+1} \cdot \mathbf{A}_{125}^{n+1} = \frac{3}{2\Delta t}\Delta V_{125}^{n+1/2} - \frac{1}{2\Delta t}\Delta V_{125}^{n-1/2} \tag{16}$$

Burada $\Delta V_{125}^{n+1/2}$, alan A_{125} tarafından n ve $n+1$ zaman aralığında taranan hacmi ve $\Delta V_{125}^{n-1/2}$ alan A_{125} tarafından $n-1$ ve n zaman aralığında taranan hacmi göstermektedir. Alan A_{125} tarafından n ve $n+1$ zaman aralığında taranan hacim, Şekil 2.2.2'de gösterildiği gibi aynı hacmin üç tane dörtüçgenyüzlü (tetrahedron) elemana bölünmesiyle hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned} \Delta V_{125}^{n+1/2} &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}_2^{n+1}-\mathbf{x}_5^{n+1})\times(\mathbf{x}_1^{n+1}-\mathbf{x}_5^{n+1})\right]\cdot\left(\frac{\Delta\mathbf{d}_2^{n+1}+\Delta\mathbf{d}_1^{n+1}}{2}\right) \\ &+ \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}_2^{n}-\mathbf{x}_5^{n+1})\times(\mathbf{x}_1^{n}-\mathbf{x}_5^{n+1})\right]\cdot\left(\frac{\Delta\mathbf{d}_2^{n+1}+\Delta\mathbf{d}_1^{n+1}}{2}\right) \\ &+ \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}_2^{n}-\mathbf{x}_5^{n})\times(\mathbf{x}_1^{n}-\mathbf{x}_5^{n})\right]\cdot(\Delta\mathbf{d}_5^{n+1}), \end{aligned}$$

Burada, yer değiştirme vektörü

$$\Delta \mathbf{d}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^{n+1} - \mathbf{x}_i^n.$$



Şekil 2.2.2: Üç tane dörtgenüçyüzlünün oluşturulması.

Bu yaklaşım DGCL'yi ayrık seviyede sağlamaktadır ve mevcut ALE algoritması ağ hareketinden bağımsız olarak düzgün (uniform) akış çözümünü korur. Süreklilik denklemi her bir altı yüzeyli eleman içerisinde Ω_e integre edilmiştir ve her bir elemanın yüzeyinde orta nokta kuralı kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned}
&- \sum_{i=1,2,\ldots,5,10} \left[u^{n+1}\left(A_{1x}^{n+1} + A_{2x}^{n+1} + A_{3x}^{n+1} + A_{4x}^{n+1}\right)\right]_i \\
&- \sum_{i=1,2,\ldots,5,10} \left[v^{n+1}\left(A_{1y}^{n+1} + A_{2y}^{n+1} + A_{3y}^{n+1} + A_{4y}^{n+1}\right)\right]_i \\
&- \sum_{i=1,2,\ldots,5,10} \left[w^{n+1}\left(A_{1z}^{n+1} + A_{2z}^{n+1} + A_{3z}^{n+1} + A_{4z}^{n+1}\right)\right]_i = 0.
\end{aligned}$$

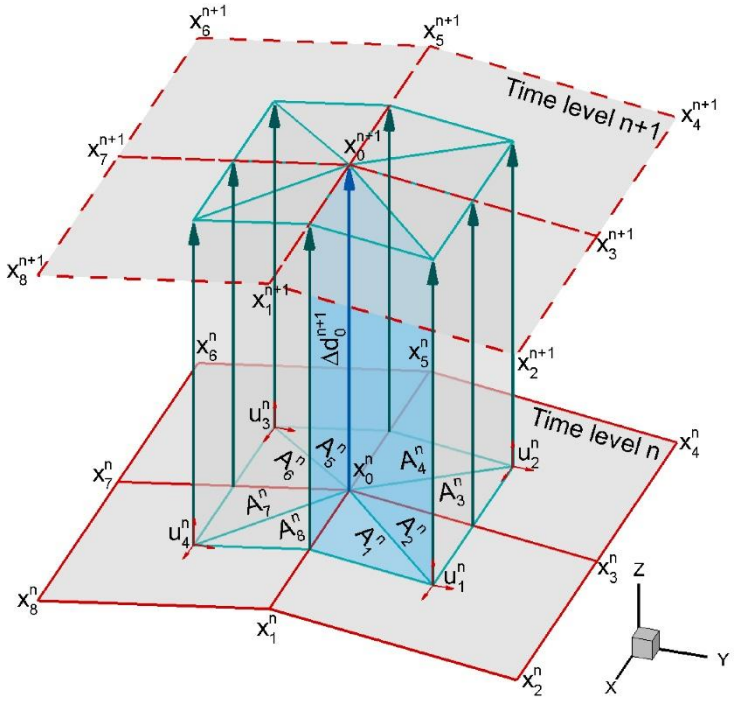
Burada $\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$ altı yüzeyli elemanın her bir yüzeyinin orta noktadan dört üçgen yüzeye bölünmesinden oluşan alan vectörlerini ve u_i, v_i ve w_i her bir altı yüzeyli eleman yüzeyinin orta noktasında tanımlanan hız vektörlerini göstermektedir. Bu yaklaşım planar yüzeyli olmayan hexa elemanlarin kütle korunumu için zorunludur. Ayrık süreklilik denkleminin toplamı damlacığın/kabarcığın kendisininin ve aynı zamanda tüm hesaplama hacminin global kütle korunumunu sağlar.

2.2.1 Akışkan-Akışkan Arayüzünde Sınır Koşullarının Kütle Korunumunu Sağlayacak Şekilde Uygulanması

ALE yöntemlerinde ağ, iki akışkan arasındaki arayüzü takip etmek zorundadır. Bu yüzden kinematik sınır koşulu ($\boldsymbol{u} = \dot{\boldsymbol{d}}$) kullanılarak, yer değiştirme değişkenleri ile hız değişkenleri birbirleriyle ilişkilendirilmiştir. Lineer elastisite denklemleri, teğetsel yönde aşağıdaki gibi ayrık formda yazılarak kullanılmıştır.

$$t_{1,x}\sum_m k_{x,m}\Delta d_{m,x}^{n+1} + t_{1,y}\sum_m k_{y,m}\Delta d_{m,y}^{n+1} + t_{1,z}\sum_m k_{z,m}\Delta d_{m,z}^{n+1} = 0,$$
$$t_{2,x}\sum_m k_{x,m}\Delta d_{m,x}^{n+1} + t_{2,y}\sum_m k_{y,m}\Delta d_{m,y}^{n+1} + t_{2,z}\sum_m k_{z,m}\Delta d_{m,z}^{n+1} = 0,$$

Burada m, $\mathbf{x_0}$ noktası için komşu elemanların noktalarını ve $\mathbf{k}_{x,m}$, $\mathbf{k}_{y,m}$ ve $\mathbf{k}_{z,m}$ sırasıyla *x*-, *y*- ve *z*- yönlerinde, lineer elastisite denklemlerinin Galerkin sonlu elemanlar kullanılarak ayrıklaştırılmasından elde edilen global katılık matrisinin katsayılarını göstermektedir. Kütle korunumunun farklı fazlar için ayrık seviyede makine hassasiyetinde sağlanması için akışkan-akışkan arayüzünde kinematik sınır şartlarının, ayrık geometrik korunum yasası (DGCL) (Thomas ve Lombard, 1979) ile uyumlu olması gerekir. Bu amaçla normal yönde kullanılan kinematik sınır koşulu, akışkan-yapı etkileşiminde (Eken ve Sahin, 2016) yapıldığı gibi ayrık geometrik korunum yasasına (DGCL) dayandırılmıştır. İlgilenilen $\mathbf{x_0}$ noktasında uyumlu kinematik sınır koşulu (compatible kinematic boundary condition) yazılabilmesi için bu noktanın bağlı olduğu kenarların kenar merkezlerinden yüzey merkezlerine doğru dört tane dörtgen kontrol alanı oluşturulmuş ve bu dörtgen alanlar da bir köşegen ile bölünerek sekiz tane üçgen kontrol alanına ayrılmıştır. Bu alanlar tarafından *n* ve *n+1* zaman aralığında taranan hacim Şekil 2.2.3'de gösterilmiştir.



Şekil 2.2.3: Arayüz sınır koşulu için kullanılan notasyon.

Normal yöndeki uyumlu kinematik sınır koşulu (compatible kinematic boundary condition) $\mathbf{x_o}$ noktası için aşağıdaki gibi yazılmıştır:

$$\begin{aligned} & \Delta t \left[\mathbf{u}_1^{n+1} \cdot \left(\mathbf{A}_1^{n+1} + \mathbf{A}_2^{n+1}\right) + \mathbf{u}_2^{n+1} \cdot \left(\mathbf{A}_3^{n+1} + \mathbf{A}_4^{n+1}\right)\right] \\ + \quad & \Delta t \left[\mathbf{u}_3^{n+1} \cdot \left(\mathbf{A}_5^{n+1} + \mathbf{A}_6^{n+1}\right) + \mathbf{u}_4^{n+1} \cdot \left(\mathbf{A}_7^{n+1} + \mathbf{A}_8^{n+1}\right)\right] \\ = \quad & \sum_{i=1}^{8} \frac{3}{2} \Delta V_i^{n+1/2} - \sum_{i=1}^{8} \frac{1}{2} \Delta V_i^{n-1/2}, \end{aligned}$$

Burada $\mathbf{u}^{n+1}$ *n+1* zaman adımındaki her bir yüzeyin orta noktasındaki akışkan hız vektörünü, $\Delta\mathbf{V}_i^{n+1/2}$ (i=1,2,...,8), A1,...,A8 alanları tarafından *n* – *n+1* zaman aralığında taranan hacmi göstermektedir. Yukarıdaki denklemde eşitliğin sağ tarafındaki terimlerin toplamı, ayrık formda kabarcığın hacim değişimini, sol taraftaki terimlerin toplamı ise ayrık formda kabarcık için süreklilik (kütle korunumu) denklemini vermektedir. Mevcut kenar merkezli sonlu hacimler metodu kütle korunumunu ayrık seviyede makine hassasiyetinde sağladığı için sol taraftaki terimlerin toplamı, yani kabarcık kütle/hacim değişimi, sıfır olmak zorundadır.

Taranan hacim *n+1* zaman adımında aşağıdaki gibi yazılmıştır:

$$\begin{aligned}\Delta V_1^{n+1} &= \frac{1}{3}\left[\mathbf{A}_1^n \cdot \Delta \mathbf{d}_0^{n+1} + \mathbf{A}_1^{n+1/2} \cdot \frac{\Delta \mathbf{d}_0^{n+1} + \Delta \mathbf{d}_1^{n+1}}{2}\right] \\ &+ \frac{1}{3}\left[\mathbf{A}_1^{n+1} \cdot \frac{\Delta \mathbf{d}_0^{n+1} + \Delta \mathbf{d}_1^{n+1} + \Delta \mathbf{d}_2^{n+1} + \Delta \mathbf{d}_3^{n+1}}{4}\right],\end{aligned}$$

Bu denklemde yer değiştirme vektörü $\Delta\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n$ olarak yazılmış ve üçgen alanları ise aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1^n &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathbf{x}_0^n + \mathbf{x}_1^n}{2} - \mathbf{x}_0^n\right) \times \left(\frac{\mathbf{x}_0^n + \mathbf{x}_1^n + \mathbf{x}_2^n + \mathbf{x}_3^n}{4} - \mathbf{x}_0^n\right)\right] \\ \mathbf{A}_1^{n+1/2} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathbf{x}_0^n + \mathbf{x}_1^n}{2} - \mathbf{x}_0^{n+1}\right) \times \left(\frac{\mathbf{x}_0^n + \mathbf{x}_1^n + \mathbf{x}_2^n + \mathbf{x}_3^n}{4} - \mathbf{x}_0^{n+1}\right)\right] \\ \mathbf{A}_1^{n+1} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\mathbf{x}_0^{n+1} + \mathbf{x}_1^{n+1}}{2} - \mathbf{x}_0^{n+1}\right) \times \left(\frac{\mathbf{x}_0^{n+1} + \mathbf{x}_1^{n+1} + \mathbf{x}_2^{n+1} + \mathbf{x}_3^{n+1}}{4} - \mathbf{x}_0^{n+1}\right)\right].\end{aligned}$$

2.2.2 Ağ Deformasyon Algoritması

ALE algoritması ağ hareketini ve deformasyonunu sağlamak için güçlü bir tekniğe ihtiyaç duyar. Literatürde, sınırları öteleme, dönme ve şekil değiştirmeye maruz kalan hesaplama bölgelerinin içerisindeki noktaların yer değişimlerini hesaplamak için yay analojisi (Batina, 1990), elastik ortam analojisi (Johnson ve Tezduyar, 1994), kenar değişimi (edge swapping) algoritması (Dai ve Schmidt, 2005), radyal bazlı ağ deformasyon algoritması (de Boer v.d., 2014) ve yeniden ağ oluşturma (Johnson ve Tezduyar, 1999) algoritması önerilmiştir. Bu çalışmada ağ deformasyonu, akışkan hesap alanının lineer elastik malzeme olarak modellenmesi ile sağlanmıştır. Böylelikle, ağ deformasyonu için lineer elastisite denklemleri kullanılmıştır. Kartezyen koordinatlarda bu denklemler aşağıdaki gibi yazılmıştır (Sahin ve Mohseni, 2009):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial d_1}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial d_2}{\partial y} + \frac{\partial d_3}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial d_1}{\partial y} + \frac{\partial d_2}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial d_1}{\partial z} + \frac{\partial d_3}{\partial x}\right)\right] = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial d_1}{\partial y} + \frac{\partial d_2}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial d_2}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial d_1}{\partial x} + \frac{\partial d_3}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial d_2}{\partial z} + \frac{\partial d_3}{\partial y}\right)\right] = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial d_1}{\partial z} + \frac{\partial d_3}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial d_2}{\partial z} + \frac{\partial d_3}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial d_3}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial d_1}{\partial x} + \frac{\partial d_2}{\partial y}\right)\right] = 0.\end{aligned}$$

Burada (d_1,d_2,d_3) yer değiştirme vektörünü ve λ ve μ Lamé'in ilk ve ikinci parametrelerini ifade etmektedir. Bu parametreler Young modülü ve Poisson oranı cinsinden aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Mevcut yaklaşım ufak deformasyonlar için kullanılabililr. Ancak arayüze yakın olan ufak elemanlar (ağ) deformasyonun yüksek olduğu durumlarda birbirine dolanabilir. Bu problemin üstesinden gelmek için Young modülü aşağıdaki şekilde modifiye edilmmiştir:

$$E = E + E/r$$

Böylelikle arayüze yakın olan elemanların Elastisite modulü arttırılmış ve birbirlerine dolanmalarının (element entanglement) önüne geçilmiştir. Burada *r* arayüzden olan mesafeyi göstermektedir.

2.2.3 Ayrık Atlama Koşulu

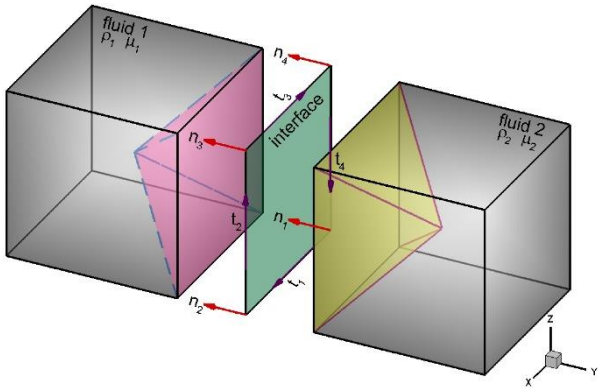
Çok fazlı akışlarda yoğunluk, viskozite ve basınç için arayüzdeki süreksizlikler dikkate alınmalıdır. Basınç atlaması yüzey gerilmesi ve viskozite ile aşağıdaki gibi ilişkilidir (Idelsohn v.d., 2010)

$$[[p]] = 2\,[[\mu]]\,\frac{\partial u_n}{\partial n} - \sigma\kappa$$

Burada [[●]] arayüzeyin her iki tarafında, ilgili değişkenin atlamasını ve u_n normal yöndeki hızı göstermektedir. Böylece üstteki denklem aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$p^+ - p^- = 2\left(\mu^+ - \mu^-\right)\frac{\partial u_n}{\partial n} - \sigma\kappa$$

Yukarıdaki denklemden görüleceği üzere basınç atlaması sadece yüzey gerilmesinin sonucu değildir (normal yöndeki hız gradyanını da içerir). Sıçrama koşulunu sağlamak için Şekil 2.2.4'de gösterildiği gibi ayrıklaştırma yapılmıştır.



Şekil 2.2.4: Arayüzde kontrol hacmine etkiyen kuvvetler.

Sağ elemandan gelen katkılar:

$$\mathbf{A}^{+}_{1234} \cdot \left[\mu^{+}\left[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\top}\right] - p^{+}\mathbf{I}\right],$$

Sol elemandan gelen katkılar:

$$\mathbf{A}^{-}_{1234} \cdot \left[\mu^{-}\left[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\top}\right] + p^{-}\mathbf{I}\right],$$

Bu katkıların toplamı, arayüzdeki yüzey gerilme kuvvetinin katkısına eşit olmalıdır.

$$\mathbf{A}^{+}_{1234} \cdot \left[\mu^{+}\left[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\top}\right] - p^{+}\mathbf{I}\right] - \mathbf{A}^{-}_{1234} \cdot \left[\mu^{-}\left[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\top}\right] + p^{-}\mathbf{I}\right] = \sum_{i=1}^{4} \sigma\mathbf{t}_i \times \left(\frac{\mathbf{n}_i + \mathbf{n}_{i+1}}{2}\right)\Delta l_i.$$

Böylece, arayüzeyde bulunan kontrol hacimleri için grekli olan viskoz ve basınç katkıları bu denklem sayesinde hesaplanmıştır.

2.2.4 Arayüzde Yüzey Birim Normal Vektörünün Hesaplanması

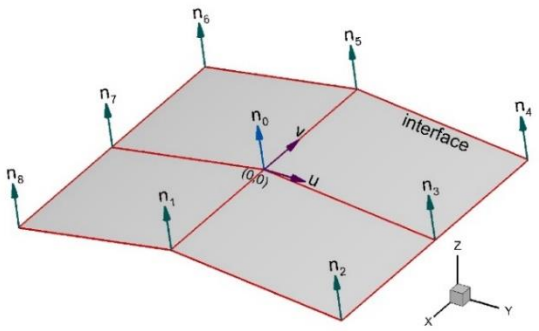
Arayüzde yüzey gerilmesinin doğru bir şekilde hesaplanması çok fazlı akışlar için önemli bir problemdir. Bu çalışmada yüzey gerilmesinden gelen katkıların hesabında Tryggvason v.d. (2011) tarafından sunulan yaklaşım kullanılmıştır. Görülmüştür ki arayüzeydeki noktalar üzerinde yüzey normalinin hesabı gerekmektedir. Bunun için iki farklı yöntem kullanılmıştır.

2.2.4.1 Yöntem I

Bu yöntemde Tuković ve Jasak (2012) tarafından sunulan yerel koordinat sisteminde en küçük kareler (least squares) dördüncü dereceden (biquadratic) yüzey uydurması yapılmıştır. Dördüncü dereceden yüzey aşağıdaki gibi yazılmıştır:

$$r(u,v) = a_0 + a_1 u + a_2 v + a_3 u^2 + a_4 uv + a_5 v^2,$$

Burada u ve v, yerel birim teğetsel yönlerdir. Yerel koordinat sisteminin (0,0) noktası (u,v), $\mathbf{n_0}$ birim normal vektörünün hesaplanacağı noktadır ve Şekil 2.2.5'de gösterilmiştir.



Şekil 2.2.5: Yerel koordinat sisteminde yüzey noktasındaki birim normal vektörün hesaplanması.

Dördüncü dereceden yüzey, birim normal vektörün hesaplanmak istendiği noktayı paylaşan tüm arayüz yüzeylerindeki noktalardan geçmektedir. En küçük karaler interpolasyonu, komşu noktalardan gelen katkıların hesabı için kullanılmıştır. Böylece, yerel teğetsel koordinatlarda normal vektörü aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{n} = \left.\frac{\partial r}{\partial u}\right|_{(0,0)} \mathbf{e_u} + \left.\frac{\partial r}{\partial v}\right|_{(0,0)} \mathbf{e_v} + (-1)\,\mathbf{e_n}.$$

2.2.4.2 Yöntem II

Bu yöntemde Max (1999) tarafından sunulan MWSELR (mean weighted by sine and edge length reciprocals) yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntem bir noktayı çevreleyen yüzeylerin (facet) boyutlarındaki farklılıkları, ufak yüzeylere daha büyük ve geniş yüzeylere daha küçük ağırlıklar vererek hesaba katmaktadır. Böylece noktayı çevreleyen yüzeyler (facet) uzunluk

bakımından birbirinden oldukça farklı ise bu farklılıklar nokta üzerindeki normal hesabında dikkate alınmaktadır. Nokta üzerindeki normal vektörün hesabı MWSELR yöntemi ile aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$\boldsymbol{N}_{\mathrm{MWSELR}} \parallel \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{N}_i \sin \alpha_i}{|\boldsymbol{E}_i|\,|\boldsymbol{E}_{i+1}|}$$

Burada n, noktaya bağlı yüzey sayısını, $\mathbf{N}_i$ yerel yüzey birim vektörünü, α_i yerel yüzeyin noktaya bağlanan iki ardışık kenarı arasındaki açıyı ve $\mathbf{E}_i$ ve $\mathbf{E}_{i+1}$ bu kenarların kenar vektörlerini göstermektedir. Nokta etrafındaki dört kenarlı yüzeyler üçgen yüzeylere bölünerek düzlemsel yüzeyler elde edilmiş ve yerel yüzey birim vektörleri bu üçgen yüzeylerin yüzey vektörü olarak hesaplanmıştır.

