T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİLİĞİN TOPOLOJİK UZAYLARDA AYRIŞIMI VE α-I_α-IRRESOLUTE FONKSİYONLAR

Ali Haydar KOCAMAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya, 2007

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL yönetiminde yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora Tezi olarak sunulmuştur.

Tez çalışmamı büyük bir titizlik ve sabırla takip ederek çalışmamın her safhasında bilgi ve desteğiyle hep yanımda olan sayın hocam Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL'e sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca yardımcı tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ahu AÇIKGÖZ 'e teşekkür ederim.

Ali Haydar KOCAMAN

T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜREKLİLİĞİN TOPOLOJİK UZAYLARDA AYRIŞIMI VE α-I_α-IRRESOLUTE FONKSİYONLAR

Ali Haydar KOCAMAN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 25.07.2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

(Danışman)

Prof. Dr. Ahmet Ali ÖCAL

(Üye)

Doç. Dr. Kemal AYDIN

(Üye)

Yrd. Doç. Dr. Ahu AÇIKGÖZ

(Üye)

Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI

(Üye)

ÖZET

Doktora Tezi

SÜREKLİLİĞİN TOPOLOJİK UZAYLARDA AYRIŞIMI VE α-I_α-IRRESOLUTE FONKSİYONLAR

Ali Haydar KOCAMAN

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
2007, Sayfa : 64

Jüri : Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
Prof. Dr. Ahmet Ali ÖCAL
Doç. Dr. Kemal AYDIN
Yrd. Doç. Dr. Ahu AÇIKGÖZ
Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; tezin giriş bölümü bulunmaktadır. Bu bölümde, tezde kullanılan kavramların kısaca literatür bilgilerini verdik.

İkinci bölümü üç kısımda inceledik. Birinci kısımda, tezin içeriği için topolojik uzaylarda gerekli olan temel kavramları verdik. İkinci kısımda, tezin içeriği için ideal topolojik uzaylarda gerekli olan temel kavramları verdik. Üçüncü kısımda ise, topolojik uzaylarda ve ideal topolojik uzaylarda verilen küme kavramlarının karşılaştırmaları ve özellikleri verildi.

Üçüncü bölümde, α-açık küme ve local kapalı küme kavramlarından yararlanarak elde edilen αlc-küme, slc-küme, plc-küme, βlc-küme, αglc-küme, sglc-küme, pglc-küme, βglc-küme, αrglc-küme, srglc-küme, prglc-küme, βrglc-küme [15] kavramlarını ve bazı özelliklerini vererek, bu kavramların karşılaştırmalarından bir diagram elde ettik. Daha güçlü olan strongly süreklilik çeşitlerini tanımlayıp, karşılaştırmalarını yaparak yeni bir diagram oluşturduk. Bu strongly süreklilik kavramlarının topolojik uzaylarda bazı yeni özelliklerini verip, diğer bazı çalışmaları da göz önüne alarak bir diagram elde ettik. Ayrıca verilen strongly αlc-irresolute [41], α-irresolute [46], semi α-irresolute [13], strongly semi β-irresolute [14] ve irresolute [23] fonksiyonlarının ayrışımlarını elde ettik.

Dördüncü bölümde ise, α-I_α-irresolute fonksiyon kavramını vererek, ideal topolojik uzaylardaki diğer fonksiyonlarla karşılaştırmasını yaptık ve bazı özelliklerini inceledik. Ayrıca, α-I_α-irresolute fonksiyonlarının ideal topolojik uzaylarda bazı yeni özelliklerini elde ettik.

Anahtar Kelimeler : α-açık küme, αlc-küme, local kapalı(LC) küme, semi-açık küme, pre-açık küme, β-açık küme, α-*I*-açık küme, sürekli fonksiyon, ideal topolojik uzay, submaximal uzay, extremally disconnected uzay.

ABSTRACT

THESİS FOR DOCTORATE

DECOMPOSITION OF CONTINUITY

IN TOPOLOGICAL SPACES AND α-I_α-IRRESOLUTE FUNCTIONS

Ali Haydar KOCAMAN

Selcuk University

Graduate School and Natural and Applied Science

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

2007, Pages: 64

Jury

Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL

Prof. Dr. Ahmet Ali ÖCAL

Doç. Dr. Kemal AYDIN

Yrd. Doç. Dr. Ahu AÇIKGÖZ

Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI

This work consists of four chapter. In the first chapter; an introduction and some brief literature knowledge for some parameters have been given.

Second chapter has been studies in three parts. In the first section of the chapter, the basic parameters necessary in the topological spaces fort the content of thesis have been given. In the second section of the chapter, the basic parameters necessary in the ideal topological spaces fort the content of thesis have been given. In the third section of the chapter, the comparison and the properties of the sets parameters of topological and ideal topological spaces have been given.

In the third chapter, a diagram has been obtained by giving some properties of the sets of αlc-set, slc-set, plc-set, βlc-set, αglc-set, sglc-set, pglc-set, βglc-set, αrglc-set, srglc-set, prglc-set, βrglc-set[15] obtained by using parameters of α-open and local closed set and from their comparison. We have constructed a diagram by defining the

kinds of strongly continuity and comparing them. We have also obtained a diagram by giving some novel properties of the strongly continuities in topological spaces and considering some other works. On the other hand, the decomposition of the given strongly αlc-irresolute [41], α-irresolute [46], semi α-irresolute [13], strongly semi β-irresolute [14] and irresolute [23] functions has been obtained.

In the fourth chapter, we have given α-I_α-irresolute function concept in ideal topological spaces and compared them with other functions and studies some properties. In addition, we have obtained some novel properties of α-I_α-irresolute function concept in ideal topological spaces.

Keywords : α-open set, αlc-set, local closed(LC) set, semi-open set, pre-open set, β-open set, α-*I*-open set, continuous function, ideal topological space, submaximal space, extremally disconnected space.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ i
ÖZET iii
ABSTRACT v
İÇİNDEKİLER vii
GÖSTERİMLER viii
1. GİRİŞ 1
2. TOPOLOJİK UZAYLAR VE İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI KÜME ÇEŞİTLERİNİN İNCELENMESİ .....……..3
2.1. Topolojik Uzay ve α-Sürekliliğin Ayrışımı 3
2.2. İdeal Topolojik Uzay …….. 10
2.3. Topolojik Uzay ile İdeal Topolojik Uzayda Küme Çeşitleri ve Özellikleri.14
3. TOPOLİK UZAYLARDA BAZI KUVVETLİ FONKSİYON TİPLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ ……. 23
3.1. Topolojik uzaylarda Tanımlanan Bazı Küme Çeşitleri ve Özellikleri 24
3.2. Topolojik Uzaylarda Bazı kuvvetli Fonksiyon Tiplerinin Genelleştirilmesi (Strongly αlc-preirresolute Fonksiyonlar) ……. 28
3.3. Strongly αlcβ-irresolute Fonksiyonlar …….....39
4. α-I_α-İRRESOLUTE FONKSİYONLAR 49
4.1. α- I_α-irresolute Fonksiyon Kavramı ve Özellikleri 49
KAYNAKLAR 59

GÖSTERİMLER

$\forall$	: Her
$\in$	: Ait
$\notin$	: Ait değil
$\neq$	: Eşit değil
$\Rightarrow$	: Gerek şart
$\Leftarrow$	: Yeter şart
$\varnothing$	: Boş küme
X	: Evrensel küme
P(X)	: Güç kümesi
$A \subset B$	: B, A kümesini kapsar
$A \not\subset B$	: B, A kümesini kapsamaz
$A \cap B$	: A kesişim B
$A \cup B$	: A birleşim B
A-B	: A fark B
I	: İdeal
τ	: Topolojik yapı
(X,τ)	: Topolojik uzay
$\alpha O(X)$	: (X,τ) topolojik uzayındaki tüm α-açık kümelerin ailesi
PO(X)	: (X,τ) topolojik uzayındaki tüm pre-açık-kümelerin ailesi
$\beta O(X)$	: (X,τ) topolojik uzayındaki tüm β-açık kümelerin ailesi
$N_{(X)}$	: (X,τ) topolojik uzayında x noktasının açık komşuluklar ailesi
N	: Hiçbir yerde yoğun olmayan kümelerin ideali
τ/S	: $S \subset X$ kümesi üzerindeki alt uzay topolojisi
I_S	: $S \subset X$ kümesi üzerindeki ideal
$(S,\tau/S)$	: Alt topolojik uzay
(X,τ,I)	: İdeal topolojik uzay
$\alpha I O(X)$	: (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki tüm α-I-açık kümelerin ailesi
$PIO(X)$	: (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki tüm pre-I-açık kümelerin ailesi
$SIO(X)$	: (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki tüm semi-I-açık kümelerin ailesi
$\beta I O(X)$	: (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki tüm β-I-açık kümelerin ailesi

1. BÖLÜM

1. GİRİŞ

1933 yılında Kuratowski [40], ideal kavramı yardımıyla bir topolojik uzayda **lokal fonksiyon** kavramını verdi ve bu fonksiyonun özelliklerini inceledi. Ardından 1945 yılında Vaidyanathaswamy [68], lokal fonksiyon kavramından yararlanarak bir kapanış işlemi tanımladı ve kapanış işlemi ile elde ettiği kapalı kümelerden yeni bir topoloji oluşturdu ve oluşturduğu bu topolojinin tabanını elde etti. 1964 yılında Hayashi [34], kendi adını verdiği yeni bir uzay tanımladı. Daha sonra 1975 yılında Samuels [66], lokal fonksiyon kavramını ele alarak, idealleri değiştirmekle genel topolojide bildiğimiz kapanış noktası, yığılma noktası, yoğunlaşma noktası ve ikinci kategoriden nokta kavramlarına, lokal fonksiyonun eşit olduğunu gösterdi. Böylece lokal fonksiyon kavramının bu nokta kavramlarının bir genellemesi olduğu sonucuna vardı. 15 yıl (1990) sonra D. Janković ve T. R. Hamlett [37] lokal fonksiyon kavramı ile ilgili o zamana kadar yapılan tüm çalışmaları ayrıntılı bir şekilde incelediler ve bu kavramla ilgili yeni özellikler elde ettiler.

Ganster and Reilly [26], 1989 yılında lokal kapalı kümeler ve LC-sürekli fonksiyon kavramı ile ilgili çalışmalar yaptılar. Daha sonra topolojik uzaylarda α-açık küme [53], lokal kapalı (kısaca, LC) küme [21], semi-açık küme [43], pre-açık küme [48], β-açık küme [1], g-kapalı küme [44], rg-kapalı küme [60], αlc-küme [8] kavramlarını ve strongly α-irresolute [45], strongly α-sürekli [12] fonksiyon kavramlarını tanımladılar. 1996 yılında Dontchev [24] LC-süreklilikden daha güçlü olan kontra-süreklilik kavramını elde etti. Son zamanlarda matematikçiler ve fizikçiler tarafından topolojik uzaylarda süreklilik ve irresolute fonksiyonlarla ilgili birçok yeni araştırmalar ve çalışmalar yapılmaktadır ([16], [22]).

İlk defa 1933 yılında tanımlanmış ve daha sonraki yıllarda esas alınarak incelenmiş olan lokal fonksiyon kavramı ile ilgili zamanımıza kadar çeşitli araştırmalar yapılmış ve önemli sonuçlar bulunmuştur. Günümüzde de araştırmacılar için yeni buluşlara itici önemli bir çalışma konusu olmuştur.

Genel anlamda, bir f fonksiyonunun sürekliliği şöyle ifade edilir:

(X,τ) ve (Y,υ) topolojik uzayları ile $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer bir $x \in X$ noktası ve $f(x)$ noktasının her $V \subset Y$ komşuluğu için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasının bir U komşuluğu varsa, f fonksiyonuna **x noktasında süreklidir** denir. Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında sürekli ise bu durumda f fonksiyonuna **süreklidir** denir.

Bu tezin içeriğinde geçen (X,τ) topolojik uzayı; üzerinde hiçbir ayırma aksiyomu olmayan uzay olarak alınacaktır. Ayrıca (X,τ) topolojik uzayındaki herhangi bir $A \subset X$ kümesinin kapanışı $\overline{A}$ ve bu kümenin içi de A° sembolü ile gösterilecektir.

Bu tezin birinci bölümünün ikinci kısmında ve dördüncü bölümünde geçen (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki herhangi bir $A \subset X$ kümesinin kapanışını çalışma boyunca ; $Cl^{*}(A)$ sembolü ile ya da $\overline{A}^{*}$ sembolü ile göstereceğiz.

2. BÖLÜM

2. TOPOLOJİK UZAYLAR VE İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI KÜME ÇEŞİTLERİNİN İNCELENMESİ

Bu bölüm üç ayrı kısımdan oluşmaktadır.

Birinci kısımda tezin içeriği için gerekli olan topolojik uzaylarda tanımlanan temel kavramları vereceğiz.

İkinci kısımda tezin içeriği için gerekli olan ideal topolojik uzaylarda tanımlanan temel kavramları vereceğiz.

Üçüncü kısımda ise ; bazı küme kavramlarını verip, birinci ve ikinci kısımda verilen küme çeşitleri ile karşılaştırmasını yaparak gerekli ters örnekleri inceleyeceğiz.

2.1. Topolojik Uzay ve α-Sürekliliğin Ayrışımı

Önce topolojik uzaylarda kullanacağımız bazı küme kavramlarını verelim.

Tanım 2.1.1. (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer A kümesi için,

a) $A \subset A^{\circ\,\overline{\ }\,\circ}$ ise; A kümesine **α-açık küme** [53],

b) $A \subset A^{\circ\,\overline{\ }}$ ise; A kümesine **semi-açık küme** [43],

c) $A \subset A^{\overline{\ }\,\circ}$ ise; A kümesine **pre-açık küme** [48],

d) $A \subset A^{\overline{\ }\,\circ\,\overline{\ }}$ ise; A kümesine **β-açık küme** [1]

denir.

Yukarıda verilen α-açık küme, semi-açık küme, pre-açık küme, β-açık küme ailelerini (X,τ) topolojik uzayında sırasıyla $\tau^{\alpha} = \alpha O(X)$, $SO(X)$, $PO(X)$, $\beta O(X)=SPO(X)$ ile göstereceğiz. $\tau^{\alpha} = \alpha O(X)$ ailesinin X de bir topoloji oluşturduğu 1965 yılında Njåstad tarafından [53] ;

$\tau \subset \tau^{\alpha} = PO(X) \cap SO(X) \subset \beta O(X)$ olduğu gösterilmiştir.

Tanım 2.1.1 den aşağıdaki diagram elde edilir.

Açık küme → α-açık küme → pre-açık küme
↓ ↓
semi-açık küme → β-açık küme

Diagram 2.1 : Kümelerin karşılaştırması

Sürekliliğin ayrışımını ilk defa, 1961 yılında N. Levine [42] vermiştir.

Tanım 2.1.2 [42]. $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin. $f(x)$ noktasını kapsayan her $V \subset Y$ açık kümesi için $f(U) \subset \overline{V}$ olacak şekilde x noktasın kapsayan bir $U \subset X$ açık kümesi varsa, f fonksiyonuna **zayıf sürekli** denir.

Tanım 2.1.3 [39]. (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Herhangi bir $x \in X$ noktasını kapsayan her $V \subset X$ açık kümesi için, $\overline{W} \subset V$ olacak şekilde x noktasını kapsayan bir $W \subset X$ açık kümesi varsa, (X,τ) uzayına **regüler** (düzenli) **uzay** denir.

Her sürekli fonksiyon zayıf süreklidir, fakat bunun tersi genellikle doğru değildir. Tersinin doğru olabilmesi için değer uzayına regüler uzay eklenmelidir.

Lemma 2.1.1 [42]. (Y,υ) uzayı bir regüler uzay olsun. $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun zayıf sürekli olmasıdır.

Lemma 2.1.2 [53]. Her açık küme α-açıktır.

İspat : (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ açık alt kümesi verilsin. A kümesi açık olduğundan $A = A^\circ$ olur. Bu durumda $A \subset \overline{A^\circ}$ olduğundan, $A \subset \overline{A^\circ}$ elde edilir. Böylece A kümesi α-açık bir kümedir.

Uyarı 2.1.1. α-açık bir kümenin açık olması gerekmez. Ayrıca her kapalı kümenin α-kapalı olduğu açıktır, fakat bunun tersi genellikle doğru değildir.

Örnek 2.1.1. $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X,\varnothing,\{a\}\}$ topolojisi ve (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde $\alpha O(X)=\{X,\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$ olduğu açıktır. Buradan $\{a,b\}$ kümesi bir α-açık kümedir, fakat $\{a,b\}$ kümesi açık bir küme değildir. Ayrıca $\{b\}$ kümesi bir α-kapalı kümedir, fakat kapalı bir küme değildir.

Lemma 2.1.3 [53]. (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A\subset X$ kümesi verilsin. Bu takdirde $A\in\alpha O(X)$ olması için gerek ve yeter şart her $B\in SO(X)$ için $A\cap B\in SO(X)$ olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$ **:** $A\in\alpha O(X)$ olsun. Her $B\in SO(X)$, $x\in A\cap B$ noktası ve bir $U\in\tau$ $(x\in U)$ kümesi verilsin. $A\in\alpha O(X)$ olduğundan, $A\subset A^{\circ\,-\,\circ}$ olur. Buradan $U\cap A^{\circ\,-\,\circ}$ kümesi açık bir kümedir ve x noktasını kapsar. $B\in SO(X)$ olduğundan, $B\subset B^{\circ\,-}$ ve $x\in B^{\circ\,-}$ olur. Kapanış noktası tanımından, $(U\cap A^{\circ\,-\,\circ})\cap B^{\circ}\neq\varnothing$ dır. $V=(U\cap A^{\circ\,-\,\circ})\cap B^{\circ}$ alalım. $V\subset A^{\circ\,-}$ olduğundan, $\varnothing \neq V\subset A^{\circ} = U\cap(A^{\circ}\cap B^{\circ})$ elde edilir. Bu durumda $x\in(A^{\circ}\cap B^{\circ})^{-}$ dir. Bu takdirde $A\cap B\subset(A^{\circ}\cap B^{\circ})^{-}$ olur. Böylece $A\cap B\in SO(X)$ bulunur.

$\Leftarrow$**:** Her $B\in SO(X)$ için $A\cap B\in SO(X)$ olsun. Bu takdirde $A\in SO(X)$ olur. Varsayalım ki A kümesi α-açık olmasın. Bu takdirde bir $x\in A\cap(X-A^{\circ\,-\,\circ})$ elemanı vardır. $B = X-A^{\circ\,-}$ alalım. Buradan $x\in B^{-}$ dir. Dolayısıyla $\{x\}\cup B\in SO(X)$ olur. Böylece $A\cap(\{x\}\cup B)\in SO(X)$ elde edilir. Ayrıca $A\cap(\{x\}\cup B)=\{x\}$ dir. O halde $\{x\}$ kümesi açıktır. Bu durumda $x\in A^{\circ\,-}$ iken $x\in A^{\circ\,-\,\circ}$ olur. Bu ise kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla $A\subset A^{\circ\,-\,\circ}$ olur. Böylece A kümesi açıktır.

Lemma 2.1.4 [52]. (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde $\alpha O(X)$ ailesi, X üzerinde bir topolojik yapıdır.

İspat : a_1] $X,\varnothing\in\alpha O(X)$ olduğu açıktır.

a_2] Her $i\in I$ için $A_i\in\alpha O(X)$ olsun. Bu durumda her $i\in I$ için $A_i\subset A_i^{\circ\,-\,\circ}$ olur. Buradan $\bigcup_{i\in I} A_i \subset A_i^{\circ\,-\,\circ}\subset(\bigcup_{i\in I} A_i^{\circ})^{-\,\circ}\subset(\bigcup_{i\in I} A_i)^{\circ\,-\,\circ}$ olur. Böylece $\bigcup_{i\in I} A_i \in\alpha O(X)$ dir.

a_3] A_1, $A_2\in\alpha O(X)$ olsun. $A_1\in\alpha O(X)$ olduğundan, Lemma 2.1.3 den her $B\in SO(X)$ için $A_1\cap B\in SO(X)$ olur. $A_2\in\alpha O(X)$ olduğundan aynı Lemma dan $A_1\cap A_2\cap B\in SO(X)$ elde edilir. Böylece her $B\in SO(X)$ için $(A_1\cap A_2)\cap B\in SO(X)$

olduğundan, yine Lemma 2.1.3 den $A_1 \cap A_2 \in \alpha O(X)$ olur. Dolayısıyla $\alpha O(X)$ ailesi, X üzerinde bir topolojidir

.

