T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RASYONEL DÖRTYÜZLÜLERİN ALAN VE HACİMLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Heybet AKER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI
KONYA, 2007

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RASYONEL DÖRTYÜZLÜLERİN ALAN VE HACİMLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Heybet AKER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

Bu tez 24/07 /2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir

Prof. Dr. Eşref HATIR
(Başkan)

Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR
(Danışman)

Yard.Doç. Dr. Emine Gökçen KOÇER
(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

RASYONEL DÖRTYÜZLÜLERİN ALAN VE HACİMLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Heybet AKER

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İlköğretim Anabilim Dalı
Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR
2007, *vi* + 52 Sayfa

Jüri: Prof.Dr.Eşref HATIR
Yard. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR
Yard.Doç.Dr.Emine Gökçen KOÇER

Bu çalışmada; ilk olarak, Heron Dörtyüzlü tanıtılarak, bu tür dörtyüzlülerin kenar uzunluklarının, yüzey alanlarının ve hacminin bazı cebirsel özellikleri hakkında bilgi verilmiştir. Bu özelliklerin birbirleriyle bağlantısı modüler aritmetik yöntemiyle ortaya konmuştur. Sonra, genel olarak dörtyüzlüyü konu edinen araştırmacıların başvurduğu parametrik gösterimlere değinilmiş ve bu gösterimlerin Heron Dörtyüzlü bulundurup bulundurmadığı tespit edilmeye çalışılmıştır. Son olarak, Mükemmel Piramit tanımı yapılarak, Heron Dörtyüzlü ile ilişkisi belirtilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Rasyonel Dörtyüzlü, Heron Dörtyüzlü, Parametrik Gösterim, Rasyonel Yüzey Alanı, Rasyonel Hacim, Mükemmel Piramit

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

A RESEARCH ON SOME PROPERTIES OF FACE AREA AND VOLUME OF RATIONAL TETRAHEDRA

Heybet AKER

Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Primary Education

Supervisor : Asist. Prof. Dr. Ahmet CİHANGİR
2007, vi + 52 Pages

Jury : Prof.Dr.Eşref HATIR
Asist. Prof. Dr. Ahmet CİHANGİR
Asist. Prof. Dr. Emine Gökçen KOÇER

In this study; firstly, “Heron Tetrahedra” is described and some information about algebraic properties of edges, face areas and volume of Heron Tetrahedra are presented. The relationships between these properties are introduced by using modüler arithmetic methods. In addition, the parametric configurations which researchers who examine tetrahedra used are discussed. Then, it is tried to find if these parametric configurations contain Heron tetrahedra or not. Lastly, “Perfect Pyramid” is defined and its connection with Heron tetrahedra is determined.

Key Words: Rational Tetrahedra, Heron Tetrahedra, Parametric Configuration, Rational Face Area, Rational Volume, Perfect Pyramid

ÖNSÖZ

Geometri, matematiksel düşüncenin elle tutulur, gözle görülür şekillere bürünmüş halidir. Somut cisimlerde, soyut kavramlar saklıdır. Boyutsuz ve tanımsız "nokta", geometrinin harflerini teşkil eder. Doğru, üçgen, dörtgen ve diğer çok boyutlu düzlemsel ve uzaysal şekiller geometri biliminin cebirsel ifadelerle şifrelendiği matematiğin uygulama alanlarından biridir.

Teknolojik ilerlemeler, matematik biliminin bir ürünü olduğu gibi, yeni gelişmelerin de bir aracı olmuştur. Günümüze kadar elde edilmiş bilimsel veriyi sermaye kabul eden ve yığmalı bir bilim dalı olan matematik de, sayılar teorisi ve geometri arasındaki ilişkiler keşfedildikçe yeni sırlarını ortaya koymaktadır.

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; çalışmayla ilgili kaynak araştırması, tanımlar ve ilgili teoremler asıl kaynaklarından alınarak verilmiştir. İkinci bölümde; Heron dörtyüzlüsünün kenar uzunluklarının, yüzey alanlarının ve hacminin bazı cebirsel özellikleri ve birbirleriyle bağlantıları üzerinde durulmuştur. Üçüncü bölümde; dörtyüzlülerin parametrik gösterimleri ve Heron dörtyüzlüsü olup olmadıkları araştırması yer almaktadır. Ayrıca; mükemmel piramit tanımı verilerek Heron dörtyüzlüsü ile ilgisi belirtilmiştir.

Bu çalışma, Buchholz (1992) un Perfect Pyramids isimli makalesi ile Chisholm (2004) ün Rational and Heron Tetrahedra başlıklı yüksek lisans tezi üzerine kurulmuştur. Öncelikle Heron dörtyüzlüsünün tanımı verilerek, bu tür dörtyüzlülerin kenar uzunlukları, yüzey alanları ve hacmi cebirsel olarak incelenmiştir. Sonra Buchholz'un makalesi aracılığıyla, 1 ve 2 parametreli dörtyüzlü gösterimlerinin rasyonel hacme sahip olma şartları araştırılmıştır. Özellikle 3 parametreli dörtyüzlü gösterimlerinin rasyonel hacme sahip olma şartlarına yönelik araştırmada, Buchholz'un tespitlerinden bahsedilmiş, Chisholm tarafından ortaya konan alternatif çözüm ve parametrik tanımlar verilmiştir. Buchholz' tan farklı ve O'nun çalışmalarını tamamlayıcı olarak, 4, 5 ve 6 parametreli dörtyüzlülere kısaca değinilmiştir. Rasyonel hacimli bir dörtyüzlünün yüzey alanlarının rasyonel olması durumları araştırılmıştır. Bir çeşit dörtyüzlü olan mükemmel piramitten kısaca bahsedilmiştir.

“Rasyonel Dörtyüzlülerin Alan ve Hacimlerinin Bazı Özellikleri Üzerine Bir Araştırma” isimli tez konusunun tespitinde ve hazırlanması sırasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yard. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR’ e teşekkür ederim. Ayrıca bana her zaman destek olan aileme ve eşime teşekkürü bir borç bilirim.

Heybet AKER

Temmuz – 2007

SEMBOLLER

$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}^+$	:	Pozitif Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}^+$	:	Pozitif Rasyonel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N} \setminus 3\,\mathbb{N}$	:	3 e Tam Olarak Bölünemeyen Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{N}$	:	Doğal Sayı Olmayan Pozitif Rasyonel Sayılar Kümesi
$\subset$	:	Alt Küme Sembolü
$\not\subset$	:	Alt Küme Değildir Sembolü
$(a,\ b,\ c)$	:	Kenar Uzunlukları *a, b, c* Tamsayıları Olan Üçgen
$(a,d)(b,e)(c,f)$	:	Kenar Uzunlukları *a, b, c, d, e, f* Olan Dörtyüzlü
s	:	Üçgenin Çevre Uzunluğunun Yarısı
$A_{a,b,c}$	:	Kenar Uzunlukları *a, b, c* Olan Üçgenin Yüzey Alanı
V	:	Dörtyüzlünün Hacmi
$\lvert a \rvert$	:	Mutlak Değer Sembolü
$\mathbb{Z}_2$	:	mod 2 ye Göre Tam Sayıların Oluşturduğu $\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ Devirli Grubu.
$\mathbb{Z}^2$	:	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}_2 \oplus\ \mathbb{Z}^2$	:	mod 2 ye Göre Tam Sayıların Oluşturduğu $\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ Devirli Grubu ile $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ Kümesinin Toplamı

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... *i*
ABSTRACT ..... *ii*
ÖNSÖZ ..... *iii*
SEMBOLLER ..... *v*
İÇİNDEKİLER ..... *vi*
1. GİRİŞ 1
1.1. Kaynak Araştırması 4
1.2. Ön Bilgiler 6
2. HERON DÖRTYÜZLÜLERİNİN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ 13
2.1. Bir Dörtyüzlünün Yüzey Alanlarının ve Hacminin Tamsayı veya Rasyonel Olması Durumları 13
2.2. Heron Dörtyüzlünün Kenar Uzunluklarının Bazı Özellikleri 15
2.3. Heron Dörtyüzlüsünün Yüzey Alanlarının ve Hacminin Bazı Özellikleri 18
3. RASYONEL DÖRTYÜZLÜLERİN PARAMETRİK GÖSTERİMLERİ VE HERON DÖRTYÜZLÜSÜ OLUP OLMADIKLARI 21
3.1. Bir Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler 24
1(i) Durumu: 24
3.2. İki Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler 25
3.2.1. 2(i) Durumu: 25
3.2.2. 2(ii) Durumu: 25
3.2.3. 2(iii) Durumu: 25
3.2.4. 2(iv) Durumu: 26
3.2.5. 2(v) Durumu: 26
3.3. Üç Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler 27
3.3.1. 3(i) Durumu 27
3.3.2. 3(ii) Durumu: 27
3.3.3. 3(iii) Durumu 29
3.3.4. 3(iv) Durumu 29
3.3.5. 3(v) Durumu: 29
3.3.6. 3(vi) Durumu 32
3.3.7. 3(vii) Durumu 40
3.3.8. 3(viii) Durumu: 41
3.3.9. 3(ix) Durumu: 46
3.3.10. 3(x) Durumu 48
3.4. 4, 5 ve 6 Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler 48
Dört Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler 48
Beş Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler 48
Altı Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler 48
3.5. Mükemmel Piramit 51
3.6. Sonuç 51
4. KAYNAKLAR 52

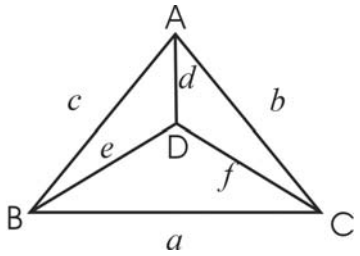
1. GİRİŞ

Üçgenler ve onların üç boyutlu benzerleri olan dörtyüzlüler, yüzlerce yıldır insanoğlunun ilgisini çekmektedir.

Bir rasyonel üçgen, kenar uzunluklarının hepsi rasyonel olan üçgendir. Bir Heron üçgeni ise, kenar uzunlukları ve alanı tamsayı olan bir rasyonel üçgendir. Benzer şekilde, bir rasyonel dörtyüzlü bütün kenar uzunlukları rasyonel olan bir dörtyüzlüdür. Bir Heron dörtyüzlü de, kenar uzunlukları, yüzey alanları ve hacmi tam sayı olan bir rasyonel dörtyüzlüdür.

Aksi belirtilmedikçe, bu çalışmada geçen dörtyüzlü ifadesi, rasyonel ve genellikle kenar uzunlukları ortak çarpana sahip olmayan primitif bir dörtyüzlüyü belirtecektir.

Bir dörtyüzlü, eğer kenar uzunlukları yüzey alanları ve hacmi birer pozitif reel sayı ise vardır. Eğer verilen bir dörtyüzlünün, herhangi bir kenarı, alanı veya hacmi sıfırsa, o dörtyüzlüye dejenere olmuştur (bozulmuştur) denir. n parametreli bir dörtyüzlü, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \leq 6$ olmak üzere n farklı kenar uzunluğuna sahiptir. Bu nedenle, örneğin kenar uzunlukları aritmetik bir dizi oluşturan dörtyüzlünün bütün kenar uzunlukları b ve d ye bağlı ifade edilmiş olsa da bu dörtyüzlünün 6 farklı kenar uzunluğuna sahip olacağı açıktır.



Şekil 1.1. Genel (*a, d*)(*b, e*)(*c, f*) Dörtyüzlüsü

Şekil 1.1.; genel bir dörtyüzlüyü kenar uzunluklarına bağlı isimlendirmede kullanacağımız yöntemi göstermektedir. $(a,d)(b,e)(c,f)$ gösterimi, dörtyüzlüde karşılıklı olarak yer alan kenar çiftlerini vurgulamak için seçilmiştir. Karşılıklı durumdaki kenarlar ortak bir köşeyi paylaşmazlar. Karşılıklı kenarların bu özelliği, hacim formülünde açıkça görülür. Ayrıca yüzeylerin oluşumunda da bu özellik önemlidir. Bir yüzey, verilen üç ikilinin ilk elemanlarından oluşmuştur. Geriye kalan

üç yüzey ise bir ikilinin ilk elemanı ile diğer ikililerin ikinci elemanlarının bir araya gelmesiyle oluşmuştur. Buna göre $(a,d)(b,e)(c,f)$ gösterimli bir dörtyüzlünün yüzeyleri; (*a, b, c*), (*a, e, f*), (*b, d, f*), (*c, d, e*) sıralı üçlüleri ile belirtilir. Ayrıca bir dörtyüzlü, kenar uzunluklarına bağlı olarak; $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$ ile de gösterilebilir.

Üçgenin alanını kenar uzunluklarına bağlı olarak ifade eden Heron alan formülü; $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ olmak üzere,

$$A_{a,b,c}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

biçimindedir. Verilen Heron alan formülünün karesini alarak düzenlersek;

$$(4A_{a,b,c})^2=2\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right) \qquad (1.1)$$

elde edilir. Bu Diophantine denkleminin bütün tamsayı çözümleri ilk defa Euler tarafından bulunduğundan o zamandan beri bilinmektedir. Ayrıca Carmichael in parametrik versiyonu da;

$$a=n\left(m^2+k^2\right),b=m\left(n^2+k^2\right),c=(m+n)\left(mn-k^2\right),$$
$$A_{a,b,c}=kmn(m+n)\left(mn-k^2\right)$$

şeklindedir. Bu versiyon; $m \geq n \geq 1$, ebob(*m, n, k*) = 1 ve $m.n>k^2>\dfrac{m^2n}{2m+n}$ olacak şekildeki *m, n* ve *k* tamsayıları için, Heron üçgenlerinin her benzerlik sınıfından bir eleman üretir.

Şimdi, "Bir dörtyüzlünün hacmi için Heron alan formülüne benzer bir formül var mıdır?" sorusunun sorulduğunu kabul edelim. Şekil 1.1. deki dörtyüzlüyü göz önüne alalım. Eksenlerin durumuna göre dörtyüzlünün dört köşesinin koordinatları $A(x_A,\ y_A,\ 0)$, B(0, 0, 0), C(a, 0, 0) ve $\mathrm{D}(\mathrm{x_D},\ \mathrm{y_D},\ \mathrm{z_D})$ biçiminde verilir. Burada, dörtyüzlünün A köşesinin koordinatlarının, kosinüs kuralı ve alan formülü yardımıyla $x_A=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$ ve $y_A=\dfrac{2A_{a,b,c}}{a}$ biçiminde

hesaplanabileceğini belirtelim. Ayrıca bu dörtyüzlünün hacmi; $V = \frac{1}{3} z_D . A_{a,b,c}$ ile verilir.