2.2.5 Yarı Kapalı Formda Yüzey Gerilmesi

Arayüzde kılcal dalgaların (capillary waves) yayılmasından kaynaklı bir zaman adımı kısıtlaması mevcuttur ve bu zaman adımı doğrudan nümerik yöntemin stabilitesi ile ilişkilidir. Stabilite açısından nümerik yöntem, yüzey gerilme kuvvetinden kaynaklı bu dalgaların yayılmasını yakalayabilecek (temporally resolved) bir zaman adımına ihtiyaç duymaktadır (Denner v.d., 2015). Lamb (1932) tarafından kılcal dalgaların faz hızı, c_σ

$$c_\sigma = \frac{\omega_\sigma}{k} = \sqrt{\frac{\sigma k}{\rho_1 + \rho_2}}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada ω_σ açısal frekans, k dalga numarası, σ yüzey gerilmesi katsayısı ve ρ_1 ve ρ_2 akışkanların yoğunluklarını göstermektedir. Brackbill v.d. (1992) kılcal dalgalardan kaynaklı zaman adımı kısıtlamasını aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$\Delta t_\sigma^{BKZ} \leq \frac{\Delta x}{2c_\sigma} = \sqrt{\frac{(\rho_1 + \rho_2)\,\Delta x^3}{4\pi\sigma}}$$

Burada Δx ağ boşluğunu, Δt_σ kılcal dalgalardan kaynaklı zaman adımını göstermektedir. Bu zaman adımı kısatlamasını iyileştirmek için yarı kapalı (semi-implicit) formda yüzey gerilme kuvveti aşağıdaki gibi ayrıklaştırılmıştır:

$$\sigma \oint_{\partial\partial\Omega_d} \mathbf{t} \times \mathbf{n} dl = \sum_{i=1}^{4} \sigma \mathbf{t}_i^{n+1} \times \left(\frac{\mathbf{n}_i^n + \mathbf{n}_{i+1}^n}{2} \right) \Delta l_i^{n+1}$$

Burada verilen teget vektör aşağıda gibi yer degiştirme vektörü cinsinden yazılabilir.

$$\mathbf{t}_i^{n+1} \Delta l_i^{n+1} = \mathbf{x}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_{i+1}^n + \Delta \mathbf{d}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{x}_i^n - \Delta \mathbf{d}_i^{n+1}$$

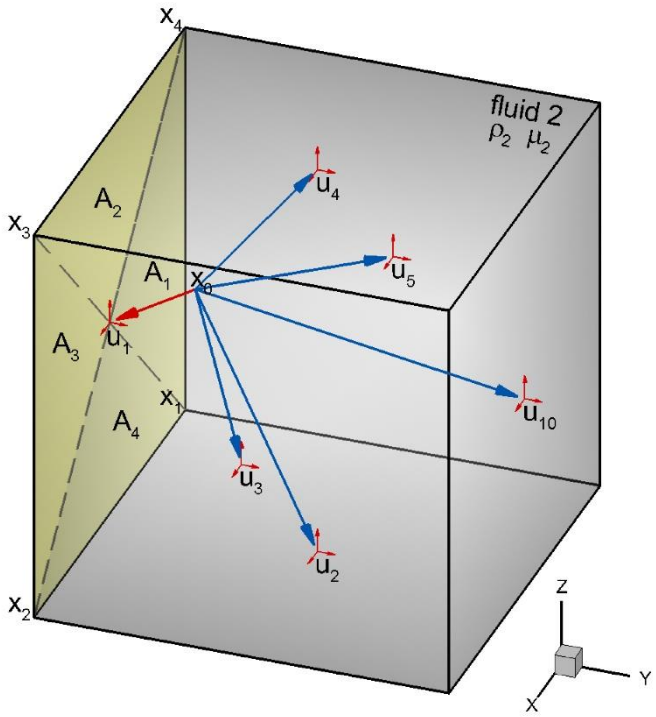
Böylece yukarıdaki yüzey gerilme kuvvetleri

$$\sum_{i=1}^{4} \sigma \left(\mathbf{x}_{i+1}^n - \mathbf{x}_i^n \right) \times \left(\frac{\mathbf{n}_i^n + \mathbf{n}_{i+1}^n}{2} \right) + \sum_{i=1}^{4} \sigma \left(\Delta \mathbf{d}_{i+1}^{n+1} - \Delta \mathbf{d}_i^{n+1} \right) \times \left(\frac{\mathbf{n}_i^n + \mathbf{n}_{i+1}^n}{2} \right)$$

şeklinde yazılmıştır.

2.2.6 Ağdan Ağa İnterpolasyon

Mevcut algoritma ALE metoduna dayanmaktadır. ALE methodu Lagrangyan metotlara göre daha fazla yeni ağ üretmeden çözüme izin vermekte ve Euleryen metotlara göre arayüzeylerde (akışkan-akışkan veya akışkan-katı arayüzeyleri) daha yüksek ağ çözünürlüğü sağlamaktadır. Yine de yüksek deformasyonlarda ALE yöntemleri yeniden ağ oluşturulmasına ihtiyaç duyabilmektedir. Bununla birlikte eski ağ yapısındaki çözümün yeni ağ yapısına aktarılması gerekmektedir. Bu yüzden eski ağ yapısından yeni ağ yapısına çözümün aktarılmasını sağlayan bir interpolasyon algoritması geliştirilmiştir.



Şekil 2.2.6: Ağdan ağa interpolasyon.

Geliştirilen yöntemde ilk olarak yeni ağ yapısındaki bir noktanın (örneğin, Şekil 2.2.6'da gösterilen $\mathbf{x_0}$ noktası) eski ağ yapısında hangi eleman içerisinde bulunduğu belirlenmektedir. Bunun için de ilgili noktadan, elemanların yüzey merkezlerine doğru bir mesafe vektörü oluşturulmaktadır (bkz: Şekil 2.2.6'da gösterilen kırmızı vektör). Daha sonra yüzey, dört adet üçgen yüzeye bölünmekte ve bu üçgen yüzeylerin dışarı yönlü alan vektörleri oluşturulmaktadır. Üçgen yüzeylerin alan vektörleri ile mesafe vektörlerinin tüm iç çarpımlarının (dot product) pozitif olması, o noktanın mevcut eleman içerisinde olduğunu gösterir. İlgili eleman belirlendikten sonra eski ağ yapısındaki hız değerlerinin yeni ağ yapısındaki $\mathbf{x_0}$ noktasına aktarılması için, $\mathbf{x_0}$ noktasından eski ağ yapısındaki elemanın yüzeylerinin merkezine aşağıdaki ikinci dereceden Taylor serisi yazılmaktadır:

$$u_i = u_0 + \frac{\partial u}{\partial x}\,|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}\,(x_{f,i} - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}\,|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}\,(y_{f,i} - y_0) + \frac{\partial u}{\partial z}\,|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}\,(z_{f,i} - z_0), \quad \text{with} \quad i = 1, ..., 5, 10$$

Burada i, eski ağ yapısındaki elemanın yüzey numarasını ve $\mathbf{x_{f,i}}$ ilgili yüzeyin merkezini göstermektedir. Hız ve hız gradyan değerlerinin hesabı için elde edilen bu aşırı tanımlı (overdetermined) lineer denklem sistemi her iki tarafın transpoz ile çarpıldığı normal denklem yaklaşımı kullanılarak en küçük kareler yöntemi ile çözülmüştür. Bu amaçla LAPACK kütüphanesi tarafından sağlanan tekil değer ayrışımı kullanılarak, elde edilen aşırı tanımlı

lineer denklem sistemi çözülmüştür. Yukarıdaki ikinci dereceden Taylor serisi kullanılarak elde edilen aşırı tanımlı lineer denklem sistemi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{f,1}-x_0 & y_{f,1}-y_0 & z_{f,1}-z_0 \\ 1 & x_{f,2}-x_0 & y_{f,2}-y_0 & z_{f,2}-z_0 \\ 1 & x_{f,3}-x_0 & y_{f,3}-y_0 & z_{f,3}-z_0 \\ 1 & x_{f,4}-x_0 & y_{f,4}-y_0 & z_{f,4}-z_0 \\ 1 & x_{f,5}-x_0 & y_{f,5}-y_0 & z_{f,5}-z_0 \\ 1 & x_{f,10}-x_0 & y_{f,10}-y_0 & z_{f,10}-z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x0} \\ \partial u_{x0}/\partial x \\ \partial u_{x0}/\partial y \\ \partial u_{x0}/\partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{f,1} \\ u_{f,2} \\ u_{f,3} \\ u_{f,4} \\ u_{f,5} \\ u_{f,10} \end{bmatrix}$$

Böylelikle $\mathbf{x_0}$ noktasındaki hız vektörü bileşenleri, u_{x0} hesaplanmaktadır.

2.2.7 Tam Bağlaşık Çözüm Yöntemi

2.2.7.1 Yöntem I

Akışkan denklemleri ve ağ deformasyon denklemi Kısım 2.2.1'de verilen arayüz kinematik denklemleri vasıtasıyla birbirlerine bağlanmıştır. Elde edilen lineer olmayan cebirsel denklemler arayüzdeki Γ hız ve yer değiştirme bilinmeyenlerini içerecek şekilde aşağıdaki blok yapısında verilmiştir (Guventurk ve Sahin, 2017):

$$\left[\begin{array}{cc|c|cc} A_{uu} & A_{u\Gamma} & A_{up} & A_{ud} & A_{ud_\Gamma} \\ A_{\Gamma u} & A_{\Gamma\Gamma} & A_{\Gamma p} & A_{\Gamma d} & A_{\Gamma d_\Gamma} \\ \hline A_{pu} & A_{p\Gamma} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & A_{dd} & A_{dd_\Gamma} \\ 0 & A_{d_\Gamma\Gamma} & 0 & A_{dd_\Gamma} & A_{dd_\Gamma} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}^{n+1} \\ \mathbf{u}_\Gamma^{n+1} \\ \hline p^{n+1} \\ \hline \Delta\mathbf{d}^{n+1} \\ \Delta\mathbf{d}_\Gamma^{n+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \hline 0 \\ \hline b_4 \\ b_5 \end{array}\right],$$

Burada ilk blok satırları Kısım 2.2'de verilen akışkan momentum denklemlerine karşılık gelmektedir. İlk iki sütun akışkan taşınım – iletim kısmı, üçüncü sütun basınç gradyanı ve son iki sütun da ALE ağ hareketidir. İkinci blok satırları akışkan kütle korunumudur. Son bloğun ilk satırı Kısım 2.2.2'de verilen ağ deformasyon denklemi ve ikinci satırı ise Kısım 2.2.1'de verilen kinematik sınır koşuludur. Burada momentum denklemlerinde yüzey gerilme kuvveti yarı kapalı (semi-implicit) ve yerçekimi kuvveti açık formda (explicit) hesaplanmıştır. Bilinmeyen değişkenler birbirlerine diagonal olmayan bloklar ile bağlanmıştır ve yukarıda verilen lineer sistem kapalı formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} A_{uu} & A_{up} & A_{ud} \\ A_{pu} & 0 & 0 \\ A_{du} & 0 & A_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ p^{n+1} \\ \Delta\mathbf{d}^{\mathbf{n+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix}.$$

Bununla birlikte diverjanssız koşuldan kaynaklanan sıfır diagonal blog sebebiyle güçlü bir önkoşullandırıcı elde etmek zordur. Bu çalışmada, orjinal sistemdeki sıfır blok yerine ölçeklendirilmiş ayrık Laplacian elde edilmesini sağlayan üst üçgen sağ önkoşullandırıcı matrisi kullanılmıştır (Guventurk ve Sahin, 2017). Böylece, modifiye edilmiş sistem:

$$\begin{bmatrix} A_{uu} & A_{up} & A_{ud} \\ A_{pu} & 0 & 0 \\ A_{du} & 0 & A_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{up} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{n+1} \\ p^{n+1} \\ \mathbf{r}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{uu} & A_{uu}A_{up}+A_{up} & \Delta t A_{ud} \\ A_{pu} & A_{pu}A_{up} & 0 \\ A_{du} & A_{du}A_{up} & \Delta t A_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{n+1} \\ p^{n+1} \\ \mathbf{r}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix}.$$

Burada $\mathbf{q}^{n+1}=\mathbf{u}^{n+1}-A_{up}p^{n+1}$ ve $\mathbf{r}^{n+1}=\Delta\mathbf{q}^{n+1}/\Delta t$ olarak hesaplanmıştır ve ağ hareketi için noktaların hız vekötürünü ifade etmektedir (akışkan hızı ile aynı dereceden). Bu ifadede Δt terimi katı bölgede yer değiştirme vektörü yerine akışkan bölgesindeki hız vektörüne benzer bir değişken tanımlamak için kullanılmıştır. Yeni sistemde, sıfır bloğu ölçeklendirilmiş Laplasyan'a denk gelen $A_{pu}A_{up}$ ile değiştirilmiştir. Fakat, matris – matris çarpımından dolayı, sıfır olmayan girdilerin sayısında önemli derecede artış olmuştur. Hesaplamalar göstermiştir ki, momentum denklemlerindeki basınç gradyanlarının hesabında en büyük katkı, hız bileşenlerinin ayrıklaştırıldığı yüzeyi paylaşan sağ ve sol elemanlardan gelmektedir. Bu yüzden, hesaplamalarda yalnızca bu iki elemandan gelen katkılar hesaba katılmış ve üst üçgen sağ önkoşullandırıcısındaki A_{up} blok matrisi, hesaplama bakımından daha az pahalı olan ve satır başına en fazla üç tane sıfır olmayan girdi sağlayan $\hat{A}_{up}$ matrisi ile değiştirilmiştir.

$$\begin{bmatrix} A_{uu} & A_{up} & A_{ud} \\ A_{pu} & 0 & 0 \\ A_{du} & 0 & A_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \hat{A}_{up} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{n+1} \\ p^{n+1} \\ \mathbf{r}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{uu} & A_{uu}\hat{A}_{up}+A_{up} & \Delta t A_{ud} \\ A_{pu} & A_{pu}\hat{A}_{up} & 0 \\ A_{du} & A_{du}\hat{A}_{up} & \Delta t A_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{n+1} \\ p^{n+1} \\ \mathbf{r}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ d_3 \end{bmatrix}.$$

Bu yaklaşım, iteratif çözücünün yakınsama oranını önemli ölçüde değiştirmemesine rağmen, hafıza ihtiyacında ve hesaplama süresinde önemli bir düşüşe olanak sağlamıştır. Cebirsel denklem, FGMRES(m) Krylov altuzay algoritması (Saad, 1993) ile birleştirilmiş kısıtlı katkı Schwarz önkoşullandırıcısı kullanılarak tam bağlaşık şekilde çözülmüştür. Bu önkoşullandırıcı için her bir bölümlendirilmiş alt hesap alanında, tamamlanmamış blok faktorizasyonu (block incomplete factorization), ILU(k) kullanılmıştır. Ayrıca lineer olmayan cebirsel denklemlerden dolayı her bir zaman adımında pek çok alt iterasyon yapılmıştır. Bahsedilen önkoşullandırılmış Krylov altuzay algoritması, matris–matris çarpımı ve kısıtlı katkı Schwarz önkoşullandırıcısı Argonne Ulusal Laboratuvarları'nda geliştirilen PETSc (Balay v.d., 2004) yazılım paketi kullanılarak uygulanmıştır. Hesap alanı METIS kütüphanesi (Karypis ve Kumar, 1998) kullanılarak alt hesap alanlarına bölünmüştür.

2.2.7.2 Yöntem II

Akışkan denklemleri ve ağ deformasyon denklemi Kısım 2.2.1'de verilen arayüz kinematik denklemleri vasıtasıyla birbirlerine bağlanmıştır. Elde edilen lineer olmayan cebirsel denklemler arayüzdeki Γ hız ve yer değiştirme bilinmeyenlerini içerecek şekilde aşağıdaki blok yapısında verilmiştir:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} A_{uu} & A_{uu_\Gamma} & A_{ud} & A_{ud_\Gamma} & A_{up} \\ A_{u_\Gamma u} & A_{u_\Gamma u_\Gamma} & A_{u_\Gamma d} & A_{u_\Gamma d_\Gamma} & A_{u_\Gamma p} \\ \hline 0 & 0 & A_{dd} & A_{dd_\Gamma} & 0 \\ 0 & A_{d_\Gamma u_\Gamma} & A_{dd_\Gamma} & A_{dd_\Gamma} & 0 \\ \hline A_{pu} & A_{pu_\Gamma} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}^{n+1} \\ \mathbf{u}_\Gamma^{n+1} \\ \hline \Delta\mathbf{d}^{n+1} \\ \Delta\mathbf{d}_\Gamma^{n+1} \\ \hline p^{n+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \hline b_3 \\ b_4 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

Burada ilk blok satırları Kısım 2.2'de verilen akışkan momentum denklemlerine karşılık gelmektedir. İlk iki sütun akışkan taşınım, sonraki iki sütun ALE ağ hareketi ve son sütun da basınç gradyanıdır. İkinci blok ilk satırı Kısım 2.2.2'de verilen ağ deformasyon denklemi ve ikinci satırı ise Kısım 2.2.1'de verilen kinematik sınır koşuludur. Son blok satırları ise akışkan kütle korunumudur. Yukarıda verilen lineer sistem kapalı formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left[\begin{array}{ccc} A_{uu} & A_{ud} & A_{up} \\ A_{du} & A_{dd} & 0 \\ A_{pu} & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}^{n+1} \\ \Delta\mathbf{d}^{\mathbf{n+1}} \\ p^{n+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{array}\right]$$

Bu çalışmada, zaman adımının yeterince küçük olduğu varsayılarak (A_{uu}=I) (Chorin, 1968) tarafından önerilen projesiyon metoduna benzer LDU faktorizasyonu kullanılarak aşağıda verilen blok faktorizasyon (Cetin ve Sahin, 2019) uygulanmıştır:

$$\left[\begin{array}{ccc} I & A_{ud} & A_{up} \\ A_{du} & A_{dd} & 0 \\ A_{pu} & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ A_{du} & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & S_{dd} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} I & A_{ud} & A_{up} \\ 0 & I & S_{dp} \\ A_{pu} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Yukarıdaki sistemde, eşitliğin sağ tarafındaki son matrise ise aşağıdaki faktorizasyon uygulanmıştır:

$$\left[\begin{array}{ccc} I & A_{ud} & A_{up} \\ 0 & I & S_{dp} \\ A_{pu} & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ A_{pu} & -A_{pu}A_{ud} & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & S_{pp} \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc} I & A_{ud} & A_{up} \\ 0 & I & S_{dp} \\ 0 & 0 & I \end{array}\right]$$

Bu faktorizasyonda oluşan yeni bloklar aşağıda tanımlanmıştır.

$$S_{dd}=A_{dd}-A_{du}A_{ud}$$
$$S_{dp}=S_{dd}^{-1}(-A_{du}A_{up})$$
$$S_{pp}=-A_{pu}A_{up}+A_{pu}A_{ud}S_{dp}$$

Bu çalışmada S_{dp} terimi yaklaşık olarak $S_{dp} = diag(S_{dd})^{-1}\left(-A_{du}A_{up}\right)$ olarak hesaplanmıştır ve $diag(S_{dd})$, S_{dd} matrisinin diagonal terimlerini göstermektedir. Burada ön koşulandırıcı olarak yukarıdaki faktorizasyonun tersi alınmıştır. Burada oluşan S_{pp}^{-1} blok teriminin hesaplanmasında HYPRE BoomerAMG kütüphanesi kullanılmıştır. S_{dd}^{-1} ise her bir alt hesaplama alanında tamamlanmamış blok faktorizasyonu (block incomplete factorization), ILU(k) kullanıldığı kısıtlı katkı Schwarz önkoşullandırıcısı yardımı ile hesaplanmıştır. Mevcut blok formda önkoşullandırılmış cebirsel denklemler FGMRES(m) Krylov altuzay algoritması kullanılarak çözülmüştür. Yine bu amaçla Argonne Ulusal Laboratuvarları'nda geliştirilen PETSc (Balay v.d., 2004) yazılım kütüphanesinden yararlanılmış ve HYPRE BoomerAMG kütüphanesine PETSc arayüzü kullanılarak ulaşılmıştır (Cetin ve Sahin, 2019).

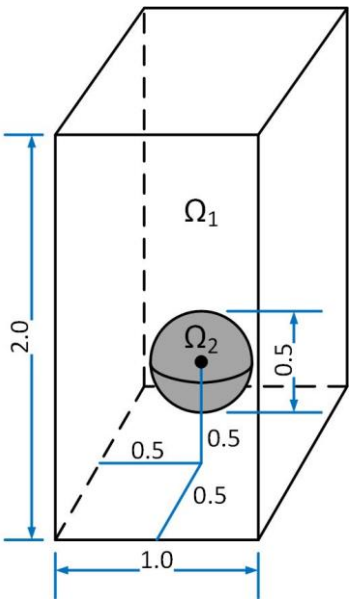
3 DOĞRULAMA TESTLERİ

3.1 Statik Damla Problemi

Yüzey gerilme kuvvetinin hassas bir şekilde hesaplanamaması kabarcık etrafında fiziksel olmayan hızlara, diğer bir deyişle parazitik akımlara sebep olmaktadır. Bu yüzden yüzey gerilme kuvveti hesabı için kullanılan yöntemin hassasiyetini test etmek amacıyla Safi ve Turek (2015) tarafından önerilen statik damla probleminin simülasyonu üç boyutlu olarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar aynı zamanda yüzey gerilme kuvvetinden kaynaklı basınç atlamasını ifade eden Laplace yasasının analitik çözümüyle de kıyaslanmıştır. Arayüzeyde basınç atlamasının analitik çözümü:

$$p_{in} - p_{out} = \Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

olarak hesaplanmaktadır. Burada R_1 ve R_2 esas eksenlerde eğriselliğin yarıçapını (principal radii of curvature) göstermektedir. Simülasyon için sınırları Ω=[0,1]x[0,2]x[0,1] olan küboid bir tank içerisinde, yoğunluğu akışkan ortamın yoğunluğundan daha düşük olan, yarıcapı r_0=0.25 olan bir su damlasının zamana bağlı simulasyonu yapılmıştır. Başlangıç konfigürasyonu Şekil 3.1.1'de gösterilmiş ve akışkanlara ilişkin fiziksel parametreler Tablo 3.1.1'de sunulmuştur.