Lemma 2.1.5 [53]. Her α-açık küme semi-açıktır.

Uyarı 2.1.2. Semi-açık bir kümenin α-açık olması gerekmez.

Örnek 2.1.2. $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ topolojisi ve (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde $\alpha O(X)=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ve $SO(X)=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$ olur. Bu durumda $\{a,c\}$ kümesi bir semi-açık kümedir, fakat α-açık değildir.

Uyarı 2.1.3. Semi-açık kümeler ailesi, genellikle bir topolojik yapı oluşturmaz. Çünkü Örnek 2.1.2 deki $\{a,c\},\{b,c\} \in SO(X)$ için $\{a,c\} \cap \{b,c\}=\{c\} \notin SO(X)$ dir.

Tanım 2.1.4 [53]. (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer her $U \in \tau$ için $U^{-} \in \tau$ ise (X,τ) uzayına extremally disconnected uzay denir.

Lemma 2.1.6 ([53], [58]). (X,τ) topolojik uzayı verilsin. SO(X) ailesinin X üzerinde bir topoloji olması için gerek ve yeter şart X uzayının extremally disconnected uzay olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$: SO(X) ailesi, X üzerinde bir topolojik olsun. Varsayalım ki X uzayı extremally disconnected uzay olmasın. Bu takdirde $A^{-} \in \tau$ olacak şekilde bir $A \in \tau$ vardır. $x \in A^{-} - A^{-\circ}$ alalım. $B=\{x\} \cup A^{-\circ}$ ve $C=X - A^{-\circ}$ olsun. $B^{-\circ} \supset A^{-\circ-} = A^{-} \supset \{x\}$ ve $C^{\circ-} = X - A^{-\circ} = C \supset \{x\}$ elde edilir. Böylece $B,C \in SO(X)$ dir. $X \in A^{-} - A^{-\circ}$ olduğundan $B \cap C = \{x\}$ kümesi açık değildir. Dolayısıyla semi-açık küme de değildir. Bu durumda SO(X) ailesi, X üzerinde bir topoloji oluşturmaz. Bu ise bir çelişkidir. O halde X uzayı bir extremally disconnected uzaydır.

$\Leftarrow$: (X,τ) topolojik uzayı extremally disconnected uzay olsun.

a_1] $X,\varnothing \in SO(X)$ olduğu açıktır.

a_2] Her $i \in I$ için $A_i \in SO(X)$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $A_i \subset A_i^{\circ -}$ olur. Buradan $\bigcup_{i \in I} A_i \subset A_i^{\circ -} \subset (\bigcup_{i \in I} A_i^{\circ})^{-} \subset (\bigcup_{i \in I} A_i)^{\circ -}$ elde edilir. Böylece $\bigcup_{i \in I} A_i \in SO(X)$ dir.

a_3] A, $B \in SO(X)$ olsun. X extremally disconnected uzay olduğundan, $A^{\circ -} \in \tau$ olur. Buradan $A \cap B \subset A^{\circ -} \cap B^{\circ -} \subset (A^{\circ -} \cap B^{\circ -})^{-} \subset (A \cap B)^{\circ -}$ elde edilir. Böylece $A \cap B \in SO(X)$ olur. Sonuç olarak SO(X) ailesi, X üzerinde bir topolojidir.

Lemma 2.1.7 [55]. Her α-açık küme pre-açıktır.

Uyarı 2.1.4 [57]. Pre-açık bir kümenin α-açık olması gerekmez.

Örnek 2.1.3 [57]. $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \varnothing, \{a,b\}\}$ topolojisi ve (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde $\alpha O(X) = \{X, \varnothing, \{a,b\}\}$ ve $PO(X) = \{X, \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$ olur. Bu durumda {a} kümesi pre-açık bir kümedir, fakat semi-açık değildir.

Uyarı 2.1.5 [57]. Pre-açık kümeler ailesi, genellikle bir topoloji oluşturmaz. (X,τ) topolojik uzayı extremally disconnected uzay olsa bile bir topoloji olması gerekmez. Çünkü Örnek 2.1.3 de ki (X,τ) topolojik uzayı extremally disconnected uzaydır ve $\{a,c\}, \{b,c\} \in PO(X)$ için $\{a,c\} \cap \{b,c\} = \{c\} \notin PO(X)$ dir. Ayrıca Örnek 2.1.2 de ki (X,τ) topolojik uzayını alırsak, {a,c} kümesi semi-açıktır, fakat pre-açık değildir. O halde pre-açık küme kavramı, semi-açık küme kavramından bağımsızdır.

Lemma 2.1.8 [55]. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Bu takdirde A kümesinin α-açık olması için gerek ve yeter şart A kümesinin semi-açık ve pre-açık olmasıdır.

İspat $\Rightarrow$ **:** $A \in \alpha O(X)$ olsun. Bu takdirde Lemma 2.1.5 den A kümesi semi-açıktır. Lemma 2.1.7 dan A kümesi pre-açıktır.

$\Leftarrow$**:** $A \in SO(X)$ ve $A \in PO(X)$ olsun. Bu takdirde $A \in SO(X)$ olduğundan, $A \subset A^{\circ -}$ olur. Buradan $A^{-} \subset A^{\circ - -} = A^{\circ -}$ ve $A^{- \circ} \subset A^{\circ - \circ}$ elde edilir. $A \in PO(X)$ olduğundan, $A \subset A^{- \circ}$ olur. Böylece A kümesi α-açıktır.

Tanım 2.1.5 [49]. f:(X,τ) → (Y,υ) fonksiyonu verilsin. Y uzayının her açık kümenin ters görüntüsü X uzayında α-açık bir küme ise, f fonksiyonuna **α-sürekli** denir.

Lemma 2.1.9 [49]. f:(X,τ) → (Y,υ) fonksiyonu verilsin. Bu takdirde aşağıdakiler eşdeğerdir.

(a) f fonksiyonu α-süreklidir.

(b) Her $x \in X$ noktası ve f(x) noktasını kapsayan her $V \subset Y$ açık kümesi için $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasını kapsayan bir $U \subset X$ α-açık kümesi vardır.

(c) Y uzayındaki her kapalı kümenin ters görüntüsü, X uzayında α-kapalıdır.

Lemma 2.1.10 [49]. Her sürekli fonksiyon α-süreklidir.

Uyarı 2.1.6 [49]. α-sürekli bir fonksiyonun sürekli olması gerekmez.

Örnek 2.1.4 [49]. X = {a,b,c} kümesi üzerinde τ = {X,∅,{a}} topolojisi verilsin. f : (X,τ) → (X,τ) fonksiyonu f(a)=f(b)=a ve f(c)=c ile tanımlansın. Bu takdirde αO(X)={X,∅,{a},{a,b},{a,c}} olur. Böylece f fonksiyonu α-süreklidir, fakat sürekli değildir.

Tanım 2.1.6 [43]. f:(X,τ) → (Y,υ) fonksiyonu verilsin. Y uzayının her açık kümesinin ters görüntüsü X uzayında semi-açık bir küme ise, f fonksiyonuna **semi-sürekli** denir.

Lemma 2.1.11 [49]. Her α-sürekli fonksiyon semi-süreklidir.

İspat : Lemma 2.1.5 den görülür.

Uyarı 2.1.7 [56]. Semi-sürekli bir fonksiyonun α-sürekli olması gerekmez.

Örnek 2.1.5 [56]. $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X,\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ve $\upsilon=\{X,\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,c\}\}$ topolojileri verilsin. $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ birim fonksiyonu semi-süreklidir.

Tanım 2.1.7 [48]. $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Y uzayının her açık kümenin ters görüntüsü X uzayında pre-açık bir küme ise, f fonksiyonuna **pre-sürekli** denir.

Lemma 2.1.12 [49]. Her α-sürekli fonksiyon pre-süreklidir.

İspat : Lemma 2.1.7 den görülür.

Uyarı 2.1.8 [56]. Pre-sürekli bir fonksiyonun α-sürekli olması gerekmez.

Örnek 2.1.6 [56]. $f : (\mathbf{R},\{\mathbf{R},\emptyset\}) \to (\mathbf{R},\mathbf{P}(\mathbf{R}))$ birim fonksiyonu pre-süreklidir, fakat semi sürekli değildir.

Tanım 2.1.8 [35]. $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu ve herhangi bir $x \in X$ noktası verilsin. f(x) noktasının her $V \subset Y$ açık komşuluğu için $f^{-1}(V)^{-}$ kümesi, x noktasının bir komşuluğu ise f fonksiyonuna Husain anlamında **hemen hemen sürekli** denir.

Uyarı 2.1.9 [49]. Pre-süreklilik ile Husain anlamında hemen hemen süreklilik çakışmaktadır.

Uyarı 2.1.10 [56]. Örnek 2.1.5 (Örnek 2.1.6) den $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu semi-sürekli (Pre-sürekli) ve Y regüler uzay ise f fonksiyonu sürekli değildir.

Sonuç 2.1.1 [49]. $f:(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu α-sürekli ve Y regüler uzay ise f fonksiyonu süreklidir.

İspat : Lemma 2.1.1 den görülür.

A. S. Mashhour ve ark [49] de α-sürekliliğin bir ayrışımını verdiler.

Teorem 2.1.1 [49]. f : $(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonunun α-sürekli olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun semi-sürekli ve pre-sürekli olmasıdır.

İspat : Lemma 2.1.8 den görülür.

Sonuç 2.1.2 [62]. f:$(X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu semi-sürekli ve pre-sürekli ise f fonksiyonu zayıf süreklidir.

İspat : Teorem 2.1.1 in sonucudur.

2.2. İdeal Topolojik Uzay

Öncelikle, ideal topolojik uzay için gerekli bazı kavramları verelim.

Tanım 2.2.1 [40]. Topolojik uzayın bir x noktasının bir (p) özelliğine sahip bir U komşuluğu varsa; uzay x noktasında **(p) özelliğine sahiptir** denir.

Kuratowski [40]; Tanım 2.2.1 de incelediğimiz kavramın değilini alarak, bir noktada verilen bu kavramı bir kümeye genişletti. Daha sonra; (p) özelliği yerine ideal kavramını alarak, lokal fonksiyon kavramını tanımladı ve bu fonksiyonun bazı özelliklerini verdi.

Şimdi bu çalışmada gerekli olan lokal fonksiyon kavramına geçmeden önce; belli özelliklere (kalıtımsallık ve sonlu toplamsallık) sahip kümelerin oluşturduğu bir alt aile olan, ideal kavramı ile ilgili bazı hatırlatmalar yapalım:

Tanım 2.2.2 [40]. Boş olmayan bir X kümesi verilsin. P(X) güç kümesi olmak üzere; boş olmayan bir $I \subset P(X)$ ailesi,

a) $A \in I$ ve $B \subset A$ ise, $B \in I$ (kalıtımsallık özelliği)

b) $A, B \in I$ ise, $(A \cup B) \in I$ (sonlu toplamsallık özelliği)

şartlarını sağlıyorsa; bu takdirde I ailesine, X kümesi üzerinde bir **ideal**dir denir.

En sık karşılaşılan idealler; minimal ideal ($I = \{\varnothing\}$), sonlu kümelerin ideali (I_f), sayılabilir kümelerin ideali (I_c), hiçbir yerde yoğun değil kümelerin ideali (I_n), ölçülebilir kümelerin ideali (I_m) ve maksimal ideal ($I = P(X)$) olarak bilinir [37].

Tanım 2.2.3 [40]. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Ayrıca; I ailesi, X kümesi üzerinde bir ideal olsun. Bu takdirde,

$$\mathbf{A^*(I,\tau)} = \{ x \in X \mid \forall U \in N_{(x)} \text{ için, } (U \cap A) \notin I \}$$

kümesine, A kümesinin I ideali ve τ topolojisine bağlı **Lokal Fonksiyonu** denir.

Tez boyunca, karışıklığa neden olmadıkça; $A^*(I,\tau)$ sembolü yerine, A^* sembolünü kullanacağız. [37] de belirtildiği gibi, A^* sembolü ile, A kümesinin lokal fonksiyonundan bahsetmiş olacağız.

Lemma 2.2.1 [40]. (X,τ) topolojik uzayı, X kümesi üzerinde bir I ideali ile $A,B \subset X$ kümeleri verilsin. Bu takdirde; aşağıdaki özellikler sağlanır :

a) Eğer $A \subset B$ ise; $A^* \subset B^*$,

b) $A^* = (A^*)^- \subset A^-$,

c) $(A^*)^* \subset A^*$,

d) $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$,

e) $(A \cap B)^* \subset A^* \cap B^*$,

f) $(A^* - B^*) \subset (A - B)^*$,

g) Eğer $U \in \tau$ ise; $(U \cap A^*) \subset (U \cap A)^*$

Vaidyanathaswam [68]; Kuratowski [40] tarafından verilen

$$^* : P(X) \to P(X)$$

şeklinde tanımlı lokal fonksiyon kavramını, 1945 yılında yeniden ele aldı ve lokal fonksiyon yardımıyla önce yeni bir fonksiyon tanımladı. Sonra bu fonksiyonun bir Kuratowski kapanış işlemi olduğunu gösterdi. Ayrıca, tanımladığı fonksiyon yardımıyla, yeni bir topoloji elde etti. Daha sonra bu konudaki çalışmalarını ayrıntılı biçimde [69] da verdi.

Şimdi, sırasıyla bu iki kavramı inceleyelim :

Tanım 2.2.4 [69]. (X,τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Herhangi bir $A \subset X$ kümesi için, $Cl^*(A) = A \cup A^*$ şeklinde tanımlanan $Cl^*: P(X) \to P(X)$ fonksiyonu; bir Kuratowski kapanış işlemidir.

Tanım 2.2.5 [69]. (X,τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Bu takdirde,

$$\tau^*(I) = \{ U \subset X \mid (X - U)^{-*} = (X - U) \}$$

şeklinde tanımlanan $\tau^*(I)$ ailesi, X kümesi üzerinde bir topoloji belirtir. Bu topoloji, τ topolojisinden daha ince bir topolojidir.

[37] de önce; minimal ideal ($I = \{\varnothing\}$) ve maksimal ideal ($I = P(X)$) kullanılarak $\tau^*(I)$ topolojileri elde edildi. Sonra; diğer idealler, bu iki ideal arasında yer aldığından, onlara karşılık gelen $\tau^*(I)$ topolojileri ile ilgili sonuçlar verildi.

1) $I = \{\varnothing\}$ için, $A^* = A^-$ ve $A^{-*} = A^-$ olduğundan $\tau^*(I) = \tau$,

2) $I = P(X)$ için, $A^* = \varnothing$ ve $A^{-*} = A$ olduğundan; $\tau^*(I) = P(X)$ elde edilir.

1) ve 2) ifadelerinden faydalanarak, şu sonuçlar verildi:

(X,τ) topolojik uzayı verilsin. X kümesi üzerindeki her I ideali için, $\{\varnothing\} \subset I \subset P(X)$ olduğundan ;

$$\tau = \tau^*(\{\varnothing\}) \subset \tau^*(I) \subset \tau^*(P(X)) = P(X)$$

olduğu görüldü. Bununla birlikte (X,τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde, $I \subset J$ olacak şekilde I ve J gibi iki ideal verildiğinde; Lemma 2.2.1 (c) den $\tau^*(I) \subset \tau^*(J)$ bağıntısı elde edildi.

1960 yılında Vaidyanathaswamy [69], $\tau^*(I)$ topolojisinin açık kümelerini daha basit ifade etmek için, bir topoloji tabanı tanımladı.

Tanım 2.2.6 [69]. (X,τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Bu takdirde;

$$\beta(I, \tau) = \{ U \setminus I \mid U \in \tau,\ I \in I \}$$

ailesi $\tau^*(I)$ topolojisi için, bir tabandır.

Janković ve Hamlet [37], topolojik uzay ve ideal kavramlarını kullanarak, ideal topolojik uzay adlı yeni bir kavram tanımladılar :

Tanım 2.2.7 [37]. (X,τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde tanımlı I ideali verilsin. I ideali ile birlikte (X,τ) topolojik uzayına, **ideal topolojik uzay** denir ve (X,τ,I) şeklinde gösterilir.

İdeal topolojik uzaylar üzerinde süren çalışmalar, bazı özel uzayların da tanımlanmasına imkan verdi. Şimdi bu uzaylardan bazılarını ele alalım :

Tanım 2.2.8 [34]. (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. Eğer $X = X^*$ ise, bu takdirde (X,τ,I) ideal topolojik uzayına, **Hayashi uzayı** denir.

Tanım 2.2.9 [66]. (X,τ,I) ideal topolojik uzayında $\tau \cap I = \{\varnothing\}$ ise bu takdirde (X,τ,I) ideal topolojik uzayına **Samuels uzayı** denir.

Janković ve Hamlet [37], aslında farklı yıllarda verilen Hayashi uzayı ile Samuels uzayı kavramlarının çakışık olduklarını gösterdiler ve bu iki kavramı, Hayashi-Samuels uzayı olarak adlandırdılar. Ayrıca; bu uzayı karakterize eden bazı özellikleri de verdiler :

Lemma 2.2.2 [37]. (X,τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Bu takdirde; aşağıdaki özellikler birbirine denktir:

a) $X = X^*$;

b) $\tau \cap I = \{\varnothing\}$;

c) Eğer $I \in I$ ise, $I^\circ = \varnothing$;

d) Her $U \in \tau$ kümesi için, $U \subseteq U^*$

Tanım 2.2.10. (X,τ,I) ideal topolojik uzayının $A \subset X$ kümesine,

a) $A \subset (A^*)^\circ$ ise; ***I*-açık** küme [2],

b) $A \subset ((A^\circ)^{-*})^\circ$ ise; **α-*I*-açık** küme [32],

c) $A \subset (A^\circ)^{-*}$ ise; **semi-*I*-açık** küme [32],

d) $A \subset ((A)^{-*})^\circ$ ise; **pre-*I*-açık** küme [25],

e) $A \subset ((A^{-*})^\circ)^-$ ise; **β-*I*-açık** küme [32]

denir.

Tanım 2.2.10 dan aşağıdaki akış diagramı elde edilir.

Açık küme → α-*I*-açık küme → semi-*I*-açık küme

↓ ↓

I-açık küme → pre-*I*-açık küme → β-*I*-açık küme

Diagram 2.2 : İdeal topolojik uzayda kümelerin karşılaştırılması

2.3. Topolojik Uzaylar ile İdeal Topolojik Uzaylarda Verilen Kümelerin Karşılaştırılması ve Özellikleri

1933 yılında Kuratowski [40] ve 1945 yılında Vaidyanathaswamy [68] tarafından ele alınan genel topolojideki ideal kavramı, 1964-1976 yılları arasında Hashimoto [31], Hayashi [34], Newcomb [52] ve Njastad [54] tarafından çalışıldı. İdeal topolojik uzay kavramı ise; 1990-1995 yılları arasında, bazı genel topolojistler ([2], [3], [4], [27], [28], [29], [30], [37], [38], [51], [64], [65]) için önemli bir çalışma konusu oldu. Genel topolojideki kompaktlık ve süreklilik kadar pek çok topolojik kavram, bu çalışmalarda ideal topolojik uzay için genelleştirildi. Bunlar, (X,τ) topolojik uzayında tanımlanan genelleştirilmiş açık kümelerin, (X,τ,I) ideal topolojik uzayına aktarılması ile elde edildi.

Öncelikle, genel topolojide verilen bazı kümeleri ve ideal topolojik uzaylarda bu kümelere karşılık gelen küme çeşitlerini ele alacağız. Ardından; bu kümeler arasında elde edilen karşılaştırmaları inceleyeceğiz. Daha sonra ise; topolojik uzaylar ve ideal topolojik uzaylarda, bazı kümeler için yeni karşılaştırmalar vereceğiz.

Tanım 2.3.1 [37]. (X,τ,I) ideal topolojik uzayının $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer $A^* \subset A$ ise, A kümesine **τ^*-kapalı küme** denir.

Tanım 2.1.1 ve Tanım 2.3.1 ile verilen kümeler için, [25] ve [32] da verilen karşılaştırmalar, aşağıdaki akış diagramında yer almaktadır. Diagramın akış yönündeki gerektirmelerin terslerinin doğru olmadığı, aynı yazarlar tarafından örneklerle verildi.