Dörtyüzlünün; $A_{a,b,c}$ taban alanının, Heron alan formülü aracılığıyla kenar uzunluklarına bağlı olarak ifade edilebilmesi, benzer şekilde z_D yüksekliğinin de, kenar uzunlukları cinsinden ifade edilmesi ihtiyacını doğurur. D köşesinin koordinatları, sırasıyla *d, e* ve *f* yarıçaplı A, B ve C merkezli üç kürenin kesiştirilmesiyle elde edilebilir. Bu üç kürenin yüzeyleri;

$$x^2 + y^2 + z^2 = e^2,\ (x-a)^2 + y^2 + z^2 = f^2,\ (x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + z^2 = d^2$$

denklemleriyle tanımlanır ve bu üç kürenin ortak kesişimi olan nokta

$$(x, y, z) = (x_D,\ y_D,\ \pm z_D)$$

dir. Buradan

$$x_D = \frac{a^2 + e^2 - f^2}{2a},\ y_D = \frac{c^2 + e^2 - d^2 - 2x_D x_A}{2y_A},\ z_D^2 = e^2 - x_D^2 - y_D^2$$

bulunur. Son denklemde x_A, y_A, x_D ve y_D ifadelerini yerine yazarsak,

$$z_D^2 = \frac{16^2 A_{a,e,f}^2 . A_{a,b,c}^2 - \left[(e^2 - f^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2) + 2a^2(b^2 + f^2 - d^2)\right]^2}{64 A_{a,b,c}^2 . a^2}$$

olur. Son olarak

$$9V^2 = z_D^2 A_{a,b,c}^2$$

olduğunu hatırlarsak,

$$(24aV)^2 = 16^2\ A_{a,e,f}^2 . A_{a,b,c}^2 - \left[(e^2 - f^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2) + 2a^2(b^2 + f^2 - d^2)\right]^2$$

olur ki bu ifadeyi açarsak; dörtyüzlünün hacim formülü,

$$\begin{aligned}(12V)^2 = {} & (a^2 + d^2)(-a^2 d^2 + b^2 e^2 + c^2 f^2) + (b^2 + e^2)\left(a^2 d^2 - b^2 e^2 + c^2 f^2\right) + \\ & (c^2 + f^2)(a^2 d^2 + b^2 e^2 - c^2 f^2) - a^2 b^2 c^2 - a^2 e^2 f^2 - b^2 d^2 f^2 - c^2 d^2 e^2\end{aligned} \quad (1.2)$$

olarak elde edilir. Hacim formülü, bir dörtyüzlünün simetrilerini yansıtır. Bu formül farklı biçimlerde ifade edilebilir. Ancak; Buchholz (1992) tarafından yukarıdaki

biçimde verilen hacim formülü; bir dörtyüzlünün karşılıklı kenarları olan (*a, d*), (*b, e*) ve (*c, f*) kenarları arasındaki ilgiyi açıkça belirten, ve son dört terimiyle de, dört yüzeyin oluşması için kenarların nasıl bir araya geldiğinin önemini vurgulayan bir düzenlemedir. (Chisholm, 2004)

1.1. Kaynak Araştırması

Heron, Metrica I-II-III adlı kitapları ile geometriye çok önemli katkıda bulunmuştur. Bir üçgenin alanını, kendi kenar uzunluklarına bağlı olarak veren formül, Heron alan formülü olarak isimlendirilir. Halbuki bu formülün, milattan önce üçüncü yüzyıldan daha eski tarihlerde Archimedes (Arşimet) tarafından bulunduğu bilinmektedir.

Milattan sonra yedinci yüzyılda Brahmagupta, Heron üçgenlerinin üç parametreli bir tanımını vermiştir. Yüzyıllar sonra Euler, Heron'un formülüne 4 parametreli bir genel çözüm bulmuştur.

Sylvester (1852), 19. yüzyılda Cayley ve Staudt'un, Heron'un alan formülünü yeniden keşfettiğini açıklamıştır.

Hoppe (1877), sekiz tane yarı düzgün(semi regüler) Heron dörtyüzlü örneği vermiştir.

Güntsche (1907), yarı düzgün Heron dörtyüzlü bulma problemini, iki değişkenli bir kübik ifadeye indirgemiştir. Ama iki parametreli bir genel çözüm vermemiştir. Dokuz parametreli çözüm aileleri bulmuştur. Ayrıca Güntsche, Heron dörtyüzlülerinin sonsuz bir ailesini tanımlayan ilk kişi olarak bilinmektedir. Altı farklı kenar uzunluğuna sahip Heron dörtyüzlülerinin bir parametreli ailelerini tanımlamıştır.

Brown (1926), bir dörtyüzlünün dört yüzeyi, aynı alan ve aynı çevreye sahipse, dörtyüzlünün yarı düzgün dörtyüzlü olarak isimlendirileceğini ifade etmiştir.

Sommerville (1958), n genlerin hacimlerini bulmada kullanılan Cayley – Menger determinantının, n = 3 için bir dörtyüzlünün hacim formülünü verdiğini göstermiştir.

Carmichael (1959), Heron'un formülüne 3 parametreli bir genel çözüm sunmuştur.

Heron'un formülü iki yolla genellenebilir. Brahmagupta, bu genellemelerin en iyi bilinenlerinden birisidir. Bu genelleme, dairesel bir dörtyüzlünün alanını, kendi kenar uzunluklarına bağlı olarak veren formüldür.

Sierpinski (1962), Schwering tarafından bulunan rasyonel hacimli rasyonel dörtyüzlülerin listesini vermiştir. Ayrıca bu kaynakta, Lietzmann'ın bulduğu 6, 7, 8, 9, 10, 11 kenar uzunluklarının sahip olan dörtyüzlüden bahsedilmiştir ($A_{a,b,c} = 24$ ve V = 48).

Rigby (1990), hacim formülüyle birlikte, sadece iki yüzey için üçgen eşitsizliğinin geçerli olduğu gösterildiğinde, altı noktanın çizilebilir bir dörtyüzlüyü tanımlaması için gerek ve yeter şartın verilmiş olacağını açıklamıştır.

Buchholz (1992), farklı kenar uzunluklarını eşitleyerek oluşturduğu 1, 2 ve 3 parametreli dörtyüzlülerin hacmini araştırmıştır. Buchholz, yarı düzgün Heron dörtyüzlülerini "Mükemmel Piramitler" olarak isimlendirmiş ve bu dörtyüzlülerin sonsuz bir ailesini eliptik eğriler aracılığıyla bulmuştur. Ayrıca bir dörtyüzlünün rasyonel hacimli olabileceği birçok durumu belirlemiştir.

Dove ve Sumner (1992); ilk olarak, bir dörtyüzlünün üçgensel yüzeyli ve reel hacimli iken var olacağını, sonra da, tam sayı kenarlı ve tam sayı hacimli bir dörtyüzlünün hacminin 3 ile bölünebilir olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca 3 ün 99 a kadar (87 hariç) katları için hacmi aynı sayı olan bir dörtyüzlü bulunmuş ve her hacim için en küçük kenar uzunluklarına sahip örnekler verilmiştir.

Guy (1994), sayılar teorisinin çözümsüz problemlerine yer verdiği eserinin 2. bölümünde "Rasyonel bileşenli çokgen" başlığı altında verdiği D22 problemini, "Herhangi bir boyutta kenar uzunlukları, alanları, hacimleri, hiper hacimleri rasyonel sayı olan düzgün çokgenleri bulma" olarak tanımlamıştır. İki boyutta "Heron Üçgenleri" bu probleme bir çözüm olmuştur. Üç boyutta ise bazı dörtyüzlülerden (Heron dörtyüzlülerinden) bahsedilmiştir. Ayrıca dik açılı Heron üçgenlerinin dört kopyasının bir araya getirilmesiyle hacmi rasyonel yapılabilen bir dörtyüzlü elde

edilebileceği belirtilmiştir. Bu çalışmalar, tamsayı hacimli dörtyüzlü bulma merakını artırmıştır.

Robbins (1995), kirişler beşgenlerinin ve altıgenlerinin alanlarına karşılık gelen formüller tanımlamıştır. Dairesel ($2m + 1$) ve ($2m + 2$) genlerin alan formüllerini veren sonuçlar ortaya koymuştur.

Bir başka genelleme yolu, çok boyutluluğa başvurmadır. Bir dörtyüzlünün kenar uzunluklarına bağlı hacim formülü, 15. yüzyıla dayanır.

Peterson (1997), ressam Piero della Francesca'nın bir dörtyüzlünün yüksekliğini veren bir formül verdiğini ve bu formül ile bir üçgenin alanını veren Heron formülü birleştirildiğinde, bir dörtyüzlünün hacmini veren denklemin elde edileceğini belirtmiştir.

Chisholm ve MacDougall (2005), kenar uzunlukları aritmetik dizi oluşturan dörtyüzlülerle ilgilenmiştir. Bu tür dörtyüzlülerden; rasyonel yüzey alanlı ve rasyonel hacimli olanlar ile sadece yüzey alanları rasyonel olanlar, eliptik eğrilerden ve cebirsel yöntemlerden faydalanarak araştırılmıştır. Ayrıca, kenar uzunlukları bir aritmetik diziden alınmış bir dörtyüzlünün "Mükemmel Piramit" olamayacağını belirtmişlerdir.

1.2. Ön Bilgiler

Bu kısımda daha sonraki bölümlerde kullanılacak tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1. $a,b \in \mathbb{Z}$ olsun. $a = b.c$ olarak şekilde bir $c \in \mathbb{Z}$ varsa o zaman *a, b nin bir katıdır* veya *b, a yı böler* denir ve $b \mid a$ biçimde gösterilir. (Şenay, 1989)

Tanım 1.2. $a,b \in \mathbb{Z}$ olsun.

i) $d \mid a$ ve $d \mid b$ ise d ye *a* ile *b* nin bir *ortak böleni* denir.

ii) *d,* *a* ile *b* nin bir ortak böleni olsun. Eğer *a* ile *b* nin her *c* ortak böleni için $c \mid d$ ise, d ortak bölenine, *a ile b nin en büyük ortak böleni* (ebob) denir ve ebob(*a, b*) veya (*a, b*) ile gösterilir. (Çallıalp, 1999)

Tanım 1.3. *a* ve *b* gibi iki doğal sayının en büyük ortak böleni 1 ise, bu iki sayıya *aralarında asaldır* denir ve ebob(*a, b*) = 1 biçimde gösterilir. (Şenay, 1989)

Tanım 1.4. Sabit ve sıfırdan farklı bir *m* tamsayısı, *a* ve *b* gibi herhangi iki tamsayısının $a - b$ farkını bölüyorsa (yani $m \mid a-b$ ise); *a, b* ye *m* modülüne göre *kongrüenttir* denir ve bu durum $a \equiv b$ (mod m) biçimde belirtilir. (Şenay, 1989)

Tanım 1.5. Kenar uzunlukları *a, b, c* tamsayıları ve alanı da tam sayı olan üçgene *Heron Üçgeni*, (*a, b, c*) üçlüsüne de *Heron üçlüsü* denir. (Kramer and Luca, 2001)

Tanım 1.6. *x, y* ve *z* doğal sayılar olmak üzere $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlayan *x* ve *y* dik kenarlı, *z* hipotenüslü dik üçgene *Pisagor üçgeni* ve $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlayan *x, y* ve *z* doğal sayılarının oluşturduğu (*x, y, z*) üçlüsüne de *Pisagor üçlüsü* denir (Sierpinski, 1962)

Tanım 1.7. Kenar uzunlukları, yüzey alanları ve hacmi tam sayı olan dörtyüzlüye *Heron dörtyüzlü* denir. (Chisholm, 2004),

Tanım 1.8. $b, d \in \mathbb{Q}^+$ ve $0 < 2d < b$ olmak üzere, $b - 2d$, $b - d$, b, $b + d$, $b + 2d$, $b + 3d$ kenar uzunluklarına sahip dörtyüzlüye, *kenar uzunlukları aritmetik dizi oluşturan dörtyüzlü* (AP *dörtyüzlü*) denir. (Chisholm ve MacDougall ,2005)

Tanım 1.9. $a, b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, (*x, y*) düzleminde yer alan $P(a, b)$ şeklinde gösterilen noktaya *rasyonel nokta* denir. (Silverman and Tate, 1992)

Tanım 1.10. Y^2 = "*X* e bağlı dördüncü veya üçüncü dereceden ifade" olmak üzere, bu denklemin $y^2 = x^3 + Ax + B$ formundaki yazılışına, *Weierstrass Normal Form* denir. (Silverman and Tate, 1992)

Tanım 1.11. $y^2 = x^3 + Ax + B$ denkleminin sağ tarafındaki kübik ifadenin e_1, e_2, e_3 gibi üç farklı kökü varsa, denklemin belirttiği eğriye, *eliptik eğri* denir. Aslında bu durum $4A^3 + 27B^2 \neq 0$ olması demektir. Burada; $e_1 \neq e_2 \neq e_3$ olması durumunda kübik eğriye, *tekil olmayan eğri* de denir.(Silverman and Tate, 1992)

Tanım 1.12. Uzayda sabit bir O noktasından r uzaklıktaki noktalar kümesine *küre* denir. Analitik geometride (x_0, y_0, z_0) merkezli ve r yarıçaplı küre denklemi,

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

biçiminde verilir. (Rich, 1963)

Tanım 1.13. Dört üçgen yüzeyin bir araya gelmesiyle oluşmuş, her köşesinde bu üçgen yüzeylerden üçünün karşılaştığı çokgene, *dörtyüzlü* denir. Dört yüzeyi de eşkenar üçgen olan kuramsal katı cisme *düzgün dörtyüzlü* denir. (Rich, 1963)

Tanım 1.14. Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları $a,\ b,\ c$ ise,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c.Cos\,\hat{A},$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a.c.Cos\,\hat{B},$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.Cos\,\hat{C}$$

bağıntıları geçerlidir. Yani; "Bir ABC üçgeninde, herhangi bir kenar uzunluğunun karesi; diğer iki kenar uzunluklarının kareleri toplamından, bu kenarların uzunlukları ile, bu kenarların oluşturdukları açının kosinüsünün çarpımının 2 katının çıkarılmasına eşittir." biçiminde ifade edilir. Bu bağıntılar *Cosinüs Teoremi* olarak bilinir. (Rich, 1963)

Tanım 1.15. Boştan farklı bir G kümesi üzerinde $\mathbf{o}: G \times G \to G$ biçiminde tanımlanan **o** ya G de bir *ikili işlem* veya kısaca *işlem* denir. Ayrıca, (G,**o**) sistemine de *cebirsel yapı* denir. (Bozkurt, 2001)

Tanım 1.16. Eğer (G, **o**) cebirsel yapısı; kapalılık, birleşme, birim eleman ve ters eleman özelliklerine sahipse (G, **o**) cebirsel yapısına *grup* denir ve kısaca G *grubu* olarak isimlendirilir. (Bozkurt, 2001)

Tanım 1.17. G ve G' iki grup olmak üzere $\varphi: G \to G'$ dönüşümü verilsin. Eğer φ dönüşümü, $\forall a,\ b \in$ G için; $\varphi(ab) = \varphi(a).\varphi(b)$ şartını sağlıyorsa, bu dönüşüme *grup homomorfizmi* veya kısaca *homomorfizm* denir. (Bozkurt, 2001)