Şekil 3.1.1: Statik damla problemi.

Tablo 3.1.1: Statik damla problemi için fiziksel özellikler.

ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	g	σ	ρ_1 / ρ_2	μ_1 / μ_2
10	1	0.1	0.01	0	0.245	10	10

Laplace yasasına göre akışkan-akışkan arayüzündeki basınç atlaması:

$$p_{in} - p_{out} = \Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 0.245\left(\frac{1}{0.25} + \frac{1}{0.25}\right) = 1.96$$

Tablo 3.1.2: Statik damla problemi oluşturulan ağ özellikleri ve zaman adımı değerleri.

Ağ	h_{maks}	h_{min}	Nokta Sayısı	Eleman Sayısı	Δt
M1	1/16	1/32	33904	31829	2.5×10^{-3}

Karşılaştırılacak olan normal hesabı yöntemleri Tablo 3.1.3'de verilmiştir.

Tablo 3.1.3: Nokta üzerinde normal hesabı için kullanılan yöntemler.

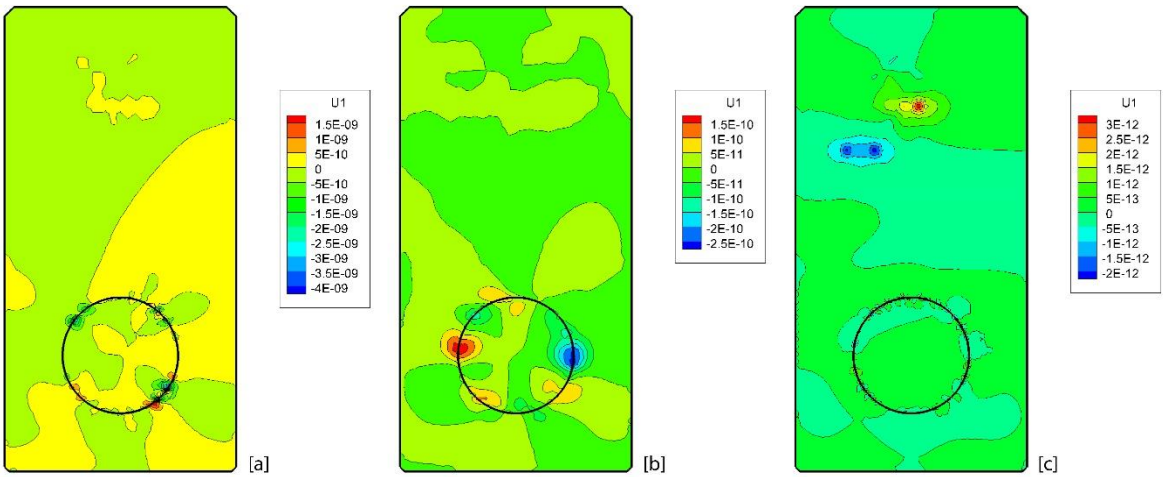
Yöntem Numarası	Yaklaşım
Yöntem 1	LSBSF: Least square biquadratic surface fitting
Yöntem 2	MWSELR: Mean weighted by sine and edge length reciprocals

Arayüzeyde elde edilen basınç atlamasına ilişkin sonuçlar Tablo 3.1.4'de sunulmuştur.

Tablo 3.1.4: Statik damla problemi için elde edilen sonuçlar.

Yöntem Numarası	Δp $\lvert\Delta p - \sigma/r_0\rvert/(\sigma/r_0)$
Yöntem 1	1.959999556249 2.26403571514072E-07
Yöntem 2	1.959999999999 5.10136151008886e-13

Mevcut çalışmada, yöntem 2 kullanılarak 10 iterasyon (t=0.025s), 100 iterasyon (t=0.25s) ve 1000 iterasyon (t=2.5s) sonucunda elde edilen parazitik akımlar (u hızı konturları) Şekil 3.1.2'de gösterilmiştir.

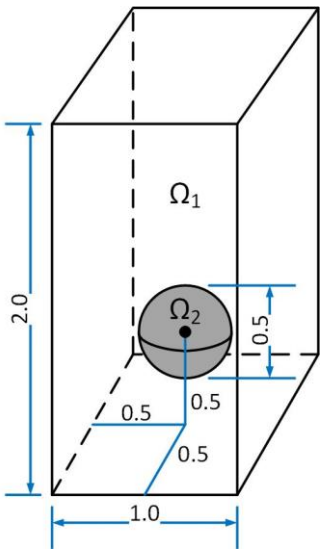


Şekil 3.1.2: M1 ağ yapısı ve yöntem 2 kullanılarak elde edilen parazitik akımlar (u hızı bileşeni): t=0.025s (a), t=0.25s (b) ve t=2.5s (c).

Şekil 3.1.2'den görüleceği üzere, parazitik akımlar zamanla kaybolmaktadır ve değeri oldukça küçüktür (u hızı bileşeni için t=0.025s'de $-4x10^{-9}$ ile $1.5x10^{-9}$ arasında). Belirtilmelidir ki bir sonraki zaman adımına geçmek için mutlak çözücü toleransı $1x10^{-12}$ olarak ayarlanmıştır.

3.2 Yükselen Kabarcık Problemi

Yükselen kabarcık problemi referans Adelsberger v.d. (2014)'de verildiği gibi sınırları $\Omega=[0,1]x[0,2]x[0,1]$ olan küboid bir tank içerisinde, yoğunluğu akışkan ortamın yoğunluğundan daha düşük olan bir kabarcığın zamana bağlı simulasyonu yapılmıştır. Başlangıç konfigürasyonu Şekil 3.2.1'de gösterilmiştir.



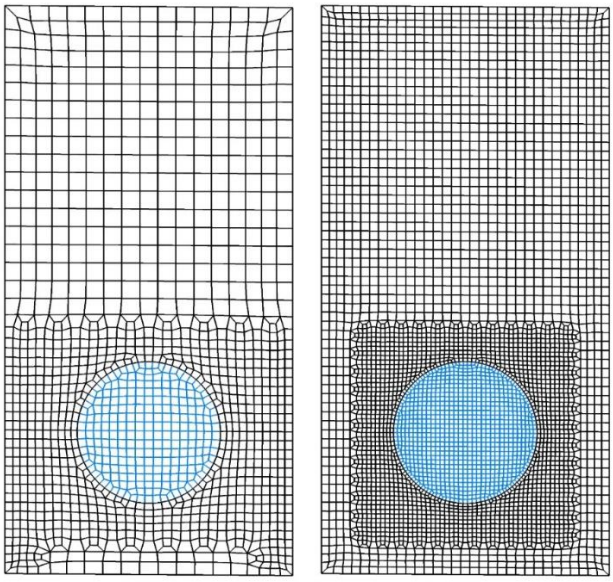
Şekil 3.2.1: Yükselen kabarcık problemi.

3.2.1 Yükselen Kabarcık Problemi için Oluşturulan Yapısal Olmayan Ağ

Yükselen kabarcık probleminde yapısal olmayan ağı oluşturmak için DISTENE MeshGems-Hexa (mg-hexa) algoritmasından faydalanılmıştır. Bu algoritma sekizdal (octree) yöntemini kullanarak üç boyutta çok karmaşık geometriler için yalnız konformal (conformal) altı yüzlü elemanlardan oluşan yapısal olmayan ağ üretebilmektedir. Ağ üretimi için kabarcık ve içinde bulunduğu küboid tank üçgenlere ayrıklaştırılmış ve mg-hexa formatında bir data dosyası oluşturulmuştur. Ek olarak kabarcık etrafındaki yakın bölge için sabit ağ boyutu verilerek bu bölgedeki ağın daha sık olması sağlanmıştır. Bu çalışmada iki farklı sıklıkta ağ oluşturulmuş ve kullanılan ağ Şekil 3.2.2'de gösterilip mevcut çalışmada kullanılan ve Adelsberger v.d. (2014) tarafından sunulan ağlara ve hesaplamada kullanılan zaman adımına ilişkin detaylar Tablo 3.2.1'de verilmiştir. Lineer olmayan zamana bağlı hesaplamalarda bir sonraki zaman adımına, mutlak norm ||b-Ax|| $1x10^{-10}$'dan küçük olduğu zaman geçilmiştir.

Tablo 3.2.1: Yükselen kabarcık problemi oluşturulan ağ özellikleri ve zaman adımı değerleri

Ağ	h_{maks}	h_{min}	Nokta #	Eleman #	Arayüz Eleman #	Serbestlik Derecesi (DOF)	Δt
M1	1/16	1/32	33904	31829	1146	426011	2.5×10^{-3}
M2	1/32	1/64	158552	153481	4630	2025067	2.5×10^{-3}
DROPS	1/4	1/32	---	---	---	---	2.5×10^{-4}
NaSt3D	1/121	1/121	---	---	---	---	$O(10^{-4})$
OpenFOAM	1/128	1/128	---	---	---	---	1.0×10^{-4}



Şekil 3.2.2: Yükselen kabarcık problemi için DISTENE MeshGems-Hexa algoritması ile altı yüzlü elemanlardan oluşturulan z=0 düzlemindeki yapısal olmayan ağ: M1 ağı (sol) ve M2 ağı (sağ)

Yükselen kabarcık problemi iki farklı yoğunluk ve viskozite oranı için incelenmiştir. Bunlardan ilki düşük ve ikincisi yüksek yoğunluk ve viskozite oranıdır. Bu iki durum için yapılan çalışmalar aşağıda daha detaylı bir şekilde açıklanmıştır.

3.2.2 Yükselen Kabarcık Problemi – Düşük Yoğunluk ve Viskozite Oranı

Düşük yoğunluk ve viskozite oranlı yükselen kabarcık probleminde kullanılan akışkanlara ilişkin fiziksel özellikler Tablo 3.2.2'de verilmiştir.

Tablo 3.2.2: Düşük yoğunluk ve viskozite oranlı yükselen kabarcık problemi için fiziksel özellikler

ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	g	σ	Re	Eo	ρ_1 / ρ_2	μ_1 / μ_2
1000	100	10	1	0.98	24.5	35	10	10	10

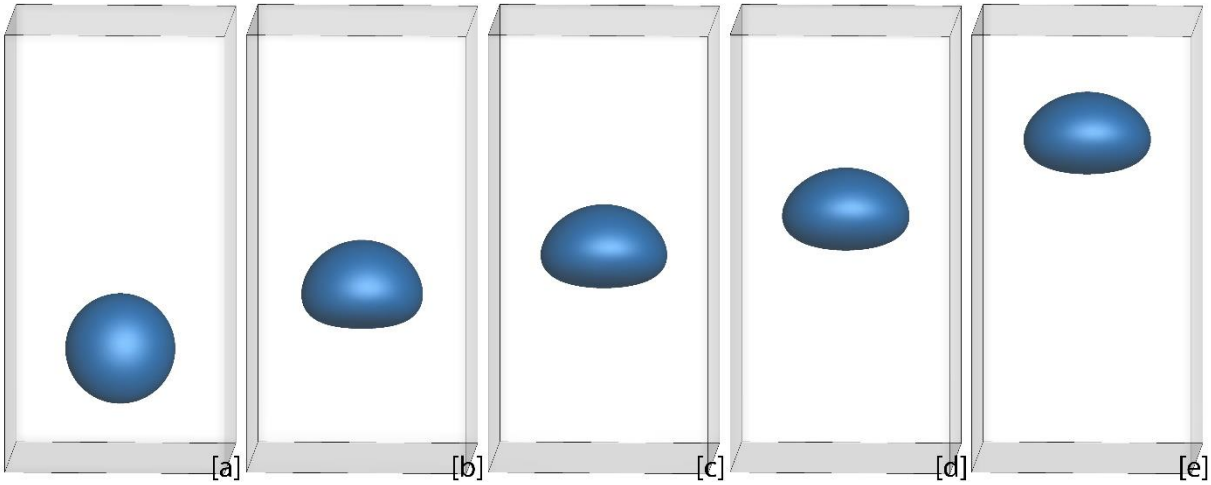
Bu test problemine ilişkin parametreler, Hysing v.d. (2009) tarafından çok fazlı iki boyutlu akış çözücülerini hassas bir şekilde test etmek için önerilmiş ve bizim iki boyutlu çalışmalarımızda (Guventurk ve Sahin, 2017) da kullanılmıştır. Mevcut test problemi, Adelsberger v.d. (2014) tarafından üç boyut için aynı parametreleri kullanılarak tekrar düzenlenmiştir. Yalnız yan duvarlarda kayma sınır şartı (slip bc) yerine kaymazlık sınır şartı (no-slip bc) kullanılmılmıştır. Burada önerilen ilk test probleminde yüzey gerilme değeri (σ) oldukça yüksek tutulmuş ve yüzey gerilme kuvvetlerinden kaynaklanan hataların test edilmesi hedeflemiştir. Unutulmamalıdır ki yüzey gerilme kuvvetleri, yüzey eğriliği ile (dolayısı ile ikinci mertebeden türevler ile) orantılıdır. Dolayısı ile kabarcık geometrisinin ve normal vektörlerin hassas olarak hesaplamansı çok önemlidir. Örneğin, aşağıdaki karşılaştırmalarda sunulduğu gibi OpenFOAM çözücüsü Volume of Fluid (VOF) yöntemini kullandığı için arayüz sürekli değildir ve yüzey gerilme kuvvetlerini hassas olarak hesaplayamaz. Aşağıda hava-su etkileşimi için fiziksel parametreler Tablo 3.2.3'de sunulmuş ve görüldüğü gibi yüzey gerilme değeri nispeten çok daha küçüktür.

Tablo 3.2.3: Su ve hava için fiziksel özellikler (15°C)

ρ_1 [kg/m^3]	ρ_2 [kg/m^3]	μ_1 [x10^{-3} kg/m.s]	μ_2 [x10^{-5} kg/m.s]	g [m/s^2]	σ [N/m]	Re	Eo	ρ_1 / ρ_2	μ_1 / μ_2
999.1	1.225	1.139	1.812	9.81	0.0735	971347.76	33337.32	815.59	62.86

3.2.2.1 Kabarcık Şeklinin Zamanla Değişimi

Kabarcık şeklinin t=0 ve t=3 zaman seviyeleri arasındaki değişimi Şekil 3.2.3'de gösterilmiştir.



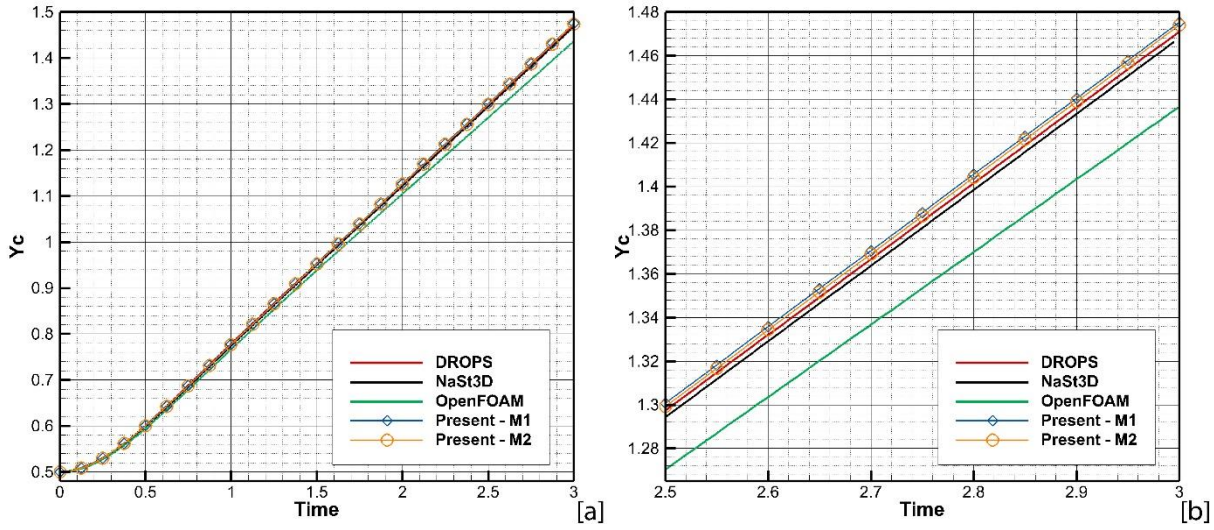
Şekil 3.2.3: Kabarcık şeklinin zamana bağlı değişimi t=0 [a], t=1.0 [b], t=1.5 [c], t=2.0 [d] ve t=3.0 [e]

3.2.2.2 Kütle Merkezinin Kıyaslanması

Kabarcığın belirli bir zaman adımındaki konumu, kütle merkezinin hesaplanmasıyla bulunmuştur. Kütle merkezinin hesaplanması için aşağıdaki denklem kullanılmıştır:

$$\mathbf{X}_c(t)=(x_c,y_c,z_c)=\frac{\int_{\Omega_2(t)}\mathbf{x}dxdydz}{\int_{\Omega_2(t)}dxdydz}$$

Burada $\mathbf{X_c}$ kabarcığın kütle merkezini, **x** konum vektörünü ve $\Omega_2(t)$ kabarcığın içerisindeki hesap alanını göstermektedir. Elde edilen sonuçların literatürde Adelsberger v.d. (2014) tarafından sunulan değerlerle karşılaştırılması Şekil 3.2.4'de gösterilmiştir. Buradan da görüleceği üzere mevcut algoritmadan elde edilen sonuçlar, referans değerlerle uygun çıkmıştır. Sadece OpenFOAM kullanılarak elde edilen sonuçlar, diğer algoritmalardan elde edilen sonuçlardan farklılık göstermektedir.



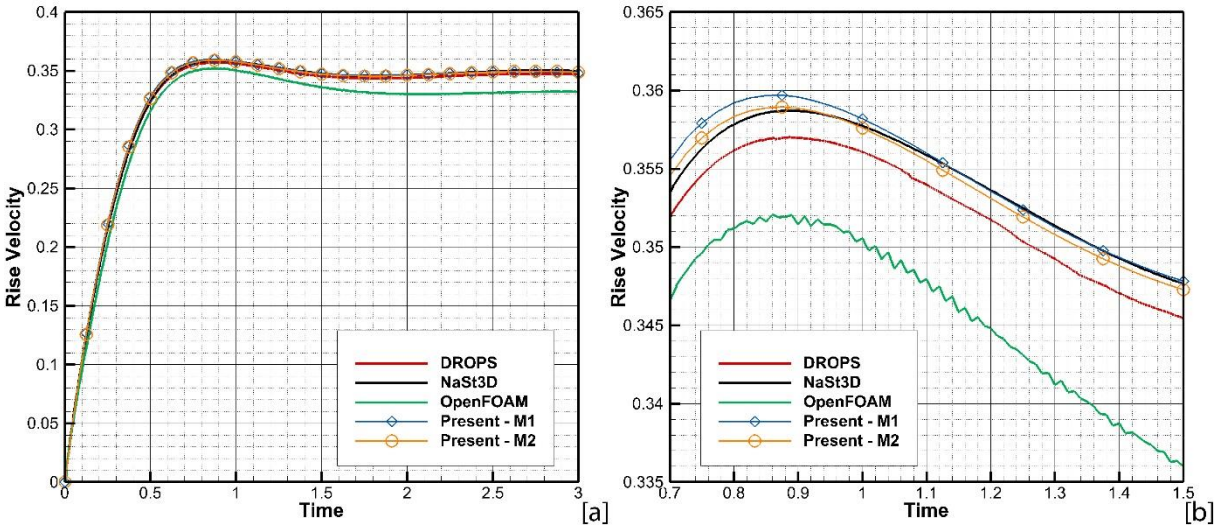
Şekil 3.2.4: Kabarcık kütle merkezinin zamana bağlı değişimi ve Adelsberger v.d. (2014)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]

3.2.2.3 Yükselme Hızının Kıyaslanması

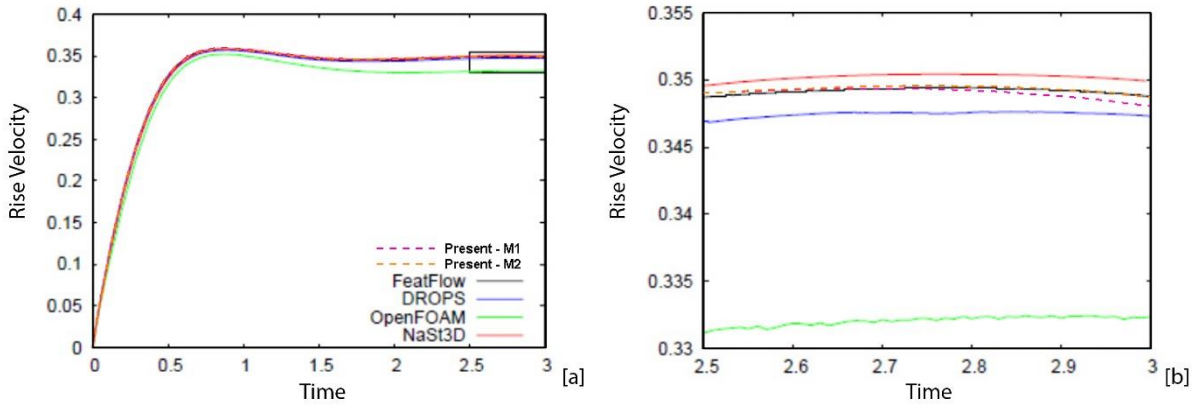
Kabarcığın kütle merkezindeki hız, Leibniz integral kuralı kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$\mathbf{U}_c(t)=(u_c,v_c,w_c)=\frac{d\mathbf{X}_c}{dt}=\frac{\int_{\Omega_2(t)}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}dxdydz+\oint_{\partial\Omega_2(t)}\mathbf{x}(\mathbf{n}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt})dA}{\int_{\Omega_2(t)}dxdydz}=\frac{\oint_{\partial\Omega_2(t)}\mathbf{x}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{u})dA}{\int_{\Omega_2(t)}dxdydz}.$$

Burada $\mathbf{U_c}$ kabarcığın kütle merkezindeki hızı, **u** hız vektörünü **x** konum vektörünü, $\Omega_2(t)$ kabarcığın içerisindeki hesap alanını ve $\partial\Omega_2(t)$ kabarcığın sınırını göstermektedir. Elde edilen sonuçların literatürde Adelsberger v.d. (2014) tarafından sunulan değerlerle karşılaştırılması Şekil 3.2.5'de gösterilmiştir. Buradan da görüleceği üzere mevcut algoritmadan elde edilen sonuçlar, referans değerlerle uygunluk göstermektedir. OpenFOAM kullanılarak elde edilen sonuçlar, diğer algoritmalardan elde edilen sonuçlardan farklılık göstermektedir.