Ayrıca; açık küme ile *I*-açık küme kavramlarının birbirinden bağımsız oldukları da [2] de gösterildi.

Aşağıdaki diagram topolojik uzaylar ile ideal topolojik uzaylardaki kümelerin karşılaştırılmasını göstermektedir :

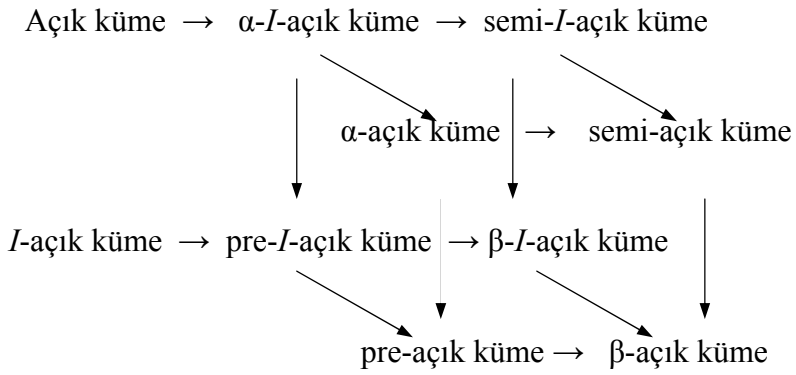


Diagram 2.3 : Topolojik uzaylar ile ideal topolojik uzaylardaki kümelerin karşılaştırılması

Tanım 2.3.2 [67]. (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer A kümesi $(A^{-})^{\circ} = A$ şeklinde ise, A kümesine **regüler açık küme** denir.

Tanım 2.3.3. (X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer A kümesi için;

(ı) $(A^{-*})^{\circ} = A$ ise; A kümesine **R-*I*-açık küme** [72],

(ıı) $(A^{*})^{\circ} = A$ ise, A kümesine **s-*I*-açık küme** [6],

(ıii) $A = ((A^{-*})^{\circ})^{-}$ ise, A kümesine **w-*I*-küme** [7],

(ıv) $(A^{-*})^{\circ} \subset (A^{\circ})^{-*}$ ise, A kümesine **δ-*I*-açık küme** [71],

(v) $A^{o} = (A^{-*})^{\circ}$ ise; A kümesine **t-*I*-küme** [32],

(vı) $A^{o} = ((A^{o})^{-*})^{\circ}$ ise; A kümesine **α^{*}-*I*-küme** [32],

(vıı) $A \subset ((A^{-*})^{\circ})^{-*}$ ise; A kümesine **strong β-*I*-açık küme** [33],

(vıii) $A = A^{*}$ ise; A kümesine ***-perfect küme** [34]

denir.

(X,τ) topolojik uzayındaki bütün regüler açık kümelerin ailesini τ_R, (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki bütün R-I-açık kümelerin ailesini RIO(X,τ), α-I-açık kümelerin ailesini αIO(X,τ), semi-I-açık kümelerin ailesini S$IO(X,\tau)$, δ-I-açık kümelerin ailesini δIO(X,τ), pre-I-açık kümelerin ailesini PIO(X,τ), s-I-açık kümelerin ailesini sIO(X,τ) ve w-I-kümelerin ailesini de w$I(X,\tau)$ sembolü ile göstereceğiz.

Tanım 2.2.10, Tanım 2.3.1, Tanım 2.3.2 ve Tanım 2.3.3 de verilen küme kavramlarının sağladığı özellikler [6] da aşağıdaki biçimde incelenmiştir :

Önerme 2.3.1. (X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve herhangi bir $A\subset X$ kümesi verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır :

(ı) Her R-I-açık küme, açık kümedir ;

(ıı) Her s-I-açık küme, açık kümedir ;

(ıı) Her s-I-açık küme, I-açık kümedir.

İspat. (ı) Herhangi bir $A \subset X$ kümesi R-I-açık bir küme olsun. Bu takdirde, Tanım 2.3.3 (ı) ifadesinden, $(A^{-*})^\circ = A$ eşitliği var olup, buradan $(A^{-*})^\circ = A^o$ ifadesini yazabiliriz. Bu son ifadede $(A^{-*})^\circ$ kümesi yerine A yazılırsa $A = A^o$ elde edilir ki bu ise bize A kümesinin açık bir küme olduğunu gösterir.

(ıı) Herhangi bir $A \subset X$ kümesi s-I-açık bir küme olsun. Bu takdirde, Tanım 2.3.3 (ıı) ifadesinden, $(A^*)^\circ = A$ eşitliği var olup, buradan $(A^*)^\circ = A^o$ ifadesini yazabiliriz. Bu son ifadede $(A^*)^\circ$ kümesi yerine A yazılırsa $A = A^o$ elde edilir ki bu ise bize A kümesinin açık bir küme olduğunu gösterir.

(ıı) Herhangi bir $A \subset X$ kümesi s-I-açık bir küme olsun. Bu takdirde Tanım 2.3.3 (ıı) den, $(A^*)^\circ = A$ eşitliği yazılır. Buradan $A \subset (A^*)^\circ$ ifadesi sağlandığından, Tanım 2.2.10 (a) den, A kümesi I-açık küme olur.

Uyarı 2.3.1. Önerme 2.3.1 de verilen özelliklerin tersleri genellikle doğru değildir.

Örnek 2.3.1. $X = \{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\varnothing, X, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ, I) ideal topolojik uzayı verilsin. $A = \{c\} \subset X$ kümesi açık bir küme olmasına rağmen R-I-açık bir küme

değildir. A = {c} kümesi için, $A^{-*} = X$ olup $(A^{-*})^{o} = X$ ve böylece $(A^{-*})^{o} \neq A$ elde edilir. O halde Tanım 2.3.3 (ı) den A kümesinin R-*I*-açık bir küme olmadığı bulunur.

Örnek 2.3.2. X = {a,b,c,d} kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,b\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{b\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. A = {b} $\subset$ X kümesi açık bir küme olmasına rağmen s-*I*-açık bir küme değildir. Ancak $A^{*} = \emptyset$, $(A^{*})^{\circ} = \emptyset$, ve $(A^{*})^{\circ} \neq A$ olduğundan Tanım 2.3.3 (ıı) den, A kümesi s-*I*-açık bir küme değildir.

Örnek 2.3.3. X = {a,b,c,d} kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{b\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. A = {a,c} $\subset$ X kümesi *I*-açık bir küme olmasına rağmen s-*I*-açık bir küme değildir. A = {a,c} kümesi için, $A^{*} = X$, $(A^{*})^{o} = X$ ve $A \subset (A^{*})^{o}$ olup Tanım 2.2.10 (a) ifadesinden A kümesi *I*-açık bir küme ancak $(A^{*})^{o} \neq A$ olduğundan A kümesi s-*I*-açık bir küme değildir.

Uyarı 2.3.2. R-*I*-açık küme ile s-*I*-açık küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

Önerme 2.3.2 [6]. (X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer $A \in \tau$ ve A kümesi *-perfect küme ise, bu takdirde A kümesi s-*I*-açık kümedir.

İspat. Herhangi bir $A \subset X$ kümesi açık ve *-perfect bir küme olsun. Bu takdir de $A^{o} = A$ ve Tanım 2.3.3 (vıı) den, $A^{*} = A$ ifadelerini yazabiliriz. Böylece $(A^{*})^{o} = A$ eşitliği elde edilir ki Tanım 2.3.3 (ıı) ifadesinden, A kümesi s-*I*-açık küme olur.

Uyarı 2.3.3. R-*I*-açık küme ile *I*-açık küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

Önerme 2.3.3 [6]. (X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer A kümesi *I*-açık küme ve τ^{*}-kapalı küme ise, bu takdirde A kümesi s-*I*-açık kümedir.

İspat. Herhangi bir $A \subset X$ kümesi *I*-açık ve τ^{*}-kapalı küme olsun. Bu takdirde Tanım 2.2.10 (a) den, $A \subset (A^{*})^{o}$ ve Tanım 2.3.1 den, $A^{*} \subset A$ ifadelerini yazabiliriz.

Buradan $(A^*)^o \subset A^* \subset A$ ve böylece $(A^*)^o = A$ eşitliği elde edilir ki Tanım 2.3.3 (ıı) ifadesinden, A kümesi s-*I*-açık küme olur.

Önerme 2.3.1, Önerme 2.3.2 ve Önerme 2.3.3 den yaralanarak aşağıdaki diyagram elde edilir.

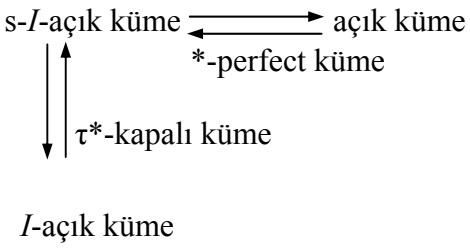


Diagram 2.4 : Kümelerin karşılaştırması

Uyarı 2.3.4. *I*-açık küme ile τ*-kapalı küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

Uyarı 2.3.5. Açık küme ile *-perfect küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

N. Levine [42] de zayıf sürekliliğin (weakly continuity) bir ayrışımını elde etmiştir. Bu süreklilik çeşidi ve dağılımı (X,τ,*I*) ideal topolojik uzaylarda Açıkgöz ve ark. tarafından [7] de verilmiştir :

Önerme 2.3.4. (X,τ,*I*) ideal topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır :

(ı) Her w-*I*-küme, kapalı kümedir ;

(ıı) Her w-*I*-küme, β-*I*-açık kümedir.

İspat. (ı) Herhangi bir $A \subset X$ kümesi w-*I*-küme olsun. Bu takdirde, Tanım 2.3.3 (ııı) ifadesinden, $A = ((A^{-*})^{\circ})^{-}$ eşitliği var olup, buradan $A^{-} = ((A^{-*})^{\circ})^{-}$ ifadesini yazabiliriz. Bu son ifadede $((A^{-*})^{\circ})^{-}$ kümesi yerine A yazılırsa $A = A^{-}$ elde edilir ki bu ise bize A kümesinin kapalı bir küme olduğunu gösterir.

(ıı) Herhangi bir $A \subset X$ kümesi w-*I*-küme olsun. Bu takdirde Tanım 2.3.3 (ııı) ifadesinden, $A = ((A^{-*})^{\circ})^{-}$ eşitliği yazılır. Buradan $A \subset ((A^{-*})^{\circ})^{-}$ ifadesi sağlandığından, Tanım 2.2.10 (e) den, A kümesi β-*I*-açık küme olur.

Uyarı 2.3.6. Önerme 2.3.4 de verilen özelliklerin tersleri genellikle doğru değildir.

Uyarı 2.3.7. R-*I*-açık küme ile w-*I*-küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

Uyarı 2.3.8. s-*I*-açık küme ile w-*I*-küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

Aşağıdaki önermede R-*I*-açık küme ile w-*I*-küme karşılaştırılmıştır [6] :

Önerme 2.3.5. (X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer A kümesi R-*I*-açık küme ve kapalı küme ise, bu takdirde A kümesi w-*I*-kümedir.

İspat. Herhangi bir $A \subset X$ kümesi R-*I*-açık ve kapalı küme olsun. Bu takdirde Tanım 2.3.3 (ı) den, $(A^{-*})^{\circ} = A$ ve $A^{-} = A$ ifadelerini yazabiliriz. Buradan $A^{-} = ((A^{-*})^{\circ})^{-}$ ve A^{-} kümesi yerine eşiti olan A kümesi yazılırsa $((A^{-*})^{\circ})^{-} = A$ eşitliği elde edilir ki Tanım 2.3.3 (ıı) ifadesinden, A kümesi w-*I*-küme olur.

Önerme 2.3.4 ve Önerme 2.3.5 den yaralanarak aşağıdaki diyagram elde edilir.

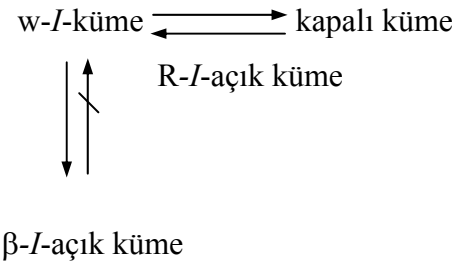


Diagram 2.5 : Kümelerin karşılaştırılması

Uyarı 2.3.9 [6]. β-*I*-açık küme ile kapalı küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

Uyarı 2.3.10 [6]. R-*I*-açık küme ile kapalı küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

Aşağıdaki lemma; topolojik uzayda verilen küme ile ideal topolojik uzaylarda verilen kümelerin karşılaştırmasıdır :

Lemma 2.3.1. (X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(ı) Her semi-I-açık küme, δ-I-açık kümedir [71].

(ıı) Her semi-I-açık küme, strong β-I-açık kümedir [33].

(ıı) Her strong β-I-açık küme, β-I-açık kümedir [33].

(ıv) Her β-I-açık küme, β-açık kümedir [32].

İspat. (ı) İspatı [71] de verildi.

(ıı) İspatı [33] de verildi.

(ıı) İspatı [33] de verildi.

(ıv) İspatı Diagram 2.3 den açıkça görülür.

Uyarı 2.3.11. Lemma 2.3.1 de verilen özelliklerin terslerinin doğru olmadığı aynı yazarlar tarafından örneklerle verildi. Ayrıca δ-I-açık küme kavramının strong β-I-açık küme kavramından bağımsız olduğu [71] de gösterildi.

R-I-açık kümeye ilişkin bazı özellikler de [72] de aşağıdaki gibi verildi :

Lemma 2.3.2. (X,τ,I) ideal topolojik uzayında herhangi $A, B \subset X$ alt kümeleri verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(ı) $(A^{-*})^{o}$ kümesi R-I-açık bir kümedir ;

(ıı) Eğer A ve B kümeleri R-I-açık küme ise, bu takdirde $A \cap B$ kümesi R-I-açık bir kümedir ;

(ıı) Eğer A kümesi regüler açık bir küme ise; bu takdirde A kümesi R-I-açık bir kümedir ;

(ıv) Eğer A kümesi R-I-açık bir küme ise; bu takdirde bu küme δ-I-açık bir kümedir ;

(v) R-I-açık kümelerin birleşimi δ-I-açıktır.

Bazı özel idealler için aşağıdaki özellikler [72] de verildi :

Önerme 2.3.6. (X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(ı) Eğer $I = \{\varnothing\}$ ise; bu takdirde A kümesinin R-*I*-açık bir küme olması için gerek ve yeter şart A kümesinin regüler açık bir küme olmasıdır ;

(ıı) Eğer $I = P(X)$ ise; bu takdirde A kümesinin açık bir küme olması için gerek ve yeter şart A kümesinin R-*I*-açık bir küme olmasıdır ;

(ııı) Eğer $I = N$ ise; bu takdirde A kümesinin R-*I*-açık bir küme olması için gerek ve yeter şart A kümesinin regüler açık bir küme olmasıdır.

İspat. (ı) $I = \{\varnothing\}$ alalım. Bu takdirde her $A \subset X$ kümesi için, $A^* = A^{-}$ [37] ve buradan $A^{-*} = A \cup A^* = A^{-}$ sağlanır. Böylece $A = (A^{-*})^o = (A^{-})^o$ olup $RIO(X) = \tau_R$ elde edilir.

(ıı) $I = P(X)$ alalım. Bu takdirde her $A \subset X$ kümesi için, $A^* = \varnothing$ ve $(A^{-*}) = A$ [37] olur. Böylece $A = (A^{-*})^o = A^\circ$ bulunur ki bu ifadenden $\tau = RIO(X)$ elde edilir.

(ııı) $I = N$ olsun. Bu takdirde her $A \subset X$ kümesi için, $A^* = ((A^{-})^\circ)^{-}$ [37] olur. A kümesi R-*I*-açık bir küme olsun. Bu takdirde A kümesi, aynı zamanda diagram 2.4 den açık bir kümedir. Dolayısıyla $A = (A^{-*})^o = (A \cup A^*)^o = (A \cup ((A^{-})^\circ)^{-})^\circ = (A^{-})^\circ)^{-})^\circ = (A^{-})^\circ$ olup A kümesi regüler açık bir küme olduğundan $RIO(X) = \tau_R$ elde edilir.

Lemma 2.3.1, Diagram 2.3, Tanım 2.2.10, Tanım 2.3.2 ve Tanım 2.3.3 den yararlanarak aşağıdaki gibi bir akış diagramı elde edilir :

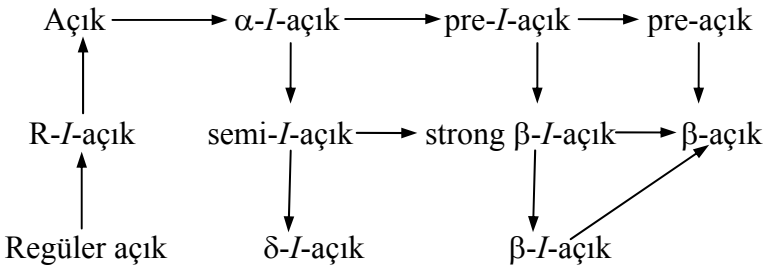


Diagram 2.6 : Topolojik ve ideal topolojik uzaylarda kümelerin akış diagramı

3. BÖLÜM

3. TOPOLİK UZAYLARDA BAZI KUVVETLİ FONKSİYON TİPLERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Önce bu bölümde kullanacağımız tanım ve fonksiyon kavramları ile ilgili bilgiler verelim. Ganster and Reilly [26], 1989 yılında LC-sürekli fonksiyon kavramı ile ilgili çalışmalar yaptılar. Daha sonra topolojik uzaylarda α-açık küme [53], lokal kapalı (kısaca, LC) küme [21], semi-açık küme [43], pre-açık küme [48], β-açık küme [1], g-kapalı küme [44], rg-kapalı küme [60], αlc-küme [8] kavramlarını ve strongly α-irresolute [45], strongly α-sürekli [12] fonksiyon kavramlarını tanımlamışlardır. 1996 yılında Dontchev [24] LC-süreklilikten daha güçlü olan kontra-süreklilik kavramını vermiştir. Son zamanlarda matematikçiler ve fizikçiler, topolojik uzaylarda süreklilik ve irresolute fonksiyonlarla ilgili birçok yeni araştırmalar ve çalışmalar yapmaktadırlar ([16], [22]).

Biz bu bölümde, yukarıda yapılan çalışmalardan yararlanarak topolojik uzaylarda; strongly αlc-preirresolute, strongly slc-preirresolute, strongly plc-preirresolute, strongly βlc-preirresolute, strongly αglc-preirresolute, strongly sglc-preirresolute, strongly pglc-preirresolute, strongly βglc-preirresolute, strongly αrglc-preirresolute, strongly srglc-preirresolute, strongly prglc-preirresolute, strongly βrglc-preirresolute, strongly αlcβ-irresolute, strongly slcβ-irresolute, strongly plcβ-irresolute, strongly βlcβ-irresolute, strongly αglcβ-irresolute, strongly sglcβ-irresolute, strongly pglcβ-irresolute, strongly βglcβ-irresolute, strongly αrglcβ-irresolute, strongly srglcβ-irresolute, strongly prglcβ-irresolute, strongly βrglcβ-irresolute, αβlc-irresolute, sβlc-irresolute, pβlc-irresolute, αgβlc-irresolute, sgβlc-irresolute, pgβlc-irresolute, αrgβlc-irresolute, srgβlc-irresolute, prgβlc-irresolute fonksiyon tanımlarını vererek bazı özelliklerini elde ettik ve inceledik. Ayrıca, topolojik uzaylarda strongly αlc-irresolute fonksiyonların ve strongly semi β-irresolute fonksiyonlarının yeni bir ayrışımını da verdik.

3.1. Topolojik uzaylarda Tanımlanan Bazı Küme Çeşitleri ve Özellikleri

Bu çalışmada önce; bilinen bazı tanım ve özelliklerini verelim.

Tanım 3.1.1. (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A\subset X$ kümesi verilsin. Eğer A kümesi için,

(1) $A \subset A^{\circ\,-\circ}$ ise; A kümesine **α-açık** küme [53],

(2) $A \subset A^{\circ\,-}$ ise; A kümesine **semi-açık** küme [43],

(3) $A \subset A^{-\circ}$ ise; A kümesine **pre-açık** küme [48],

(4) $A \subset A^{-\circ\,-}$ ise; A kümesine **β-açık** küme (veya **semi-preaçık** küme) ([1], [9]) denir.