Tanım 1.18. $\varphi: G \to G'$ içine bir grup homomorfizmi olsun. Eğer φ homomorfizmi birebir ise φ ye bir *izomorfizm* denir. (Bozkurt, 2001)

Tanım 1.19. Eğer bir φ grup homomorfizmi, birebir ve örten ise, o zaman G ve G' gruplarına *izomorfik gruplar* denir. (Bozkurt, 2001)

Tanım 1.20. G bir grup, $a \in G$ olsun. Eğer G grubu, *a* elemanı tarafından üretiliyorsa, bu gruba *devirli grup* denir ve <a> = G biçiminde gösterilir. *a* elemanına, *G nin üreteci* denir. Örneğin; ($\mathbb{Z}$, +) grubu, $1 \in \mathbb{Z}$ tarafından üretilmiş sonsuz devirli bir gruptur. Bir devirli grubun, değişmeli (abelyen) olduğu açıktır. (Bozkurt, 2001)

Tanım 1.21. G bir grup ise G cümlesinin eleman sayısına, G *nin mertebesi* denir ve o(G) veya |G| olarak gösterilir. (Bozkurt, 2001)

Tanım 1.22. G bir grup, $a \in G$ olsun. *a* nın ürettiği $< a >$ devirli grubunun mertebesine, *a elemanının mertebesi* denir ve o(*a*) ile veya $|< a >|$ ile gösterilir. (Bozkurt, 2001)

Tanım 1.23. G bir grup, H de G nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer H, G üzerindeki işleme göre bir grup ise, H ye *G nin alt grubu* denir ve $H \leq G$ ile gösterilir. (Bozkurt, 2001)

Tanım 1.24. $A^2 = \{(x, y) : x \text{ ve } y \text{ reel sayılar}\}$, (*x, y*) bilinen Euclit düzlemi ve P^2 projektif düzlemi de $P^2 = A^2 \cup \{A^2 \text{ deki doğrultuların kümesi}\}$ biçiminde tanımlansın. İki doğru ancak ve ancak paralel olduklarında aynı doğrultudadır. A^2 de paralel doğruların ortak bir noktası yoktur. Ama P^2 de, A^2 deki paralel doğrular sonsuzda bir noktada kesişirler. Her farklı doğrultu için A^2 de bu doğrultuda birbirine paralel doğruların P^2 de kesiştiği farklı bir nokta vardır. P^2 deki bu ekstra noktalar, doğrultuya bağlı olup A^2 de bulunmayan P^2 de bulunan noktalardır ve bu noktalar *sonsuzdaki noktalar* olarak isimlendirilir. (Silverman and Tate, 1992)

Tanım 1.25. G toplamsal bir grup ve $P \in G$ olsun. $0 \in G$ grubun birimi olmak üzere,

$$mP = \underbrace{P + P + \ldots + P}_{m \text{ defa}} = 0$$

iken $1 \leq m' < m$ şartını sağlayan bütün m' tamsayıları için $m'P \neq 0$ olacak şekilde belirlenen m tam sayısına, P *elemanının mertebesi* denir. (Silverman and Tate, 1992)

Tanım 1.26. Weierstrass formundaki bir kübik eğri, sonsuzda bir noktaya sahiptir. Bu nokta, kübik eğrinin çekim noktasıdır. O ile gösterilen sonsuzdaki bu noktadan geçen teğet, eğriyi değme noktasında üç defa kesen sonsuzdaki doğrudur. Çünkü bir doğru, bir kübik eğriyi üç noktada keser. O, bir rasyonel noktadır ve O(0:1:0)

koordinatlarıyla gösterilir. Bu nokta xy (Euclit) düzleminde görülemez. Kübik eğri üzerindeki rasyonel noktaların grubu araştırıldığında, O noktasına grubun *birim elemanı (sıfır elemanı)* denir. (Silverman and Tate, 1992)

Tanım 1.27. Bir doğru, genel olarak bir kübik eğriyi üç noktada keser. Eğer eğri üzerindeki iki rasyonel nokta biliniyorsa, bu noktalardan geçen doğru çizildiğinde, doğrunun eğriyi kestiği nokta aranılan üçüncü rasyonel nokta olacaktır. Benzer şekilde eğri üzerinde yer alan bir rasyonel nokta biliniyorsa, bu noktadan geçen teğet çizildiğinde, eğriyi kestiği nokta da bir başka rasyonel noktadır. Bu teğetin değme noktasında eğriyi iki defa kestiği kabul edilir. Böylece, eğri üzerinde yer alan rasyonel noktaların grubu bulunabilir. Bu yönteme, *teğet – kiriş yöntemi* denir. (Silverman and Tate, 1992)

Tanım 1.28. Bir eliptik eğri üzerindeki sonlu mertebeden noktalara, *torsion noktalar* denir. (Silverman and Tate, 1992)

Tanım 1.29. Bir eliptik eğri üzerindeki sonlu mertebeden olmayan noktalara, *torsion olmayan(torsion free) noktalar* denir. (Silverman and Tate, 1992)

Tanım 1.30. $C: y^2 = x^3 + ax^2 + bx$ bir eliptik eğri ve bu eğri üzerinde yer alan rasyonel noktaların grubu $E(\mathbb{Q})$ ile verilsin. Eğri üzerinde bulunan ve sonlu mertebeden olan rasyonel noktaların grubu $E(\mathbb{Q})_{tors}$ olsun. Değişmeli ve sonlu üreteçli bir grup olan $E(\mathbb{Q})$, sonsuz devirli bir grup ile asal kuvvetten bir mertebesi olan sonlu devirli bir grubun direkt toplamına izomorfiktir. Bu durum, $E(\mathbb{Q}) \cong E(\mathbb{Q})_{tors} \oplus \mathbb{Z}^r$ ile gösterilir. Burada $\mathbb{Z}^r = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}}_{r \text{ tane}}$ dir. Başka bir deyişle, $Q \in E(\mathbb{Q})$ için, $P_1, P_2, ..., P_r$ noktalarının oluşturduğu bir küme vardır. Uygun $c_1, c_2, .., c_r$ tamsayıları ve bir $T \in E(\mathbb{Q})_{tors}$ noktası bulunduğunda, $Q = T + c_1P_1 + c_2P_2 + ... + c_rP_r$ biçiminde yazılabilir. *Eliptik eğrini rankı(r)*, torsion olmayan üreteçli en küçük kümenin eleman sayısıdır. (Silverman and Tate, 1992)

Teorem 1.1. G bir grup, $a \in G$ olsun. a nın mertebesinin sonlu olması için gerek ve yeter şart $a^n = e$ olacak şekilde $n \in N$ olmasıdır. (Bozkurt, 2001)

Teorem 1.2. Yüzeylerinden biri eşkenar üçgen olan bir dörtyüzlü, Heron dörtyüzlü olamaz. (Buchholz and MacDougall,1999)

Teorem 1.3. Kenar uzunlukları tam sayı olan bir eşkenar üçgen, Heron üçgeni değildir. (Gurbanlıyev, 2003)

Teorem 1.4. (Nagell – Lutz Teoremi). *a, b, c* katsayıları tamsayılar olmak üzere, $y^2 = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tekil olmayan eğrisi ve kübik *f(x)* polinomunun diskriminantı $D = -4a^3c + a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^2$ olarak verilsin. Ayrıca P(*x, y*), eğri üzerinde sonlu mertebeden bir rasyonel nokta olsun. Bu durumda, *x* ve *y* tamsayıdır veya P nin ikinci mertebeden olması durumunda *y* = 0 dır ya da *y*, D yi böler. (Siverman and Tate, 1992)

Teorem 1.5 (Mordell Teoremi). Eğer tekil olmayan düzlemsel bir kübik eğri (eliptik eğri), rasyonel bir noktaya sahipse, (bu eğri üzerindeki) rasyonel noktanın grubu, sonlu üreteçlidir. (Siverman and Tate, 1992)

Teorem 1.6 (Bezout Teoremi). *m, n* $\in \mathbb{N}$ olmak üzere *m.* ve *n.* mertebeden ortak kökü (çarpanı) bulunmayan iki eğri, *m.n* farklı noktada kesişir. (Siverman and Tate, 1992)

Teorem 1.7 (P Modülüne Göre İndirgeme Teoremi). *a, b, c* katsayıları tamsayılar olmak üzere, $y^2 = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tekil olmayan eğrisi ve kübik *f(x)* polinomunun diskriminantı $D = -4a^3c + a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^2$ olarak verilsin. Bu eğri üzerinde yer alan rasyonel noktaların grubu $C(\mathbb{Q})$ ve $\Phi \subseteq C(\mathbb{Q})$ sonlu mertebeden bütün noktaların oluşturduğu alt grup olsun. Herhangi bir p asalı için, $\overline{C}(F_p)$, p modülüne göre indirgenmiş tam sayıların cisminde tanımlı $\overline{C}$ kübik eğrisi üzerindeki rasyonel noktaların grubu olmak üzere $P \to \overline{P}$, p modülüne göre indirgeme dönüşümü olsun.

$$\Phi \to \overline{C}(F_p), \quad P \to \overline{P} = \begin{cases} (\overline{x}, \overline{y}), & eğer \quad P = (x, y) \ ise \\ \overline{O}, & eğer \quad P = O \ ise \end{cases}$$

Eğer p, 2D yi bölmezse; p modülüne göre indirgeme dönüşümü Φ den $\overline{C}\left(F_p\right)$ nin bir alt grubuna bir izomorfizmdir. (Siverman and Tate, 1992)

Not: C eğrisi üzerindeki rasyonel noktaları bulma problemi, bu eğri denkleminin p modülüne göre indirgenmiş hali olan denklemle ifade edilen $\overline{C}$ eğrisi üzerindeki rasyonel noktaları bulma problemine denktir.

Teorem 1.8 (İkinci Mertebeden Bir Rasyonel Noktaya Sahip Eğriler İçin Mordell Teoremi). a ve b tam sayılar olmak üzere; C,

$$C : y^2 = x^3 + ax^2 + bx$$

denklemiyle verilen tekil olmayan kübik bir eğri olsun. Bu durumda eğri üzerinde yer alan rasyonel noktaların grubu $C(\mathbb{Q})$, sonlu üreteçli değişmeli bir gruptur. (Siverman and Tate, 1992)

2. HERON DÖRTYÜZLÜLERİNİN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Heron dörtyüzlünün kenar uzunluklarının yüzey alanlarının ve hacminin özellikleri cebirsel olarak incelenecek ve bunların birbirleriyle ilgisi ortaya konacaktır.

2.1. Bir Dörtyüzlünün Yüzey Alanlarının ve Hacminin Tamsayı veya Rasyonel Olması Durumları

Bir Heron dörtyüzlünün, kenar uzunlukları, yüzey alanları ve hacmi tamsayı olan bir rasyonel dörtyüzlü olduğunu biliyoruz. Eğer bir rasyonel dörtyüzlü tam sayı olmayan kenar uzunluklarına sahipse, kenar uzunluklarını, tam sayı kenarlı benzer bir dörtyüzlü oluşturmak için genişletebiliriz. Eğer dörtyüzlü rasyonel bir yüzey alanına veya rasyonel bir hacime sahipse, genişletme sonrası yüzey alanı tam sayı haline gelirken, hacim tamsayıya dönüşmeyebilir.

Teorem 2.1. Eğer bir dörtyüzlü *a, b, c, d, e, f* $\in \mathbb{N}$ kenar uzunluklarına ve $A \in \mathbb{Q}^+$ olan bir yüzey alanına sahipse, $A \in \mathbb{N}$ dir.

İspat. Genelliği bozmaksızın (*a, b, c*) yi A rasyonel alanlı bir yüzey kabul edebiliriz. Buradan A, *a, b, c* Heron alan formülünü sağlar. (1.1) ifadesinde $a,b,c \in \mathbb{N}$ olduğu için $(4A)^2$ bir tamsayıdır. Mademki A rasyoneldir, 4A bir tamsayı olmak zorundadır. (1.1) denklemini mod 8 e göre ele alalım. Mümkün *a, b, c* kombinasyonlarının her birinin incelenmesi sonucu $(4A)^2$ nin mod 8 e göre 0, 3 veya 7 ye kongrüent olabileceği ortaya çıkar. Mod 8 e göre tam kare ifadeler, 0, 1 ve 4 e denk olduğundan $(4A)^2$, 8 ile bölünebilir ve böylece 16 ile bölünebilir. Bu nedenle $A^2 \in \mathbb{N}$ olup, sonuçta $A \in \mathbb{N}$ olmasını gerektirir.

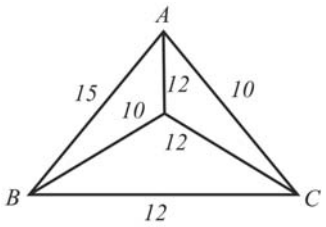
Teorem 2.2. Eğer bir dörtyüzlü $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{N}$ kenar uzunluklarına sahip ve hacmi $V \in \mathbb{Q}^+$ ise $V \in \mathbb{N}$ veya $v \in \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}$ olmak üzere $V = \frac{v}{3}$ tür.

İspat. (1.2) hacim denklemi, $(12V)^2$ nin bir tamsayı olduğunu söyler. V rasyonel olduğundan, $12V \in \mathbb{N}$ olmak zorundadır. Yukarıdaki ispatta olduğu gibi mod 8 e göre bütün olasılıkları sorguladığımızda, eğer $(12V)^2$, mod 8 e göre tam karelerden

birine kongrüent ise, $(12V)^2 \equiv 0 \pmod 8$ olduğu bulunur. Bu nedenle, $(12V)^2$, 16 ile bölünebilir ve $3V \in \mathbb{N}$ dir.

Şimdi, (1.2) denklemini mod 3 e göre ele alalım. Mod 3 e göre doğal sayıların kareleri 0 veya1 e kongruenttir ve hesaplamalar $(12V)^2$ nin mod 3 e göre bu kalanlardan birisine kongrüent olabileceğini gösterir. $3V \in \mathbb{N}$ ve $12V \equiv 3V \pmod 3$ olduğundan, 0 veya 1 e kongrüent $(3V)^2$ ifadelerini elde edebiliriz. Eğer $(3V)^2$, 3 e bölünebilirse, 9 ile de bölünebilir ve $V \in \mathbb{N}$ dir. Bununla birlikte, eğer $(3V)^2 \equiv 1 \pmod 3$ ise 3V, 3 e bölünemez ve böylece $v \in \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}$ olmak üzere $V = \frac{v}{3}$ formunda olmak zorundadır.

Şekil 2.1. de gösterilen dörtyüzlü, $V = \frac{476}{3}$ olan bir örnektir. Böyle bir durumda, $9v$ tam sayı hacimli bir dörtyüzlü elde etmek için, kenar uzunluklarını, $\text{ebob}(a,b,c,d,e,f) = 3$ olacak şekilde 3 ile genişletebiliriz.