Şekil 3.2.5: Kabarcık yükselme hızının zamana bağlı değişimi ve Adelsberger v.d. (2014)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]



Şekil 3.2.6: Kabarcık yükselme hızının zamana bağlı değişimi ve Turek v.d. (2017)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]

Şekil 3.2.6'da, mevcut algoritmadan elde edilen sonuçların yeni FeatFlow kodu sonuçları (Turek v.d., 2017) ve literatürdeki diğer kodlarla (DROPS, NaSt3D, OpenFOAM) elde edilen sonuçlarla kıyaslaması eklenmiştir. FeatFlow kodu yüksek mertebe Q2/P1 izoparametrik eleman kullanan sonlu elemanlar yöntemine dayanmaktadır. Hareketli arayüz için PDE tabanlı ağ deformasyon algoritması ALE yöntemi ile birlikte kullanılmış ve yüzey gerilme kuvvetleri kapalı formda (implicit olarak) çözülmüştür. Sonuçlardan da görüleceği üzere, mevcut algoritmada, özellikle M2 ağı kullanılarak elde edilen yükselme hızının zamana bağlı değişimi, Turek v.d. (2017) tarafından elde edilen sonuçlarla birebir örtüşmektedir. Aşağıda, maksimum yükselme hızı (v) ve elde edildiği zaman değerleri (t), sayısal olarak sunulmuştur:

- M1 ağı için maksimum hız t=0.875'de v=0.3596827
- M2 ağı için maksimum hız t=0.875'de v=0.3589222

- DROPS için maksimum hız t=0.888'de v=0.357013
- NaSt3D için maksimum hız t=0.885'de v=0.358702
- OpenFOAM için maksimum hız t=0.860'da v=0.352084

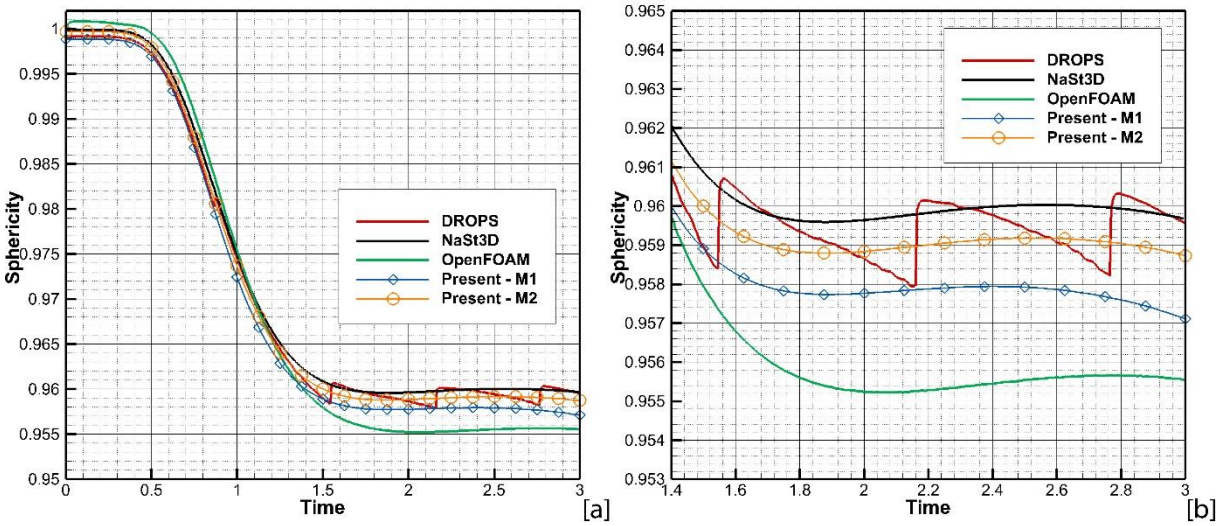
Not: Turek v.d. (2017) tarafından bu değer, sayısal olarak paylaşılmamıştır.

3.2.2.4 Küresellik

Kabarcık deformasyonun ölçütü küresellik üzerinden tanımlanmıştır ve aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

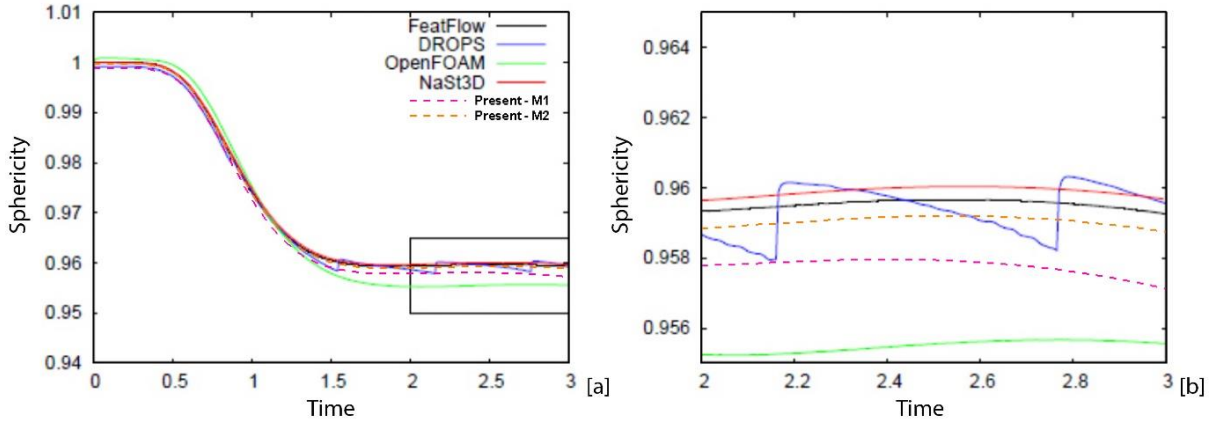
$$\text{Sphericity}=\frac{A_a}{A_b}=\frac{\text{Surface area of volume-equivalent sphere}}{\text{Surface area of bubble}}=\frac{\pi^{1/3}(6V_b)^{2/3}}{A_b}.$$

Burada V_b kabarcık hacmini ve A_b kabarcığın yüzey alanını göstermektedir. Eğer kabarcık küre şeklindeyse bu değer 1'e eşittir ve kabarcık deforme oldukça küresellik değeri düşmektedir. Elde edilen sonuçların literatürde Adelsberger v.d. (2014) tarafından sunulan değerlerle karşılaştırılması Şekil 3.2.7'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2.7: Kabarcık küreselliğinin zamana bağlı değişimi ve Adelsberger v.d. (2014)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]

Küreselliğin başlangıç değeri, kabarcık sınırları düz doğru dilimleri şeklinde temsil edildiği için tam olarak 1'e eşit değildir. Buradan da görüleceği üzere mevcut algoritmadan elde edilen sonuçlar, referans değerlerle uygunluk göstermekte olup kayda değer bir farklılık bulunmamaktadır. OpenFOAM kullanılarak elde edilen sonuçlar, diğer algoritmalardan elde edilen sonuçlardan farklılık göstermektedir.



Şekil 3.2.8: Kabarcık küreselliğinin zamana bağlı değişimi ve Turek v.d. (2017)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]

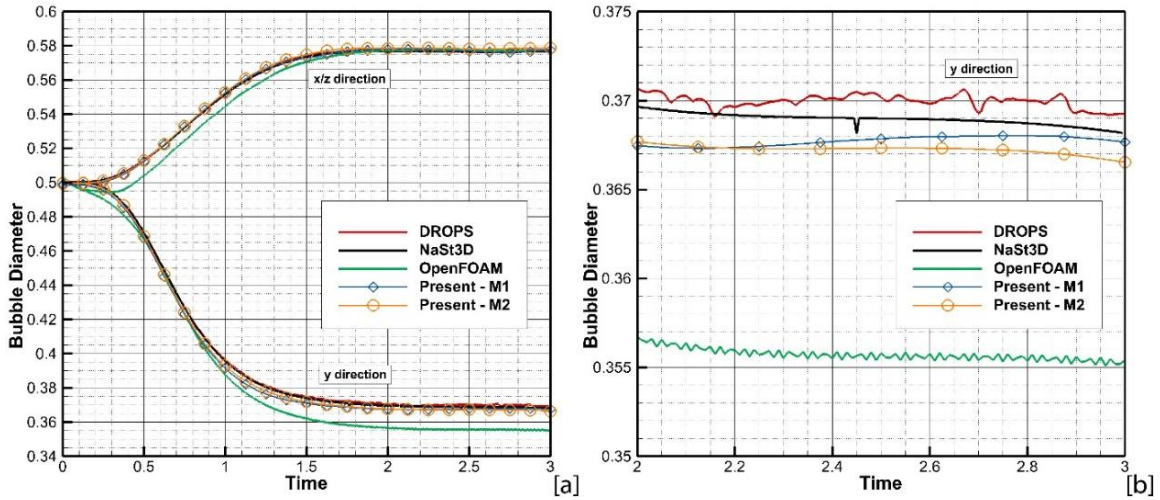
Şekil 3.2.8'den görüleceği üzere, mevcut algoritmada, özellikle M2 ağı kullanılarak elde edilen küresellik değerinin zamana bağlı değişimi, Turek v.d. (2017) tarafından elde edilen yeni sonuçlarla yakınlık göstermektedir.

3.2.2.5 Kabarcık Boyutu

Kabarcık boyutu (çapı), kabarcığın her bir koordinat eksenindeki maksimum uzama miktarı olarak tanımlanmıştır ve aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

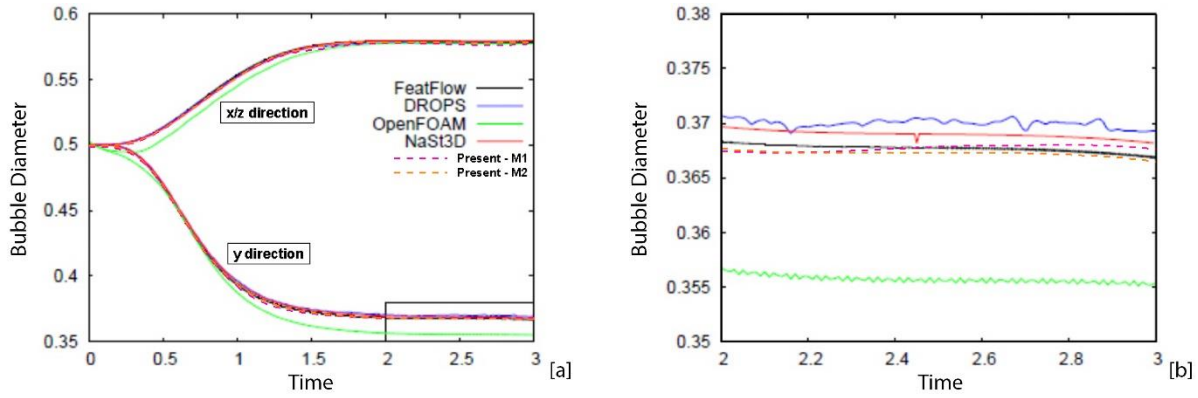
$$d_i = max_{p,q \in \Omega_2(t)} |p_i - q_i|, \quad \text{with} \quad i = x,y,z.$$

Burada p ve q, kabarcık yüzeyi üzerindeki keyfi iki noktayı göstermektedir. Elde edilen sonuçların literatürde Adelsberger v.d. (2014) tarafından sunulan değerlerle karşılaştırılması Şekil 3.2.9'da gösterilmiştir.



Şekil 3.2.9: Kabarcık boyutunun zamana bağlı değişimi ve Adelsberger v.d. (2014)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]

Buradan da görüleceği üzere mevcut algoritmadan elde edilen sonuçlar, referans değerlerle uygunluk göstermekte ve zaman ilerledikçe NaSt3D ile edilen sonuçlara yaklaşmaktadır.



Şekil 3.2.10: Kabarcık boyutunun zamana bağlı değişimi ve Turek v.d. (2017)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]

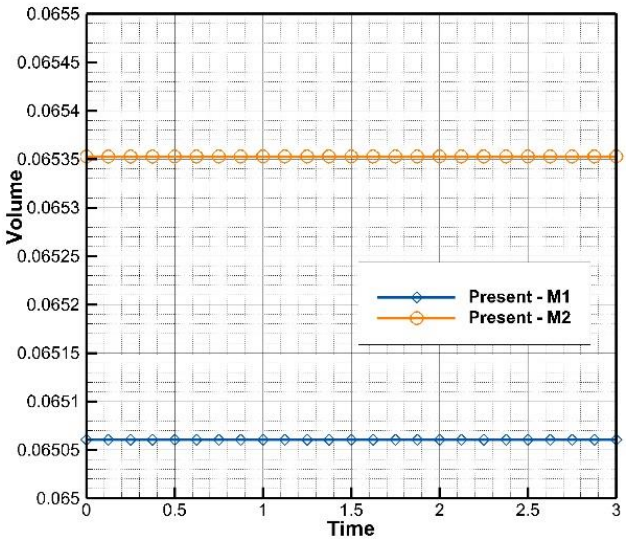
Şekil 3.2.10'dan görüleceği üzere, mevcut algoritmada, özellikle M2 ağı kullanılarak elde edilen kabarcık boyutunun zamana bağlı değişimi, Turek v.d. (2017) tarafından elde edilen sonuçlarla örtüşmektedir. Daha önce bahsedildiği gibi, yüzey gerilim kuvvetlerinin doğru bir şekilde hesaplanması, çok fazlı akış çözücüleri için önem teşkil etmektedir. DROPS kodu level set yönteminden kaynaklanan kütle kaybını elimine etmek için level set fonksiyonunu modifye etmekte (reinitialize) ve buda salınımlara sebep olmaktadır.

3.2.2.6 Kabarcık Hacmi

Kabarcık hacmi, nümerik algoritmanın kütleyi koruyup koruyamadığını göstermesi açısından oldukça önemli bir parametredir. Kabarcık hacmi aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$\text{Volume}=\int_{\Omega_2(t)} dxdydz=\sum_{e=1}^{ne} V_e.$$

Burada V_e, kabarcığı oluşturan her bir altı yüzlü elemanın hacmini göstermektedir. Mevcut algoritma kullanılarak elde edilen sonuçlar Şekil 3.2.11'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2.11: Kabarcık hacminin M1 ve M2 ağlarında zamana bağlı değişimi

Buradan görüleceği üzere kabarcık kütlesi, kullanılan ağ çözünürlüğünden bağımsız olarak tamamen korunmuştur. Nitekim kabarcık şekli düz doğru çizgiler şeklinde temsil edildiği için, kabarcığın başlangıç kütlesi iki farklı ağ çözünürlüğü için farklılık göstermektedir.

3.2.3 Yükselen Kabarcık Problemi – Yüksek Yoğunluk ve Viskozite Oranı

Yüksek yoğunluk ve viskozite oranlı yükselen kabarcık probleminde kullanılan akışkanlara ilişkin fiziksel özellikler Tablo 3.2.4'de verilmiştir. Bu ikinci test probleminde ise yoğunluk ve viskozite oranları sırasıyla 1000 ve 10 alınarak hava-su etkileşim parametrelerine yaklaşılmaya çalışılmıştır. Ayrıca yüzey gerilme değeri de düşürülmüştür. Böylelikle çok fazlı akış çözücülerinin yüksek (gerçekçi) yoğunluk oranlarında test edilmesi hedeflenmiştir. Ancak sabit Kartezyen ağlarda kullanılan level set, volume of fluid ve front tracking metodlarında arayüzde yoğunluk ve viskozite değişimleri, sürekli ve düzgün değişecek şekilde modifiye (smoot out) edilse de yüksek yoğunluk ve viskozite değişimleri nümerik sorunlara neden olabilmektedir. Sonuç olarak çok fazlı akış çözücülerinin hem yüzey gerilme kuvvetlerini hassas olarak hesaplaması, hem de yüksek yoğunluk ve viskozite oranlarında başarılı (hassas) bir şekilde çalışması beklenir. Ancak bu şartların hepsini aynı anda sağlamak bir çok çözücü için oldukca güçtür. Mevcut projede geliştirilen ALE çözücüsü ile bu şartların hepsi aynı anda sağlanmış olup, sonuçlar literatürde yer alan çalışmalarla kıyaslanarak doğrulanmıştır. Elde edilen sonuçların özellikle literatürdeki en yeni sonuçlar (Turek v.d. 2017) ile oldukça uyumlu olduğu görülmüştür. Yüksek yoğunluk ve viskozite

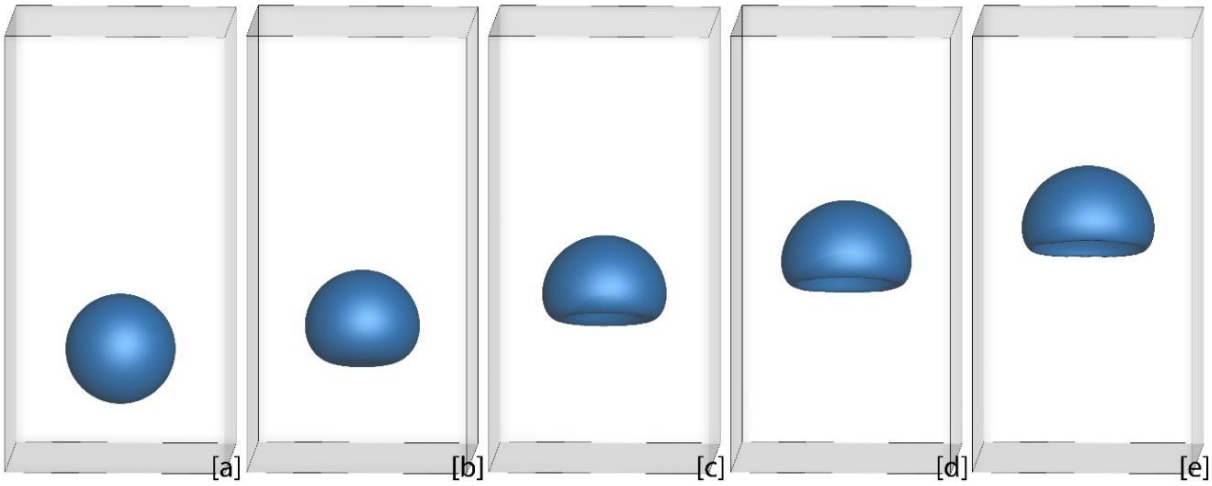
oranlı yükselen kabarcık problemine ilişkin elde edilen sonuçlar aşağıda detaylı bir şekilde sunulmuştur.

Tablo 3.2.4: Düşük yoğunluk ve viskozite oranlı yükselen kabarcık problemi için fiziksel özellikler

ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	g	σ	Re	Eo	ρ_1 / ρ_2	μ_1 / μ_2
1000	1	10	0.1	0.98	1.96	35	125	1000	100

3.2.3.1 Kabarcık Şeklinin Zamanla Değişimi

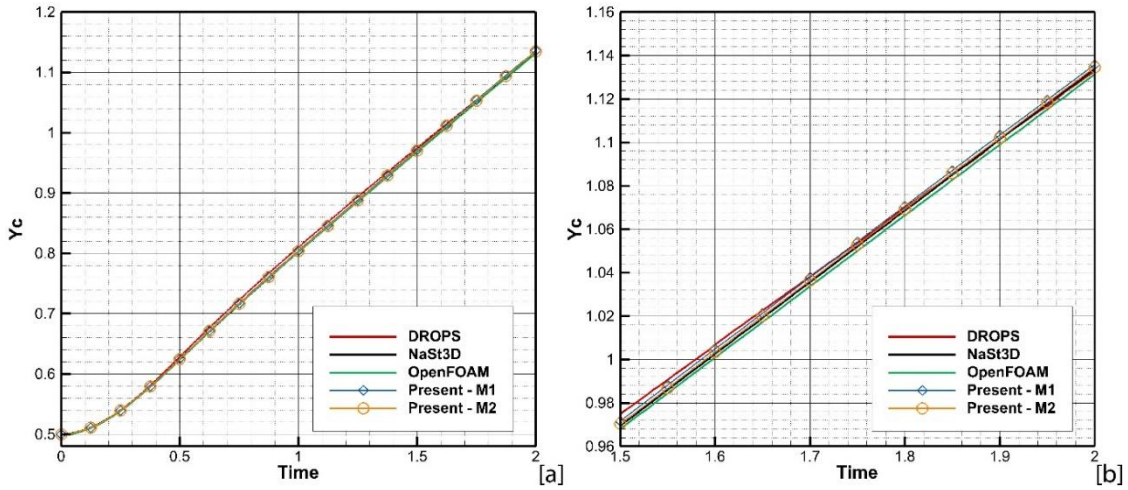
Kabarcık şeklinin t=0 ve t=2 zaman seviyeleri arasındaki değişimi Şekil 3.2.12'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2.12: Kabarcık şeklinin zamana bağlı değişimi t=0 [a], t=0.5 [b], t=1.0 [c], t=1.5 [d] ve t=2.0 [e]

3.2.3.2 Kütle Merkezinin Kıyaslanması

Elde edilen sonuçların literatürde Adelsberger v.d. (2014) tarafından sunulan değerlerle karşılaştırılması Şekil 3.2.13'de gösterilmiştir.