(5) $A = A^{-\circ}$ ise; A kümesine **regüler açık** küme [67] denir.

Tanım 3.1.2 [21]. (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A\subset X$ kümesi verilsin. Eğer A kümesi için, S açık ve F kapalı olacak şekilde $A=S\cap F$ oluyorsa; A kümesine **Lokal Kapalı** küme (kısaca, LC-küme) denir.

Yukarıda verdiğimiz α-açık küme, semi-açık küme, pre-açık küme, β-açık küme ailelerini (X,τ) topolojik uzayında sırasıyla τ^{α} = αO(X), SO(X), PO(X), βO(X)=SPO(X) ile göstereceğiz. τ^{α} = αO(X) ailesinin X de bir topoloji oluşturduğu 1965 yılında Njåstad tarafından [53] verilmiş ve $\tau \subset \tau^{\alpha} = PO(X)\cap SO(X) \subset \beta O(X)$ olduğu gösterilmiştir.

Şimdi kapalılık kavramından genel olan küme kavramlarını verelim :

Tanım 3.1.3. (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A\subset X$ kümesi verilsin.

(1) Eğer $A\subset U$ ve U açık iken $A^{-}\subset U$ oluyorsa, A kümesi **genelleştirilmiş kapalı** küme (kısaca **g-kapalı** küme) [44] olarak adlandırılır.

(2) Eğer $A\subset U$ ve U regüler açık iken $A^{-}\subset U$ oluyorsa, A kümesi **regüler genelleştirilmiş kapalı** küme (kısaca **rg-kapalı** küme) [60] olarak adlandırılır**.**

Uyarı 3.1.1 [59]. Kapalı → g-kapalı → rg-kapalı. Genellikle bu gösterimin tersleri doğru değildir.

Şimdi kapalı, g-kapalı ve rg-kapalı kümelerden türetilen yeni küme kavramlarını verelim :

Tanım 3.1.4. (X,τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer A kümesi için,

(1) S kümesi α-açık ve F kümesi kapalı olmak üzere $A = S \cap F$ ise; A kümesine **αlc-küme** [8] denir.

(2) S kümesi semi-açık ve F kümesikapalı olmak üzere $A = S \cap F$ ise; A kümesine **slc-küme** [17] denir.

(3) S kümesi pre-açık ve F kümesi kapalı olmak üzere $A = S \cap F$ ise; A kümesine **plc-küme** [17] denir.

(4) S kümesi β-açık ve F kümesi kapalı olmak üzere $A = S \cap F$ ise; A kümesine **βlc-küme** [17] denir.

(5) S kümesi α-açık ve F kümesi g-kapalı kapalı olmak üzere $A = S \cap F$ ise; A kümesine **αglc-küme** [17] denir.

(6) S kümesi semi-açık ve F kümesi g-kapalı kapalı olmak üzere $A = S \cap F$ ise; A kümesine **sglc-küme** [17] denir.

(7) S kümesi pre-açık ve F kümesi g-kapalı kapalı olmak üzere $A = S \cap F$ ise; A kümesine **pglc-küme** [17] denir.

(8) S kümesi β-açık ve F kümesi g-kapalı kapalı olmak üzere $A = S \cap F$ ise; A kümesine **βglc-küme** [17] denir.

(9) S kümesi α-açık ve F kümesi rg-kapalı kapalı olmak üzere $A = S \cap F$ ise; A kümesine **αrglc-küme** [17] denir.

(10) S kümesi semi-açık ve F kümesi rg-kapalı kapalı olmak üzere $A = S \cap F$ ise; A kümesine **srglc-küme** [17] denir.

(11) S kümesi pre-açık ve F kümesi rg-kapalı kapalı olmak üzere $A = S \cap F$ ise; A kümesine **prglc-küme** [17] denir.

(12) S kümesi β-açık ve F kümesi rg-kapalı kapalı olmak üzere $A = S \cap F$ ise; A kümesine **βrglc-küme** [17] denir.

(X,τ) topolojik uzayında verilen αlc-küme, slc-küme, plc- küme, βlc- küme, αglc-küme, sglc- küme, pglc- küme, βglc- küme, αrglc- küme, srglc- küme, prglc-küme, βrglc-küme aileleri sırasıyla αLC(X), SLC(X), PLC(X), βLC(X), αGLC(X), SGLC(X), PGLC(X), βGLC(X), αRGLC(X), SRGLC(X), PRGLC(X), βRGLC(X)) sembolleri ile gösterilir. Ayrıca Beceren tarafından [17]; $\alpha O(X) \subset \alpha LC(X) \subset PLC(X)$ ve $PO(X) \subset PLC(X)$ olduğu gösterilmiştir.

Yukarıdaki tanımlardan yararlanarak aşağıdaki diagramı oluşturabiliriz.

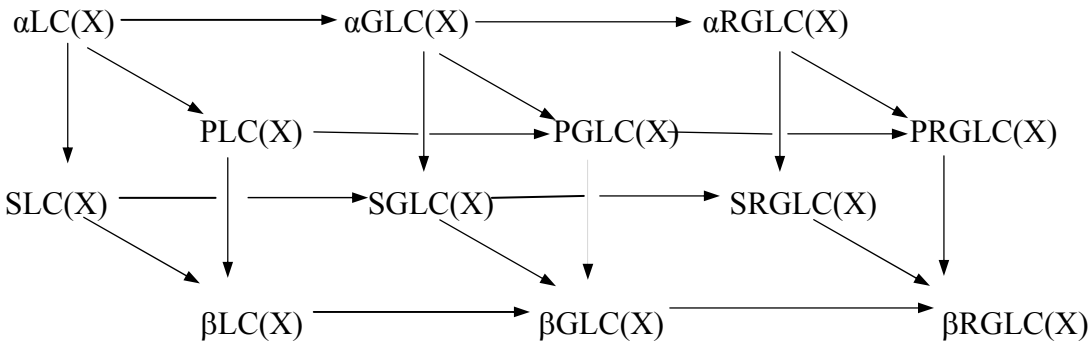


Diagram 3.1: Kümelerin aralarındaki karşılaştırmalar

Lemma 3.1.1 [17]. Bir (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) $\alpha LC(X) \subset \alpha GLC(X) \subset \alpha RGLC(X)$.

(2) $PLC(X) \subset PGLC(X) \subset PRGLC(X)$.

(3) $SLC(X) \subset SGLC(X) \subset SRGLC(X)$.

(4) $\beta LC(X) \subset \beta GLC(X) \subset \beta RGLC(X)$.

İspat. Tanımlardan ve uyarı 3.1.1 den görülür.

Her kapalı küme g-kapalı ve her g-kapalı küme rg-kapalıdır. Bunların tersleri doğru değildir [59]. Ancak karşıtlarının doğru olduğu uzaylar aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.1.5. Bir (X,τ) topolojik uzayının **$T_{1/2}$-uzayı** [44] (sırasıyla, **T_{rg}-uzayı** [10]) olması için gerek ve yeter şart X uzayındaki her g-kapalı (sırasıyla, rg-kapalı) alt kümesinin X uzayında kapalı (sırasıyla, g-kapalı) olmasıdır**.**

(X,τ) topolojik uzayının $T_{1/2}$-uzayı alınması halinde Tanım 3.1.4 de verilen kavramları aşağıdaki biçimde çakışmıştır :

Teorem 3.1.1 [17]. (X,τ) topolojik uzayı, $T_{1/2}$-uzayı olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) $\alpha GLC(X) = \alpha LC(X)$

(2) $SGLC(X) = SLC(X)$

(3) $PGLC(X) = PLC(X)$

(4) $\beta GLC(X) = \beta LC(X)$

(X,τ) topolojik uzayının T_{rg}-uzayı alınması halinde Tanım 3.1.4 de verilen kavramlar aşağıdaki biçimde çakışmıştır :

Teorem 3.1.2 [17]. (X,τ) topolojik uzayı, T_{rg}-uzayı olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) $\alpha RGLC(X) = \alpha GLC(X)$

(2) $SRGLC(X) = SGLC(X)$

(3) $PRGLC(X) = PGLC(X)$

(4) $\beta RGLC(X) = \beta GLC(X)$

(X,τ) topolojik uzayının $T_{1/2}$-uzayı ve T_{rg}-uzayı alınması halinde Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 den aşağıdaki özellik sağlanır :

Özellik 3.1.1 [41]. (X,τ) topolojik uzayı, $T_{1/2}$-uzayı ve T_{rg}-uzayı olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) $\alpha RGLC(X) = \alpha GLC(X) = \alpha LC(X)$

(2) $SRGLC(X) = SGLC(X) = SLC(X)$

(3) $PRGLC(X) = PGLC(X) = PLC(X)$

(4) $\beta RGLC(X) = \beta GLC(X) = \beta LC(X)$

Lemma 3.1.2 [17]. A ve B kümeleri (X,τ) topolojik uzayının herhangi iki alt kümesi olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) Eğer $A \in PO(X)$ ve $B \in \alpha LC(X)$ ise, $A \cap B \in \alpha LC(A)$ dir.

(2) Eğer $A \in PO(X)$ ve $B \in SLC(X)$ ise, $A \cap B \in SLC(A)$ dir.

(3) Eğer $A \in SO(X)$ ve $B \in PLC(X)$ ise, $A \cap B \in PLC(A)$ dir.

(4) Eğer $A \in \alpha O(X)$ ve $B \in \beta LC(X)$ ise, $A \cap B \in \beta LC(A)$ dir.

Lemma 3.1.3. (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) $\alpha O(X) = PO(X) \cap \alpha LC(X)$ [11].

(2) $SO(X) = SPO(X) \cap \alpha LC(X)$ [8].

Tanım 3.1.6 [21]. Bir (X,τ) topolojik uzayı verildiğinde, eğer X in her yoğun alt kümesi X uzayında açık ise (X,τ) topolojik uzayına **submaximal uzay** denir.

Tanım 3.1.7 [53]. Bir (X,τ) topolojik uzayı verildiğinde, eğer X in her açık alt kümesinin kapanışı X uzayında açık ise (X,τ) topolojik uzayına **extremally disconnected uzay** denir.

Aşağıdaki teorem; (X,τ) topolojik uzayının submaximal ve extremally disconnected uzay olması halinde, $\tau = \tau^{\alpha} = SO(X) = PO(X) = \beta O(X)$ ([36], [50]) olması gerçeğinden elde edilir.

Teorem 3.1.3 [17]. (X,τ) topolojik uzayı submaximal ve extremally disconnected uzay olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) αlc-küme $\Leftrightarrow$ slc-küme $\Leftrightarrow$ plc-küme $\Leftrightarrow$ βlc-küme.

(2) αglc-küme $\Leftrightarrow$ sglc-küme $\Leftrightarrow$ pglc-küme $\Leftrightarrow$ βglc-küme.

(3) αrglc-küme $\Leftrightarrow$ srglc-küme $\Leftrightarrow$ prglc-küme $\Leftrightarrow$ βrglc-küme.

3.2. Topolojik Uzaylarda Bazı kuvvetli Fonksiyon Tiplerinin Genelleştirilmesi (Strongly αlc-preirresolute Fonksiyonlar)

Burada yaptığımız çalışma; bir önceki kısımda verilen küme kavramlarından yararlanarak topolojik uzaylarda; strongly αlc-preirresolute, strongly slc-preirresolute, strongly plc-preirresolute, strongly βlc-preirresolute, strongly αglc-preirresolute, strongly sglc-preirresolute, strongly pglc-preirresolute, strongly βglc-preirresolute, strongly αrglc-preirresolute, strongly srglc-preirresolute, strongly prglc-preirresolute, strongly βrglc-preirresolute fonksiyon kavramlarını vererek bazı özelliklerini elde ettik ve inceledik. Ayrıca, topolojik uzaylarda strongly αlc-irresolute ve α-irresolute fonksiyonlarının da yeni bir ayrışımını verdik.

Önce bilinen bazı kavramları verelim:

Tanım 3.2.1. Bir $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin.

(1) Eğer Y uzayının her $V \subset Y$ **α-açık** kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında açık ise; f fonksiyonuna **strongly α-irresolute** [45],

(2) Eğer Y uzayının her $V \subset Y$ α-açık kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında α-açık ise; f fonksiyonuna **α-irresolute** [46],

(3) Eğer Y uzayının her $V \subset Y$ α-açık kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında semi-açık ise; f fonksiyonuna **semi α-irresolute** [13],

(4) Eğer Y uzayının her $V \subset Y$ α-açık kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında pre-açık ise; f fonksiyonuna **α-presürekli** [15] denir.

Tanım 3.2.2 [17]. Bir $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V \subset Y$ **αlc-kümesi** (sırasıyla, slc-küme, plc-küme, βlc-küme, αglc-küme, sglc-küme, pglc-küme, βglc-küme, αrglc-küme, srglc-küme, prglc-küme, βrglc-küme) için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında **αlc-küme** (sırasıyla, slc-küme, plc-küme, βlc-küme, αglc-küme, sglc-küme, pglc-küme, βglc-küme, αrglc-küme, srglc-küme, prglc-küme, βrglc-küme) ise; f fonksiyonuna **αlc-irresolute** (sırasıyla, slc-irresolute, plc-irresolute, βlc-irresolute, αglc-irresolute, sglc-irresolute, pglc-irresolute, βglc-irresolute, αrglc-irresolute, srglc-irresolute, prglc-irresolute, βrglc-irresolute) denir.

Tanım 3.2.3 [41]. Bir $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V \subset Y$ ***αlc-kümesi*** (sırasıyla, slc-küme, plc-küme, βlc-küme, αglc-küme, sglc-küme, pglc-küme, βglc-küme, αrglc-küme, srglc-küme, prglc-küme, βrglc-küme) için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında ***açık*** küme ise; f fonksiyonuna ***strongly αlc-sürekli*** (sırasıyla, strongly slc-sürekli, strongly plc-sürekli, strongly βlc-sürekli, strongly αglc-sürekli, strongly sglc-sürekli, strongly pglc-sürekli, strongly βglc-sürekli, strongly αrglc-sürekli, strongly srglc-sürekli, strongly prglc-sürekli, strongly βrglc-sürekli) denir.

Tanım 3.2.4 [41]. Bir $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V \subset Y$ ***αlc-kümesi*** (sırasıyla, slc-küme, plc-küme, βlc-küme, αglc-küme, sglc-küme, pglc-küme, βglc-küme, αrglc-küme, srglc-küme, prglc-küme, βrglc-küme) için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında α-açık küme ise; f fonksiyonuna ***strongly αlc-irresolute*** (sırasıyla, strongly slc-irresolute, strongly plc-irresolute, strongly βlc-irresolute, strongly αglc-irresolute, strongly sglc-irresolute, strongly pglc-irresolute,

strongly βglc-irresolute, strongly αrglc-irresolute, strongly srglc-irresolute, strongly prglc-irresolute, strongly βrglc-irresolute) denir.

Tanım 3.2.5. Bir $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V\subset Y$ **pre-açık** kümesi için,

(1) $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında α-açık küme ise; f fonksiyonuna **α-preirresolute** [20],

(2) $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında pre-açık küme ise; f fonksiyonuna **preirresolute** [63],

(3) $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında αlc-küme küme ise; f fonksiyonuna **αlc-presürekli** [18] denir.

Tanım 3.2.6. Bir $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V\subset Y$ ***αlc-kümesi*** (sırasıyla, slc-küme, plc-küme, βlc-küme) için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında ***pre-açık*** küme ise; f fonksiyonuna ***strongly αlc-preirresolute*** (sırasıyla, strongly slc-preirresolute, strongly plc-preirresolute, strongly βlc-preirresolute) denir.

Tanım 3.2.7. Bir $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V\subset Y$ ***αglc-kümesi*** (sırasıyla, sglc-küme, pglc-küme, βglc-küme) için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında ***pre-açık*** küme ise; f fonksiyonuna ***strongly αglc-preirresolute*** (sırasıyla, strongly sglc-preirresolute, strongly pglc-preirresolute, strongly βglc-preirresolute) denir.

Tanım 3.2.8. Bir $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V\subset Y$ ***αrglc-kümesi*** (sırasıyla, srglc-küme, prglc-küme, βrglc-küme) için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında ***pre-açık*** küme ise; f fonksiyonuna ***strongly αrglc-preirresolute*** (sırasıyla, strongly srglc-preirresolute, strongly prglc-preirresolute, strongly βrglc-preirresolute) denir.

Yukarıda verdiğimiz Tanım 3.1.6, Tanım 3.1.7 ve Tanım 3.1.8 den yararlanarak aşağıdaki akış diagramını oluşturabiliriz.

Strongly α-irresolute → ***Strongly αlc-süreklilik***

↓

Strongly αlc-irresolute → strongly αlc-preirresolute

↓ ↓

αlc-irresolute → plc-irresolute

Diagram 3.2 : Strongly αlc-preirresolute fonksiyonun yeri.

Diagram 3.2 de verilen süreklilik çeşitlerinin tersleri genellikle doğru değildir :

Örnek 3.2.1. X={a,b,c} kümesi üzerinde τ = {X,Ø,{a},{b,c}} ve υ={X,Ø,{a}} ile f : (X,τ) → (X,υ) birim fonksiyonu verilsin. Bu takdirde f fonksiyonu strongly αlc-preirresolute, fakat strongly α-irresolute değildir. Çünkü X üzerindeki (X,υ) topolojisi için αO(X) = { X,Ø,{a},{a,b},{a,c}} dir. Burada (X,υ) topolojisinde {a,b} kümesi bir α-açık kümedir, fakat (X,τ) uzayında açık bir küme değildir.

Örnek 3.2.2. X={a,b,c} kümesi üzerinde verilen τ = {X,Ø,{a,b}} ve υ={X,Ø,{a},{b,c}} topolojileri ile f : (X,τ) → (X,υ) birim fonksiyonu verilsin. Bu takdirde f fonksiyonu plc-irresolute, fakat strongly αlc-preirresolute değildir. Çünkü {b,c} kümesi (X,υ) uzayında bir αlc-kümedir, fakat (X,τ) uzayında pre-açık değildir.

Örnek 3.2.3. X={a,b,c} kümesi üzerinde τ = {X,Ø,{a,b}} ve υ={X,Ø,{a},{b,c}} ailesi X kümesi üzerinde iki topoloji ve f : (X,τ) → (X,υ) fonksiyonu verilsin. Bu takdirde f fonksiyonu plc-irresolute, fakat αlc-irresolute değildir. Çünkü {b,c} kümesi (X,υ) uzayında αlc-kümedir, fakat aynı küme (X,τ) uzayında αlc-küme değildir.

Örnek 3.2.4. X = {a,b,c} kümesi üzerinde τ = {X,∅,{a,b}} ve υ={X,Ø,{a}} topolojileri ile f : (X,τ) → (X,υ) fonksiyonu verilsin. Bu takdirde (X,τ) uzayında αO(X)={X,∅,{a,b}} ve PO(X)={X,∅,{a},{b},{a,b},{a,c},{b,c}} olur. Bu durumda {a} kümesi (X,υ) uzayında pre-açık bir kümedir, fakat (X,τ) uzayında α-açık değildir. O halde f fonksiyonu strongly αlc-preirresolute, fakat αlc-irresolute değildir.

Örnek 3.2.5. X={a,b,c} kümesi üzerinde τ = {X,Ø,{a}} ve υ={X,Ø,{a},{b,c}} topolojileri ile f : (X,τ)→(X,υ) birim fonksiyonu verilsin. Bu takdirde f fonksiyonu αlc-irresolute fakat strongly αlc-preirresolute değildir. Çünkü {b,c} kümesi (X,τ) topolojisinde bir αlc-açık kümedir. Dolayısıyla f fonksiyonu αlc-irresolute olur, fakat aynı küme (X,τ) topolosinde bir pre-açık küme değildir. Bu durumda f fonksiyonu strongly αlc-preirresolute değildir.

Ayrıca yukarıdaki tanımlardan yararlanarak α-irresolute fonksiyonunun bir ayrışımını aşağıdaki biçimde oluşturabiliriz :

α-irresolute → ***strongly αlc-preirresolute***
↓ ↓
αlc-presüreklilik → plc-irresolute

Diagram 3.3 : α-irresolute ayrışımı.