Şekil 2.1. Kenar Uzunlukları $\mathbb{N}$ den Alınmış ve Hacmi $\mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{N}$ de Bulunan Bir Dörtyüzlü

Teorem 2.3. Eğer bir T dörtyüzlüsü; $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \in \mathbb{N}$ kenar uzunluklarına ve $v \in \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}$ olmak üzere $V = \frac{v}{3}$ hacmine sahipse, T nin yüzey alanlarından hiçbiri rasyonel değildir.

İspat. Bir dörtyüzlünün kenar uzunlukları (a,d), (b,e), (c,f) biçiminde üç sıralı ikili oluşturur. Bu sıralı ikililerden herhangi birinin 3 e bölünüp-bölünememesi, o sıralı ikiliyi oluşturan kenar uzunluklarının her ikisinin de 3 e bölünüp-bölünememesine bağlıdır. Öte yandan mod 3 e göre hacim denklemi incelendiğinde; sıralı ikililerden ikisi 3 e tam olarak bölünebilirken, diğer sıralı ikili 3 e bölünemediğinde, V bir rasyonel sayıdır ama tam sayı değildir.

Her yüzey, her sıralı ikiliden bir kenar uzunluğu bulundurur ve bir yüzeydeki kenarların sırası o yüzeyin alanını değiştirmez. Bu nedenle dört yüzey alanının denklemi;

$$(4A)^2 \equiv 2(0.1 + 0.0 + 0.1) - (0 + 0 + 1) \equiv 2 \pmod 3$$

gibi olacaktır. Ancak herhangi bir rasyonel sayının karesi mod 3 e göre 2 kalanı vermeyeceğinden, yüzey alanlarını hiçbiri rasyonel değildir.

Örneğin, Şekil 2.1. deki dörtyüzlünün sahip olduğu yüzey alanları

$$A_{12,\,10,\,15} = \frac{1}{4}\sqrt{7.13.17.37} \text{ ve } A_{12,\,10,\,12} = 5\sqrt{7.17}$$

dir. Bu dörtyüzlü, rasyonel bir yüzey alanına sahip olmadığı için, doğal olarak Heron dörtyüzlü olamaz.

Sonuç 2.1. Eğer bir dörtyüzlü, tamsayı kenar uzunluklarına, rasyonel hacme ve rasyonel bir yüzey alanına sahipse, hacim ve bütün rasyonel yüzey alanlar tamsayıdır.

İspat. Teorem 2.1 den, tam sayı kenarlı bir dörtyüzlünün rasyonel yüzey alanları, tamsayıdır. Teorem 2.3. den, eğer $V \in \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{N}$ ise bu hacme sahip dörtyüzlünün yüzey alanlarından hiçbiri rasyonel değildir. $V \in \mathbb{Q}^+$ ve dörtyüzlü rasyonel bir yüzey alanına sahip olduğundan, $V \in \mathbb{N}$ olmak zorundadır.

Ayrıca, tamsayı kenarlı bir Heron dörtyüzlünün, yüzey alanları ve hacmi tamsayı olur.

2.2. Heron Dörtyüzlünün Kenar Uzunluklarının Bazı Özellikleri

Bu kesimde, Heron dörtyüzlünün tam sayı kenar uzunluklarının tek veya çift olma ve bölünebilme şartları incelenecektir.

Teorem 2.4. Eğer $(a,d)(b,e)(c,f)$ bir Heron dörtyüzlü ise, karşılıklı kenar çiftleri olan (a,d), (b,e) ve (c,f) ikilileri aşağıdaki durumlardan birini sağlar:

2A) Bir sıralı ikili, bileşenlerinin (kenar uzunluklarının) ikisi de tek/çift olduğunda tek/çift olmak üzere, sıralı ikililerin ikisi tek ve diğeri çifttir.

2B) Tam olarak *a, b, c* den biri çift iken her sıralı ikilideki kenar uzunluklarından biri tek diğeri çifttir.

2C) *a, b, c* nin hepsi çift iken her sıralı ikilideki kenar uzunluklarından biri tek diğeri çifttir.

Eğer kenar uzunlukları, 2B veya 2C durumunu sağlarsa, dörtyüzlü bütün kenar uzunlukları çift olan bir yüzeye sahip olacaktır. Bu yüzeyin benzeri olan primitif üçgenin kenar uzunluklarından tam olarak ikisi tek olacaktır.

İspat. Teorem 2.1 ve 2.2 den biliyoruz ki, eğer bir dörtyüzlü Heron dörtyüzlüsü ise $12\mathrm{V} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ ve dört yüzey alanı için de $4\mathrm{A} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ olur. Mod 4 e göre $a^2, b^2, ..., f^2 \equiv 0$ veya 1 kongrüansını sağlayan olası bütün kombinasyonları, dört yüzeyin her biri için (1.1) ve (1.2) denklemlerinde yerine koyduğumuzda, $(12\mathrm{V})^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ ve dörtyüzlü 2A, 2B veya 2C durumlarından birini sağladığında,

$$\left(4A_{a,b,c}\right)^2, \left(4A_{a,e,f}\right)^2, \left(4A_{b,d,f}\right)^2, \left(4A_{c,d,e}\right)^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$$

olur.

Kenar uzunluklarının üçü de çift sayı olan bir yüzeyle ilgili son durum için, en azından kenarlardan biri tek iken mod 4 e göre (1.1) denklemini ele alalım. Tam olarak kenar uzunluklarından sadece ikisi tek iken, bir çözüm mevcuttur ve alan rasyonel olabilir.

Aşağıdaki örnekler, 2A – 2C durumlarının her birinin en azından bir Heron dörtyüzlü tarafından sağlandığını gösterir.

Örnek 2.1. (203, 203)(195, 195)(148, 148) bir Heron dörtyüzlüsüdür ve Teorem 2.4 ün 2A durumunu sağlar.

(117, 52)(80, 51)(53, 84) Heron dörtyüzlüsü, 2B durumunu sağlar. (52, 80, 84) yüzeyi 4 ile sadeleştirildiği zaman, (52, 80, 84) = 4(13, 20, 21) olur ki kenar uzunluklarından ikisi tektir.

(160, 39)(120, 25)(56, 153) Heron dörtyüzlüsü 2C durumunu sağlar. (160, 120, 56) yüzeyi için (160, 120, 56) = 8(20, 15, 7), olup, 8 ile sadeleştirildiği zaman, kenar uzunluklarından ikisi de tek bulunur.

Teorem 2.5. Eğer $(a,d)(b,e)(c,f)$ bir Heron dörtyüzlüsü ise, bu durumda dörtyüzlünün dört yüzey alanı 3 e bölünebilir ve karşılıklı kenarların oluşturduğu (a,d), (b,e) ve (c,f) ikilileri, aşağıdaki durumlardan birini sağlar.

3A) Bir sıralı ikilinin bileşenlerinin (kenar uzunluklarının) ikisi de 3 e bölünebiliyorsa / bölünemiyorsa, sıralı ikili 3 e bölünebilir / bölünemez olsun. Bu durumda sıralı ikililerden ikisi 3 e bölünemez ve diğeri 3 e bölünebilirdir.

3B) Her bir ikilide yalnız bir bileşen(kenar uzunluğu) 3 e bölünebilirdir ve *a, b, c* den yalnız birisi 3 e tam bölünebilirdir.

3C) Her bir ikilide yalnız bir bileşen(kenar uzunluğu) 3 e bölünebilirdir ve *a, b, c* nin hepsi 3 e bölünebilir.

3D) *a, b, c* nin yalnız biri 3 e bölünebilir ve *d, e, f* nin hiçbiri 3 e bölünemez.

3E) *d, e, f* nin yalnız biri 3 e bölünebilir ve *a, b, c* nin hiçbiri 3 e bölünemez.

Eğer kenar uzunlukları, 3B veya 3C durumunu sağlarsa, dörtyüzlü bütün kenar uzunlukları 3 e bölünebilen bir yüzeye sahip olacaktır. Bu yüzeyin benzeri olan primitif üçgenin ya bir kenar uzunluğu 3 e bölünebilirdir ya da hiçbir kenar uzunluğu 3 e bölünemezdir.

İspat. Teorem 2.1, 2.2 ve Sonuç 2.1 den biliyoruz ki eğer bir dörtyüzlü, Heron dörtyüzlü ise, $12\mathrm{V} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ ve dört yüzey alanı için $(4\mathrm{A})^2 \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$ olur ve mod 3 e göre, $a^2, b^2, ..., f^2 \equiv 0$ veya 1 kongrüansını sağlayan olası bütün kombinasyonları, dört yüzeyin her biri için (1.1) ve (1.2) denklemlerinde yerine koyduğumuzda, $(12\mathrm{V})^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ ve tam olarak yukarıda listelenen durumlardan biri sağlandığında $(4A_{a,b,c})^2, (4A_{a,e,f})^2, (4A_{b,d,f})^2$, $(4A_{\mathrm{c,d,e}})^2 \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$ bulunur. Ayrıca, eğer $(4\mathrm{A})^2 \not\equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$ ise $(4\mathrm{A})^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ olacağından bu da $\mathrm{A} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ olmasını gerektirir.

Bütün kenar uzunluları 3 e bölünebilen bir yüzeyle ilgili son durum için, en azından bir kenar uzunluğu 3 e bölünemediğinde; (1.1) denklemini mod 3 e göre ele alalım. Hiçbir kenar uzunluğu 3 e bölünemediğinde veya bir kenar uzunluğu 3 e bölünebildiğinde, bir çözüm mevcuttur ve alan rasyonel olabilir.

Aşağıdaki örnekler, 3A – 3E durumlarının her birinin en azından bir Heron dörtyüzlüsü tarafından sağlandığını gösterir.

Örnek 2.2. (203, 203)(195, 195)(148, 148) bir Heron dörtyüzlüsüdür ve Teorem 2.5 nin 3A durumunu sağlar.

(595, 204)(429, 100)(208, 555) Heron dörtyüzlüsü, 3B durumunu sağlar. (429, 204, 555) yüzeyi, 3 ile sadeleştirildiği zaman kenar uzunlukları 3 e bölünemez. (117, 52)(80, 51)(53, 84) dörtyüzlüsü de, 3B durumunu sağlayan bir Heron dörtyüzlüsüdür. Bu dörtyüzlünün (117, 51, 84) yüzeyi, 3 ile sadeleştirildiği zaman, kenar uzunluklarından sadece birisi 3 e bölünebilirdir.

(5280, 2261)(2652, 3485)(2652, 3485) dörtyüzlüsü 3C durumunu sağlar. Bu dörtyüzlünün (5280, 2652, 2652) yüzeyi 3 ile sadeleştirildiği zaman, kenar uzunlukları 3 e bölünemez. (225, 119)(87, 65)(156, 200) dörtyüzlüsü de 3C durumunu sağlayan bir Heron dörtyüzlüdür. Bu dörtyüzlünün, (225, 87, 156) yüzeyi, 3 ile sadeleştirildiği zaman, kenar uzunluklarından sadece birisi 3 e bölünebilirdir.

(680, 185)(615, 208)(185, 680) Heron dörtyüzlüsü, 3D durumunu sağlar ve (884, 187)(715, 84)(205, 880) dörtyüzlüsü 3E durumunu sağlar.

2.3. Heron Dörtyüzlüsünün Yüzey Alanlarının ve Hacminin Bazı Özellikleri

Bu kesimde, Heron dörtyüzlünün yüzey alanları ile hacminin tamsayı olma, tek veya çift olma ve bir tamsayı ile bölünebilme şartları, kenar uzunluklarına bağlı olarak incelenecektir.

Sonuç 2.2. Eğer bir Heron dörtyüzlüsü, V hacmine ve $A_{a,b,c}$, $A_{a,e,f}$, $A_{b,d,f}$ ve $A_{c,d,e}$ yüzey alanlarına sahipse, V bir çift sayıdır ve g ≥ 1 olmak üzere, ebob $\left(A_{a,b,c}, A_{a,e,f}, A_{b,d,f}, A_{c,d,e}\right) = 6g$ dir.

İspat. Teorem 2.5 ten G ≥ 1 olmak üzere, $\left(A_{a,b,c}, A_{a,e,f}, A_{b,d,f}, A_{c,d,e}\right) = 3G$ olduğunu biliyoruz. Dört yüzey için de mod 32 ye göre (1.1) ve (1.2) denklemlerini ele alalım. Mod 32 ye göre kareler 0, 1, 4, 9, 16, 17, 25 tir. Eğer *a* çift ise, $a^2 \equiv 0, 4$ veya 16 (mod 32) ve eğer *a* tekse, $a^2 \equiv 1, 9, 17$ veya 25 (mod 32). Teorem 2.4 ün 2A

şartını sağlayan tek ve çift karelerin bütün olası kombinasyonlarını yerine yazdığımızda;

$$(12\mathrm{V})^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,32) \text{ ve } (4A_{a,b,c})^2, (4A_{a,e,f})^2, (4A_{b,d,f})^2, (4A_{c,d,e})^2 \equiv 0(\mathrm{mod}\,32)$$

bulunur. Bu durumda 2B ve 2C durumları için;

$$(12\mathrm{V})^2 \text{ ve } (4A_{a,b,c})^2, (4A_{a,e,f})^2, (4A_{b,d,f})^2, (4A_{c,d,e})^2$$

ifadelerinin hepsi ya 32 ye bölünebilirdir veya bunlardan birisi mod 32 ye göre 16 ya kongrüenttir.

İkinci durum; kenar uzunluklarının üçü de çift olan yüzeyin, mod 4 e göre 2 ye kongrüent olan tam olarak bir veya üç kenar uzunluğuna sahip olması durumunda ortaya çıkar. Teorem 2.4. e göre bu durum bir Heron dörtyüzlüsünü tarif etmez. Çünkü 2 nin en büyük kuvvetine bölündükten sonra yüzeyin tam olarak iki tek kenar bulundurması gerekmektir.

Sonuç olarak, bir Heron dörtyüzlüsü için, $(3\mathrm{V})^2$ nin bir çift sayı ve her bir yüzey için A^2 nin bir çift sayı olması gerektiğini bulduk. Böylece g ≥ 1 olmak üzere G = 2g dir.

Örneğin; (612, 185)(480, 319)(156, 455) Heron dörtyüzlüsü, $A_{a,b,c} = 22464$, $A_{a,e,f} = 70636$, $A_{b,d,f} = 42000$, $A_{c,d,e} = 9570$ yüzey alanlarıyla, ebob($A_{a,b,c}$, $A_{a,e,f}$, $A_{b,d,f}$, $A_{c,d,e}$) = 6 şartını sağlar.

Fricke, bir Heron dörtyüzlünün hacminin daima $336 = 2^4 3.7$ ile bölünebilir olduğunu iddia etmiştir. Ancak, bu iddianın her zaman doğru olmadığını bir örnekle gösterelim.

Örnek 2.3. (780,148)(765,221)(219,715) ile (2665,1881)(2431,2175)(1092,1540) biçiminde verilen Heron dört yüzlülerinin hacimleri sırasıyla 3531528 ve 527206680 dır. Burada;

$$\mathrm{V}_1 = 3531528 = 2^3.3^2.7^3.11.13 \text{ ve } \mathrm{V}_2 = 527206680 = 2^3.3^2.5.7.11.13.19^2$$

olup ebob(V_1, V_2) = 168 dir.