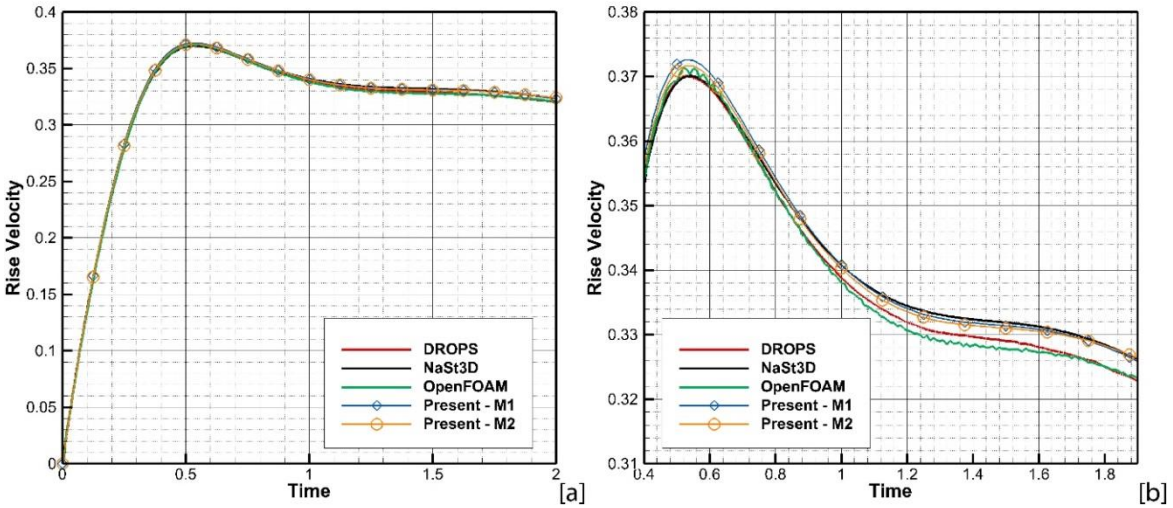


Şekil 3.2.13: Kabarcık kütle merkezinin zamana bağlı değişimi ve Adelsberger v.d. (2014)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]

Buradan da görüleceği üzere mevcut algoritmadan elde edilen sonuçlar, referans değerlerle uygun çıkmıştır. Burada kabarcığın yer değiştirme miktarı düşük yoğunluk ve viskozite oranlarındaki yer değişime değerlerine benzerdir. Çünkü boyutsuz Reynolds sayısı ve yer çekim kuvvet değerleri iki test probleminde de aynıdır. Yalnız yüksek yoğunluk ve viskozite oranında, kabarcığın çapı daha küçük (slender) olduğu için biraz daha hızlı yükselmektedir.

3.2.3.3 Yükselme Hızının Kıyaslanması

Elde edilen sonuçların literatürde Adelsberger v.d. (2014) tarafından sunulan değerlerle karşılaştırılması Şekil 3.2.14'de gösterilmiştir.



Şekil 3.2.14: Kabarcık yükselme hızının zamana bağlı değişimi ve Adelsberger v.d. (2014)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]

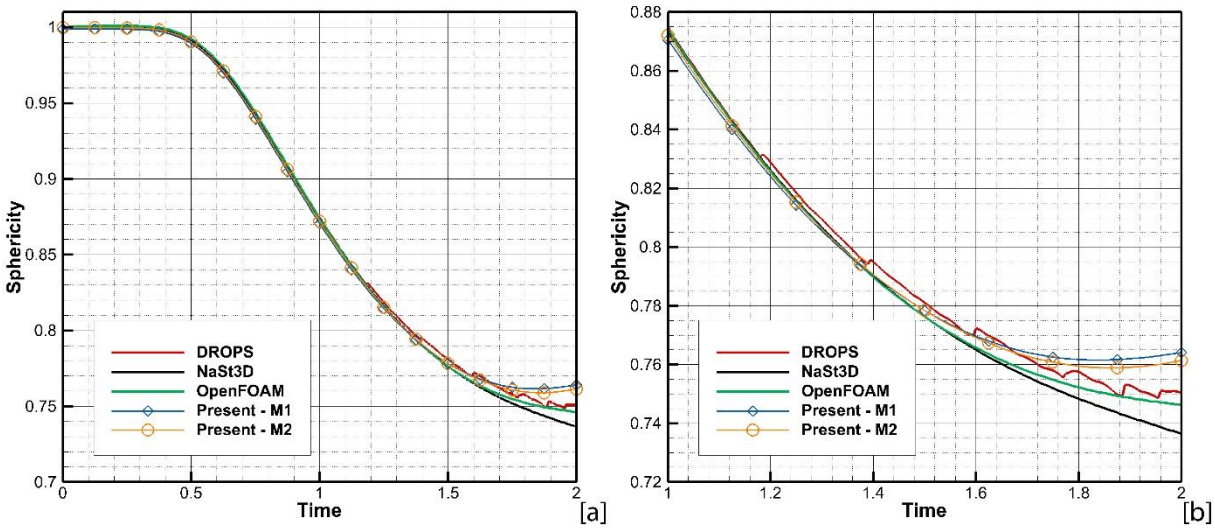
Buradan da görüleceği üzere mevcut algoritmadan elde edilen sonuçlar, referans değerlerle (özellikle NaSt3D) uygunluk göstermektedir.

Aşağıda, maksimum yükselme hızı (v) ve elde edildiği zaman değerleri (t), sayısal olarak sunulmuştur:

- M1 ağı için maksimum hız t=0.525'de v=0.3726181
- M2 ağı için maksimum hız t=0.525'de v=0.3716766
- DROPS için maksimum hız t=0.536'da v=0.370167
- NaSt3D için maksimum hız t=0.540'da v=0.370081
- OpenFOAM için maksimum hız t=0.520'de v=0.371384

3.2.3.4 Küresellik

Elde edilen sonuçların literatürde Adelsberger v.d. (2014) tarafından sunulan değerlerle karşılaştırılması Şekil 3.2.15'de gösterilmiştir.

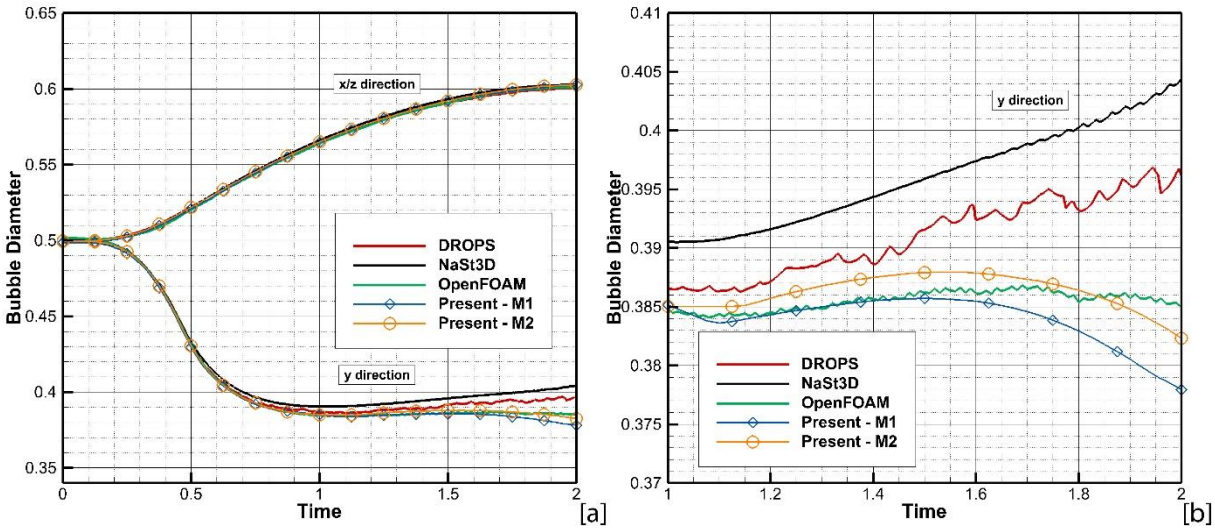


Şekil 3.2.15: Kabarcık küreselliğinin zamana bağlı değişimi ve Adelsberger v.d. (2014)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]

Küreselliğin başlangıç değeri, kabarcık sınırları düz doğru dilimleri şeklinde temsil edildiği için tam olarak 1'e eşit değildir. Buradan da görüleceği üzere tüm algoritmalar, t=1.4'e kadar benzerlik göstermektedir. Bu zaman seviyesinden sonra algoritma sonuçlarında farklılıklar meydana gelmiştir.

3.2.3.5 Kabarcık Boyutu

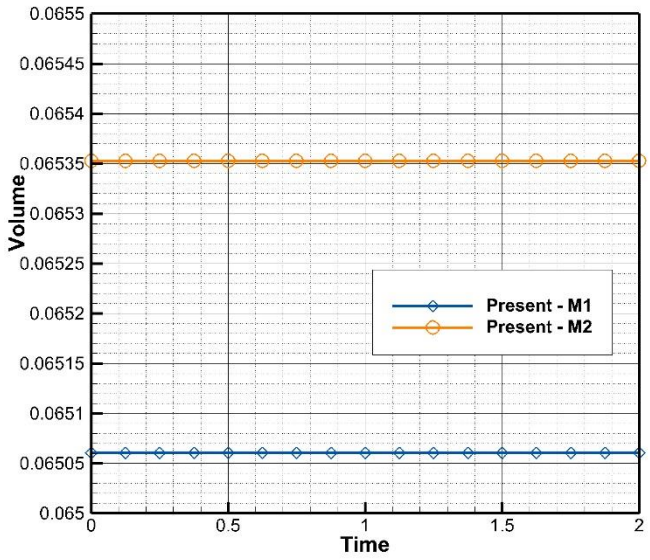
Elde edilen sonuçların literatürde Adelsberger v.d. (2014) tarafından sunulan değerlerle karşılaştırılması Şekil 3.2.16'da gösterilmiştir. Buradan da görüleceği üzere tüm algoritmalardan elde edilen sonuçlar x/z yönü için benzerlik göstermekte olup y yönünde farklılık göstermektedir.



Şekil 3.2.16: Kabarcık boyutunun zamana bağlı değişimi ve Adelsberger v.d. (2014)'de sunulan sonuçlarla kıyaslanması [a], yakın görüş [b]

3.2.3.6 Kabarcık Hacmi

Mevcut algoritma kullanılarak elde edilen sonuçlar Şekil 3.2.17'de gösterilmiştir.

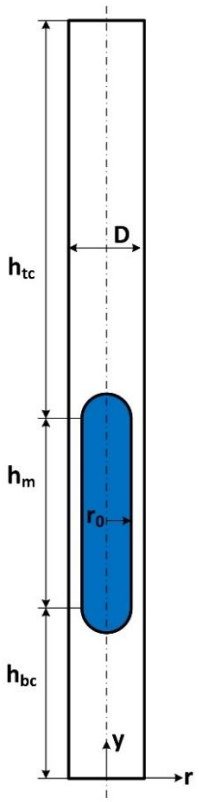


Şekil 3.2.17: Kabarcık hacminin M1 ve M2 ağlarında zamana bağlı değişimi

Görüleceği üzere kabarcık kütlesi, kullanılan ağ çözünürlüğünden bağımsız olarak tamamen korunmuştur. Nitekim kabarcık şekli düz doğru dilimleri şeklinde temsil edildiği için, kabarcığın başlangıç kütlesi iki farklı ağ çözünürlüğü için farklılık göstermektedir.

3.3 Taylor Kabarcığı Problemi

Taylor kabarcıkları, kanalın kesit alanının neredeyse tamamını dolduran ve sıvı film tabakası ile duvardan ayrılan, Şekil 3.3.1'deki gibi mermi görünümlü kabarcıklardır. Bu akışlar doğa olaylarında ve mühendislik uygulamalarında oldukça geniş bir yere sahiptirler. Emboli (embolism) gibi karmaşık kan akışlarının bulunduğu durumlar, kimyasal temel işlemlerin küçültülmesi, mikroakışların modellenmesi, volkan bilimi, jeotermal santraller, gaz ve petrol çıkartma, kriyojenik akışkanlar uygulama alanlarına örnek olarak verilebilir. Bu doğrulama testinde Gutiérrez v.d. (2017) tarafından verildiği üzere durgun bir akış içerisinde Taylor kabarcığının yükselişinin simülasyonu gerçekleştirilmiştir. Bu problem, Bugg ve Saad (2002) tarafından deneysel ve Ndinisa v.d. (2005) tarafından sayısal olarak çalışılmıştır. Probleme ilişkin hesap alanı parametreleri Tablo 3.3.1'de ve fiziksel özellikler ise Tablo 3.3.2'de sunulmuştur. Bu özellikler ve parametreler hem iki boyutlu hem de üç boyutlu durum için kullanılmıştır. Bu parametreler zeytin yağı (akışkan 1) içerisinde yükselen hava (akışkan 2) kabarcığına karşılık gelmektedir. Burada belirtilmelidir ki kabarcığın ilk şeklinin daimi durumda elde edilen kabarcık şekli üzerinde herhangi bir etkisi yoktur. Sadece daimi olmayan süreçte ve daimi duruma ulaşma süresinde rol oynamaktadır. Burada önemli olan kabarcığın hacmidir ve bu hacim V_b=7696.902mm^3 olarak alınmıştır. Taylor kabarcık problemi yükselen kabarcık problemine göre nispeten daha zor problemdir. Bunun başlıca nedenleri iki farklı akışkan arasındaki yüksek yoğunluk ve viskozite oranlarıdır. Ayrıca yüksek yüzey gerilme kuvveti de daha önce belirtildiği gibi açık (explicit) yöntemlerde zaman adımına önemli bir kısıtlama getirmektedir. Ancak mevcut test probleminin çözümü bize bire bir deneyle karşılaştırma olanağı sunmaktadır. Bu amaçla deneyde kullanılan tüp çapı ve kabarcık hacimi alınmıştır (Bugg ve Saad, 2002). Hesaplamalarda sınır koşulu olarak tüp alt, üst ve yan yüzeylerinde kaymazlık sınır koşulu kullanılmıştır. Hesaplamalar durağan akışkan ile t=0' dan başlatılmıştır.



Şekil 3.3.1: Taylor kabarcığı problemi

Tablo 3.3.1: Taylor kabarcığı hesap alanı parametreleri

Özellik Birim	h_{bc} mm	h_m mm	h_{tc} mm	r_0 mm	D mm	V_b mm^3
	50	40	110	7.04304308	19	7696.902

Tablo 3.3.2: Taylor kabarcığı için fiziksel özellikler

Özellik Birim	ρ_1 g/mm^3	ρ_2 g/mm^3	μ_1 $g/mm.s$	μ_2 $g/mm.s$	g mm/s^2	σ g/s^2	Re	Eo	Mo
	$911 * 10^{-6}$	$1.205 * 10^{-6}$	0.084	$18.27 * 10^{-6}$	$9.97351 * 10^3$	32.80	27	100	0.015

Yukarıda verilen boyutsuz sayılar aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. Reynolds sayısı

$$Re = \frac{\rho_1 U_t d}{\mu_1}$$

Eötvös sayısı

$$Eo = \frac{\rho_1 g D^2}{\sigma}$$

Morton sayısı

$$Mo = \frac{g\mu_1^4}{\rho_1 \sigma^3}$$

Burada U_t kabarcığın daimi (terminal) hızını, d ise kabarcık çapını göstermektedir.

3.3.1 İki Boyutlu Taylor Kabarcığı Problemi

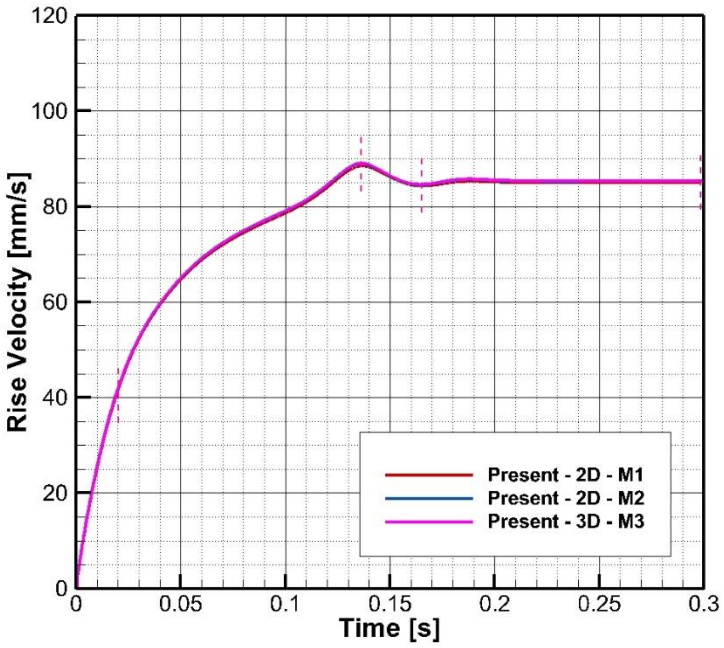
Taylor kabarcık problemi hesaplama hacminin büyük/uzun olması nedeniyle nispeten daha pahalı bir test problemidir. Bu nedenle hesaplamalar öncelikle iki boyutlu olarak ele alınmıştır. İki boyutlu Taylor kabarcığı için oluşturulan ağ özellikleri ve zaman adımı değerleri Tablo 3.3.3'de sunulmuştur.

Tablo 3.3.3: İki boyutlu Taylor kabarcığı için oluşturulan ağ özellikleri ve zaman adımı değerleri

Ağ	h_{maks}	h_{min}	Nokta #	Eleman #	Arayüz Kenar #	Serbestlik Derecesi (DOF)	Δt
M1	0.4	0.4	24513	23964	310	169942	1.0×10^{-4}
M2	0.2	0.2	96617	95521	622	673029	1.0×10^{-4}
M3	0.1	0.1	382704	380513	1242	2672353	1.0×10^{-4}

Gerçekleştirilen simülasyon sonucunda Taylor kabarcığının hızının mevcut sonlu hesaplama alanında terminal hıza ulaşabildiğini göstermiştir. Dolayısı ile iki ve üç boyutta benzer hesaplama alanları kullanılmıştır. Taylor kabarcığının hızının zamanla değişimi, Şekil 3.3.2'de sunulmuştur. Kabarcık hızının yükselen kabarcık probleminde olduğu gibi önce arttığı ve maksimum hıza ulaştıktan sonra azaldığı izlenmektedir. Hız-zaman grafiğinde görüldüğü üzere mevcut tüp uzunluğunda kabarcık uzun süre daimi (terminal) hızda hareket etmektedir.

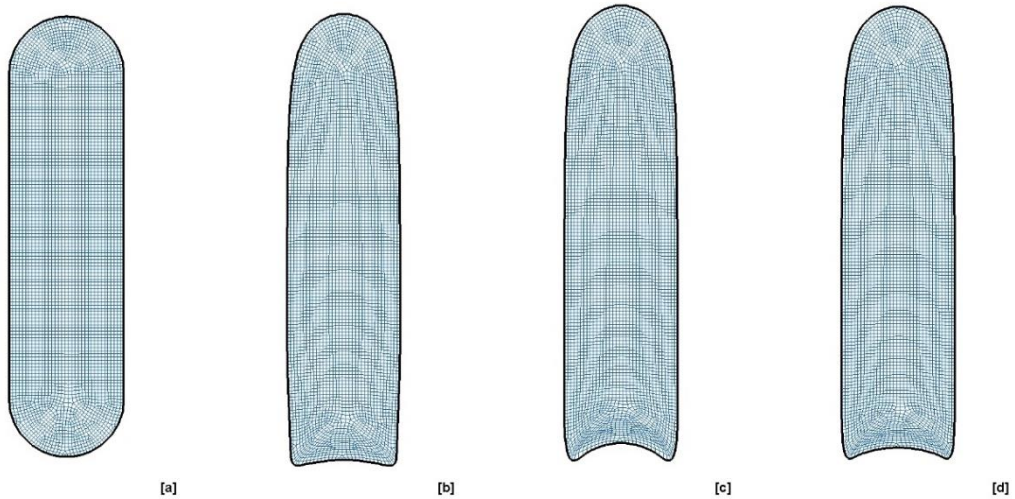
Taylor kabarcığı şeklinin zamana bağlı değişimi Şekil 3.3.3'de sunulmuştur. Mevcut şekillerin deneylerde elde edilen daimi kabarcık şekli ile uyumlu olduğu görülmektedir (Gutiérrez v.d., 2017). Örneğin, kabarcığın üst yüzeyi paraboloid konveks ve alt yüzeyi dairesel konkav bir şekil almaktadır. Şekil 3.3.4'de Taylor kabarcığı ve etrafındaki akışkanın y-doğrultusundaki hız alanı konturunun zamana bağlı değişimi gösterilmiştir. Seçilen zaman adımları Şekil 3.3.2'de gösterilen kesit çizgilerine denk gelmektedir. Burada birinci akışkan (yağ), kabarcık ile yan duvar arasında aşağıya doğru ince bir film tabakası oluşturarak hareket etmektedir. Buna karşın hava kabarcığı birbirine ters yönde dönen iki uzun girdap oluşturarak yukarı doğru ilerlemektedir.