Diagram 3.3 de verilen fonksiyon kavramlarının karşıtları genelde doğru değildir :

Örnek 3.2.6. X={a,b,c} ve f : (X,τ)→(X,υ) birim fonksiyonu verilsin.

(1) Eğer X kümesi üzerinde τ ={X,Ø,{a},{b,c}} ve υ={X,Ø,{c}} iki topoloji ise, f fonksiyonu strongly αlc-preirresolute fakat α-irresolute değildir. Çünkü {c} kümesi (X,τ) uzayında α-açık değildir.

(2) Eğer X kümesi üzerinde τ ={X,Ø,{a},{b},{a,b},{a,c}} ve υ={X,Ø,{b}} iki topoloji ise, f fonksiyonu αlc-presüreklidir, fakat α-irresolute değildir. Çünkü {b,c} kümesi (X,υ) topolojisinde bir α-açık kümedir, fakat aynı {b,c} kümesi (X,τ) topolojisinde bir α-açık küme değildir. Dolayısıyla f fonksiyonu α-irresolute değildir.

Örnek 3.2.7. X={a,b,c} kümesi üzerinde τ = {X,Ø,{a},{b,c}} ve υ={X,Ø,{a}} topolojileri ile f : (X,τ) → (X,υ) birim fonksiyonu verilsin. Bu takdirde f fonksiyonu

strongly αlc-preirresolute, fakat αlc-presürekli değildir. Çünkü {a,c} kümesi (X,υ) topolojisinde bir pre-açık kümedir, fakat (X,τ) topolojisinde bir αlc-küme değildir.

Örnek 3.2.8. X={a,b,c} kümesi üzerinde τ = {X,Ø,{a},{b},{a,b},{a,c}} ve υ={X,Ø,{b}} topolojileri ile f : (X,τ)→(X,υ) birim fonksiyonu verilsin. Bu durumda f fonksiyonu αlc-presüreklidir, fakat strongly αlc-preirresolute değildir. Çünkü {b,c} kümesi (X,υ) topolojisinde bir αlc-kümedir, fakat aynı küme (X,τ) topolosinde bir pre-açık küme değildir. Bu durumda f fonksiyonu strongly α-preirresolute değildir.

Bir f fonksiyonu strongly αlc-preirresolute ve P_λ izdüşüm fonksiyonu olmak üzere bileşke fonksiyonu aşağıdaki biçimdedir :

Teorem 3.2.1. Eğer f : X → ΠY_λ fonksiyonu ***strongly αlc-preirresolute*** (sırasıyla, strongly slc-preirresolute, strongly plc-preirresolute, strongly βlc-preirresolute, strongly αglc-preirresolute, strongly sglc-preirresolute, strongly pglc-preirresolute, strongly βglc-preirresolute, strongly αrglc-preirresolute, strongly srglc-preirresolute, strongly prglc-preirresolute, strongly βrglc-preirresolute) ise, bu takdirde her $\lambda \in \Lambda$ için P_λ ; ΠY_λ dan Y_λ ya **izdüşüm fonksiyonu** olmak üzere P_λ o f : X →Y_λ bileşke fonksiyonu ***strongly αlc-preirresolute*** (sırasıyla, strongly slc-preirresolute, strongly plc-preirresolute, strongly βlc-preirresolute, strongly αglc-preirresolute, strongly sglc-preirresolute, strongly pglc-preirresolute, strongly βglc-preirresolute, strongly αrglc-preirresolute, strongly srglc-preirresolute, strongly prglc-preirresolute, strongly βrglc-preirresolute) olur.

İspat: V_λ kümesi Y_λ nın herhangi bir αlc-kümesi olsun. Bu takdirde P_λ fonksiyonu sürekli ve açık olduğundan, αlc-irresolute [17] fonksiyon olur. Ve böylece $P_\lambda^{-1}(V_\lambda)$ kümesi ΠY_λ da αlc-küme olur. f fonksiyonu strongly αlc-preirresolute olduğundan, $f^{-1}(P_\lambda^{-1}(V_\lambda)) = (P_\lambda \text{ o } f)^{-1}(V_\lambda)$ kümesi X de pre-açık kümedir. Dolayısıyle her $\lambda \in \Lambda$ için P_λ o f bileşke fonksiyonu strongly αlc-preirresolute olur.

Diğerlerinin ispatları ıda benzer şekilde yapılabilir.

Sürekli fonksiyonun kısıtlanması da süreklidir. Fonksiyon strongly αlc-preirresolute ise, bu özellik ancak alt küme semi-açık ise sağlanır :

Teorem 3.2.2. A kümesi X uzayının bir **semi-açık** alt kümesi olsun. Eğer f : $(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu ***strongly αlc-preirresolute*** (sırasıyla, strongly slc-preirresolute, strongly plc-preirresolute, strongly βlc-preirresolute, strongly αglc-preirresolute, strongly sglc-preirresolute, strongly pglc-preirresolute, strongly βglc-preirresolute, strongly αrglc-preirresolute, strongly srglc-preirresolute, strongly prglc-preirresolute, strongly βrglc-preirresolute) ise bu takdirde $f|A:A\to Y$ kısıtlanmış fonksiyonu ***strongly αlc-preirresolute*** (sırasıyla, strongly slc-preirresolute, strongly plc-preirresolute, strongly βlc-preirresolute, strongly αglc-preirresolute, strongly sglc-preirresolute, strongly pglc-preirresolute, strongly βglc-preirresolute, strongly αrglc-preirresolute, strongly srglc-preirresolute, strongly prglc-preirresolute, strongly βrglc-preirresolute) olur.

İspat: V kümesi Y uzayının herhangi bir αlc-kümesi olsun. Bu takdirde f fonksiyonu strongly αlc-preirresolute olduğundan, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında pre-açık bir kümedir. A kümesi X uzayında semi-açık bir küme olduğundan, $(f|A)^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$ kümesi Lemma 3.1.2. nin (3) şıkkından A kümesinde pre-açıktır. Böylece f|A, kısıtlanmış fonksiyonu strongly αlc-preirresolute olur.

Öteki ispatlar da benzer şekilde yapılabilir.

İki sürekli fonksiyonun bileşkesi de süreklidir. Fonksiyon strongly αlc-preirresolute ise, bileşke fonksiyonun durumu aşağıdaki biçimdedir :

Teorem 3.2.3. f : X → Y bir fonksiyon ve g : Y → Z bir ***strongly αlc-preirresolute*** (sırasıyla, strongly slc-preirresolute, strongly plc-preirresolute, strongly βlc-preirresolute, strongly αglc-preirresolute, strongly sglc-preirresolute, strongly pglc-preirresolute, strongly βglc-preirresolute, strongly αrglc-preirresolute, strongly srglc-preirresolute, strongly prglc-preirresolute, strongly βrglc-preirresolute) fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu **preirresolute** ise, bu takdirde gof : X → Z bileşke fonksiyonu ***strongly αlc-preirresolute*** (sırasıyla, strongly slc-preirresolute, strongly plc-preirresolute, strongly βlc-preirresolute, strongly αglc-preirresolute, strongly sglc-preirresolute, strongly pglc-preirresolute, strongly βglc-preirresolute, strongly αrglc-preirresolute, strongly srglc-preirresolute, strongly prglc-preirresolute, strongly βrglc-preirresolute) olur.

İspat: W kümesi Z uzayında herhangi bir αlc-küme olsun. Bu takdirde g fonksiyonu strongly αlc-preirresolute (sırasıyla, strongly slc-preirresolute, strongly

plc-preirresolute, strongly βlc-preirresolute, strongly αglc-preirresolute, strongly sglc-preirresolute, strongly pglc-preirresolute, strongly βglc-preirresolute, strongly αrglc-preirresolute, strongly srglc-preirresolute, strongly prglc-preirresolute, strongly βrglc-preirresolute) olduğundan, $g^{-1}(W)$ kümesi Y uzayında pre-açıktır. Buna göre f fonksiyonu preirresolute olduğundan, $(gof)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ kümesi X uzayında pre-açıktır ve böylece gof bileşke fonksiyonu strongly αlc-preirresolute (sırasıyla, strongly slc-preirresolute, strongly plc-preirresolute, strongly βlc-preirresolute, strongly αglc-preirresolute, strongly sglc-preirresolute, strongly pglc-preirresolute, strongly βglc-preirresolute, strongly αrglc-preirresolute, strongly srglc-preirresolute, strongly prglc-preirresolute, strongly βrglc-preirresolute) olur.

Teorem 3.2.4. f : X → Y bir fonksiyon ve g : Y → Z bir **αlc-irresolute** (sırasıyla, slc-irresolute, plc-irresolute, βlc-irresolute) fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu ***strongly αlc-preirresolute*** (sırasıyla, strongly slc-preirresolute, strongly plc-preirresolute, strongly βlc-preirresolute) ise, bu takdirde gof : X → Z bileşke fonksiyonu ***strongly αlc-preirresolute*** (sırasıyla, strongly slc-preirresolute, strongly plc-preirresolute, strongly βlc-preirresolute) olur.

İspat: W kümesi Z uzayında herhangi bir αlc-küme olsun. Bu durumda g fonksiyonu αlc-irresolute olduğundan, $g^{-1}(W)$ kümesi Y uzayında αlc-kümedir. Bu takdirde f fonksiyonu strongly αlc-preirresolute olduğundan,

$$(gof)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$$

kümesi X uzayında pre-açık küme olur ve böylece gof bileşke fonksiyonu strongly αlc-preirresolute fonksiyondur.

Diğer kısımların ispatları da buna benzer olarak yapılabilir.

Fonksiyon strongly αglc-preirresolute ise, bileşke fonksiyonun durumu aşağıdaki biçimdedir :

Teorem 3.2.5. f : X → Y bir fonksiyon ve g : Y → Z bir **αglc-irresolute** (sırasıyla, sglc-irresolute, pglc-irresolute, βglc-irresolute) fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu ***strongly αglc-preirresolute*** (sırasıyla, strongly sglc-preirresolute, strongly pglc-preirresolute, strongly βglc-preirresolute) ise, bu takdirde gof:X→Z bileşke fonksiyonu ***strongly αglc-preirresolute*** (sırasıyla, strongly sglc-preirresolute, strongly pglc-preirresolute, strongly βglc-preirresolute) olur.

İspat: W kümesi Z uzayında herhangi bir αglc-küme olsun. Bu durumda g fonksiyonu αglc-irresolute olduğundan, $g^{-1}(W)$ kümesi Y uzayında αglc-kümedir. Bu takdirde f fonksiyonu strongly αglc-preirresolute olduğundan,

$$(gof)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$$

kümesi X uzayında pre-açık küme olur ve böylece gof bileşke fonksiyonu strongly αglc-preirresolute fonksiyondur.

Diğerlerinin ispatları da buna benzer biçimde yapılabilir.

Fonksiyon strongly αrglc-preirresolute ise, bileşke fonksiyonun durumu aşağıdaki biçimdedir :

Teorem 3.2.6. f : X → Y bir fonksiyon ve g : Y → Z bir **αrglc-irresolute** (sırasıyla, srglc-irresolute, prglc-irresolute, βrglc-irresolute) fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu ***strongly αrglc-preirresolute*** (sırasıyla, strongly srglc-preirresolute, strongly prglc-preirresolute, strongly βrglc-preirresolute) ise, bu takdirde gof : X→ Z bileşke fonksiyonu ***strongly αrglc-preirresolute*** (sırasıyla, strongly srglc-preirresolute, strongly prglc-preirresolute, strongly βrglc-preirresolute) olur.

İspat: W kümesi Z uzayında herhangi bir αrglc-küme olsun. Bu durumda g fonksiyonu αrglc-irresolute olduğundan, $g^{-1}(W)$ kümesi Y uzayında αrglc-kümedir. Bu takdirde f fonksiyonu strongly αrglc-preirresolute olduğundan, $(gof)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ kümesi X uzayında pre-açık küme olur ve böylece gof bileşke fonksiyonu strongly αrglc-preirresolute fonksiyondur.

Diğerleri de buna benzer olarak ispatlanabilir.

(X,τ) topolojik uzayını $T_{1/2}$-uzayı alırsak Tanım 3.2.6 ve Tanım 3.2.7 de verilen süreklilik çeşitleri birbirine eşdeğerdir :

Teorem 3.2.7. (X,τ) topolojik uzayı, $T_{1/2}$-uzayı ve $f : (X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) strongly αglc-preirresolute ⇔ strongly αlc-preirresolute.

(2) strongly sglc-preirresolute ⇔ strongly slc-preirresolute.

(3) strongly pglc-preirresolute ⇔ strongly plc-preirresolute.

(4) strongly βglc-preirresolute ⇔ strongly βlc-preirresolute.

İspat: Bunun ispatı Teorem 3.1.1 den görülür.

(X,τ) topolojik uzayını T_{rg}-uzayı alırsak Tanım 3.2.7 ve Tanım 3.2.8 de verilen süreklilik çeşitleri çakışır :

Teorem 3.2.8. (X,τ) topolojik uzayı, T_{rg}-uzayı ve $f : (X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) strongly αrglc-preirresolute $\Leftrightarrow$ strongly αglc-preirresolute.

(2) strongly srglc-preirresolute $\Leftrightarrow$ strongly sglc-preirresolute.

(3) strongly prglc-preirresolute $\Leftrightarrow$ strongly pglc-preirresolute.

(4) strongly βrglc-preirresolute $\Leftrightarrow$ strongly βglc-preirresolute.

İspat: Bunun ispatı Teorem 3.1.2 den görülür.

Teorem 3.2.7 ve Teorem 3.2.8 den aşağıdaki sonuç elde edilir :

Özellik 3.2.1. (X,τ) toplojik uzayı, $T_{1/2}$-uzayı ve T_{rg}-uzayı olsun. $f : (X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) strongly αrglc-preirresolute = strongly αglc-preirresolute = strongly αlc-preirresolute.

(2) strongly srglc-preirresolute = strongly sglc-preirresolute = strongly slc-preirresolute.

(3) strongly prglc-preirresolute = strongly pglc-preirresolute = strongly plc-preirresolute.

(4) strongly βrglc-preirresolute = strongly βglc-preirresolute = strongly βlc-preirresolute.

İspat: Bunun ispatı Özellik 3.1.1 den görülür.

Teorem 3.2.9. (X,τ) uzayı, submaximal ve extremally disconnected uzayı olsun. $f : (X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) strongly αlc-preirresolute $\Leftrightarrow$ strongly slc-preirresolute $\Leftrightarrow$ strongly plc-preirresolute $\Leftrightarrow$ strongly βlc-preirresolute.

(2) strongly αglc-preirresolute $\Leftrightarrow$ strongly sglc-preirresolute $\Leftrightarrow$ strongly pglc- preirresolute $\Leftrightarrow$ strongly βglc-preirresolute.

(3) strongly αrglc-preirresolute $\Leftrightarrow$ strongly srglc-preirresolute $\Leftrightarrow$ strongly prglc-preirresolute $\Leftrightarrow$ strongly βrglc-preirresolute.

İspat: Bunun ispatı Teorem 3.1.3 den görülür.

Teorem 3.2.10. Bir f : (X,τ)→(Y,υ) fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır.

(1) f fonksiyonunun ***strongly αlc-irresolute*** olması için gerek ve yeter şart ***strongly αlc-preirresolute*** ve αlc-irresolute olmasıdır.

(2) f fonksiyonunun α-irresolute olması için gerek ve yeter şart ***strongly αlc-preirresolute*** ve αlc-presürekli olmasıdır.

İspat: Bunun ispatı Lemma 3.1.3 ün (1) şıkkından görülür.

3.3. Strongly αlc*β*-irresolute Fonksiyonlar

Burada bir önceki kısımda verilen küme kavramlarından yararlanarak topolojik uzaylarda; strongly αlc*β*-irresolute, strongly slc*β*-irresolute, strongly plc*β*-irresolute, strongly βlc*β*-irresolute, strongly αglc*β*-irresolute, strongly sglc*β*-irresolute, strongly pglc*β*-irresolute, strongly βglc*β*-irresolute, strongly αrglc*β*-irresolute, strongly srglc*β*-irresolute, strongly prglc*β*-irresolute, strongly βrglc*β*-irresolute, α*β*lc-irresolute, s*β*lc-irresolute, p*β*lc-irresolute, αg*β*lc-irresolute, sg*β*lc-irresolute, pg*β*lc-irresolute, αrg*β*lc-irresolute, srg*β*lc-irresolute, prg*β*lc-irresolute fonksiyon kavramlarını vererek bazı özelliklerini elde ettik ve inceledik. Ayrıca, topolojik uzaylarda semi α-irresolute, strongly semi β-irresolute ve irresolute fonksiyonlarının yeni bir ayrışımını verdik.

Önce bilinen bazı tanım ve özelliklerini verelim :

Tanım 3.3.1. Bir $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V \subset Y$ **semi-açık** kümesi için,

(1) $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında semi-açık küme ise; f fonksiyonuna **irresolute** [23],

(2) $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında αlc-küme ise; f fonksiyonuna **semi αlc-sürekli** [19] denir.

Tanım 3.3.2. Bir $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V \subset Y$ **β-açık** kümesi için,

(1) $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında semi-açık küme ise; f fonksiyonuna **strongly semi β-irresolute** [14],

(2) $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında β-açık küme ise; f fonksiyonuna **β-irresolute** [47] denir.

Tanım 3.3.3. Bir $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V\subset Y$ ***αlc-kümesi*** (sırasıyla, slc-küme, plc-küme, βlc-küme) için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında ***β-açık*** küme ise; f fonksiyonuna ***strongly αlcβ-irresolute*** (sırasıyla, strongly slc*β*-irresolute, strongly plc*β*-irresolute, strongly βlc*β*-irresolute) denir.

Tanım 3.3.4. Bir $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V\subset Y$ ***αglc-kümesi*** (sırasıyla, sglc-küme, pglc-küme, βglc-küme) için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında ***β-açık*** küme ise; f fonksiyonuna ***strongly αglcβ-irresolute*** (sırasıyla, strongly sglc*β*-irresolute, strongly pglc*β*-irresolute, strongly βglc*β*-irresolute) denir.

Tanım 3.3.5. Bir $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V\subset Y$ ***αrglc-kümesi*** (sırasıyla, srglc-küme, prglc-küme, βrglc-küme) için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında ***β-açık*** küme ise; f fonksiyonuna ***strongly αrglcβ-irresolute*** (sırasıyla, strongly srglc*β*-irresolute, strongly prglc*β*-irresolute, strongly βrglc*β*-irresolute) denir.

Tanım 3.3.6. Bir $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V\subset Y$ ***αlc-kümesi*** (sırasıyla, slc-küme, plc-küme, βlc-küme) için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında ***βlc-küme*** ise; f fonksiyonuna ***αβlc-irresolute*** (sırasıyla, s*β*lc-irresolute, p*β*lc-irresolute, βlc-irresolute [17]) denir.

Tanım 3.3.7. Bir $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V\subset Y$ ***αglc-kümesi*** (sırasıyla, sglc-küme, pglc-küme, βglc-küme) için, $f^{-1}(V)$ kümesi X de ***βlc-küme*** ise; f fonksiyonuna ***αgβlc-irresolute*** (sırasıyla, sg*β*lc-irresolute, pg*β*lc-irresolute, βg*β*lc-irresolute) denir.

Tanım 3.3.8. Bir $f : (X,\tau) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V \subset Y$ ***αrglc-kümesi*** (sırasıyla, srglc-küme, prglc-küme, βrglc-küme) için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında ***βlc-küme*** ise; f fonksiyonuna ***αrgβlc-irresolute*** (sırasıyla, srg*β*lc-irresolute, prg*β*lc-irresolute, βrg*β*lc-irresolute) denir.

Yukarıda verilen Tanım 3.3.3. **…** Tanım 3.3.8 den aşağıdaki akış diagramını oluşturabiliriz;

Semi α-irresolute → semi αlc-süreklilik

↓ ↓

Strongly αlcβ-irresolute → sβlc-irresolute

Diagram 3.4 : Strongly αlc*β*-irresolute ve s*β*lc-irresolute fonksiyonun yeri.

Diagram 3.4 de verilen süreklilik çeşitlerinin tersleri genellikle doğru değildir :

Örnek 3.3.1. $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X,\varnothing,\{a\}\}$ ve $\upsilon = \{X,\varnothing,\{b,c\}\}$ topolojileri ile $f : (X,\tau) \to (X,\upsilon)$ birim fonksiyonu verilsin. Bu takdirde f fonksiyonu semi αlc-sürekli, fakat strongly αlc*β*-irresolute değildir. Çünkü {b,c} kümesi (X,υ) topolojisinde bir αlc-kümedir, fakat aynı küme (X,τ) topolojisinde bir *β*-açık küme değildir.