Lemma 2.1. Her Heron dörtyüzlü için $V \equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$ dir.

İspat. Mod 7 ye göre (1.2) denklemini ve dört yüzey alanını göz önüne alalım. Eğer hacim ve alanlar, mod 7 ye göre kare ifadelerden birine; yani 0, 1, 2 veya 4 e kongrüentse, ayrıntılı bir araştırma, $(12V)^2$ nin mod 7 ye göre daima 0 a kongrüent olduğunu gösterir.

Lemma 2.2. Her Heron dörtyüzlü için $V \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ dir.

İspat. Sonuç 2.1 den bir Heron dörtyüzlünün hacmi bir tamsayıdır ve Dove ve Sumner (1992) in "Tam Sayı Kenarlı ve Tam Sayı Hacimli Dörtyüzlü" kitabında verilen önerme 2 den bir Heron dörtyüzlünün hacmi 3 e bölünebilir.

Lemma 2.3. Eğer bir Heron dörtyüzlü tam olarak, üç çift kenar uzunluğuna sahipse $V \equiv 0(\mathrm{mod}\,4)$ tür.

İspat. 2^7 = 128 olduğundan mod 128 e göre (1.2) denklemini ve dört yüzey alanı denklemini ele alalım. 2B ve 2C durumunu sağlayan kenar uzunluklarının bütün kombinasyonlarının ayrıntılı bir araştırması, eğer hacim / yüzey alanı denklemlerinin beşi birden mod 128 e göre çift bir kare değere kongrüent oluyorsa, $(12V)^2$, mod 128 e göre 0 a kongrüenttir. $144 = 2^4.3^2$ olduğundan, yani 2^4 ile bölünebildiğinden, $2^3 \mid 9V^2$ olur ki bu durum $2^2 \mid V$ olmasını gerektirir.

Teorem 2.6. Bir Heron dörtyüzlünün hacmi, 42'ye bölünebilirdir ve yüzey alanları da 6 ya bölünebilirdir. Eğer dörtyüzlü tam olarak üç çift kenar uzunluğuna sahipse, hacim 84 e bölünebilirdir.

İspat. Lemma 2.1., 2.2.den ve Sonuç 2.2 den, hacim 42 ye bölünebilirdir. Sonuç 2.2 den 6, yüzey alanlarını böler. Lemma 2.3 den de hacim 84 e bölünebilirdir.

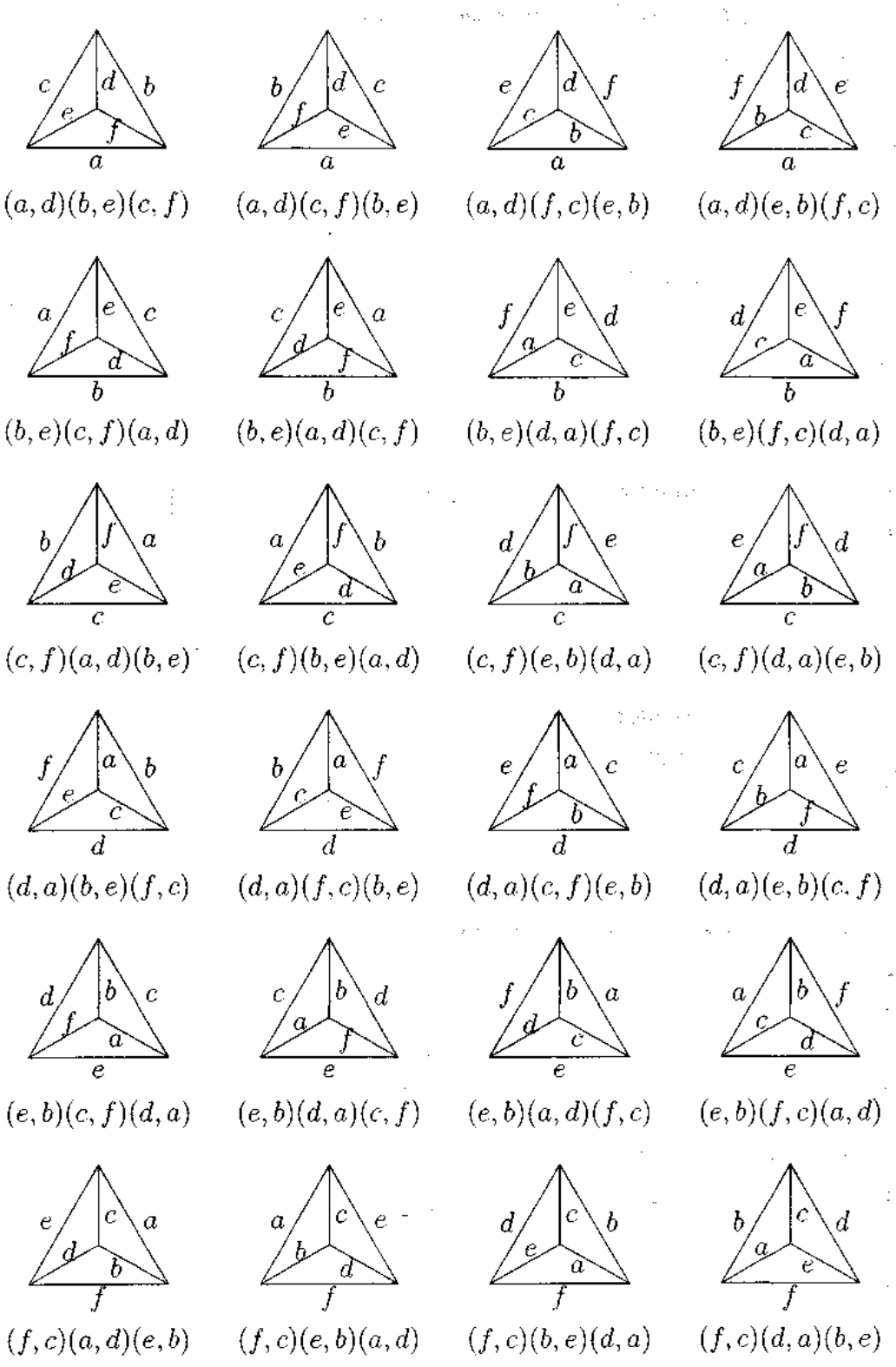
Konjektür 2.1. 168 = 8.3.7 olduğundan bir Heron dörtyüzlünün hacmi 168 ile bölünebilirdir.

3. RASYONEL DÖRTYÜZLÜLERİN PARAMETRİK GÖSTERİMLERİ VE HERON DÖRTYÜZLÜSÜ OLUP OLMADIKLARI

Bu bölümde, rasyonel bir dörtyüzlünün; hangi şartlar altında rasyonel hacme ve rasyonel yüzey alanına sahip olacağı parametrik gösterimlere bağlı olarak araştırılmıştır. Ayrıca rasyonel bir dörtyüzlünün hangi durumlarda bir Heron dörtyüzlüsü olacağı gösterilmiştir.

Teorem 3.1. Bir dörtyüzlünün altı farklı kenar uzunluğundan otuz farklı dörtyüzlü gösterimi oluşturulabilir.

İspat. Karşılıklı kenarlar ikili oluşturacak şekilde kenar uzunluklarını $(a,d)(b,e)(c,f)$ şeklinde düzenleyelim. Bunu yapmanın 6! sayıda yolu vardır. Sıradaki hesaplamada, dönmeler ve yansımalar sonucu, yüzey alanlarının, hacmin, kenarların ve yüzeylerin komşuluklarının değişmeyeceği gerçeğine dayanarak elde edilen dörtyüzlülerin eş olacağını dikkate alalım. Elde ettiğimiz sonucu 6 ile böleriz. Çünkü a kenarının taban olduğu $(a,d)(b,e)(c,f)$ dörtyüzlüsü, rotasyon (dönme) sonucu elde edilen diğer beş dörtyüzlüye eştir. Bu dörtyüzlülerde, diğer beş kenar taban konumundadır. Sonucu, 2 ye böleriz. Çünkü d kenarına göre yansıma yapıldığında $(a,d)(b,e)(c,f)$ dörtyüzlüsü, $(a,d)(c,f)(b,e)$ dörtyüzlüsüne eştir ve yine 2 ye böleriz. Çünkü a kenarına göre yansıma yapıldığında $(a,d)(b,e)(c,f)$ dörtyüzlüsü, $(a,d)(f,c)(e,b)$ dörtyüzlüsüne eştir. 6! sayıda dörtyüzlüden eş olanlar çıkarıldığında (yani 6!, 24 e bölündüğünde), 30 farklı dörtyüzlü elde edilir. (1.2) hacim formülünde yerine koymalar, 30 dörtyüzlünün hepsinin farklı olduğunu gösterir.



Şekil 3.1. (*a, d*)(*b, e*)(*c, f*) ile Belirtilen Dörtyüzlüye Eş 24 Farklı Gösterim (Chisholm, 2004)

Yukarıda Şekil 3.1. de verilen (*a,d*)(*b,e*)(*c,f*) dörtyüzlüsüne eş 24 tane konfigürasyon bu dörtyüzlünün bütün simetrilerinin gösterimidir. (Chisholm, 2004)

Bir dörtyüzlünün altı farklı kenar uzunluğuna bağlı olarak ifade edilen hacim denklemi, tam sayı sonuç bulmayı zorlaştırmıştır. Bu nedenle, Buchholz (1992), dörtyüzlünün hacim denklemini daha üzerinde çalışabilir hale getirmek için farklı kenar uzunluklarını birbirine eşit kabul etme yöntemine başvurmuştur. Böylelikle dörtyüzlü daha simetrik hale gelmiş ve parametrik gösterimler elde edilmiştir.

1 – Bir Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler

(i) $a = b = c = d = e = f$

2 – İki Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler

(i) $a = b = c = d = e, f,$

(ii) $a = b = c = d, e = f,$

(iii) $a = c = d = f,\ b = e,$

(iv) $a = b = c, d = e = f,$

(v) $a = d = f,\ b = c = e$

3 – Üç Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler

(i) $a = b = c = d, e, f,$

(ii) $a = c = d = f,\ b, e,$

(iii) $a = b = c,\ d = e, f,$

(iv) $a = d = f, b = c, e,$

(v) $a = d = f,\ b = e, c,$

(vi) $a = d, b = e, c = f,$

(vii) $a = e, b = f, c = d,$

(viii) $a = b, c, d = e = f,$

(ix) $a = d, b = f, c = e,$

(x) $a = e,\ b = c, d = f$

Bir rasyonel dörtyüzlünün Heron dörtyüzlüsü olması için, kenar uzunluklarının, yüzey alanlarının ve hacminin aynı zamanda tam sayı olması gerektiğini belirtmiştik. Bir dörtyüzlünün, Heron olup olmadığını tespit etmek isteyen bilim adamları, ilk olarak hacmin tamsayı olup olmadığını araştırmışlardır. Tam sayı hacim varsa, yüzey alanlarının tam sayı olma durumu dikkate alınmıştır. Çünkü, rasyonel bir dörtyüzlü, kenar uzunluklarını genişletme yoluyla tamsayı yüzey alanlarına sahip olabilir ama hacim için bu durum her zaman mümkün olmaz.

Teorem 2.4 ten dolayı 3(*i*), 3(*iii*), 3(*iv*) ve 3(*vii*) gösterimli dörtyüzlüler Heron değildir. Gerçekten, bu dört durumun rasyonel hacimli olamayacağı gösterilecektir. 3(*v*) durumu için rasyonel hacimli dörtyüzlülerin sonsuz bir ailesi tanımlanacaktır. 3(*ii*) ve 3(*viii*) gösterimli dörtyüzlülerin tamamı için bir parametrik tanım verilecektir. Son olarak, 3(*x*) durumunun farklı bir gösterim olmadığı ispatlanacaktır.

Buchholz (1992), 1 ve 2 parametreli dörtyüzlülerin ne zaman rasyonel hacimli olduklarını tam olarak belirlemiştir. Ama, 3 parametreli dörtyüzlülerin sadece dördü için rasyonel hacimli olma durumlarını tespit edebilmiştir. Buchholz, 3*(ii*), 3(*vi*), 3(*viii*) ve 3(*ix*) gösterimlerinin her biri için sonsuz çoklukta rasyonel hacimli dörtyüzlü bulunduğunu göstermiştir. Her ne kadar 3(*v*) gösterimi için dört örnek verilmiş olsa da, diğer durumlar için sonsuz çoklukta (veya sonlu sayıda) rasyonel hacimli dörtyüzlü bulunup bulunmadığı açık bir problem olarak kalmıştır.

Bu kesimde, $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \leq 6$ olmak üzere n parametreli dörtyüzlü gösterimleri ele alınacaktır. Özellikle 1, 2 ve 3 parametreli dörtyüzlülerin tamsayı hacimli olup olmadıkları tespit edilecektir. Her bir parametrik gösterim için Heron dörtyüzlüsü bulunup - bulunmadığı araştırılacak ve varsa örnekler sunulacaktır.

3.1. Bir Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler

1(*i*) Durumu: Hacim için verilen ifadede $a = b = c = d = e = f$ eşitliğini yazarsak;

$$(12V)^2 = 2a^6 \Rightarrow V = \frac{\sqrt{2}\,a^3}{12}$$

ifadesini elde ederiz Açıkçası, eğer $a \in \mathbb{N}$ ise $V \notin \mathbb{N}$ dir. Bu durumda hiçbir çözüm yoktur. Yani düzgün bir dörtyüzlü, Heron dörtyüzlü olamaz.

3.2. İki Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler

3.2.1. 2(*i*) Durumu: Bu gösterimli bir dörtyüzlünün hacmini veren denklem yerine koymalardan $(12V)^2 = a^2 f^2(3a^2 - f^2)$ olarak elde edilir. Genelliği bozmaksızın ebob (*a,f*) = 1 olduğunu ve $a, f, V \in \mathbb{N}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$3a^2 - f^2 = p^2 \Rightarrow p^2 + f^2 = 3a^2 \text{ ve } p^2 + f^2 \equiv 0 \pmod 3$$

şartlarını sağlayan bir p tamsayısı vardır. Bu durum $3 \mid p$ ve $3 \mid f$ olmasını gerektirir ki böylece $3 \mid a$ bulunur. Bu durum *a* ve *f* nin aralarında asal olması kabulüyle çelişir. Böylece 2(*i*) gösterimli bir dörtyüzlü, Heron dörtyüzlü olamaz.

3.2.2. 2(*ii*) Durumu: 2(*ii*) gösterimli bir dörtyüzlünün hacmini veren denklem yerine koymalardan $(12V)^2 = a^2(6a^2e^2 - (a^2 + e^2)^2)$ olarak bulunur.