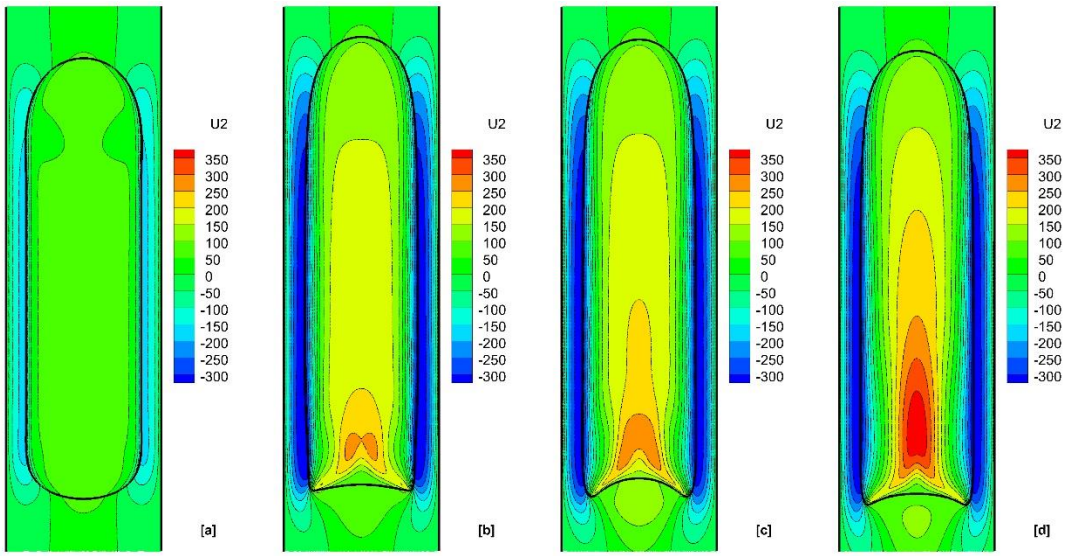
Şekil 3.3.2: İki boyutlu Taylor kabarcığı hızının zamana bağlı değişimi.

Şekil 3.3.5'de t=0.3s anında, Taylor kabarcığının tepe noktası etrafında hız şiddetinin konturu ve farklı y/D mesafelerindeki hız vektörleri gösterilmiştir. Taylor kabarcığının ötesindeki bölgede tüp ekseni boyunca radyal hızların oldukça düşük olduğu gözlemlenmiştir (Şekil 3.3.5 – Kesit D). Eksenel doğrultudaki hız ise kabarcığın ötesinde mesafenin bir fonksiyonu olarak hızla azalmaktadır. Kabarcıktan D/3 kadar mesafede hız yaklaşık olarak kabarcık hızının %7.5'i kadardır. Kabarcığın tepe noktasındaki hız ise kabarcığın hızı ile aynıdır (85.354 mm/s). Kabarcığın tepe noktasına yakın fakat tüp ekseninden uzak bölgelerde ise hız alanında radyal yönde yüksek hızlar mevcuttur (Şekil 3.3.5 – Kesit C). Bu sayede kabarcık yukarıya doğru hareket ederken bu bölgedeki akışkan (yağ) aşağıya, film tabakasına doğru hareket etmektedir. Bu bölgeden daha aşağıdaki bölgede ise radyal yönde hızlar hala mevcuttur (Şekil 3.3.5 – Kesit B). Fakat maksimum hız kabarcık üzerinde değil, film tabakasının ortalarına doğru bir yerdedir. Aşağıya doğru inmeye devam edilirse (Şekil 3.3.5 – Kesit A) radyal yöndeki hızların azaldığı fakat film tabakasının inceldiği ve hızının arttığı görülmektedir. Şekil 3.3.6'da t=0.3s anında, Taylor kabarcığı iz bölgesi etrafında hız şiddetinin konturu ve farklı y/D mesafelerindeki hız vektörleri gösterilmiştir. Bu bölgede, kabarcığın hemen altındaki bölgedeki akışkan, yukarıya doğru kabarcık hızı ile hareket etmektedir (85.354 mm/s). Kabarcığın alt noktasından biraz aşağıya inildiğinde kabarcığın tepe noktasında olduğu gibi yüksek radyal hızlar mevcuttur (Şekil 3.3.6 – Kesit A). Bu radyal hızlar film tabakasındaki akışkanın (yağ) tüpün merkezine doğru hareketini sağlamaktadır.

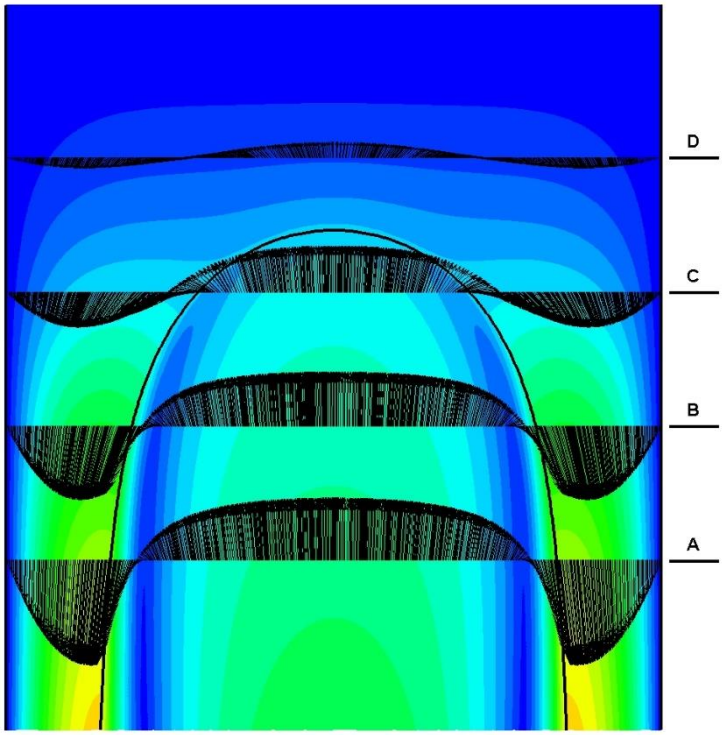
Bu noktadan aşağıya doğru inildikçe, kabarcığın tepe noktası civarında olduğu gibi akışkan (yağ) hızının ve radyal yöndeki hızların mesafenin bir fonksiyonu olarak azaldığı gözlemlenmiştir. Bu gözlemler, Bugg ve Saad (2002) tarafından üç boyutlu Taylor kabarcığı için elde edilen deneysel sonuçlarla örtüşmektedir.



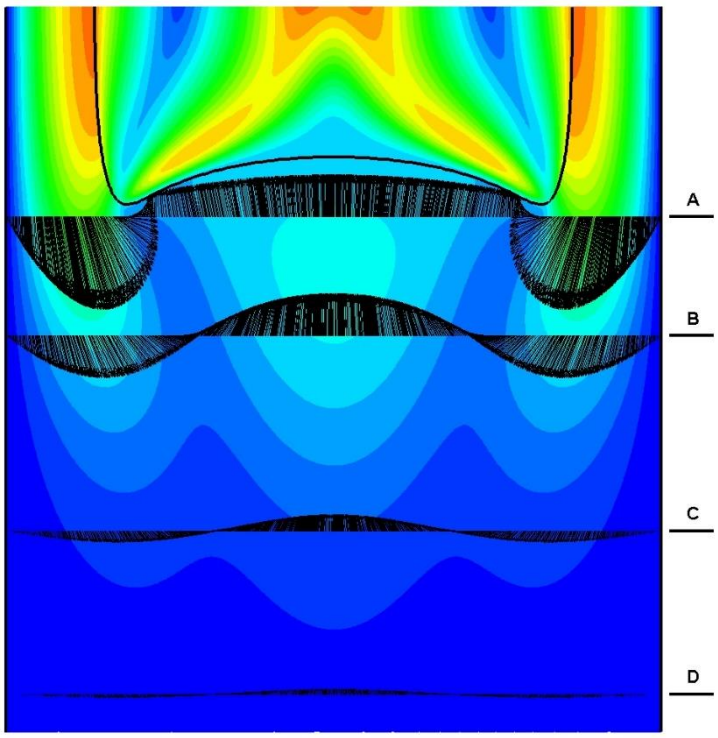
Şekil 3.3.3: Taylor kabarcığı şeklinin zamana bağlı değişimi: t=0s (a), t=0.137s (b), t=0.165s (c) ve t=0.3s (d)



Şekil 3.3.4: Taylor kabarcığı ve etrafındaki akışkanın y doğrultusundaki hız alanı konturunun zamana bağlı değişimi: t=0.02s (a), t=0.137s (b), t=0.165s (c) ve t=0.3s (d)



Şekil 3.3.5: Taylor kabarcığı tepe noktası etrafındaki hız vektörleri (t=0.3s): y/D=0.504 (a), y/D=0.299 (b), y/D=0.094 (c) ve y/D=-0.111 (d) (eksen takımı kabarcığın tepe noktasına konularak y doğrultusu aşağı yönlü olacak şekilde verilmiştir.)



Şekil 3.3.6: Taylor kabarcığı iz bölgesi etrafındaki hız vektörleri (t=0.3s): y/D=0.019 (a), y/D=0.2 (b), y/D=0.499 (c) ve y/D=0.748 (d) (eksen takımı kabarcığın en alt noktasına konularak y doğrultusu aşağı yönlü olacak şekilde verilmiştir.)

3.3.2 Üç Boyutlu Taylor Kabarcığı Problemi

Bu bölümde üç boyutlu hesaplamalar gerçekleştirilmiştir. Üç boyutlu Taylor kabarcığı için oluşturulan ağ özellikleri ve zaman adımı değerleri Tablo 3.3.4'de sunulmuştur.

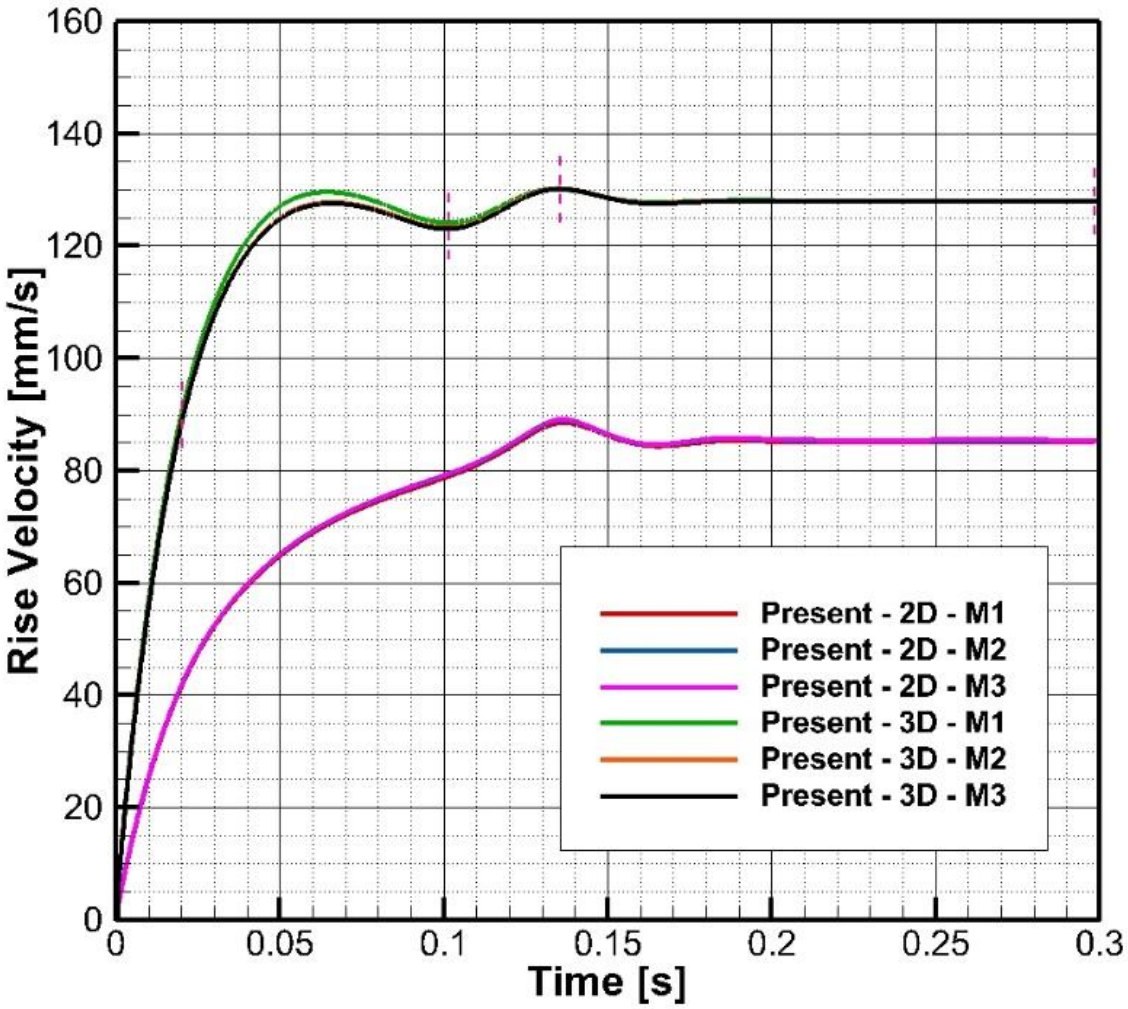
Tablo 3.3.4: Üç boyutlu Taylor kabarcığı için oluşturulan ağ özellikleri ve zaman adımı değerleri

Ağ	h_{maks}	h_{min}	Nokta #	Eleman #	Arayüz Yüzey #	Serbestlik Derecesi (DOF)	Δt
M1	2.0	0.2	101562	95174	7982	1274981	1.0×10^{-4}
M2	1.0	0.1	479952	460417	30062	6101827	1.0×10^{-4}
M3	0.5	0.05	2022442	1972759	80074	25941889	1.0×10^{-4}

Projenin bir önceki döneminde, Taylor kabarcığının alt kısmındaki aşırı ağ deformasyonlarından kaynaklı negatif hacim sorunu (t=0.084s'de) aşılmış ve kabarcığın terminal hıza ulaşması sağlanmıştır. Kabarcığın terminal hızı U_t=127. 858660 mm/s olarak elde edilmiştir. Geliştirilen algoritma, deneysel kabarcık hızını, $U_{t,d}$=131mm/s (Bugg ve Saad, 2002) %2.398 hata payı ile hesaplamaktadır. Ayrıca bu sonuçlar Gutiérrez v.d. (2017) tarafından elde edilen terminal hızlara (M2 ağ yapısı için U_t=127.7 mm/s, M3 ağ yapısı için U_t=128.6 mm/s) oldukça yakındır. Daimi hızların kıyaslaması Tablo 3.3.5'de sunulmuştur. Mevcut üç boyutlu Taylor kabarcığının hızının zamana bağlı değişimi, iki boyutlu Taylor kabarcığı ile kıyaslamalı olarak Şekil 3.3.7'de verilmiştir.

Tablo 3.3.5: Daimi hızların ve hata yüzdelerinin karşılaştırılması

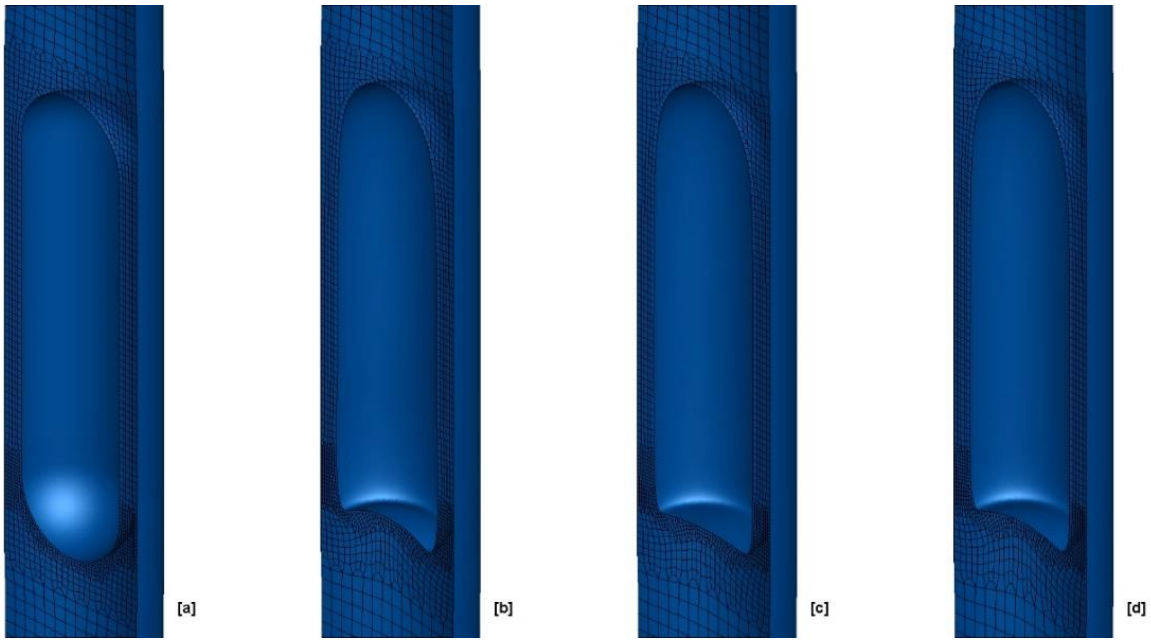
Çalışma - Ağ	Terminal Hız U_t [mm/s]	Hata E_{Ut} [%]
Mevcut - M1	127.833607	2.417094
Mevcut - M2	127.922103	2.349540
Mevcut - M3	127.858660	2.397969
Gutiérrez v.d. (2017) - M1	121.0	7.633588
Gutiérrez v.d. (2017) - M2	127.7	2.519084
Gutiérrez v.d. (2017) - M3	128.6	1.832061
Ndinisa v.d. (2005)	140.0	6.870229
Bugg ve Saad (2002)	131.0	0



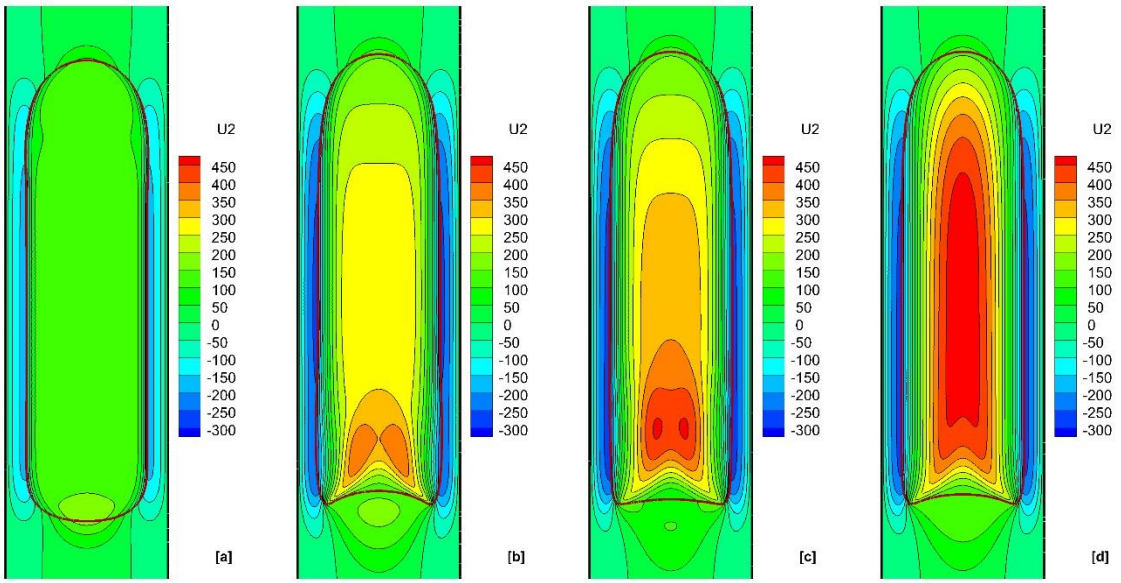
Şekil 3.3.7: İki ve üç boyutlu Taylor kabarcığı hızının zamana bağlı değişimi.

Görüldüğü üzere üç boyutlu kabarcık daha hızlı yükselmektedir. Bunun başlıca nedeni üç boyutta kabarcığın blokaj etkisinin (kabarcık kesit alanı/tüp kesit alanı) iki boyuta göre daha düşük olmasıdır. Ayrıca üç boyutlu akış rahatlama etkisinden (flow relieving effect) dolayı kabarcığın sürüklenme kuvveti azalmaktadır. Taylor kabarcığı şeklinin zamana bağlı değişimi Şekil 3.3.8'de gösterilmiştir. Kabarcığın geometrisinin eksenel simekrik olarak deforme olduğu gözlenmektedir. Kabarcığın zamanla değişimi iki boyutlu değişime benzer olmakla birlikle daha yüksek hızlarda hareket ettiği için kabarcığın alt kısmı daha fazla içeri doğru deforme olmaktadır. Bu da üç boyutta daha fazla ağ deformasyonunun yapılmasını gerektirmektedir. Dolayısı ile benzer ağ deformasyon algoritması üç boyutta yeterli olmamaktadır. Taylor kabarcığı ve etrafındaki akışkanın y-doğrultusundaki hız alanı konturunun zamana bağlı değişimi z=0 düzleminde Şekil 3.3.9'da gösterilmiştir. Seçilen

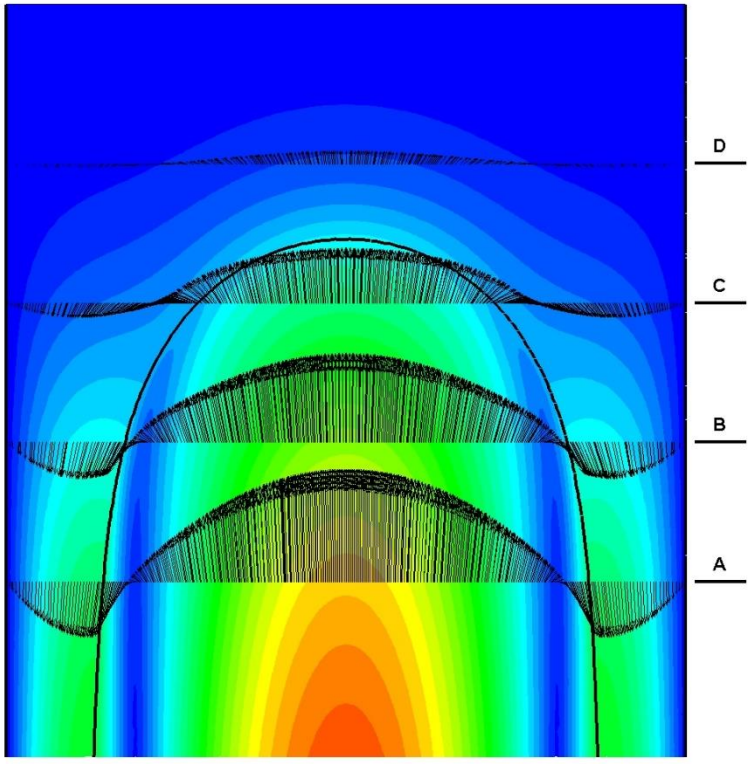
zaman adımları Şekil 3.3.7'de gösterilen kesit çizgilerine denk gelmektedir. Görüldüğü üzere kabarcığın alt kısmı daha hızlı olarak yukarı yükselmektedir. Üst kısmının ise nispeten daha düşük sabit bir hız ile yukarı doğru ilerlediği görülmektedir. Bu hareket sırasında kabarcığın çapının öncelikle üst kısımda arttığı ve bunun bir dalga hareketi olarak aşağı doğru indiği izlenmiştir. Bu durum zamanla kabarcığın boyunu kısaltmaktadır. Şekil 3.3.10'da t=0.3s anında, Taylor kabarcığı tepe noktası etrafında hız şiddetinin konturu ve farklı y/D mesafelerindeki hız vektörleri sunulmuştur. Bu hız alanının, Bugg ve Saad (2002)'ın çalışmasında Şekil 3'de verilen hız alanı ile uyumlu olduğu görülmektedir. Kabarcık içerisindeki akış alanının, iki boyutlu hesaplamalarda daha sabit bir hız ile yukarı çıktığı görülmektedir. Benzer şekilde, Taylor kabarcığı iz bölgesi etrafında hız şiddetinin konturu ve farklı y/D mesafelerindeki hız vektörleri Şekil 3.3.11'de verilmiştir. Bu bölgede elde edilen hızlar Bugg ve Saad (2002)'ın deneysel çalışmasında Şekil 8'de yer alan hız vektörleri ile uyumu olduğu görülmektedir.