Örnek 3.3.2. $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde verilen $\tau = \{X,\varnothing,\{a\},\{b,c\}\}$ ve $\upsilon = \{X,\varnothing,\{a,b\}\}$ topolojileri ile $f : (X,\tau) \to (X,\upsilon)$ birim fonksiyonu verilsin. Bu takdirde f fonksiyonu strongly αlc*β*-irresolute, fakat semi αlc-sürekli değildir. Çünkü {a,b} kümesi (X,υ) topolojisinde bir semi-açık kümedir, fakat aynı küme (X,τ) topolojisinde bir αlc-küme değildir.

Bir f fonksiyonu strongly αlc*β*-irresolute ve P_λ izdüşüm fonksiyonu olmak üzere bileşke fonksiyonu aşağıdaki biçimde sağlanır :

Teorem 3.3.1. Eğer $f : X \to \Pi Y_\lambda$ fonksiyonu ***strongly αlcβ-irresolute*** (sırasıyla, strongly slc*β*-irresolute, strongly plc*β*-irresolute, strongly βlc*β*-irresolute, strongly αglc*β*-irresolute, strongly sglc*β*-irresolute, strongly pglc*β*-irresolute, strongly βglc*β*-irresolute, strongly αrglc*β*-irresolute, strongly srglc*β*-irresolute, strongly prglc*β*-

irresolute, strongly βrglcβ-irresolute) ise, bu takdirde her $\lambda \in \Lambda$ için P_λ ; ΠY_λ dan Y_λ uzayına giden **izdüşüm fonksiyonu** olmak üzere P_λ o f :X $\rightarrow Y_\lambda$ bileşke fonksiyonu ***strongly αlcβ-irresolute*** (sırasıyla, strongly slcβ-irresolute, strongly plcβ-irresolute, strongly βlcβ-irresolute, strongly αglcβ-irresolute, strongly sglcβ-irresolute, strongly pglcβ-irresolute, strongly βglcβ-irresolute, strongly αrglcβ-irresolute, strongly srglcβ-irresolute, strongly prglcβ-irresolute, strongly βrglcβ-irresolute) olur.

İspat: V_λ kümesi Y_λ uzayının herhangi bir αlc-kümesi olsun. Bu takdirde P_λ, sürekli ve açık olduğundan, αlc-irresolute [17] fonksiyon olur. Ve böylece $P_\lambda^{-1}(V_\lambda)$, ΠY_λ çarpım uzayında αlc-küme olur. f fonksiyonu strongly αlcβ-irresolute olduğundan, $f^{-1}(P_\lambda^{-1}(V_\lambda)) = (P_\lambda \text{ o } f)^{-1}(V_\lambda)$ kümesi X uzayında β-açık kümedir. Dolayısıyla her $\lambda \in \Lambda$ için P_λ o f bileşke fonksiyonu strongly αlcβ-irresolute olur.

Diğerlerinin ispatı da benzer şekilde yapılabilir.

Sürekli fonksiyonun kısıtlanması da süreklidir. Fonksiyon strongly αlcβ-irresolute ise, bu özellik ancak alt küme α-açık ise sağlanır :

Teorem 3.3.2. A kümesi X uzayının bir **α-açık** alt kümesi olsun. Eğer f : $(X,\tau) \rightarrow (Y,\upsilon)$ fonksiyonu ***strongly αlcβ-irresolute*** (sırasıyla, strongly slcβ-irresolute, strongly plcβ-irresolute, strongly βlcβ-irresolute, strongly αglcβ-irresolute, strongly sglcβ-irresolute, strongly pglcβ-irresolute, strongly βglcβ-irresolute, strongly αrglcβ-irresolute, strongly srglcβ-irresolute, strongly prglcβ-irresolute, strongly βrglcβ-irresolute) ise, bu takdirde f|A : A $\rightarrow$ Y kısıtlanmış fonksiyonu ***strongly αlcβ-irresolute*** (sırasıyla, strongly slcβ-irresolute, strongly plcβ-irresolute, strongly βlcβ-irresolute, strongly αglcβ-irresolute, strongly sglcβ-irresolute, strongly pglcβ-irresolute, strongly βglcβ-irresolute, strongly αrglcβ-irresolute, strongly srglcβ-irresolute, strongly prglcβ-irresolute, strongly βrglcβ-irresolute) olur.

İspat: V kümesi Y uzayının herhangi bir αlc-kümesi olsun. Bu takdirde f fonksiyonu strongly αlcβ-irresolute olduğundan, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında bir β-açık kümedir. A kümesi X uzayında α-açık bir küme olduğundan,

$$(f|A)^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$$

kümesi Lemma 3.1.2 nin (4) şıkkından A kümesinde β-açıktır. Böylece f|A kısıtlanmış fonksiyonu strongly αlcβ-irresolute olur.

Öteki ispatlar da benzer şekilde yapılabilir.

İki sürekli fonksiyonun bileşkesi de süreklidir. Fonksiyon strongly αlcβ-irresolute ise, bileşke fonksiyon aşağıdaki biçimdedir :

Teorem 3.3.3. f : X → Y bir fonksiyon ve g : Y → Z bir ***strongly αlcβ-irresolute*** (sırasıyla, strongly slcβ-irresolute, strongly plcβ-irresolute, strongly βlcβ-irresolute, strongly αglcβ-irresolute, strongly sglcβ-irresolute, strongly pglcβ-irresolute, strongly βglcβ-irresolute, strongly αrglcβ-irresolute, strongly srglcβ-irresolute, strongly prglcβ-irresolute, strongly βrglcβ-irresolute) fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu **β-irresolute** ise, bu takdirde gof : X → Z bileşke fonksiyonu ***strongly αlcβ-irresolute*** (sırasıyla, strongly slcβ-irresolute, strongly plcβ-irresolute, strongly βlcβ-irresolute, strongly αglcβ-irresolute, strongly sglcβ-irresolute, strongly pglcβ-irresolute, strongly βglcβ-irresolute, strongly αrglcβ-irresolute, strongly srglcβ-irresolute, strongly prglcβ-irresolute, strongly βrglcβ-irresolute) olur.

İspat: W kümesi Z uzayında herhangi bir αlc-küme olsun. Bu takdirde g fonksiyonu strongly αlcβ-irresolute (sırasıyla, strongly slcβ-irresolute, strongly plcβ-irresolute, strongly βlcβ-irresolute, strongly αglcβ-irresolute, strongly sglcβ-irresolute, strongly pglcβ-irresolute, strongly βglcβ-irresolute, strongly αrglcβ-irresolute, strongly srglcβ-irresolute, strongly prglcβ-irresolute, strongly βrglcβ-irresolute) olduğundan, $g^{-1}(W)$ kümesi Y uzayında β-açıktır. Buna göre f fonksiyonu β-irresolute olduğundan, $(gof)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ kümesi X uzayında β-açıktır ve böylece gof bileşke fonksiyonu strongly αlcβ-irresolute (sırasıyla, strongly slcβ-irresolute, strongly plcβ-irresolute, strongly βlcβ-irresolute, strongly αglcβ-irresolute, strongly sglcβ-irresolute, strongly pglcβ-irresolute, strongly βglcβ-irresolute, strongly αrglcβ-irresolute, strongly srglcβ-irresolute, strongly prglcβ-irresolute, strongly βrglcβ-irresolute) olur.

Teorem 3.3.4. f : X → Y bir fonksiyon ve g : Y → Z bir **αlc-irresolute** (sırasıyla, slc-irresolute, plc-irresolute, βlc-irresolute, αglc-irresolute, sglc-irresolute, pglc-irresolute, βglc-irresolute, αrglc-irresolute, srglc-irresolute, prglc-irresolute, βrglc-irresolute) fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu ***strongly αlcβ-irresolute*** (sırasıyla, strongly slcβ-irresolute, strongly plcβ-irresolute, strongly βlcβ-irresolute, strongly αglcβ-irresolute, strongly sglcβ-irresolute, strongly pglcβ-irresolute, strongly βglcβ-irresolute, strongly αrglcβ-irresolute, strongly srglcβ-irresolute, strongly prglcβ-irresolute, strongly βrglcβ-irresolute) ise, bu takdirde gof:X → Z

bileşke fonksiyonu ***strongly αlcβ-irresolute*** (sırasıyla, strongly slcβ-irresolute, strongly plcβ-irresolute, strongly βlcβ-irresolute, strongly αglcβ-irresolute, strongly sglcβ-irresolute, strongly pglcβ-irresolute, strongly βglcβ-irresolute, strongly αrglcβ-irresolute, strongly srglcβ-irresolute, strongly prglcβ-irresolute, strongly βrglcβ-irresolute) olur.

İspat: W kümesi Z uzayında herhangi bir αlc-küme olsun. Bu takdirde g fonksiyonu αlc-irresolute (sırasıyla, slc-irresolute, plc-irresolute, βlc-irresolute, αglc-irresolute, sglc-irresolute, pglc-irresolute, βglc-irresolute, αrglc-irresolute, srglc-irresolute, prglc-irresolute, βrglc-irresolute) olduğundan, $g^{-1}(W)$ kümesi Y uzayında bir αlc-kümedir. Buna göre f fonksiyonu strongly αlcβ-irresolute (sırasıyla, strongly slcβ-irresolute, strongly plcβ-irresolute, strongly βlcβ-irresolute, strongly αglcβ-irresolute, strongly sglcβ-irresolute, strongly pglcβ-irresolute, strongly βglcβ-irresolute, strongly αrglcβ-irresolute, strongly srglcβ-irresolute, strongly prglcβ-irresolute, strongly βrglcβ-irresolute) olduğundan, $(gof)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ kümesi X uzayında β-açıktır ve böylece gof bileşke fonksiyonu strongly αlcβ-irresolute (sırasıyla, strongly slcβ-irresolute, strongly plcβ-irresolute, strongly βlcβ-irresolute, strongly αglcβ-irresolute, strongly sglcβ-irresolute, strongly pglcβ-irresolute, strongly βglcβ-irresolute, strongly αrglcβ-irresolute, strongly srglcβ-irresolute, strongly prglcβ-irresolute, strongly βrglcβ-irresolute) olur.

Eğer fonksiyon strongly αlc-irresolute ise, bileşke fonksiyon aşağıdaki biçimdedir :

Teorem 3.3.5. f : X → Y bir fonksiyon ve g : Y → Z bir ***strongly αlc-irresolute*** (sırasıyla, strongly slc-irresolute, strongly plc-irresolute, strongly βlc-irresolute, strongly αglc- irresolute, strongly sglc-irresolute, strongly pglc-irresolute, strongly βglc-irresolute, strongly αrglc-irresolute, strongly srglc-irresolute, strongly prglc-irresolute, strongly βrglc-irresolute) fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu **α-presürekli** ise, bu takdirde gof:X → Z bileşke fonksiyonu ***strongly αlc-preirresolute*** (sırasıyla, strongly slc-preirresolute, strongly plc-preirresolute, strongly βlc-preirresolute, strongly αglc-preirresolute, strongly sglc-preirresolute, strongly pglc-preirresolute, strongly βglc-preirresolute, strongly αrglc-preirresolute, strongly srglc-preirresolute, strongly prglc-preirresolute, strongly βrglc-preirresolute) olur.

İspat: W kümesi Z uzayında herhangi bir αlc-küme olsun. Bu takdirde g fonksiyonu strongly αlc-irresolute (sırasıyla, strongly slc-irresolute, strongly plc-irresolute, strongly βlc-irresolute, strongly αglc- irresolute, strongly sglc-irresolute, strongly pglc-irresolute, strongly βglc-irresolute, strongly αrglc-irresolute, strongly srglc-irresolute, strongly prglc-irresolute, strongly βrglc-irresolute) olduğundan, $g^{-1}(W)$ kümesi Y uzayında bir α-açık kümedir. Buna göre f fonksiyonu α-presürekli olduğundan, $(gof)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ kümesi X uzayında pre-açıktır ve böylece gof bileşke fonksiyonu strongly αlc-preirresolute (sırasıyla, strongly slc-preirresolute, strongly plc-preirresolute, strongly βlc-preirresolute, strongly αglc-preirresolute, strongly sglc-preirresolute, strongly pglc-preirresolute, strongly βglc-preirresolute, strongly αrglc-preirresolute, strongly srglc-preirresolute, strongly prglc-preirresolute, strongly βrglc-preirresolute) olur.

(X,τ) topolojik uzayını $T_{1/2}$-uzayı alırsak Tanım 3.3.3 ve Tanım3.3.4 de verilen süreklilik çeşitleri birbirine eşdeğerdir :

Teorem 3.3.6. (X,τ) topolojik uzayı, $T_{1/2}$-uzayı ve $f : (X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) strongly αglcβ-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly αlcβ-irresolute.

(2) strongly sglcβ-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly slcβ-irresolute.

(3) strongly pglcβ-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly plcβ-irresolute.

(4) strongly βglcβ-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly βlcβ-irresolute.

İspat: Bunun ispatı Teorem 3.1.1 den görülür.

(X,τ) topolojik uzayını $T_{1/2}$-uzayı alırsak Tanım 3.3.6 ve Tanım 3.3.7 de verilen süreklilik çeşitleri birbirine eşdeğerdir :

Teorem 3.3.7. (X,τ) topolojik uzayı, $T_{1/2}$-uzayı ve $f : (X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) αgβlc-irresolute $\Leftrightarrow$ αβlc-irresolute.

(2) sgβlc-irresolute $\Leftrightarrow$ sβlc-irresolute.

(3) pgβlc-irresolute $\Leftrightarrow$ pβlc-irresolute.

(4) βgβlc-irresolute $\Leftrightarrow$ βlc-irresolute.

İspat: Bunun ispatı Teorem 3.1.1 den görülür.

(X,τ) topolojik uzayını T_{rg}-uzayı alırsak Tanım 3.3.4 ve Tanım 3.3.5 de verilen süreklilik çeşitleri çakışır :

Teorem 3.3.8. (X,τ) topolojik uzayı, T_{rg}-uzayı ve $f : (X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) strongly αrglcβ-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly αglcβ-irresolute.

(2) strongly srglcβ-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly sglcβ-irresolute.

(3) strongly prglcβ-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly pglcβ-irresolute.

(4) strongly βrglcβ-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly βglcβ-irresolute.

İspat: Bunun ispatı Teorem 3.1.2 den görülür.

(X,τ) topolojik uzayını T_{rg}-uzayı alırsak Tanım 3.3.7 ve Tanım 3.3.8 de verilen süreklilik çeşitleri çakışır :

Teorem 3.3.9. (X,τ) topolojik uzayı, T_{rg}-uzayı ve $f : (X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) αrgβlc-irresolute $\Leftrightarrow$ αgβlc-irresolute.

(2) srgβlc-irresolute $\Leftrightarrow$ sgβlc-irresolute.

(3) prgβlc-irresolute $\Leftrightarrow$ pgβlc-irresolute.

(4) βrgβlc-irresolute $\Leftrightarrow$ βgβlc-irresolute.

İspat: Bunun ispatı Teorem 3.1.2 den görülür.

Teorem 3.3.6 ve Teorem 3.3.8 den aşağıdaki sonuç elde edilir :

Özellik 3.3.1. (X,τ) toplojik uzayı, $T_{1/2}$-uzayı ve T_{rg}-uzayı olsun. $f : (X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) strongly αrglcβ-irresolute = strongly αglcβ-irresolute = strongly αlcβ-irresolute.

(2) strongly srglcβ-irresolute = strongly sglcβ-irresolute = strongly slcβ-irresolute.

(3) strongly prglcβ-irresolute = strongly pglcβ-irresolute = strongly plcβ-irresolute.

(4) strongly βrglcβ-irresolute = strongly βglcβ-irresolute = strongly βlcβ-irresolute.

İspat: Bunun ispatı Özellik 3.1.1 den görülür.

Teorem 3.3.7 ve Teorem 3.3.9 den aşağıdaki sonuç elde edilir :

Özellik 3.3.2. (X,τ) toplojik uzayı, $T_{1/2}$-uzayı ve T_{rg}-uzayı olsun. $f : (X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) $\alpha rg\beta lc\text{-irresolute} = \alpha g\beta lc\text{-irresolute} = \alpha\beta lc\text{-irresolute}$.

(2) $srg\beta lc\text{-irresolute} = sg\beta lc\text{-irresolute} = s\beta lc\text{-irresolute}$.

(3) $prg\beta lc\text{-irresolute} = pg\beta lc\text{-irresolute} = p\beta lc\text{-irresolute}$.

(4) $\beta rg\beta lc\text{-irresolute} = \beta g\beta lc\text{-irresolute} = \beta lc\text{-irresolute}$.

İspat: Bunun ispatı Özellik 3.1.1 den görülür.

Teorem 3.3.10. (X,τ) uzayı, submaximal ve extremally disconnected uzayı olsun. $f : (X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) strongly $\alpha lc\beta$-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly $slc\beta$-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly $plc\beta$-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly $\beta lc\beta$-irresolute.

(2) strongly $\alpha glc\beta$-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly $sglc\beta$-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly $pglc\beta$-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly $\beta glc\beta$-irresolute.

(3) strongly $\alpha rglc\beta$-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly $srglc\beta$-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly $prglc\beta$-irresolute $\Leftrightarrow$ strongly $\beta rglc\beta$-irresolute.

İspat: Bunun ispatı Teorem 3.1.3 den görülür.

Teorem 3.3.11. (X,τ) uzayı, submaximal ve extremally disconnected uzayı olsun. $f : (X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) $\alpha\beta lc\text{-irresolute} \Leftrightarrow s\beta lc\text{-irresolute} \Leftrightarrow p\beta lc\text{-irresolute} \Leftrightarrow \beta lc\text{-irresolute}$.

(2) $\alpha g\beta lc\text{-irresolute} \Leftrightarrow sg\beta lc\text{-irresolute} \Leftrightarrow pg\beta lc\text{-irresolute} \Leftrightarrow \beta g\beta lc\text{-irresolute}$.

(3) $\alpha rg\beta lc\text{-irresolute} \Leftrightarrow srg\beta lc\text{-irresolute} \Leftrightarrow prg\beta lc\text{-irresolute} \Leftrightarrow \beta rg\beta lc\text{-irresolute}$.

İspat: Bunun ispatı Teorem 3.1.3 den görülür.

Teorem 3.3.12. Bir $f : (X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır :

(1) f fonksiyonunun semi α-irresolute olması için gerek ve yeter şart strongly αlcβ-irresolute ve semi αlc-continuous olmasıdır.

(2) f fonksiyonunun strongly semi β-irresolute olması için gerek ve yeter şart strongly αlcβ-irresolute ve strongly αlc-irresolute olmasıdır.

(3) f fonksiyonunun irresolute olması için gerek ve yeter şart strongly αlcβ-irresolute ve strongly αlc-irresolute olmasıdır.

İspat: Bunun ispatı Lemma 3.1.3 (2) den görülür.

4. BÖLÜM

1965 yılında O. Njåstad [53] α-açık küme kavramını tanımladı. Mashhour ve ark. [49] α-açık küme kavramını kullanarak topolojik uzaylarda α-açık ve α-süreklilik ile ilgili araştırmalar yaptılar. Yakın zamanda Hatır ve Noiri [32] α-*I*-sürekli fonksiyon kavramını tanımlayarak, sürekliliğin bir ayrışımını verdiler. α-*I*-irresolute fonksiyon kavramı ilk kez A. Açıkgöz ve ark. [70] tarafından verildi.

Bu bölümde biz, α-I_α-irresolute fonksiyon kavramını verdik. İdeal topolojik uzaylardaki bazı özelliklerini ve karakterizasyonlarını elde ettik. Ayrıca, α-I_α-irresolute fonksiyonunun ideal topolojik uzaylarda verilen diğer fonksiyonlarla karşılaştırmalarını da yaptık.

4.1. α-I_α-irresolute Fonksiyonlar ve özellikleri

Önce bu bölümde topolojik uzaylarda ve ideal topolojik uzaylarda bilinen bazı kavramları tekrar hatırlatalım :

Tanım 2.1.1 ve Diagram 2.1 den de görüleceği gibi her açık kümenin bir α-açık küme olduğu aşikardır. Bunun tersinin doğru olmadığına dair örnek, yani α-açık bir kümenin açık olmadığının reel sayılardaki bir örneği genel topolojide ([61], sayfa. 963, Örnekler) verilmiştir.