Genelliği bozmaksızın ebob(*a,e*) = 1 ve $a, e, V \in \mathbb{N}$ olduğunu kabul edelim. Buradan,

$$6a^2e^2 - (a^2 + e^2)^2 = p^2 \text{ ve } p^2 + (a^2 + e^2)^2 \equiv 0 \pmod 3$$

şartlarını sağlayan bir p tamsayısı vardır. Bu durum $3 \mid$ p ve $3 \mid (a^2 + e^2)$ olmasını gerektirir ki böylece $3 \mid a$ ve $3 \mid e$ bulunur. Bu ise, *a* ve *e* nin aralarında asal olması kabulüyle çelişir. Sonuç olarak 2(*ii*) gösterimli bir Heron dörtyüzlü yoktur.

3.2.3. 2(*iii*) Durumu: 2(*iii*) gösterimli bir dörtyüzlünün hacmini veren denklem yerine koymalar sonucu $(12V)^2 = b(4a^2 - 2b^2)$ olarak bulunur.

Eğer ebob (*a,b*) = 1 ve $a, b, V \in \mathbb{N}$ ise $4a^2 - 2b^2 = p^2$ olacak şekilde bir p tamsayısı vardır. Burada p çift sayı olmak zorunda olduğundan p = 2P alırsak;

$$2a^2 - b^2 = 2P^2$$

buluruz ki bu da b nin çift olmasını gerektirir. Böylece b = 2B yazarsak;

$$a^2 - P^2 = 2B^2$$

bulunur. Bu durumda, *a* ile P nin ikisi de çift veya ikisi de tek olmalıdır. Bu nedenle a = Q + S, P = Q – S yazarsak; $2QS = B^2$ elde ederiz. Daha önceden B çift olduğu için B = 2D yazarsak, $QS = 2D^2$ buluruz. Genelliği bozmaksızın ebob(R, S) = 1 olmak üzere Q = 2R yazarsak, $RS = D^2$ elde ederiz. Bu eşitliğin r ve s tamsayılar olmak üzere, (R, S, D) = (r^2, s^2, rs) formunda çözümleri vardır. Böylece yerine koymalar, rasyonel hacme sahip, tamsayı kenarlı dörtyüzlülerin sonsuz bir ailesini ortaya koyar. Yani, bu çözümde,

$$a = 2r^2 + s^2,\ b = 4rs,\ V = \frac{8}{3}r^2s^2(2r^2 - s^2)$$

biçimindedir.

Hacmi rasyonel ve kenar uzunlukları tam sayı olan bu gösterimde, yüzey alanlarını inceleyelim. 2(*iii*) gösterimli dörtyüzlüde; her yüzey, kenar uzunlukları; ($a,\ a,\ b$) $= (2r^2 + s^2, 2r^2 + s^2, 4rs)$ olan bir üçgendir. Böylece, *b* kenarına ait *h* yüksekliğinin uzunluğu Pisagor Teoremi kullanılarak;

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (2r^2 + s^2)^2 - (2rs)^2 = 4r^4 + s^4$$

elde edilir. Bu ifadenin pozitif tamsayılarda bir çözümü yoktur. Dolayısıyla 2(*iii*) gösterimindeki bir dörtyüzlü, bir Heron dörtyüzlüsü olamaz.

3.2.4. 2(*iv*) Durumu: 2(*iv*) gösterimli bir dörtyüzlünün hacim denklemi yerine koymalar sonucu $(12V)^2 = a(3d^2 - a^2)$ olarak bulunur ki 2(*i*) durumdaki sonuçla aynıdır ve bu nedenle çözüm yoktur.

3.2.5. 2(*v*) Durumu: 2*(v)* gösterimli bir dörtyüzlünün hacim denklemi yerine koymalar sonucu $(12V)^2 = (a^2 + b^2)(3a^2b^2 - a - b)$ olarak bulunur.

Eğer ebob (*a, b*) = 1 ve $a,b,V \in \mathbb{N}$ ise

$$a^2+b^2=m^2 \text{ ve } 3a^2b^2-a-b=n^2$$

olacak şekilde *m* ve *n* tamsayıları vardır.

Bu ifadeye tek çözüm, rankı 0 olan bir eliptik eğri olup, $a^2=b^2$ olması durumunda ortaya çıkar ki bu şart bir önceki denklemi de tamsayılarda çözümsüz kılar.

3.3. Üç Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler

3.3.1. 3(*i*) Durumu

Teorem 3.2. 3(*i*) gösterimli bir rasyonel dörtyüzlü, rasyonel hacimli değildir.

İspat. 3(*i*) gösterimli bir dörtyüzlünün hacmi aşağıdaki denklemle verilir:

$$(12V)^2=a^2(f^2(2a^2+e^2-f^2)-(a^2-e^2)^2)$$

yapılan düzenlemeler sonucu,

$$\left(\frac{12V}{a}\right)^2+(f^2-(a^2-e^2))^2=3e^2f^2$$

veya

$$X=\frac{12V}{a},\ Y=f^2-(a^2-e^2),\ Z=ef$$

tam sayılar olmak üzere,

$$X^2+Y^2=3Z^2$$

elde edilir. ebob (X, Y, Z) = 1 olduğunu kabul edelim. Bu denklem, mod 4 e göre ele alındığında hiçbir tam sayı çözümünün bulunmadığı görülür.

3.3.2. 3(*ii*) Durumu: Buchholz, 3(*ii*) gösterimli ve rasyonel hacimli sonsuz çoklukta dörtyüzlü bulunduğunu göstermiş ve bu dörtyüzlülerin tam bir tanımını vermiştir. Aşağıdaki parametrik tanım bir alternatif olarak verilecektir. Bu gösterimde dörtyüzlü her biri ikizkenar üçgen olan iki çift eş yüzeye sahiptir.

Teorem 3.3. $4m^2-n^2-p^2\neq 0$ olacak şekilde $m,\ n,\ p \in \mathbb{N}$ için,

$$[a:b:e]=\left[4m^2+n^2+p^2:8mn:2\left|4m^2-n^2-p^2\right|\right]$$

olduğunda 3(*ii*) gösterimli bozulmamış bir rasyonel dörtyüzlü, rasyonel hacimlidir. Böyle bir dörtyüzlü,

$$V = \frac{32}{3} m^2 np \left| 4m^2 - n^2 - p^2 \right|$$

hacmine sahiptir.

İspat. 3(*ii)* gösterimli bir dörtyüzlünün hacmi;

$$(12V)^2 = b^2 e^2 (4a^2 - b^2 - e^2)$$

ifadesi ile verilir. Yapılan düzenlemeler sonucu, $A = \frac{a}{e}, \quad B = \frac{b}{e}, \quad W = \frac{12V}{be^2}$ olmak üzere,

$$4A^2 - B^2 - W^2 = 1$$

elde edilir. $(A, B, W) = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0 \right)$ başlangıç çözümüyle kiriş yöntemini kullanarak,

$$[a : b : e] = \left[4m^2 + n^2 + p^2 : 8mn : 2 \left| 4m^2 - n^2 - p^2 \right| \right]$$

tam çözümü elde edilir. Bu değerler, dörtyüzlünün iki yüzey alanı denkleminde yerine yazılırsa,

$$\left(A_{a,a,b} \right)^2 = 16m^2 n^2 \left[\left(4m^2 + n^2 + p^2 \right)^2 - 16m^2 n^2 \right]$$

ve

$$\left(A_{a,a,e} \right)^2 = 16m^2 \left(4m^2 - n^2 - p^2 \right)^2 \left(n^2 + p^2 \right)$$

olur.

Bütün $m,\ n,\ p \in \mathbb{N}$ için, $\left(A_{a,a,b} \right)^2$ *ve* $\left(A_{a,a,e} \right)^2$ ifadelerinin her ikisi de negatif değildir. Bu nedenle, bu yüzeyler üçgen eşitsizliğini sağlamaktadır.

Bu dörtyüzlülerin Heron olmayan bir alt ailesi vardır. Eğer $m.n.p \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ ise hacim daima (tam sayı olmayan) $\frac{v}{3}$ biçiminde olacaktır ve Teorem 2.3 böyle bir dörtyüzlünün Heron olamayacağını söyler. Bununla birlikte, 3(*ii*) gösterimli sonsuz çoklukta Heron dörtyüzlü vardır.

3.3.3. 3*(iii)* Durumu

Teorem 3.4. 3*(iii)* gösterimli bir rasyonel dörtyüzlü, rasyonel hacimli değildir.

İspat. Buchholz (1992), 3(iii) gösterimli bir dörtyüzlünün hacmini;

$$(12V)^2 = a^2\left(16A_{a,d,f}^2 - a^2 f^2\right)$$

denklemiyle belirtmiştir. (1.2) denkleminde yerine koymalar sonucunda;

$$(12V)^2 = a^2\left(f^2\left(2d^2 + a^2 - f^2\right) - \left(d^2 - a^2\right)^2\right)$$

biçimindeki alternatif denklem elde edilir. Bu denklemdeki tam kare olmayan ifade, 3*(i)* gösteriminin ispatında incelediğimiz denklemle aynı formdadır ve hiçbir çözümü yoktur.

3.3.4. 3*(iv)* Durumu

Teorem 3.5. 3(iv) gösterimli rasyonel dörtyüzlü, rasyonel hacimli değildir.

İspat. Buchholz, bu durum için hacim formülünü, 3(i) durumunun çözümünde kullandığına benzer bir yolla ifade etmiştir. Hacim denklemini, aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$(12V)^2 + \left(be^2\right)^2 + \left(a\left(a^2 - b^2\right)\right)^2 = 3(abe)^2$$

Bu dört kare ifadenin ortak çarpanın bulunmadığını kabul edelim. Bu denklemi mod 4 e göre ele alalım. O zaman $12V$, be^2, $a(a^2 - b^2)$ ve abe terimlerinin hepsi tek sayı olmak zorundadır. Bu durum, a, b ve $a^2 - b^2$ ifadelerinin hepsinin tek sayı olmasını gerektirir ki bu imkansızdır.

3.3.5. 3(v) Durumu: Bu durumda hacim denklemi, sadeleştirme sonucu;

$$(12V)^2 = b^4\left(3a^2 - 2b^2 + c^2\right) - a^2\left(a^2 - c^2\right)^2 \tag{3.1}$$

ifadesine dönüşür.

Buchholz (1992), tam sayılar için bir araştırmaya yönelmiş ve tam sayı hacimli;

$$(a,\ b,\ c) = (11,\ 15,\ 16),\ (16,\ 10,\ 15),\ (20,\ 26,\ 39)$$

örnekleri bulmuştur. Ayrıca Buchholz (1992), Şekil 2.1 de gösterilen $(12,\ 10,\ 15)$ parametreli dörtyüzlüyü bulmuştur. Bu çözümlerden üçü için $c = \frac{3}{2}b$ olduğuna dikkat ediniz. $c = \frac{3}{2}b$ yazdığımızda, varlığı aşağıdaki teoremle ispatlanan, rasyonel hacimli dörtyüzlülerin sonsuz bir ailesi elde edilir.

Teorem 3.6. $m,\ n \in \mathbb{N}$ ve $3m^2 > 5n^2$ olmak üzere,

$$[a:b] = \left[4\left(m^2 - n^2\right) : 2\left(m^2 + n^2\right)\right]$$

olduğu zaman $c = \frac{3}{2}b$ şartını sağlayan $3(v)$ gösterimli bir rasyonel dörtyüzlü, rasyonel hacimlidir. Böyle bir dörtyüzlünün hacmi,

$$V = \frac{2}{3}mn\left(3m^2 - 5n^2\right)\left(5m^2 - 3n^2\right)$$

biçimindedir.

İspat. $b = 2B$ alalım. O zaman $c = 3B$ olur. Bu değerleri, (3.1) denkleminde yerine yazarsak;

$$(12V)^2 = \left(a^2 - B^2\right)^2\left(16B^2 - a^2\right)$$

denklemi elde edilir. Burada $W = \frac{12V}{a^2 - B^2}$ bir tam sayı olmak üzere,

$$W^2 = 16B^2 - a^2$$

yazılabilir. Burada $(a,\ B,\ W) = (-4,\ 1,\ 0)$ başlangıç çözümüyle kiriş yöntemini kullanarak, tam çözümü veren;

$$[a:B]=\left[4\left(m^2-n^2\right):m^2+n^2\right]$$

parametrik ifadesini buluruz. Burada, $3m^2 > 5n^2$ veya $3n^2 > 5m^2$ için

$$V=\frac{2}{3}mn\left(3m^2-5n^2\right)\left(5m^2-3n^2\right)$$

ifadesine ulaşılır ki bu pozitiftir. Ayrıca bu şartlar altında, yüzeylerde üçgen eşitsizliği sağlanmaktadır. Bu denklem m ile n ye göre simetrik olduğundan $3m^2>5n^2>0$ almalıyız. Bu da $m > n$ olmasını ve böylece $a > 0$ olmasını gerektirir.

Bu tür dörtyüzlülerin bazı örnekleri; Tablo 3.1. de listelenmiştir.

Tablo 3.1. Rasyonel Hacimli $(a,\ a)$, $(b,\ b)$, $(\frac{3}{2}b,\ a)$ Biçiminde Dörtyüzlüler

m	***n***	***a***	***b***	***c***	**V**
2	1	12	10	15	$\frac{476}{3}$
3	2	20	26	39	924
4	1	60	34	51	$\frac{26488}{3}$
4	3	28	50	75	1272
5	2	84	58	87	$\frac{124300}{3}$

m	***n***	***a***	***b***	***c***	**V**
3	1	16	10	15	231
5	1	48	26	39	$\frac{10675}{3}$
5	3	32	34	51	3675
7	1	96	50	75	$\frac{60137}{3}$
7	3	80	58	87	38913

Bu dörtyüzlülerin yüzey alanlarının denklemleri;

$$\left(4A_{a,a,b}\right)^2=16\left(m^2+n^2\right)^2\left(15\left(m^2-n^2\right)^2-4m^2n^2\right) \tag{3.2}$$

ve

$$\left(4A_{a,b,\frac{3}{2}b}\right)^2=\left(15\left(m^2-n^2\right)^2-4m^2n^2\right)\left(9\left(m^2+n^2\right)^2+64m^2n^2\right) \tag{3.3}$$

biçiminde verilir. Eğer bu ailedeki dörtyüzlülerden herhangi biri Heron ise, (3.2) denkleminde, $15\left(m^2-n^2\right)^2-4m^2n^2$ bir kare olmak zorundadır ve dolayısıyla $9\left(m^2+n^2\right)^2+64m^2n^2$ de bir kare olmak zorundadır. ebob$(a,b,\frac{3}{2}b)=1$ olacak şekilde bir dörtyüzlüyü ele aldığımızda, m ile n den birisi çift olmak zorundadır. Buradan $9\left(m^2+n^2\right)^2+64m^2n^2\equiv 1 \pmod 4$ tür, ama $15\left(m^2-n^2\right)^2-4m^2n^2\equiv 3 \pmod 4$ tür. Bu nedenle, bu dörtyüzlülerin hiçbiri için $A_{a,a,b}$ rasyonel değildir. Dolayısıyla bu dörtyüzlüler; Heron dörtyüzlüsü olamazlar.