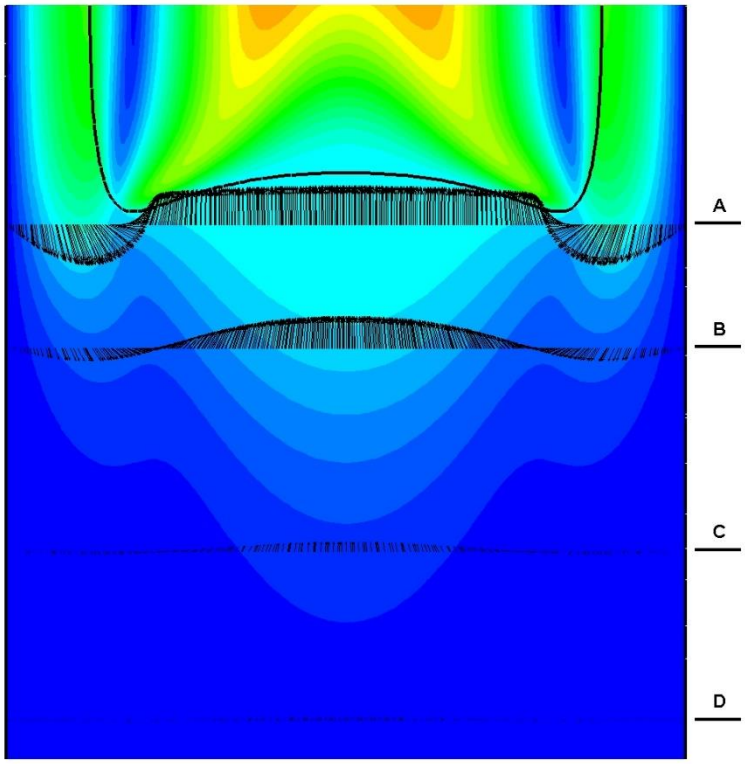
Şekil 3.3.8: Taylor kabarcığı şeklinin zamana bağlı değişimi: t=0s (a), t=0.101s (b), t=0.135s (c) ve t=0.3s (d)



Şekil 3.3.9: Taylor kabarcığı ve etrafındaki akışkanın y doğrultusundaki hız alanı konturunun zamana bağlı değişimi: t=0.02s (a), t=0.101s (b), t=0.135s (c) ve t=0.3s (d)



Şekil 3.3.10: Taylor kabarcığı hücum kenarı etrafındaki hız vektörleri (t=0.3s): y/D=0.504 (a), y/D=0.299 (b), y/D=0.094 (c) ve y/D=-0.111 (d) (eksen takımı kabarcığın tepe noktasına konularak y doğrultusu aşağı yönlü olacak şekilde verilmiştir.)



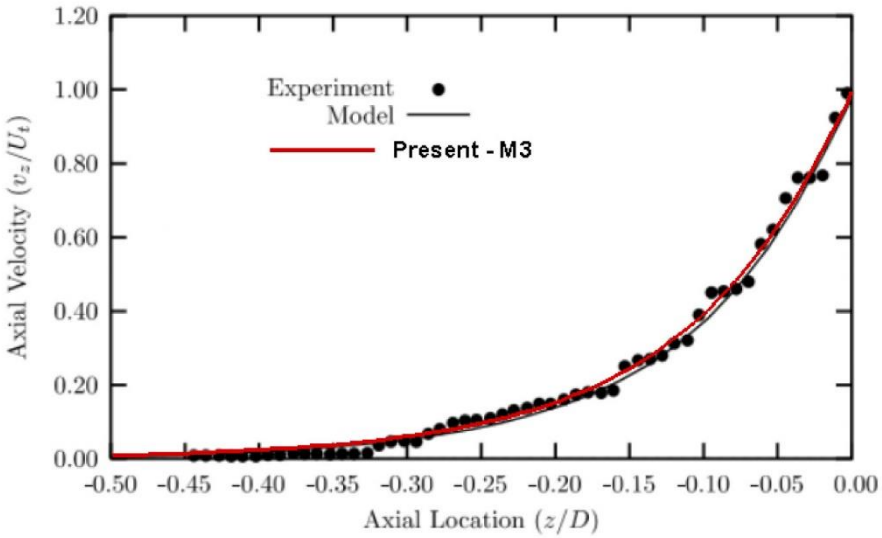
Şekil 3.3.11: Taylor kabarcığı iz bölgesi etrafındaki hız vektörleri (t=0.3s): y/D=0.019 (a), y/D=0.2 (b), y/D=0.499 (c) ve y/D=0.748 (d) (eksen takımı kabarcığın en alt noktasına konularak y doğrultusu aşağı yönlü olacak şekilde verilmiştir.)

Belirtilmelidir ki Bugg ve Saad (2002) tarafından yapılan çalışma içerisinde sunulan:

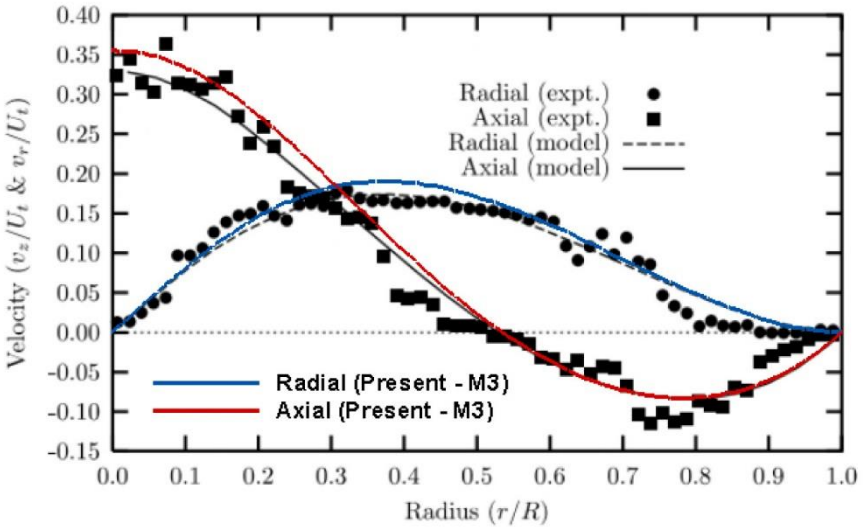
- Şekil 4: Kabarcığın üst kısmında tüp ekseni boyunca hızın eksenel doğrultudaki değişimi
- Şekil 5: Kabarcığın üst kısmında, y/D=-0.111 (Bugg ve Saad (2002)'da z ekseni, bizim çalışmamızda y eksenine denk gelmektedir.) mesafesinde, hızın eksenel ve radyal bileşenlerinin, radyal doğrultuda değişimi (bizim çalışmamızda Şekil 3.3.10'daki D kesitine denk gelmektedir.)
- Şekil 6: Kabarcığın üst kısmında, y/D=0.504 mesafesinde, hızın eksenel ve radyal bileşenlerinin, radyal doğrultuda değişimi (bizim çalışmamızda Şekil 3.3.10'daki A kesitine denk gelmektedir.)
- Şekil 9: Kabarcığın iz bölgesinde, y/D=0.2 mesafesinde, hızın eksenel ve radyal bileşenlerinin, radyal doğrultuda değişimi (bizim çalışmamızda Şekil 3.3.11'deki B kesitine denk gelmektedir.)

verilerle kıyaslama yapılmıştır. Mevcut çalışmada Şekil 3.3.10 ve Şekil 3.3.11'deki kesit konumları, Bugg ve Saad (2002) tarafından yapılan deneysel çalışma ile bütünlük sağlaması açısından aynı seçilmiştir. Böylece Bugg ve Saad (2002) tarafından yapılan çalışmada Şekil 3 ve Şekil 8'de elde edilen deneysel gözlemlere uygunluğu kıyaslanmış ve sonuçların

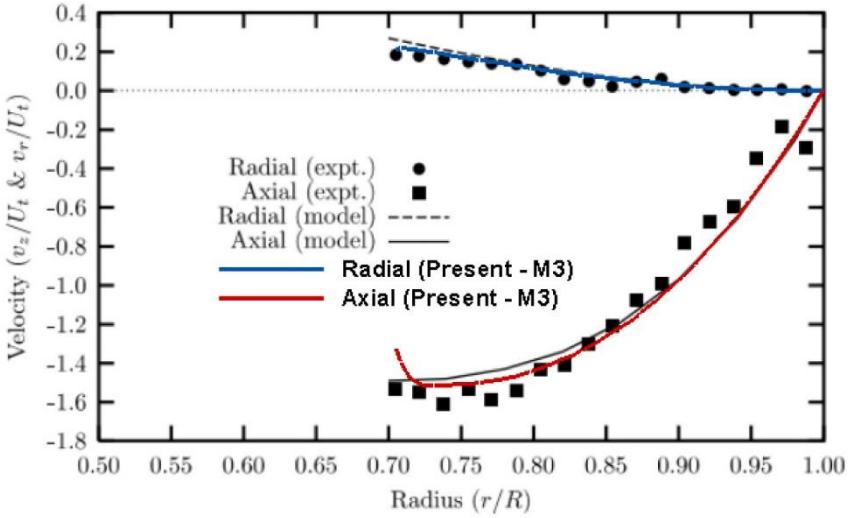
birbiriyle örtüştüğü gözlemlenmiştir. Yukarıda belirtilen ve Bugg ve Saad (2002) tarafından yapılan çalışmada sunulan Şekil 4, Şekil 5, Şekil 6 ve Şekil 9 ile yapılan kıyaslamalar aşağıda sunulmuştur.



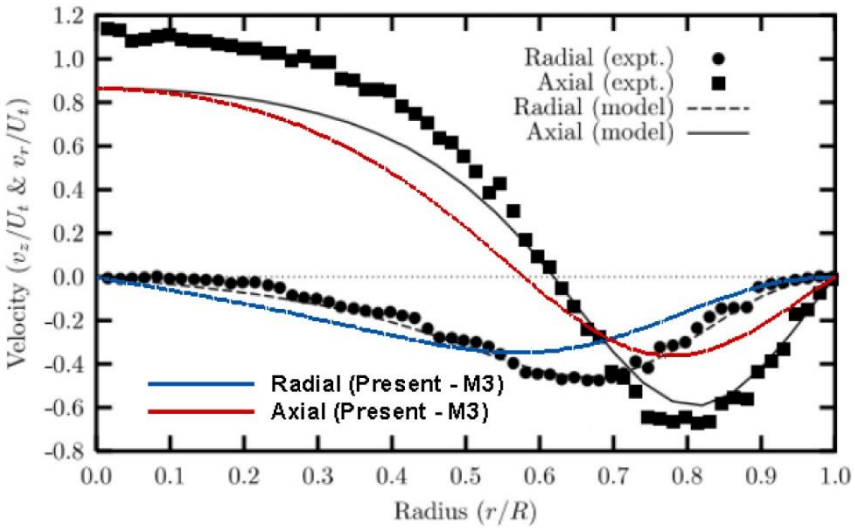
Şekil 3.3.12: Taylor kabarcığının üst bölgesinde hızın eksenel bileşenin tüp ekseni doğrultusunda değişimi (t=0.3s): mevcut çalışma (kırmızı), Şekil 4 - Bugg ve Saad (2002) (siyah) (eksen takımı kabarcığın en üst noktasına konularak z doğrultusu aşağı yönlü olacak şekilde verilmiştir.)



Şekil 3.3.13: Taylor kabarcığının üst bölgesinde, y/D=-0.111 konumunda, hızın eksenel ve radyal bileşenin radyal doğrultuda değişimi (t=0.3s): mevcut çalışma (kırmızı/mavi), Şekil 5 - Bugg ve Saad (2002) (siyah) (eksen takımı kabarcığın en üst noktasına konularak z doğrultusu aşağı yönlü olacak şekilde verilmiştir.)



Şekil 3.3.14: Taylor kabarcığının üst bölgesinde, y/D=0.504 konumunda, hızın eksenel ve radyal bileşenin radyal doğrultuda değişimi (t=0.3s): mevcut çalışma (kırmızı/mavi), Şekil 6 - Bugg ve Saad (2002) (siyah) (eksen takımı kabarcığın en üst noktasına konularak z doğrultusu aşağı yönlü olacak şekilde verilmiştir.)



Şekil 3.3.15: Taylor kabarcığının iz bölgesinde, y/D=0.2 konumunda, hızın eksenel ve radyal bileşenin radyal doğrultuda değişimi (t=0.3s): mevcut çalışma (kırmızı/mavi), Şekil 9 - Bugg ve Saad (2002) (siyah) (eksen takımı kabarcığın en alt noktasına konularak z doğrultusu aşağı yönlü olacak şekilde verilmiştir.)

Görüleceği üzere, geliştirilen algoritmada eksenel ve radyal yönlerde hız hesabından elde edilen sonuçlar Bugg ve Saad (2002) tarafından yapılan deneyde edilen sonuçlarla örtüşmektedir. Fakat Şekil 3.3.15'de, mevcut çalışmada elde ettiğimiz sonuçlar, genel eğilim

benzer olsa da Bugg ve Saad (2002) tarafından yapılan çalışmadan farklılık göstermektedir. Bunun başlıca sebebi olarak Bugg ve Saad (2002)'ın da yapmış olduğu çalışmada belirttikleri üzere, kabarcığın alt kısmı, yazarlar tarafından PIV görüntüleri üzerinden el ile çizilmiştir ve bu durum iz bölgesindeki hız vektörü tahminlerini etkilemektedir. Bu yüzden mevcut çalışmada iz bölgesinde alınan kesit alanı pozisyonunun, Bugg ve Saad (2002) tarafından verilen kesit alanı pozisyonundan farklılık göstermesi kuvvetle ihtimaldir.

3.4 Yükselen Kabarcık Problemi

Mevcut hesaplamalara ek olarak geliştirilen algoritmanın deneysel sonuçlarla doğrulanması için Hnat ve Buckmaster (1976) tarafından deneysel olarak sunulan mineral yağ içerisinde yükselen gaz kabarcığının yükselmesinin simulasyonu gerçekleştirilmiştir. Bu problem aynı zamanda nümerik olarak Gueyffier v.d. (1999) ve Yue v.d. (2007) tarafından da çözülmüştür. Probleme ilişkin hesap alanı Şekil 3.4.1'de gösterilmiştir. Hesap alanına ilişkin parametreler Tablo 3.4.1'de, problemde kullanılan akışkanlara ilişkin fiziksel parametreler Tablo 3.4.2'de sunulmuştur.

Tablo 3.4.1: Hesap alanına ilişkin parametreler

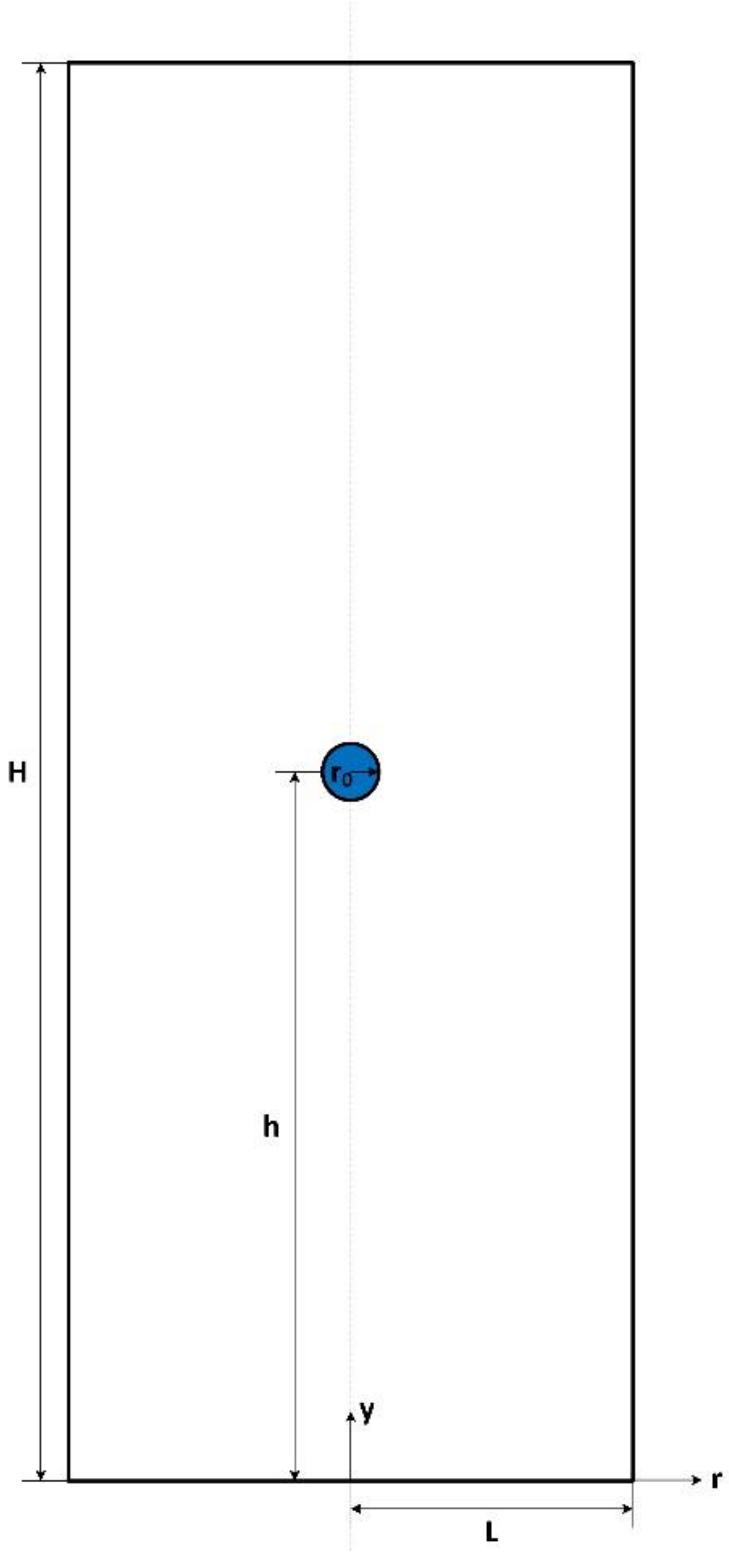
r_0 [cm]	L [cm]	H [cm]	h [cm]
0.61	$10*r_0$	$50*r_0$	$25*r_0$

Tablo 3.4.2: Akışkanlara ilişkin parametreler

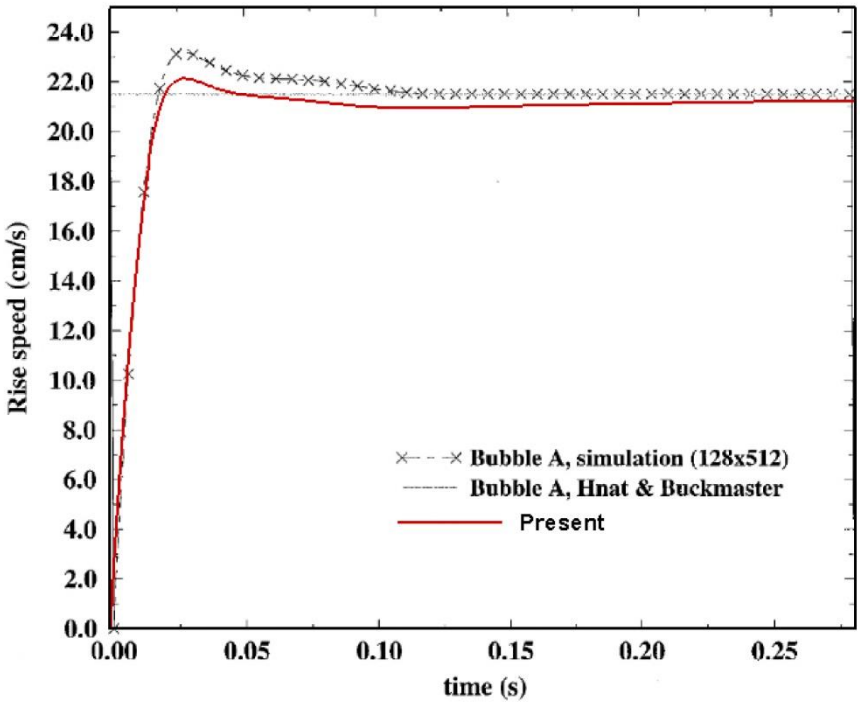
ρ_L [g/cm^3]	μ_L [g/cms]	ρ_G [g/cm^3]	μ_G [g/cms]	σ [g/s^2]	g [cm/s^2]
0.8755	1.18	0.001	0.01	32.2	980