Tanım 4.1.1 [46]. Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V \subset Y$ **α-açık** kümesi (α-küme) için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında **α-açık** küme (**α-küme**) ise; f fonksiyonuna **α-irresolute** denir.

Uyarı 4.1.1. Sürekli fonksiyonlar ile α-irresolute fonksiyonlar birbirinden bağımsızdırlar ([46], Örnek1, Örnek2).

Tanım 4.1.2. Bir $f : (X,\tau,I) \to (Y,\upsilon,I)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V \subset Y$ **açık** kümesi için,

(1) $f^{-1}(V) \in \alpha IO(X)$ ise; f fonksiyonuna **α-*I*-sürekli** [32],

(2) $f^{-1}(V) \in PIO(X)$ ise; f fonksiyonuna **pre-*I*-sürekli** [25],

(3) $f^{-1}(V) \in \beta I O(X)$ ise; f fonksiyonuna **β-*I*-sürekli** [32] denir.

Tanım 4.1.3 [70]. Bir $f : (X,\tau,I) \to (Y,\upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V \subset Y$ **α-açık** kümesi için,

(1) $f^{-1}(V) \in \alpha I O(X)$ ise; f fonksiyonuna **α-*I*-irresolute**

(2) $f^{-1}(V) \in PIO(X)$ ise; f fonksiyonuna **α-pre-*I*-sürekli** denir.

Tanım 4.1.4 [70]. Bir $f : (X,\tau,I) \to (Y,\upsilon,I)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V \subset Y$ **α-*I*-açık** kümesi için, $f^{-1}(V) \in \beta I O(X)$ ise, f fonksiyonuna **almost α-*I*-irresolute** denir

Yüksel ve arkadaşları [70] aşağıdaki akış diagramını elde etmişlerdir.

α-*I*-irresolute → α-pre-*I*-süreklilik → almost α-*I*-irresolute

↓ ↓ ↓

α-*I*-süreklilik → pre-*I*-süreklilik → β-*I*-süreklilik

Diagram 4.1 : α-*I*-irresolute fonksiyonun yeri.

Diagram 4.1 de verilen fonksiyonların genellikle terslerinin doğru olmadığına dair örnekler [70] de verilmiştir.

Tanım 4.1.5. Bir $f : (X,\tau,I) \to (Y,\upsilon,J)$ fonksiyonu verilsin. Eğer Y uzayının her $V \subset Y$ **α-*I*-açık** kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayında **α-*I*-açık** küme ise, f fonksiyonuna ***α-I_α-irresolute*** denir.

α-I_α-irresolute fonksiyonuna bir örnek verelim :

Örnek 4.1.1. $X=\{a,b,c,d\}$ ve $Y=\{x,y,z\}$ kümeleri üzerinde sırasıyla $\tau=\{X,\emptyset,\{a\}\}$ ve $\upsilon=\{Y,\emptyset,\{x\}\}$ topolojileri ve $I=\{\emptyset,\{a\}\}$ ve $I_1=\{\emptyset,\{x\}\}$ idealleri ile (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. $f : (X,\tau,I) \to (Y,\upsilon,I_1)$ fonksiyonu f(a)=f(b)=x, f(c)=y, f(d)=z ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu α-I_α-irresolute olur.

Tanım 4.1.6. Bir $A \subset X$ kümesi hem α-*I*-açık hemde τ^*-kapalı ise A kümesine ***α-I-kapalı*** küme denir.

Lemma 4.1.1 [5]. (X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır :

(a) Eğer *O,* (X,τ,I) da açık ise, bu takdirde $O \cap CI^*(A) \subset CI^*(O \cap A)$ dir.

(b) $A \subset X_o \subset X$ ise, bu takdirde $CI^*_{X_o}(A) = CI^*(A) \cap X_o$ dir.

Lemma 4.1.2. (X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve $B \subset X_o \subset X$ olsun. Eğer X_o, X de τ^*-kapalı ve $B \in \alpha IO(X)$ ise bu takdirde $B \in \alpha IO(X_o)$ dir.

İspat : Eğer B boş küme ise çözüm aşikardır. B kümesi X uzayında boş kümeden farklı bir α-*I*-açık küme olsun. Buradan $B \subset Int(CI^*(Int(B)))$ olur. Buna göre B kümesi boş kümeden farklı bir α-*I*-açık küme ise, $Int(B) \neq \emptyset$ olduğu açıktır. Bu takdirde $B \subset X_o$ ve X_o, τ^*-kapalı bir küme ise, $CI^*(Int(B)) \subset X_o$ yazılabilir. Bundan dolayı,

$Int(CI^*(Int(B))) \subset Int_{X_o}(CI^*(Int(B)))$ dir. Buna göre Lemma 4.1.1 den $B \subset Int_{X_o}(CI^*(Int(B))) \cap X_o = Int_{X_o}(CI^*(Int(B)) \cap X_o) = Int_{X_o}(CI^*_{X_o}(Int(B)))$ olur. Buradan $B \subset Int_{X_o}(CI^*_{X_o}(Int_{X_o}(B)))$ dir. Böylece $B \in \alpha IO(X_o)$ elde edilir.

Teorem 4.1.1 [5]. (X,τ,I) ideal topolojik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(a) Eğer $A,B \in \alpha IO(X)$ ise, bu takdirde $A \cap B \in \alpha IO(X)$ dir.

(b) Her $\gamma \in \sigma$ için $A_\gamma \in \alpha IO(X)$ ise, bu takdirde $\bigcup_{\gamma \in \sigma} A_\gamma \in \alpha IO(X)$ dir.

α-I_α-irresolute fonksiyonunun kısıtlanması aşağıdaki biçimdedir :

Teorem 4.1.2. Eğer A kümesi X uzayında α-*I*-kapalı bir alt küme ve $f : (X,\tau,I) \rightarrow (Y,\upsilon,I_1)$ fonksiyonu α-I_α-irresolute ise, bu takdirde $f|_A$ kısıtlanmış fonksiyonu da α-I_α-irresolute olur.

İspat : Y uzayının herhangi bir V α-*I*-açık kümesi için f fonksiyonu α-I_α-irresolute olduğundan, $f^{-1}(V)$ kümesi X de α-*I*-açık kümedir. Hipotezden A kümesi X uzayının bir α-*I*-açık alt kümesidir. Bununla birlikte Teorem 4.1.1 den $f^{-1}(V) \cap A$ kümesi de X uzayının bir α-*I*-açık kümesi olur. Yine hipotezden A kümesinin τ^*-kapalı olduğunu biliyoruz. Buna göre Lemma 4.1.2 den

$$(f|_A)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$$

ifadesi; A kümesinin bir α-*I*-açık alt kümesi olur. Böylece $f|_A$ kısıtlanmış fonksiyonu α-I_α-irresolute olur.

Uyarı 4.1.1. Eğer Teorem 4.1.2 de verilen A kümesi yalnızca τ^*-kapalı ise, bu takdirde $f|_A$ kısıtlanmış fonksiyonu her zaman α-I_α-irresolute olmayabilir. Bununla ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.1.2. X={a,b,c,d} ve Y={x,y,z} kümeleri üzerinde sırasıyla τ={X,Ø,{a}} ve υ={Y,Ø,{x}} topolojileri ve *I*={Ø,{a}} ve I_1={Ø,{x}} idealleri ile (X,τ,*I*) ideal topolojik uzayı verilsin. A={b,c,d}olmak üzere, f:(X,τ,*I*)→(Y,υ,I_1) fonksiyonu f(a)=f(b)=x, f(c)=y, f(d)=z ile tanımlansın. Bu takdirde f fonksiyonu α-I_α-irresolute olur. Fakat $f|_A$ kısıtlanmış fonksiyonu α-I_α-irresolute bir fonksiyon değildir. Çünkü A kümesi τ^*-kapalı olduğu halde, α-*I*-açık bir küme değildir.

Tanım 4.1.7. α-*I*-açık kümenin tümleyenine ***coα-I-küme*** denir.

α-I_α-irresolute fonksiyon için bir kriter verelim :

Teorem 4.1.3. f : (X,τ,*I*) → (Y,υ,I_1) fonksiyonu verilsin. Bu takdirde aşağıdakiler eşdeğerdir :

(a) f fonksiyonu α-I_α-irresolute.

(b) Y uzayının bir f(x) noktasını kapsayan herhangi bir V α-*I*-açık kümesi ve $x \in X$ noktası için $x \in U$ ve $f(U) \subset V$ olacak şekilde bir $U \in \alpha IO(X)$ kümesi vardır.

(c) Y uzayının her coα-*I*-kümesinin ters görüntüsü X uzayında bir coα-*I*-kümedir.

İspat (a)$\Rightarrow$(b): Y uzayının herhangi bir V α-*I*-açık alt kümesi ve $f(x) \in V$ noktası verilsin. f fonksiyonu α-I_α-irresolute olduğundan $f^{-1}(V) \in \alpha IO(X)$ ve $x \in f^{-1}(V)$ olur. U= $f^{-1}(V)$ alalım. Böylece $x \in U$ ve $f(U) \subset V$ elde edilir.

(b)$\Rightarrow$(a): Y uzayının herhangi bir V α-*I*-açık alt kümesi ve $x \in f^{-1}(V)$ olsun. Bu takdirde $x \in f^{-1}(V)$ olur. Böylece (b) şıkkından $x \in U_x$ ve $f(U_x) \subset V$ olacak şekilde bir $U_x \in \alpha IO(X)$ kümesi vardır. Buradan $x \in U_x \subset f^{-1}(V)$ elde edilir. Teorem 4.1.1 (b) den $f^{-1}(V)$ kümesi X uzayındaki α-*I*-açık kümelerin birleşimi olarak yazılabilir. Sonuç olarak $f^{-1}(V) \in \alpha IO(X)$ bulunur. Böylece f fonksiyonu α-I_α-irresolute olur.

(a)$\Rightarrow$(c): B kümesi Y uzayında α-*I*-açık bir küme ise, Y – B kümesi coα-*I*-kümedir. Bu takdirde $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$ kümesi X uzayında coα-*I*-küme olarak bulunur.

İki α-I_α-irresolute fonksiyonun bileşkesi de α-I_α-irresolute fonksiyondur :

Teorem 4.1.4. Eğer f : $(X,\tau,I) \rightarrow (Y,\upsilon,J)$ ve g : $(Y,\upsilon,J) \rightarrow (Z,\sigma,k)$ iki α-I_α-irresolute fonksiyon ise, bu takdirde gof bileşke fonksiyonu α-I_α-irresolute olur.

İspat : W kümesi Z uzayının herhangi bir α-*I*-açık alt kümesi olsun. Bu takdirde g fonksiyonu α-I_α-irresolute olduğundan, $g^{-1}(W)$ kümesi Y uzayında α-*I*-açık bir kümedir. Böylece f fonksiyonu α-I_α-irresolute olduğundan,

$$(gof)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$$

kümesi X uzayında α-*I*-açık bir kümedir. Sonuç olarak gof bileşke fonksiyonu α-I_α-irresolute olarak bulunur.

Kümelerin * kapanışlarının kartezyen çarpımı; kümelerin kartezyen çarpımının * kapanışlarının alt kümesidir :

Lemma 4.1.3. $Cl^*(A)xCl^*(B) \subset Cl^*(AxB)$ dir.

İspat : (X,τ,I_1) ve (Y,υ,I_2) iki ideal topolojik uzayı verilsin. İlk önce I_1 x I_2 idealini tanımlayalım. Bunun için $I_1 \subset P(X)$, $I_2 \subset P(Y)$ ve (A_1,B_1), $(A_2,B_2) \in I_1$ xI_2 olsun. Bu takdirde,

(a) $(A_1,B_1) \cup' (A_2,B_2) = (A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)$

(b) $(A_1,B_1) \subset' (A_2,B_2) \Leftrightarrow A_1 \subset A_2$, $B_1 \subset B_2$ olsun.

$\cup'$ işlemini tanımlayalım :

(A_1,B_1), $(A_2,B_2) \in I_1$ x I_2 olsun. Bu takdirde $(A_1,A_2) \in I_1$ ve $(B_1,B_2) \in I_2$ olur. Buradan $(A_1 \cup A_2) \in I_1$ ve $(B_1 \cup B_2) \in I_2$ dir. Böylece,

$(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \in I_1$ x I_2 elde edilir.

$\subset'$ işlemini tanımlayalım :

$(A_1,B_1) \subset' (A_2,B_2)$ ve $(A_2,B_2) \in I_1$ x I_2 olsun. Biz $(A_1,B_1) \in I_1$ x I_2 olduğunu göstermek istiyoruz. Eğer $(A_1,B_1) \subset' (A_2,B_2)$ ise, bu takdirde $A_1 \subset A_2$ ve $B_1 \subset B_2$ dir. Eğer $(A_2,B_2) \in I_1$ x I_2 ise, bu takdirde $A_2 \in I_1$, $B_2 \in I_2$ dir. Böylece $A_1 \subset A_2$ ise $A_1 \in I_1$ ve $B_1 \subset B_2$ ise $B_1 \in I_2$ olur. Böylece $(A_1,B_1) \in I_1$ x I_2 elde edilir.

Şimdi ;

$(AxB)^* = \{(x,y) \in X$ x Y / her U_x x $V_y \in \upsilon_{(x,y)}$ için $(AxB) \cap (U_x$ x $V_y) \notin I_1 x I_2\}$

olsun. Bu takdirde $A^* \times B^* \subset (AxB)^*$ olduğunu göstermeliyiz.

Eğer $(x,y) \in A^* \times B^*$ ise, $x \in A^*$ ve $y \in B^*$ dir. Eğer $x \in A^*$ ise, her $U \cap A \notin I_1$ ve $y \in B^*$ ise, her $V \cap B \notin I_2$ olur. Buradan $(U \cap A)x(V \cap B) \notin I_1 x I_2$ olur. Bu takdirde,

$$(U \cap A)x(V \cap B) = [(U \cap A)xV] \cap [(U \cap A)xB]$$
$$= [(UxV) \cap (AxV)] \cap [(UxB) \cap (AxB)]$$
$$= (UxV) \cap (AxV) \cap (UxB) \cap (AxB) \notin I_1 x I_2 \text{ elde edilir.}$$

Buradan;

$$(UxV) \cap (AxV) \cap (UxB) \cap (AxB) \subset (AxB) \cap (UxV) \notin I_1 \times I_2 \text{ olur.}$$

Eğer $(AxB) \cap (UxV) \in I_1 \times I_2$ olsaydı idealde kalıtsallık özeliğinden,

$$(UxV) \cap (AxV) \cap (UxB) \cap (AxB) \in I_1 \times I_2 \text{ olurdu.}$$

Böylece her $U \in \upsilon_{(x)}$ ve her $V \in \upsilon_{(y)}$ için $(AxB) \cap (UxV) \notin I_1 \times I_2$ ve her $UxV \in \upsilon_{(x,y)}$ için $(AxB) \cap (UxV) \notin I_1 \times I_2$ ise, bu takdirde $(x,y) \in (AxB)^*$ olur. Sonuç olarak, $A^* \times B^* \subset (AxB)^*$ elde edilir.

$Cl^*(A) \times Cl^*(B) \subset Cl^*(AxB)$ **olduğunu gösterelim :**

Varsayalım ki $(x,y) \notin Cl^*(AxB)$ olsun. Bu takdirde eğer $(x,y) \notin Cl^*(AxB)$ ise, $(x,y) \notin AxB$ ve $(x,y) \notin (AxB)^*$ olur (çünkü, $[Cl^*(AxB) = (AxB) \cup (AxB)^*]$).

Eğer $(x,y) \notin (AxB)^*$ ise, bu takdirde $(UxV) \cap (AxB) \in I_1 \times I_2$ olacak şekilde $UxV \in \upsilon_{(x,y)}$ vardır. Böylece $(U \cap A)x(V \cap B)$ olmak üzere $(U \cap A) \in I_1$ ve $(V \cap B) \in I_2$ elde edilir. Eğer $(U \cap A) \in I_1$ ise, bu takdirde $x \notin A^*$ dir. Eğer $(V \cap B) \in I_2$ ise, bu durumda $y \notin B^*$ dir.

Eğer $(x,y) \notin AxB$ ise, bu takdirde $x \notin A$ veya $y \notin B$ olur. Buna göre aşağıda tüm durumları inceleyelim :

(a) ($x \notin A^*$ ve $y \notin B^*$, $x \notin A$ ve $y \notin B$) ise, $x \notin Cl^*(A)$ ve $y \notin Cl^*(B)$ olur. Böylece $(x,y) \notin Cl^*(A)xCl^*(B)$ dir.

(b) ($x \notin A^*$ ve $y \notin B^*$, $x \notin A$ ve $y \in B$) ise, $x \notin Cl^*(A)$ ve $y \in Cl^*(B)$ olur. Böylece $(x,y) \notin Cl^*(A)xCl^*(B)$ dir.

(c) ($x \notin A^*$ ve $y \notin B^*$, $x \in A$ ve $y \notin B$) ise, $x \in Cl^*(A)$ ve $y \notin Cl^*(B)$ olur. Böylece $(x,y) \notin Cl^*(A)xCl^*(B)$ dir.

Sonuç olarak eğer $(x,y) \notin Cl^*(AxB)$ ise, $(x,y) \notin Cl^*(A)xCl^*(B)$ olup $Cl^*(A)xCl^*(B) \subset Cl^*(AxB)$ olarak bulunur.

Lemma 4.1.4. X ve Y iki ideal topolojik uzay olsun. Eğer $A \in \alpha IO(X)$ ve $B \in \alpha IO(Y)$ ise, bu takdirde $A \times B \in \alpha IO(X \times Y)$ olur.

İspat : Eğer $A \in \alpha IO(X)$ ve $B \in \alpha IO(Y)$ ise,

$$\begin{aligned} A \times B &\subset Int_X(CI^*_X(Int_X(A))) \times Int_Y(CI^*_Y(Int_Y(B))) \\ &= Int_{X\times Y}(CI^*_X(Int_X(A)) \times CI^*_Y(Int_Y(B))) \\ &\subset Int_{X\times Y}(CI^*_{X\times Y}(Int_X(A) \times Int_Y(B))) \\ &= Int_{X\times Y}(CI^*_{X\times Y}(Int_{X\times Y}(A \times B))). \end{aligned}$$

Böylece, $A \times B \in \alpha IO(X \times Y)$ elde edilir.

Tanım 4.1.8 [46]. (X,τ) topolojik uzayının herhangi iki farklı noktası verildiğinde bu noktaların birbirinden ayrık birer α-açık komşulukları varsa; yani

$$x,y \in X\ (x \neq y) \text{ için, } \exists U \in \upsilon_{(x)} \text{ ve } \exists V \in \upsilon_{(y)} \ \ni\ U \cap V = \emptyset$$

ise, (X,τ) topolojik uzayına **α-Hausdorff uzayı** denir.

Uyarı 4.1.2 [46]. Her **Hausdorff uzayı** bir **α-Hausdorff uzayı**dır. Fakat genellikle tersi doğru değildir.

α-*Hausdorff* uzayının (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki karşılığı aşağıda verilmiştir :

Tanım 4.1.9. (X,τ,I) ideal topolojik uzayının herhangi iki farklı noktası verildiğinde bu noktaların birbirinden ayrık birer α-I-açık komşulukları varsa; yani

$x,y \in X\ (x \neq y)$ için, $\exists U \in \upsilon_{(x)}$ ve $\exists V \in \upsilon_{(y)} \ \ni\ U \cap V = \emptyset$ ise, (X,τ,I) ideal topolojik uzayına ***α-I_α-Hausdorff uzayı*** denir.

Uyarı 4.1.3. Her **Hausdorff** uzayı bir ***α-I_α-Hausdorff*** uzayıdır. Fakat genellikle tersi doğru değildir (diagram 2.3).