Bu aile, (3.1) denkleminin tam sayı çözümlerinin tamamını kapsamaz. – En küçük örnek, (*a, b, c*) = (11, 15, 16) bu ailenin bir elemanı değildir. – Tam çözümü tanımlayan veya bu gösterimde bir Heron dörtyüzlüsünün bulunup bulunmadığına dair yeni bir gelişme yoktur. 3 ve 4 modülüne göre yapılan hızlı araştırmalar, eğer bu gösterimde bir Heron dörtyüzlüsü varsa, *b* nin çift, *a* ile *c* nin tek ve *b* ile *c* den birinin 3 ile bölünebilir olması gerektiğini gösterir. $X=\frac{4}{b}A_{a,a,b}$ olmak üzere, $4a^2-b^2=X^2$ denkleminin çözümünde kiriş yöntemi kullanıldığında, $a=m^2+n^2,\quad b=2\left(m^2-n^2\right)$ bulunur. Bu da $b\equiv 2\left(\bmod 4\right)$ olmasını gerektirir. Maple aracılığıyla yapılan bilgisayar araştırması sonucunda, bu şartları sağlayan bir Heron dörtyüzlüsü bulunamamıştır.

3.3.6. 3*(vi)* Durumu

Buchholz (1992), sonsuz çoklukta 3*(vi)* gösterimli Heron (dolayısıyla rasyonel hacimli) dörtyüzlünün bulunduğunu ifade etmiştir. Her ne kadar bu gösterim Heron dörtyüzlülerinin çeşitleri arasında en çok üzerinde çalışma yapılanı olsa da, sadece rasyonel hacimli 3(vi) gösterimli dörtyüzlü hakkında çok az yazılı bilginin bulunduğu görülmektedir. Bununla birlikte, Buchholz (1992), dört tane Heron Dörtyüzlüsü örneğini; (21, 21)(20, 20)(11, 11), (72, 72)(65, 65)(33, 33), (100, 100)(91, 91)(69, 69) ve (100, 100)(99, 99)(21, 21). Buchholz (1992), bu

örneklerin her birinin rasyonel hacimli dörtyüzlülerin sonsuz bir ailesini ürettiğini göstermiştir. Bu ise 3. bölümde verilecektir. Bu bölümde, her bir örnek, sonsuz bir aileyi tanımlamak için kullanılacaktır.

3*(vi)* gösterimli bir dörtyüzlünün hacim denklemi aşağıdaki ifadeye indirgenebilir.

$$(12V)^2 = 2\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(-a^2+b^2+c^2\right) \qquad (3.4)$$

Bu denkleme genel bir çözüm bulunamamıştır. Bununla birlikte, $\propto = \frac{a}{b}$ ye bağlı dördüncü dereceden bir ifade elde etmek için, denklemde $c = \lambda(a-b)$ yazılır ve $b^4(a-b)^2$ ile sadeleştirme yapılır. Yukarıdaki dört dörtyüzlü için, sırasıyla λ; 11, $\frac{33}{7}$, $\frac{23}{3}$ ve 21 değerlerini alır. Şimdi λ nın bu değerlerine karşılık gelen durumları inceleyelim.

$\lambda = 11$ ile başlayalım. $Y = \frac{3V}{b^2(a-b)}$ olmak üzere,

$$Y^2 = (61-60\propto)(61\propto-60)\left(60\propto^2-121\propto+60\right)$$

elde edilir. Bu ifadede $\propto = X + \frac{61}{60}$ yazar, sonra ifadeyi 11^2X^4 ile bölersek; $x = \frac{1}{X}$, $y = \frac{Y}{11X^2}$ olmak üzere,

$$E_{11} : y^2 = x^3 + \frac{3539}{121}x^2 - \frac{10920}{121}x - \frac{219600}{121}$$

eliptik eğri denklemine ulaşırız.

Magma tarafından belirlenen ve denklemi verilen E_{11} eliptik eğrisi üzerindeki rasyonel noktaların grubu $E_{11}(\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^2$ olup, bu grubun üreteçleri;

$$P_2 = \left(-\frac{3660}{121}, 0\right),\ P_{\infty 1} = \left(30, -\frac{2430}{11}\right),\quad P_{\infty 2} = \left(-10, \frac{350}{11}\right)$$

biçimindedir. Aşağıdaki denklem aracılığıyla, eğri üzerindeki bir rasyonel noktadan *a* ve *b* değerleri bulunabilir.

$$\frac{a}{b}=\frac{60+61x}{60x}$$

Aşağıdaki tabloda rasyonel noktalar ve karşılık gelen dörtyüzlüler gösterilmiştir.

Tablo 3.2. (21, 21)(20, 20)(11, 11) Örneğiyle Genellenen Rasyonel Hacimli İlk Birkaç Dörtyüzlü.

$E_{11}(\mathbb{Q})$ deki noktalar	***a, b, c***	**V**
$P_{\infty 1}$	21, 20, 11	360
$P_{\infty 2}+P_2$	12, 11, 11	168
$P_{\infty 1}+P_{\infty 2}+P_2$	1204, 1095, 32747	183590880
$2P_{\infty 1}$	24781, 21804, 32747	518919964992
$2P_{\infty 2}$	383365, 363084, 223091	2673997281648000

$P_{\infty 2}$ ye (negatif işaretler önemsemediğinde) karşılık gelen dörtyüzlü, $(a,\ b,\ c) = (11,\ 12,\ -11)$ değerlerine sahiptir.

P_2 yi ilave etmek her zaman, *a* ve *b* nin yer değiştirmesine ve böylece *c* nin işaret değiştirmesine neden olur. P = (x′, y′) olsun. Buradan $\frac{a'}{b'}=\frac{60+61x'}{60x'}$ olur. x'', $P + P_2$ nin *x* koordinatını göstersin.

Buradan $x''=-\frac{60\left(61x'+60\right)}{3660+121x'}$ ve $\frac{a''}{b''}=\frac{60+61x''}{60x''}=\frac{60x'}{61x'+60}=\frac{b'}{a'}$

bulunur. Bu nedenle bir tek dörtyüzlüye karşılık gelen dört nokta vardır. Bunlar: $\pm P$ ve $\pm P+P_2$. Sadece $x_1'=x_2'$ olduğunda, $\frac{a'}{b'}=\frac{1}{x'}+\frac{61}{60}=\frac{1}{x_2'}+\frac{61}{60}$ olduğundan $P_{\infty 1}$ ve $P_{\infty 2}$ nin her lineer kombinasyonu farklı bir dörtyüzlüye karşılık gelir. Böylece, eliptik eğri bize, rasyonel hacimli, farklı, sonsuz çoklukta dörtyüzlü verir.

Geriye kalan üç λ değeri için benzer şekilde aşağıdaki eğriler bulunur:

$$E_{\frac{33}{7}}:\ y^2 = x^3 + \frac{242519}{53361}x^2 - \frac{862160}{53361}x - \frac{153857600}{2614689}$$

$$E_{\frac{23}{3}}:\ y^2 = x^3 + \frac{65179}{4761}x^2 - \frac{69160}{1587}x - \frac{18184400}{42849}$$

$$E_{21}:\ y^2 = x^3 + \frac{48179}{441}x^2 - \frac{145640}{441}x - \frac{10696400}{441}$$

Rankı 2 olan bu eğrilerin her birinin üzerindeki ilk birkaç noktanın verdiği dörtyüzlüler Tablo 3.3 te listelenmiştir.

Tablo 3.3. 3(vi) daki Diğer Üç Örnekle Genellenen Rasyonel Hacimli Dörtyüzlüler.

Nokta	a, b, c	V
$\lambda = \frac{33}{7}$:		
$P_{\infty 1} + P_2$	72, 65, 33	$\frac{16640}{3}$
$P_{\infty 2} + P_2$	40, 33, 33	$\frac{13600}{3}$
$P_{\infty 1} + P_{\infty 2}$	20345, 15592, 22407	692620088160
$2P_{\infty 1}$	8549641, 7429256, 5281815	25264481135905482240
$2P_{\infty 2}$	271993969, 205206920, 314853231	1440611447918889390144000
$\lambda = \frac{23}{3}$:		
$P_{\infty 1}$	100, 91, 69	60840
$P_{\infty 2}$	260, 251, 69	51480
$P_{\infty 1} + P_{\infty 2}$	179257, 166180, 100257	235905763672800
$2P_{\infty 1}$	3486029, 2938676, 4196373	3625496620629504192
$2P_{\infty 2}$	65711309, 63204404, 19219605	1879121172778331771520
$\lambda = 21$:		
$P_{\infty 1} + P_2$	100, 99, 21	$\frac{19360}{3}$
$P_{\infty 2}$	572, 535, 777	6984120
$P_{\infty 1} + P_{\infty 2} + P_2$	42141, 41012, 23709	$\frac{10544298995384}{3}$
$2P_{\infty 1}$	1937101, 1866524, 1482117	576805464113406528
$2P_{\infty 2}$	4505283341, 4484244556, 441814485	360991819392868586684361 60

Şimdi 3(vi) gösterimli Heron dörtyüzlülerinin varlığına ilişkin teoremimizi verelim.

Teorem 3.7. 3(vi) gösterimli sonsuz sayıda Heron dörtyüzlüsü vardır.

İspat. Öncelikle bu durumdaki bir dörtyüzlünün hacmini veren formülü yazalım.

$$(12V)^2 = 2\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(a^2+c^2-b^2\right)\left(b^2+c^2-a^2\right) \qquad (3.5)$$

Şimdi Carmichael'in parametrelerini kullanarak *a, b, c* yi yerine yazarsak;

$$a^2+b^2-c^2 = 2mn\left[k^2\left(m+n\right)^2 - \left(mn-k^2\right)^2\right]$$

$$a^2+c^2-b^2 = 2n\left(m+n\right)\left(mn-k^2\right)\left(m^2-k^2\right)$$

$$b^2+c^2-a^2=2m(m+n)(mn-k^2)(n^2-k^2)$$

bulunur. Bu ifadeler (3.5) de yerine yazalıırsa;

$$(12V)^2=\left[4mn(m+n)(mn-k^2)\right]^2\left[k^2(m+n)^2-(mn-k^2)^2\right](m^2-k^2)(n^2-k^2)$$

bulunur. Burada $v^2=\left[k^2(m+n)^2-(mn-k^2)^2\right](m^2-k^2)(n^2-k^2)$ olacak şekilde bir v tam sayısı vardır. Şimdi son eşitliğin her iki tarafını k^8 e böler ve elde edilen ifadede $Z=\frac{v}{k^4}$, $x=\frac{m}{k}$, $y=\frac{n}{k}$ olarak yazarsak;

$$Z^2=(x+y-xy+1)(x+y+xy-1)(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$$

olur. Bu ifade, x ve y ye bağlı dördüncü dereceden bir denklemdir. Bu denklemin rasyonel çözümleri, Heron dörtyüzlülerini verir. Rasyonel çözümlerden biri

$$(x,y,Z)=\left(\frac{7}{5},\frac{4}{3},\frac{56}{25}\right)$$

olarak bulunur. Şimdiki amacımız, yukarıdaki denklemin rankı≥ 1 olan bir eliptik eğriye dönüştürülmesi yoluyla, bahsedilen örnek çözümün sonsuz sayıda çözümü genelleyeceğini göstermektedir.

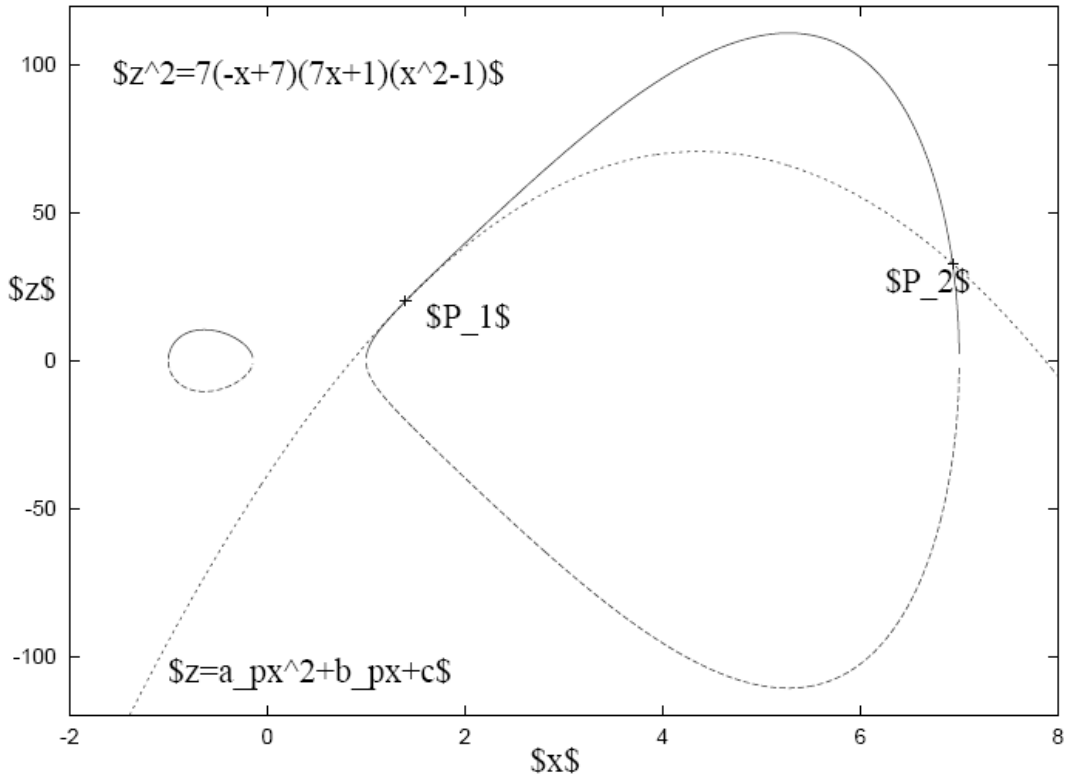
Şimdi $y=\frac{4}{3}$ ve $Z=\frac{z}{9}$ alalım. Bu durumda

$$z^2=7(-x+7)(7x+1)(x-1)(x+1) \qquad (3.6)$$

elde edilir. Bu denkleme ait bir rasyonel nokta $(x_1,z_1)=\left(\frac{7}{5},\frac{504}{25}\right)$ dir. Denklemde dönüşümü gerçekleştirmeden önce, tanjant-kiriş yöntemine benzer bir metot kullanarak dördüncü dereceden eğri üzerinde ikinci bir rasyonel nokta elde etmek faydalı olacaktır.

Şimdi, $a_p=-\frac{13057}{2^2.3^4.7}$, $b_p=\frac{40705}{2.3^4.5}$, $c_p=-\frac{12607}{2^2.3^4}$ olmak üzere, $z_p=a_px^2+b_px+c_p$ parabolü dördüncü dereceden (3.6) eğrisi ile, $z_p'=z'$ *ve* $z_p''=z''$ olacak şekilde $(x_1,z_1)=\left(\frac{7}{5},\frac{504}{25}\right)$ noktasında kesişir. Böylece parabolün

denklemiyle (3.6) denkleminin kesişmesi, dördüncü dereceden başka bir denklem elde edilmesini sağlar. *g(x)* denklemi, aşağıda gördüğümüz yapısı gereği, $x=\frac{7}{5}$ noktasında 3 katlı köke ve (3.6) denklemi üzerinde ikinci bir rasyonel noktaya karşılık gelen ikinci bir köke sahiptir.