Hnat ve Buckmaster (1976) tarafından gerçekleştirilen deneyde kullanılan tank, duvar etkileri ihmal edilebilecek seviyede geniş olduğundan, simülasyonda kullanılan hesap alanı, duvar etkilerinden kurtulmak için oldukça geniş seçilmiştir. Mevcut çalışmada elde edilen kabarcığın yükselme hızının zamana bağlı değişiminin deneyde ve Gueyffier v.d. (1999) tarafından elde edilen münerik sonuçlarla kıyası Şekil 3.4.2'de verilmiştir. Bu çalışmada t=0.3 s'deki hız değeri 21.26 cm/s olarak hesaplanırken bu değer nümerik olarak Gueyffier v.d. (1999) ve deneysel olarak Hnat ve Buckmaster (1976) tarafından 21.5 cm/s olarak verilmiştir. Hnat ve Buckmaster (1976) tarafından kabarcık içerisinde ve etrafında elde edilen akım çizgilerinin mevcut çalışmada elde edilen sonuçlarla karşılaştırılması Şekil 3.4.3'de

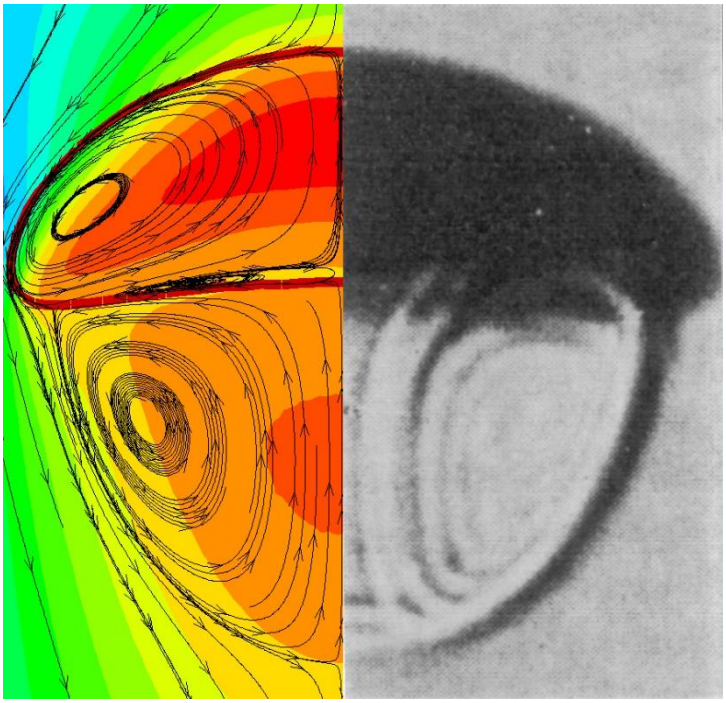
verilmiştir. Mevcut hesaplamalar deneyde elde edilen kabarcık şekli ile uyumludur ve benzer bir iz bölgesi göstermektedir.



Şekil 3.4.1: Deneysel verilerle kıyas için oluşturulan yükselen kabarcık problemi hesap alanı



Şekil 3.4.2: Kabarcık yükselme hızının zamana bağlı değişiminin kıyaslanması



Şekil 3.4.3: Mevcut çalışmada elde edilen kabarcık şeklinin ve kabarcık içerisindeki ve iz alanındaki akım çizgilerinin (soldaki) Hnat ve Buckmaster (1976) tarafından elde edilen deney sonucuyla (sağdaki) kıyaslanması

4 SONUÇLAR

Bu çalışmada çok fazlı akış problemlerinin çözümü için üç boyutlu keyfi Lagrangian – Eulerian (ALE) çözücüsü geliştirilmiştir. Geliştirilen yöntem statik damla, yükselen kabarcık ve Taylor kabarcığı problemi gibi çok fazlı akış problemlerine uygulanarak doğrulanmıştır. Projenin en önemli amacı geliştirilen çözücünün her iki fazın kütlesini ayrı ayrı makina hassasiyetinde korumasıydı. Çünkü kütlenin makina hassasiyetinde korunması, özellikle akım kararsızlıklarının analizinde olduğu gibi uzun süreli çok fazlı akışların simülasyonlarının doğruluğu açısından oldukça önemlidir. Bu projede yer alan yazarların bilgisi dahilinde literatürde sıkıştırılamaz çok fazlı akışlar için tam kütle korunumunu sağlayan herhangi bir ALE yöntemi geliştirilmemiştir. Yükselen damla problemi çalışmalarımız (bkz: Kısım 3.2) göstermiştir ki geliştirilen algoritma her iki fazın kütlelerini, ayrı ayrı makina hassasiyetinde koruyabilmektedir. Bununla birlikte, simülasyon boyunca kütle makina hassasiyetinde sabit kalmış, diğer bir deyişle korunmuştur. Bu projede elde edilmek istenen bir diğer amaç ise mevcut algoritmanın arayüzeyde, yüzey normalini ve buna bağlı olarak yüzey gerilme kuvvetlerini hassas bir şekilde hesaplayabilmesiydi. Zira çok fazlı akışların simülasyonu yüzey gerilme kuvvetinin hassas bir şekilde hesabını gerektirmektedir. Bu da yüzey normalinin hassas bir şekilde hesaplanması demektir. Aksi takdirde arayüzeyde, nümerik hatalardan kaynaklı, fiziksel olmayan parazitik akımlar ortaya çıkmaktadır ve bu hatalar zamanla artarak simülasyonun istenilen zaman adımına erişemeden durmasına sebep olmaktadır. Statik damla problemi ile yaptığımız çalışmada (bkz: Kısım 3.1) iki farklı yüzey normali hesabı (LSBSF, MWSELR) denenmiş ve sonuçlar yüzey gerilme kuvvetinden kaynaklı basınç atlamasını ifade eden Laplace yasasının analitik çözümüyle kıyaslanmıştır. Görülmüştür ki geliştirilen ALE çözücüsünde MWSELR yöntemi kullanılarak yapılan normal hesabıyla oluşan parazitik akımların mertebeleri oldukça düşüktür (u hızı bileşeni için t=0.025s'de $-4\text{x}10^{-9}$ ile $1.5\text{x}10^{-9}$ arasında) ve zamanla kaybolmaktadır. Geliştirilen algoritma daha sonra Taylor kabarcık problemine (bkz: Kısım 3.3) uygulanmıştır ve elde edilen sonuçlar hem deneysel hem de nümerik çalışmalarla kıyaslanmıştır. Hesaplamalarda kabarcık daimi hıza ulaşmış ve uzun bir süre daimi hızda, şekli sabit kalarak yükselmeye devam etmiştir. Kabarcığın üst kısmında ve iz bölgesinde belirli konumlarda hız profilleri incelenmiş ve oluşan film tabakasında radyal ve eksenel yönlerde hızların nasıl değiştiği gözlemlenmiştir. Elde edilen sonuçların deneysel ve nümerik sonuçlar ile örtüştüğü görülmüştür.

İleride yapılacak çalışmalarda aşağıdaki maddeler detaylı olarak incelenebilir:

- Mevcut algoritmanın topoloji değişimini desteklemesi. Diğer bir deyişle algoritmanın yeniden ağ oluşturma kabiliyetine sahip olması, gerektiği yerlerde yerel olarak daha ince bir ağ yapısı oluşturması ve kabarcıkların parçalanmasına/birleşmesine olanak vermesi.
- Mevcut algoritma Newtonyen olmayan (non-Newtonian) akışkan problemlerini çözmek için modifiye edilebilir.
- Temas açısının (contact angle) modellenmesi. Böylece katı yüzeylerle temasın önemli olduğu çok fazlı akış problemleri çözülebilir.
- Serbest yüzey kararsızlıklarının numerik olarak analizi. Çünkü bu tür kararsızlık endüstride ürün kalitesini önemli derecede düşürmekte ve dolayısı ile üretim hızının düşmesine (maliyetin artmasına) neden olmaktadır. Ancak bu kararsızlıklar (özellikle Newtonyen olmayan serbest yüzey kararsızlıkları) literatürde henüz tam olarak anlaşılmamıştır (örneğin ekstrüzyon, kaplama, v.b. uygulamalarda oluşan kararsızlıklar gibi).

KAYNAKLAR

1. Adelsberger, J., Esser, P., Griebel, M., Groß, S., Klitz, M. ve Rüttgers, A. 2014. "3D incompressible two-phase flow benchmark computations for rising droplets", Institut für Numerische Simulation, INS Preprint No. 1401.

2. Anderson, W. K. ve Bonhaus, D. L. 1994. "An implicit upwind algorithm for computing turbulent flows on unstructured grids", Computers & Fluids, 23, 1–21.

3. Balay, S., Buschelman, K., Eijkhout, V., Gropp, W.D., Kaushik, D., Knepley, M.G., McInnes, L.C., Smith, B.F. ve Zhang, H. 2004. "PETSc Users Manual", ANL-95/11, Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Laboratory. http://www-unix.mcs.anl.gov/petsc/petsc-2/

4. Batina, J. T. 1990. "Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes", AIAA Journal, 28(8), 1381–1388.

5. Brackbill, J., Kothe ve Zemach, C. 1992. "Continuum method for modeling surface tension", Journal of Computational Physics, 100(2), 335–354.

6. Bugg, J. D. ve Saad, G. A., 2002. "The velocity field around a Taylor bubble rising in a stagnant viscous fluid: Numerical and experimental results", International Journal of Multiphase Flow, 28(5), 791– 803.

7. Cetin, A. ve Sahin, M. 2019. "A monolithic fluid-structure interaction framework applied to red blood cells", International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, 35(2):e3171.

8. Chorin, A. J. 1968. "Numerical solution of the Navier-Stokes equations", Mathematics of Computation, 22(104), 745– 762.

9. Dai, M. ve Schmidt, D.P. 2005. "Adaptive tetrahedral meshing in free-surface flow", Journal of Computational Physics, 208(1), 228–252.

10. de Boer. A., van der Schoot. M. S. ve Bijl. H. 2007. "Mesh deformation based on radial basis function interpolation", Computers & Structures, 85, 784–795.

11. Denner, F. ve van Wachem, B. G. M. 2015. "Numerical time-step restrictions as a result of capillary waves", Journal of Computational Physcis, 285, 24–40.

12. Duarte, F., Gormaz, R. ve Natesan, S. 2004. "Arbitrary Lagrangian-Eulerian method for Navier-Stokes equations with moving boundaries", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193(45), 4819–4836.

13. Eken, A. ve Sahin, M. 2016, "A parallel monolithic algorithm for the numerical simulation of large-scale fluid-structure interaction problems", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 80(12), 687–714.

14. Erzincanli, B. ve Sahin, M. 2013. “An Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for solving moving boundary problems with large displacement and rotations”, Journal of Computational Physics, 255, 660–679.

15. Étienne, S., Garon, A. ve Pelletier, D. 2009. “Perspective on the geometric conservation law and finite element methods for ALE simulations of incompressible flow”, Journal of Computational Physics 228(7), 2313-2333.

16. Formaggia, L. ve Nobile, F. 2004. “Stability analysis of second-order time accurate schemes for ALE-FEM”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193(39-41), 4097-4116.

17. Geuzaine, P., Grandmont, C. ve Farhat, C. 2003. “Design and analysis of ALE schemes with provable second-order time-accuracy for inviscid and viscous flow simulations”, Journal of Computational Physics, 191(1), 206–227.

18. Gueyffier, D., Li, J., Nadim, A., Scardovelli, R. ve Zaleski, S. 1999. “Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows”, Journal of Computational Physics, 152(2), 423–456.

19. Gutiérrez, E., Balcázar, N., Bartrons, E. ve Rigola, J. 2017. “Numerical study of Taylor bubbles rising in a stagnant liquid using a level-set/moving-mesh method”, Chemical Engineering Science, 164, 158–177.

20. Gunstensen, A. K., Rothman, D. H., Zaleski, S. ve Zanetti, G. 1991. “Lattice Boltzmann model of immiscible fluids”, Physical Review A, 43(8), 4320–4327.

21. Guventurk, C. and Sahin, M., 2017, An arbitrary Lagrangian-Eulerian framework with exact mass conservation for the numerical simulation of 2D rising bubble problem. International Journal for Numerical Methods in Engineering, (available online).

22. Harlow, F. H. ve Welch, J. E. 1965. “Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface”, The Physics of Fluids, 8(12), 2182-2189.

23. Hirt, C. W., Amsden, A. A. ve Cook, J. L. 1974. “An arbitrary Lagrangian Eulerian computing method for all flow speeds”, Journal of Computational Physics, 14(3), 227–253.

24. Hirt, C. W. ve Nichols, B. D. 1981. “Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries”, Journal of Computational Physics, 39, 201–225.

25. Hnat, J. G. ve Buckmaster, J. D. 1976. “Spherical cap bubbles and skirt formation”, Physics of Fluids, 19(2), 182–194.

26. Hysing, S., Turek, S., Kuzmin, D., Parolini, N., Burman, E., Ganesan, S. ve Tobiska, L. 2009, Quantitative benchmark computations of two-dimensional bubble dynamics. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 60, 1259-1288.

27. Idelsohn, S. R., Mier-Torrecilla, M., Nigro N. ve Oñate, E. 2010. “On the analysis of heterogeneous fluids with jumps in the viscosity using a discontinuous pressure field”, Computational Mechanics, 46(1), 115–124.

28. Johnson, A. ve Tezduyar, T. 1994. “Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 119(1-2), 73–94.

29. Johnson, A. ve Tezduyar, T. 1999. “Advanced mesh generation and update methods for 3D flow simulations”, Computational Mechanics 23(2), 130–143.

30. Karypis, G. ve Kumar, V. 1998. “A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs”, SIAM Journal on Scientific Computing, 20(1), 359–392.

31. Koobus, B. ve Farhat, C. 1999. “Second-order time-accurate and geometrically conservative implicit schemes for flow computations on unstructured dynamic meshes”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 170(1-2), 103–129.

32. Lamb, H. 1975. Hydrodynamics (6. Basım). Cambridge: Cambridge University Press.

33. Marchand, A., J. Weijs, H., Snoeijer, J. H. ve Andreoti, B. 2011. “Why is surface tension a force parallel to the interface?”, American Journal of Physics ,79(10), 999–1008.

34. Max, N. L. 1999. “Weights for computing vertex normals from facet normals”, Journal of Graphics Tools, 4(2), 1–6.

35. Moës, N., Dolbow, J. ve Belytschko, T. 1999. “A finite element method for crack growth without remeshing”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46(1), 131-150.

36. Monaghan, J. J. 1994. “Simulating free surface flows with SPH”, Journal of Computational Physics, 110(2), 399–406.

37. Montefuscolo, F., Sousa, F. S. ve Buscaglia, G. C. 2014. “High-order ALE schemes for incompressible capillary flows”, Journal of Computational Physics, 278, 133-147.

38. Ndinisa, N. V., Wiley, D. E. ve Fletcher, D. F., 2005. "Computational fluid dynamics simulations of Taylor bubbles in tubular membranes", Chemical Engineering Research and Design, 83(1), 40–49.

39. Osher, S. J. ve Sethian, J. A. 1988. “Front propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations”, Journal of Computational Physics, 79(1), 12–49.

40. Perot, B. ve Nallapati, R. 2003. “A moving unstructured staggered mesh method for the simulation of incompressible free-surface flows”, Journal of Computational Physics, 184(1), 192–214.

41. Peskin, C. S. 2002. “The immersed boundary method”, Acta Numerica 11, 479-517.

42. Saad, Y. 1993. “A flexible inner-product preconditioned GMRES algorithm”, SIAM Journal on Scientific Computing 14(2), 461–469.

43. Sahin, M. ve Mohseni, K. 2009. “The numerical simulation of flow patterns generated by the hydromedusa aequorea victoria using an arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation”, Journal of Computational Physics, 228(12), 4588–4605.

44. Safi, M. A. ve Turek, S. 2015. “Efficient computations for high density ratio rising bubble flows using a diffused interface, coupled Lattice Boltzmann-level set scheme”, Computers & Mathematics with Applications, 70(6), 1290–1305.

45. Thomas, P. D. ve Lombard, C. K. 1979. “Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids”, AIAA Journal, 17(10), 1030-1037.

46. Tryggvason, G., Bunner, B., Esmaeeli, A., Juric, D., Al-Rawahi, N., Tauber, W., Han, J., Nas, S. ve Jan, Y. - J. 2001. “A front-tracking method for the computations of multiphase flow”, Journal of Computational Physics, 169(2), 708-759.

47. Tryggvason, G., Scardovelli, R. ve Zaleski, S. 2011. “Direct numerical simulations of gas–liquid multiphase flows”, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom.

48. Tuković, Ž. ve Jasak, H. 2012. “A moving mesh finite volume interface tracking method for surface tension dominated interfacial fluid flow”, Computers & Fluids, 55, 70–84.

49. Turek, S., Mierka, O. ve Bäumler, K. 2017 “Numerical benchmarking for 3D multiphase flow: New results for a rising bubble”, Technical Report, No:580, Fakultät für Mathematik, TU Dortmund.

50. Unverdi, S. O. ve Tryggvason, G. 1992. “A front-tracking method for viscous incompressible multiphase flows”, Journal of Computational Physics, 100(1), 25–37.

51. Walkley, M. A., Gaskell, P. H., Jimack, P. K., Kelmanson, M. A. ve Summers, J. L. 2005. “Finite element simulation of three-dimensional free-surface flow problems with dynamic contact lines”, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 47(10-11), 1353-1359.

52. Yue, P., Feng, J. J., Bertelo, C. A. ve Hu, H. H. 2007. “An arbitrary Lagrangian–Eulerian method for simulating bubble growth in poylmer foaming”, Journal of Computational Physics, 226(2), 2229–2249.

TÜBİTAK

PROJE ÖZET BİLGİ FORMU

Proje Yürütücüsü: Prof. Dr. Mehmet ŞAHİN
Proje No: 217M358
Proje Başlığı: Çok Fazlı Akışlar için Tam Kütle Korunumlu Keyfi Lagrangian-Eulerian (ALE) Formülasyonu
Proje Türü: 1001 – Araştırma
Proje Süresi: 24
Araştırmacılar: Prof. Dr. Mehmet ŞAHİN (Yürütücü) Çağatay GÜVENTÜRK (Bursiyer)
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi: İstanbul Teknik Üniversitesi Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi, Uzay Mühendisliği Bölümü, Maslak, 34469, İstanbul
Destekleyen Kuruluş(ların) Adı ve Adresi: Destekleyen kuruluş yoktur.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri: 01/05/2018 – 01/05/2020
Onaylanan Bütçe: 204878,00
Harcanan Bütçe: 127284,68
Öz (en çok 70 kelime) Bu projede sıkıştırılamaz çok fazlı akış problemlerinin çözümü için keyfi Lagrangian Eulerian (ALE) çözücüsü geliştirilmiştir. Algoritmanın parazitik akımları minimize etmesine ve her iki fazın kütlelerini ayrı ayrı makina hassasiyetinde korumasına özen gösterilmiştir. Statik damla, yükselen kabarcık (nümerik ve deneysel) ve Taylor kabarcık problemi simülasyonları gerçekleştirilerek sonuçlar literatürdeki çalışmalarla kıyaslanmış ve algoritma geçerli kılınmıştır.
Anahtar Kelimeler: Yapısal Olmayan Sonlu Hacimler Yöntemi, ALE Yöntemleri, İki Fazlı Akışlar, Sıkıştırılamaz Viskoz Akışlar, Geometrik Korunum Yasası, Kütle Korunumu, Bağlaşık Çözücüler.
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu mu? **Evet** ☐ **Gerekli Değil X** Fikri Ürün Bildirim Formu'nun tesliminden sonra 3 ay içerisinde patent başvurusu yapılmalıdır.

Projeden Yapılan Yayınlar:

1. Guventurk, C. ve Sahin, M, An Arbitrary Lagrangian Eulerian Approach with Exact Mass Conservation for the Numerical Simulation of the 3D Rising Bubble Problem. 7th European Conference on Computational Fluid Dynamics, Glasgow, UK, 11-15 Haziran 2018.

2. Guventurk, C. ve Sahin, M., An ALE Framework with Exact Mass Conservation for the Numerical Simulation of Rising Bubble Problem. 2018 Symposium on Advances in Thermal & Fluid Sciences, Izmir, TURKEY, 28-29 Haziran 2018.

3. Guventurk, C. ve Sahin, M., An Arbitrary Lagrangian Eulerian Formulation with Exact Mass Conservation for the Numerical Simulation of a Rising Bubble in a Viscoelastic Fluid. 10th International Conference on Computational Fluid Dynamics, Barcelona, SPAIN, 9-13 Temmuz 2018.

4. Guventurk, C. ve Sahin, M., An arbitrary Lagrangian-Eulerian Formulation with Exact Mass Conservation for the Numerical Simulation of a Three-Dimensional Rising Bubble Problem. 71st Annual Meeting of APS DFD, Atlanta, GA, USA, 18-20 Kasım 2018.

5. Guventurk, C. ve Sahin, M., An Implicit ALE Formulation for Multiphase Flow. 31st International Conference on Parallel CFD, Antalya, TURKEY, 14-17 Mayıs 2019.