Uyarı 4.1.4. Her ***α-I_α-Hausdorff*** uzayının bir **α-Hausdorff** uzayı olduğu açıktır. Fakat genellikle tersi doğru değildir (diagram 2.3)

$f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu takdirde XxY kartezyen çarpım uzayının $A=\{(x,f(x))|x \in X\}$ alt kümesi, f fonksiyonunun grafiği olarak adlandırılır ve G(f) ile gösterilir. f fonksiyonu sürekli ve Y *Hausdorff* uzayı olduğu zaman G(f) kümesinin

XxY çarpım uzayında kapalı bir küme olduğunu biliyoruz. Genel topolojide bilinen bu sonucu Tanım 4.1.5 ve Tanım 4.1.9 yardımıyla aşağıdaki biçimde verebiliriz :

Teorem 4.1.5. Eğer f : $(X,\tau,I) \rightarrow (Y,\upsilon,I)$ fonksiyonu ***α-I_α-irresolute*** ve Y uzayı ***α-I_α-Hausdorff*** ise, bu takdirde,

$$G(f) = \{(x,f(x)) \mid x \in X\}$$

kümesi X x Y çarpım uzayında coα-*I*-kümedir.

İspat : $(x,y) \in X \times Y - G(f)$ olsun. Bu takdirde $y \neq f(x)$ olur. Y uzayı α-I_α-*Hausdorff* uzayı olduğundan $f(x) \in W$ ve $y \in V$ olacak şekilde Y uzayının ayrık W ve V α-*I*-açık kümeleri vardır. f fonksiyonu α-I_α-irresolute olduğundan ve Teorem 4.1.3(b) den $x \in U$ ve $f(U) \subset W$ olacak şekilde bir $U \in \alpha IO(X)$ kümesi vardır. Buradan $(x,y) \in U \times V \subset X \times Y - G(f)$ elde edilir. Lemma 4.1.4 gereğince dolayı $U \times V \in \alpha IO(X \times Y)$ olur. Böylece Teorem 4.1.1(b) den X x Y – G(f) kümesi X x Y deki α-*I*-açık kümelerin birleşimidir. Dolayısıyla,

$$X \times Y - G(f) \in \alpha IO(X \times Y)$$

elde edilir. Sonuç olarak G(f) grafiği X x Y çarpım uzayında coα-*I*-küme olarak bulunur.

f, g : X→Y iki fonksiyon olsun. f ve g fonksiyonları sürekli ve Y uzayı Hausdorff olduğunda A={(x | f(x) = g(x) } kümesi X uzayında kapalıdır. Bunun ideal topolojik uzaydaki karşılığı Teorem 4.1.6 ile verilmiştir :

Teorem 4.1.6. Eğer f ve g fonksiyonları X ideal topolojik uzayından Y α-I_α-*Hausdorff* uzayına iki α-I_α-irresolute fonksiyon ise, bu takdirde A={x | f(x)=g(x)} kümesi X uzayında coα-*I*-kümedir.

İspat : $y \in X - A$ olsun. Bu takdirde $f(y) \neq g(y)$ olur. Y uzayı α-I_α-*Hausdorff* uzayı olduğundan $f(x) \in U$ ve $g(y) \in V$ olacak şekilde Y uzayının ayrık U ve V α-*I*-açık kümeleri vardır. Buna göre f ve g fonksiyonları α-I_α-irresolute olduğundan $f^{-1}(U)$ ve $g^{-1}(V)$ kümeleri X uzayında α-*I*-açık kümelerdir. Bu durumda B kümesini $B = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ olarak alırsak, bu takdirde $y \in B \in \alpha IO(X)$ olur. Böylece $U \cap V = \emptyset$ için $A \cap B = \emptyset$ dir. Buna göre $y \in B \subset X - A$ olur. Dolayısıyla X – A kümesi Teorem 4.1.1(b) den dolayı X uzayının α-*I*-açık kümelerinin birleşimidir ve $X - A \in \alpha IO(X)$ olur. Böylece A kümesi X uzayının bir coα-*I*-kümesidir.

Tanım 4.1.10. Bir X ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ kümesi verilsin. A kümesinin kapsadığı bütün coα-*I*-kümelerinin arakesitlerine A kümesinin ***coα-I-kapanışı*** denir ve CoαIO(A) ile gösterilir.

Uyarı 4.1.5. Bir A kümesinin coα-*I*-küme olması için gerek ve yeter şart CoαIO(A) = A olmasıdır.

Lemma 4.1.5. A kümesi X ideal topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Bu takdirde $x \in$ CoαIO(A) olması için gerek ve yeter şart x noktasını kapsayan herhangi bir U α-*I*-açık kümesi için, $A \cap U \neq Ø$ olmasıdır.

İspat. Gerek şart : Varsayalım ki $x \in$ CoαIO(A) ve $A \cap U = Ø$ olacak şekilde x noktasını kapsayan U kümesi α-*I*-açık olsun. Bu takdirde $A \subset X - U$ olur. X –U kümesi coα-I-kümedir. Böylece CoαIO(A)$\subset$ X – U olur. Buna göre $x \in X - U$ elde edilir. Bu takdirde $x \notin$ CoαIO(A) olup hipotezle çelişir.

Yeter şart : X uzayının her α-*I*-açık A kümesinin x noktasını kapsadığını varsayalım. Eğer $x \notin$ CoαIO(A) ise, bu takdirde $A \subset F$ ve $x \notin F$ olacak şekilde X uzayının bir F coα-*I*-kümesi vardır. Buradan $x \in X–F \in$ αIO(X) olur. Böylece X – F kümesi x noktasını kapsayan X uzayının bir α-*I*-açık kümesidir. Fakat (X – F) $\cap$ A = Ø olup hipotezle çelişir.

Teorem 4.1.7. Eğer f α-I_α-irresolute fonksiyonu, α-I_α-*Hausdorff* X uzayından kendisine tanımlanan bir fonksiyon ise, bu takdirde A={x | f(x)=x} kümesi coα-*I*-kümedir.

İspat : $\boldsymbol{a} \in$ CoαIO(A) olsun. Eğer $\boldsymbol{a} \notin$ A ise f($\boldsymbol{a}$) $\neq \boldsymbol{a}$ olur. X uzayı α-I_α-*Hausdorff* uzayı olduğundan f($\boldsymbol{a}$)$\in$ U, $\boldsymbol{a} \in$ V ve $U \cap V = Ø$ olacak şekilde X uzayının U ve V α-*I*-açık kümeleri vardır. Buna göre f fonksiyonu α-I_α-irresolute olduğundan $f^{-1}(U) \in$ αIO(X) olur. Bu durumda $f^{-1}(U) \cap V$ kümesi bir α-*I*-açık kümedir ve $\boldsymbol{a}$ noktasını kapsar. Böylece Lemma 4.1.5 den $\boldsymbol{a} \in$ CoαIO(A) olup $f^{-1}(U) \cap V \cap V \neq Ø$ dir. Bu durum *U* ve V kümelerinin bir noktayı kapsamasıyla çelişir. Dolayısıyla $\boldsymbol{a} \in$ A olur. Buradan $A \in$ CoαIO(A) = A elde edilir. Sonuç olarak Uyarı 4.1.5 den A kümesi bir coα-*I*-küme olur.

Bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer ι fonksiyonu sürekli ve ι|A kısıtlanmış fonksiyonu A kümesi üzerinde birim fonksiyon ise ι:X→A fonksiyonuna sürekli retraction denir. Eğer X uzayı *Hausdorff* ve ι sürekli retraction fonksiyon ise $A \subset X$ kümesinin kapalı olduğunu biliyoruz.

Tanım 4.1.11. A kümesi X ideal topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $\gamma|_A$ kısıtlanmış fonksiyonu A kümesi üzerinde birim fonksiyon ise γ:X→ A fonksiyonuna ***α-I_α-irresolute retraction*** denir.

Uyarı 4.1.6. Bir f fonksiyonu α-I_α-irresolute retraction ise, sürekli retraction fonksiyon olmayabilir. Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 4.1.3. X={a,b,c,d,e} kümesi üzerinde τ={X,Ø,{a},{a,b}} topolojisi ve *I*={Ø,{a}} ideali ile (X,τ,*I*) ideal topolojik uzayı verilsin. A={b,c,d} olmak üzere A kümesine indirgenmiş $\tau|_A$ = {A,Ø,{b}} topolojisi verilsin. f : X → A fonksiyonu γ(***a***)=γ(***b***)= γ(***e***)= ***b***, γ(***c***)= ***c*** and γ(***d***) = ***d*** ile tanımlansın. Bu takdirde γ fonksiyonu α-I_α-irresolute retraction olur. Fakat sürekli retraction fonksiyon değildir.

Teorem 4.1.8. A kümesi X ideal topolojik uzayının bir alt kümesi ve γ :X→A fonksiyonu α-I_α-irresolute retraction olsun. Eğer X uzayı α-I_α-*Hausdorff* uzayı ise, bu takdirde A kümesi X uzayında bir coα-*I*-kümedir.

İspat : Varsayalım ki A kümesi coα-*I*-küme olmasın. Bu takdirde $x \in CoαIO(A)$ olacak şekilde X uzayında bir x noktası vardır. Fakat $x \notin A$ dır. Bu durumda γ fonksiyonu α-I_α-irresolute retraction olduğundan, γ(x) ≠ x olur. Buna göre X uzayı α-I_α-*Hausdorff* uzayı olduğundan, $x \in U$ ve $\gamma(x) \in V$ olacak şekilde X uzayının ayrık U ve V α-*I*-açık kümeleri vardır. Şimdi x noktasını kapsayan keyfi bir W α-*I*-açık kümesini alalım. Bu takdirde $W \cap U$ kümesi x noktasını kapsayan bir α-*I*-açık kümedir. Bu durumda $x \in CoαIO(A)$ olup Lemma 4.1.5 den $(W \cap U) \cap A \neq Ø$ olur. $y \in W \cap U \cap A$ olsun. Buna göre $y \in A$ olduğundan γ(y) = $y \in U$ olur ve $\gamma(y) \notin V$ dir. Buda $y \in W$ olduğundan dolayı $\gamma(W) \not\subset V$ olmasını gerektirir. Buradan $\gamma(W) \not\subset V \cap A$ elde edilir. Bu ise Teorem 4.1.3.(b) den γ fonksiyonunun α-I_α-irresolute olması ile çelişir. Dolayısıyla $x \in A$ dır, ve CoαIO(A) = A olmasını gerektirir. Böylece A kümesi Uyarı 4.1.5 den X uzayında bir coα-*I*-kümedir.

KAYNAKLAR

[1] Abd El-Monsef M. E., El-Deeb S. N. and Mahmoud R. A., 1983, β-open sets and β-continuous mappings, Bull. Fac. Sci. Assiut Univ., vol. 12, 77-90.

[2] Abd El-Monsef M. E., Lashien E. F. and Nasef A. A., 1992, On *I*-open sets and *I*-continuous functions, Kyungpook Math. J., vol. 32(1), 21-30.

[3] Abd El-Monsef M. E., Lashien E. F. and Nasef A. A., 1992, Some topological operators via ideals, Kyungpook Math. J., vol. 32(2), 273-284.

[4] Abd El-Monsef M. E., Lashien E. F. and Nasef A. A., 1993, S-compactness via ideals, Tamkang J. Math. J., vol. 24(4), 431-443.

[5] Acıkgöz A., Noiri T. and Yüksel S., 2004, On α-*I*-continuous and α-*I*-open Functions, Acta Math. Hungar., vol.105 (1-2), 27-37.

[6] Açıkgöz A., 2004, Doktora Tezi., Konya .

[7] Acıkgöz A., Yüksel S. And Noiri T., 2004, A Decomposition of Continuity In İdeal Topological Spaces, Acta Math. Hungar., 285-289.

[8] Al-Nashef B., 2002, A decomposition of α-continuity and semi-continuity, Acta. Math. Hungar., vol.97, 115-120.

[9] Andrijević, D., 1986, semi-preopen sets, Mat. Vesnik, vol.38, 24-32.

[10] Arockia Rani I. and Balachandran K., 1997, On regüler generalized continuous maps in Topological spaces, Kyungpook Math. J., vol.37, 305-314.

[11] Aslım G. and Ayhan Y., 2004, Decompositions of some weaker forms of continuity, Acta Math. Hungar., vol.105, 85-91.

[12] Beceren Y., 2000, On strongly α-continuous functions, Far East J. Math. Sci. (FJMS), Special Vol. Part I, 51-58.

[13] Beceren Y., 2000, On semi α-irresolute functions, J Indian Acad Math. 22, 353-362.

[14] Beceren Y., 2001, Strongly semi β-irresolute functions and semi α-preirresolute functions, Far East J. Math. Sci. (FJMS), vol.3, 973-983.

[15] Beceren Y. Noiri T., 2000, On α-precontinuous functions, Far East J. Math. Sci. (FJMS), Special Vol. Part III, 295-303.

[16] Beceren Y., Noiri T., 2005, strongly precontinuous functions, Acta Math. Hungar., 108, 47-53.

[17] Beceren Y., Noiri T., Fidancı M. C. and Arslan K., 2006, On some generalizations of localy closed sets and lc-continuous functions, Far East J. Math. Sci. (FJMS), 22, 333-344.

[18] Beceren Y., Noiri T., Some functions defined by α-open and preopen sets, Chaos, Solitons & Fractals, to appear.

[19] Beceren Y., Noiri T., Some functions defined by semi-open and β-open sets, Chaos, Solitons & Fractals, to appear.

[20] Beceren Y., Noiri T., 2003, α-preirresolute functions and β-preirresolute functions, demonstratio Math., (34), 207-213.

[21] Bourbaki N., 1966, Elements of mathematics, General Topology, Part 1, Hermann, Addison-Wesley Pulishing Co., Reading, Mass., Paris.

[22] Caldas M., Jafari S., Noiri T. and Saraf R.K., 2005, Weak and strong forms of α-irresolute maps, Chaos, Solitons & Fractals, 24, 223–228.

[23] Crossley S. G. and Hildebrand S. K., 1972, Semi-topological properties, Fund. Math., 74, 233-254.

[24] Dontchev J., 1996, Contra-continuous functions and strongly S-closed spaces, Int J Math Math Sci. (2), vol.19 , 303–310.

[25] Dontchev J., 1996, On pre-*I*-open sets and decomposition of *I*-continuity, Banyan math. J., (2).

[26] Ganster M. and Reilly I. L., 1989, Locally closed sets and LC-continuous functions, Int J Math Math Sci 3, 417–424.

[27] Hamlett T. R. and Janković D., 1990, Ideals in Topological Spaces and the Set., Operator ψ, Bollettino U. M. I., vol. 7, 863-874.

[28] Hamlett T. R. and Rose David, 1992, Local compactness with respect to an ideal, Kyungpook Math. J., vol. 32(1), 31-43.

[29] Hamlett T. R. and Rose David, 1992, Remarks on some theorems of Banach, McShane, and Pettis, Rocky Mountain J. Math., vol.22(4), 1329-1339.

[30] Hamlett T. R. and Rose David, 1993, A note chracterizing countable compactness with respect to an ideal, New Zealand, J. Math., vol. 22, 63-66.

[31] Hashimoto, H., 1976, On the *-topology and its applications, Fund. Math., vol. 91, 5-10.

[32] Hatir E. and Noiri T., 2002, On decompositions of continuity via idealization, Acta Math. Hungar., (4), vol.96, 341-349.

[33] Hatir E., Keskin A. and Noiri T., 2003, On a new decomposition of continuity via idealization, JP Geometry and Topology, vol. 1(3), 55-64.

[34] Hayashi E., 1964, Topologies defined by local properties, Math. Ann., vol. 156, 205-215.

[35] Husain T., 1966, Almost continuous mappings, Prace Mat. Vol.10, 1-7.

[36] Janković D.S., 1983, On locally irreducible spaces, Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I, vol.97, 59-72.

[37] Janković D. and Hamlett T. R., 1990, New topologies from old via ideals, Amer. Math. Monthly, vol.97, 295-310.

[38] Janković D. and Hamlett T. R., 1992, Compatible Extensions of Ideals, Bollettino U. M. I., vol. 7, 453-465.

[39] Kelley J. L., 1955, General Topology, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New Jersey.

[40] Kuratowski, K. 1933, Topologie I, Warszawa.

[41] Kocaman A. H., Yüksel Ş. and Açıkgöz A., 2007, On some strongly functions defined by α-Open, Chaos, Solitons & Fractals, to appear.

[42] Levine N., 1961, A decomposition of continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, vol. 68, 44-46.

[43] Levine N., 1963, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, vol. 70, 36-41.

[44] Levine N., 1970, Generalized closed sets in topology, Rend. Circ. Mat. Palermo(2), vol.19, 89-96.

[45] Lo Faro G., 1987, On strongly α-irresolute mappings, Indian J. Pure Appl. Math., vol.18, 146-151.

[46] Maheshwari S. N. and Thakur S. S., 1980, On α-irresolute mappings, Tamkang J. Math. (2),vol.11, 209-214.

[47] Mahmoud R. A. and Abd El-Monsef M. E., 1990, β-irresolute and β-topological invariant. Proc. Pakistan Acad. Sci., vol. 27, 285-296.

[48] Mashhour A. S., Abd El-Monsef, M. E. and El-Deeb and S. N., 1982, On pre-continuous and weak pre-continuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt,

vol. 53, 47-53.

[49] Mashhour A. S., Hasanein I. A., and El-Deeb S. N., 1983, On α-continuity and α-open mappings, Acta Math. Hunar. 41, no.3-4, 213-218.

[50] Nasef A.A. and Noiri T., 1998, Strong forms of faint continuity, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. Ser. A Math., vol.19, 21-28.

[51] Natkaniec T., 1986, On *I*-continuity and semi-*I*-continuity points, Math. Slovaca, vol. 36(3), 297-312.

[52] Newcomb R. L., 1967, Topologies which are compact modulo an ideal, Ph. D. Dissertation, Univ. Of Cal. At Santa Barbara.

[53] Njåstad O., 1965, On some classes of nearly open sets, Pacific J. Math., vol. 15, 961-970.

[54] Njåstad O., 1966, Remarks on topologies defined by local properties, Avh. Norske Vid.-acad. Oslo I (N.S.), vol. 8, 1-16.

[55] Noiri T., 1984, On α-continuous functions, Casopis Pest. Math., 109, no.2, 118-126.

[56] Noiri T., 1987, Weakly α-continuous functions, Internat. J. Math. Math., Sci. 10, no.3, 483-490.

[57] Noiri T., 1988, Characterizations of extremally disconnected spaces, Indian J. Pure Appl. Math. 19, no.4, 325-329.

[58] Noiri T., 1991, Characterizations of S-closed Hausdorff spaces, J. Austral. Math. Soc. Ser.A, 51, 300-304.

[59] Noiri T., 1996, Mildly normal spaces and some functions, kyungpook Math. J., 36, 183-190.

[60] Palaniappan N. and Rao K. C., 1993, Regüler generalized closed sets, kyungpook Math. J., 33, 211-219.

[61] Pervin W. J., 1964, Foundations of General Topology, Academic Press, New York.

[62] Popa V., 1978, On the decomposition of the quasicontinuities in topological spaces (Romanian), Stud. Cerc. Mat., 30, 31-35.

[63] Reilly I. L. and Vamanamurthy M. K., 1985, On α-continuity in topological spaces, Acta Math. Hung., 45, 27-32.

[64] Rose D. A. and Hamlet T. R., 1992, On the one-point *I*-compactification and local *I*-compactness, Math. Slovaca, vol. 42(3), 359-369.

[65] Rose D. A. and Janković D., 1993/94, On functions having the property of Baire, Real Anal. Exchange, vol. 19(2), 589-597.

[66] Samuels P., 1975, A topology formed from a given topological space, J. London Math. Soc. (2), vol.10, 409-416.

[67] Singal M. K. and Singal A. R., 1968, Almost continuous mappings, Yokohama Math. J., vol.16, pp. 63-73.

[68] Vaidyanathaswamy R., 1945, The localization theory in set-topology, Proc. Indian Acad. Sci., vol. 20, 51-61.

[69] Vaidyanathaswamy R., 1960, Set Topology, Chelsea Publishing Company, New York.

[70] Yuksel S., Noiri T. and Acikgoz A., 2003, On α-Pre-*I*-continuous Functions, News Bull Cal. Math. Soc., 26 (7-9), 7-12.

[71] Yüksel Ş., Açıkgöz A. and Noiri T., 2004, On Delta-*I*-Open Sets and Decomposition of Alpha-*I*-Continuity, Acta Math. Hung., 103 (4), 349-357.

[72] Yüksel Ş., Açıkgöz A. and Noiri T., 2005, Delta-*I*-Continuous Functions, Tr. J. of math., 29, 29, 39-51.