Şekil 3.2. $g(x)=z^2-z_p^2$ Eğrisinin Grafiği

$$g(x)=z^2-z_p{}^2=\left(x-\frac{7}{5}\right)^3.(P_2x-Q_2)=0$$

Buradan *g(x)* denklemindeki x' in kuvvetlerinin katsayılarını eşitleyerek,

$P_2=\frac{-5^3.677.4993}{2^4.3^8.7^2}$ *ve* $Q_2=\frac{-5^3.3348577}{2^4.3^8.7}$ bulunur. Sonuçta,

$$x_2=\frac{Q_2}{P_2}=\frac{7.3348577}{677.4993},\ z_2=\frac{2^3.3^3.5.7.13.23.89.587.3167}{677^2.4993^2}$$

olmak üzere (3.6) eğrisi üzerindeki ikinci rasyonel nokta, (x_2,z_2) dir. Dördüncü dereceden bir eğri olan (3.6) ye dönüşüm metodu uygulandığında, $x=\frac{7X+1}{5X}$

ve $z=\frac{W}{5^2X^2}$ ifadeleri (3.6) de yerine yazıldığında başlangıçtaki terim pozitif bir rasyonel kare haline gelir. Böylece (3.6) denkleminin son durumu

$$W^2=7(28X-1)(54X+7)(12X+1)(2X+1) \tag{3.7}$$

biçimindedir. $(x_1,z_1)=\left(\frac{7}{5},\frac{504}{25}\right)$ deki rasyonel noktanın, $X=\infty$ a dönüştüğüne dikkat edelim. Bu durum, neden ikinci rasyonel noktaya ihtiyaç duyulduğunu gösterir. Şimdi (3.7) denkleminde;

$$X=\frac{u-256}{2^3.3^3.7},\quad W=\frac{\omega}{2^3.3^4.7}$$

ifadeleri yerine yazılırsa; kübik ifade baş katsayısı 1 olan dördüncü dereceden bir denkleme dönüştürülür. Buradan

$$\omega^2=(u-310)(u-60)(u-130)(u+500)$$

veya

$$\omega^2=u^4-6.30550u^2+4.7733000u-1209000000 \tag{3.8}$$

ifadesine ulaşılır. Bu ifadeye Mordell dönüşümünü uygulayalım. Yani, p = 30550, q = – 7733000 ve r = – 1209000000 olmak üzere, $2u$ = $2u=\frac{(t+q)}{(s-p)}$ ve w = $2s$ – u^2 + p değerlerini yerine yazdığımızda, $g_2=3p^2+r=1590907500$ ve $g_3=q^2+pr-p^3=-5648052375000$ olmak üzere;

$$t^2=4s^3-g_2s+g_3 \tag{3.9}$$

biçimindeki eliptik eğri elde edilir. Burada (3.9) denkleminin sağ tarafı 4 ile bölünebildiği için t nin bir çift sayı olması gerektiği sonucunu çıkarırız. Burada, $t=2T$ yazdığımızda,

$$T^2=s^3-397726875s-2.5^3.5648052375$$

bulunur. Bu ifade,

$$T^2=(s+17850)(s+3675)(s-21525) \tag{3.10}$$

biçiminde çarpanlarına ayrılır.(3.6) denklemi üzerindeki (x_2, z_2) rasyonel noktası (3.10) denklemi üzerinde bir rasyonel noktaya dönüştürülebilir. Bu rasyonel nokta,

$$s_1 = \frac{5^2.13.416834008069}{2^6.11^2.19^2.37^2} \; ve \; T_1 = \frac{7868832129656073200590900 0}{\left(2^6.11^2.19^2.37^2\right)^2}$$

olmak üzere (s_1,T_1) noktasıdır. s_1 ve T_1 tamsayı olmadığından, Teorem 1.4 ile verilen Nagel1 – Lutz Teoreminden, dolayı (s_1, T_1) noktası sonsuz mertebeden bir nokta olmalıdır. Böylece (3.10) denklemi, sonsuz çoklukta rasyonel çözüme sahip olup bu durum benzer şekilde (3.6) denkleminin de sonsuz çoklukta rasyonel çözüme sahip olmasını gerektirir.

Son engel, üçgen eşitsizliğinin dönüşümüdür. Çünkü sadece $mn > k^2 > \frac{m^2 n}{2m+n}$ *ve* $m \geq n \geq 1$ şartlarını sağlayan çözümler, hacim denklemi (3.5) de verilen 3 *(vi)* gösterimli Heron dörtyüzlülerini oluştururlar. Şimdi,

$$mn > k^2 \Rightarrow xy > 1 \Rightarrow x > \frac{3}{4}$$

$$m > n \Rightarrow x > y \Rightarrow x > \frac{4}{3}$$

$$k^2 > \frac{m^2 n}{2m+n} \Rightarrow 1 > \frac{x^2 y}{2x+y} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < 2$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliklerden, Heron dörtyüzlülerini üreten, (3.6) denklemi üzerindeki rasyonel noktalar $\frac{4}{3} < x < 2$ ve $\frac{7\sqrt{17.31}}{9} < z < 15\sqrt{17}$ şartlarını sağlar. Özellikle yukarıda bulduğumuz (x_2, z_2) rasyonel noktası, bu aralıkta yer almaz ve bu nedenle yeni bir Heron dörtyüzlü üretmez. Üçgen eşitsizliğinin dönüşümüne devam edildiğinde, sonuçta (3.10) denklemiyle verilen eliptik eğri üzerindeki rasyonel noktalar için geçerli olan $s > 46027 + 4900\sqrt{17.31} > 127963$ eşitsizliğine ulaşılır. (3.10) denklem sabit bir r için $s > r$ şartını sağlayan sonsuz çoklukta (s, T) rasyonel noktalarına sahip olduğu için (3.5) denkleminin de 3 *(vi)* gösterimli Heron dörtyüzlüler üreten sonsuz çoklukta çözüme sahip olduğu sonucu çıkar. (Buchholz 1992),

Tablo 3.4. 3(vi) Gösterimli $(a,a)(b,b)(c,c)$ Formunda Heron Dörtyüzlüleri

m	***n***	***k***	***a***	***b***	***c***	**V**
21	20	15	888	875	533	37608480
39	34	26	2873	2748	1825	1355172000
39	35	25	203	195	148	611520
58	33	30	1804	1479	1183	214582368
77	68	44	2431	2175	2175	1403038560

3.3.7. 3*(vii)* Durumu

Teorem 3.8. 3*(vii)* gösterimli bir rasyonel dörtyüzlü, rasyonel hacme sahip değildir.

İspat. Bu gösterime ait dikkat gerektiren hacim denklemi;

$$(12V)^2 = 5a^2b^2c^2 - a^4b^2 - b^4c^2 - c^4a^2$$

dir. Burada *a, b* ve *c* nin hiçbirinin çift sayı olmadığını yani hepsinin tek sayı olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $(12V)^2 \equiv 2 \pmod 4$ bulunur ki, bu şartı sağlayan hiçbir çözüm yoktur. Şimdi kenar uzunluklarından birinin çift sayı olduğunu düşünelim. Bu durumda, $(12V)^2 \equiv 3 \pmod 4$ olur ki, bu ifade için de hiçbir çözüm yoktur.

Son olarak, kenar uzunluklarından birinin tek olduğunu kabul edelim. Genelliği bozmaksızın, *c* ve $12V \in \mathbb{N}$ olsun. A, B, v tek sayı ve $\propto, \beta, \gamma \geq 1$ olmak üzere (Bu şartlarda Teorem 2.2 nin ispatından 12V nin bir çift sayı olduğunu hatırlayalım) $a = 2^{\propto} A$, $b = 2^{\beta} B$ ve $12V = 2^{\gamma}.v$ olsun. Hacim formülünde yerine koymalar sonucu;

$$2^{2\gamma} v^2 = 2^{2\propto+2\beta} 5A^2B^2c^2 - 2^{4\propto+2\beta} A^4B^2 - 2^{4\beta} B^4c^2 - 2^{2\propto} c^4A^2$$

ifadesi elde edilir. Her bir $\propto, \beta \geq 1$ için $4\propto+2\beta > 2\propto+2\beta > 2\propto$ olduğuna dikkat edelim. Bu nedenle, eşitliğin sağ tarafındaki 2 nin en küçük kuvveti, $2\propto$ veya 4β dan biri olacaktır veya $2\propto = 4\beta$ dır. Şimdi bu durumları ayrı-ayrı inceleyelim.

Eğer $2\propto < 4\beta$ ise,

$$2^{2\gamma-2\propto} v^2 = 2^{2\beta} 5A^2B^2c^2 - 2^{2\propto+2\beta} A^4B^2 - 2^{4\beta-2\propto} B^4c^2 - c^4A^2$$

olur ki bu ifadeyi mod 4 e göre ele aldığımızda,

$$2^{2\gamma-2\propto}\ v^2 \equiv 0-0-0-1 \equiv 3 \pmod 4$$

bulunur ki bu durumda hiçbir çözüm yoktur.

Eğer $2 \propto > 4\beta$ ise,

$$2^{2\gamma-4\beta}\, v^2 = 2^{2\propto-2\beta}5A^2B^2c^2 - 2^{4\propto-2\beta}\, A^4B^2 - B^4c^2 - 2^{2\propto-4\beta}\, c^4A^2$$

bulunur ki bu ifadeyi mod 4 e göre ele aldığımızda,

$$2^{2\gamma-2\propto}\ v^2 \equiv 0-0-1-0 \equiv 3 \pmod 4$$

bulunur ki, bu durumda hiçbir çözüm yoktur.

Eğer $2 \propto = 4\beta$ ise,

$$2^{2\gamma-4\beta}\, v^2 = 2^{2\beta}5A^2B^2c^2 - 2^{6\beta}\, A^4B^2 - B^4c^2 - c^4A^2$$

bulunur. Bu ifadeyi mod 4 e göre ele aldığımızda,

$$2^{2\gamma-2\propto}\ v^2 \equiv 0-0-1-1 \equiv 2 \pmod 4$$

bulunur ki, bu durumda hiçbir çözüm yoktur.

3.3.8. 3*(viii)* Durumu

Buchholz (1992), $a = \frac{4}{3}d$ olacak şekilde 3*(viii)* gösterimli ve rasyonel hacimli dörtyüzlülerin sonsuz bir ailesini bulmuştur. Burada, bütün 3*(viii*) gösterimli dörtyüzlüler için bir parametrik çözüm verilecektir. Bu tür dörtyüzlüler, bütün yüzeyleri ikizkenar üçgenler olmak üzere, bir çift eş yüzeye ve iki farklı yüzeye sahiptir.

Teorem 3.9. $m,\ n,\ p \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$[a:c:d] = \left[2\left(4m^2+n^2-p^2\right)\left|4m^2-n^2-p^2\right| : 16mn\left|4m^2-n^2-p^2\right| : \left(4m^2+n^2+p^2\right)^2\right]$$

olduğu zaman, 3*(viii)* gösterimli bir rasyonel dörtyüzlü, rasyonel hacimlidir. Bu durumda, hacim aşağıdaki gibidir:

$$V=\frac{64}{3}m^2np\left(4m^2-n^2-p^2\right)^2\left(4m^2+n^2+p^2\right)^2$$

Eğer hacim ifadesinde geçen $4m^2-n^2-p^2\neq 0$ ise dörtyüzlü (bozulmamış) dejenere olmamıştır.

İspat. 3 *(viii)* gösterimli bir dörtyüzlünün hacmi;

$$(12V)^2=c^2\left(4a^2d^2-c^2d^2-a^4\right)$$

denklemi ile verilir. Yeniden düzenlemeler ve c^2a^4 ile sadeleştirme sonucu;

$$4\left(\frac{d}{a}\right)^2-\left(\frac{cd}{a^2}\right)^2-\left(\frac{12V}{ca^2}\right)^2=1$$

ifadesi elde edilir. Bu denkleme, $\left(\frac{d}{a},\ \frac{cd}{a^2},\ \frac{12V}{ca^2}\right)=\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$ başlangıç çözümüyle kiriş yöntemini kullandığımızda;

$$\frac{d}{a}=\frac{4m^2+n^2+p^2}{2\left(4m^2-n^2-p^2\right)},\ \frac{cd}{a^2}=\frac{4mn}{4m^2-n^2-p^2},\ \frac{12V}{ca^2}=\frac{4mp}{4m^2-n^2-p^2} \qquad (3.11)$$

ifadelerine ulaşırız. Buradaki (3.11) in ilk iki denkleminden,

$$d=\frac{\left(4m^2+n^2+p^2\right)a}{2\left(4m^2-n^2-p^2\right)}=\frac{4mna^2}{c\left(4m^2-n^2-p^2\right)}$$

yazılır. Buradan,

$$a=\frac{\left(4m^2+n^2+p^2\right)c}{8mn}$$

elde edilir. Bu ifade $\frac{d}{a}$ da yerine yazılırsa,

$$d=\frac{\left(4m^2+n^2+p^2\right)^2c}{16mn\left(4m^2-n^2-p^2\right)}$$

bulunur. Böylece,

$$\frac{d}{c}=\frac{\left(4m^2+n^2+p^2\right)^2}{16mn\left(4m^2-n^2-p^2\right)}$$

ve

$$\frac{a}{c}=\frac{\left(4m^2+n^2+p^2\right)}{8mn}=\frac{2\left(4m^2-n^2-p^2\right)\left(4m^2+n^2+p^2\right)}{16mn\left(4m^2-n^2-p^2\right)}$$

olur. Dörtyüzlünün var olabilmesi için, hacmin pozitif olması yeterlidir. Eğer V > 0 ise, $4a^2d^2-c^2d^2-a^4>0$ dir. Bu ifade, yeniden $a^2\left(4d^2-a^2\right)>c^2d^2$ olarak yazılabilir. Bu yazılış, $2d > a$ olmasını gerektirir ve $d^2\left(4a^2-c^2\right)>a^4$ olarak yazılması $2a > c$ olmasını gerektirir. Bu nedenle (*d, d, a*) ve (*a, a, c*) yüzeyleri için üçgen eşitsizliği sağlanmaktadır. (*d, d, c*) yüzeyi için $2d > c$ olması gerekir. Bu eşitsizliğin sağlandığını göstermek için, ilk olarak aşağıdaki hesaplamaya dikkat edelim.

$$\begin{aligned}4d^4-4a^2d^2+a^4 &= 4d^2\left(d^2-a^2\right)+a^4 > a^2\left(d^2-a^2\right)+a^4,\ \left(2d>a \text{ olduğundan}\right)\\ &= a^2d^2 > 0\end{aligned}$$

Burada, $4d^4-4a^2d^2+a^4>0$ ifadesi $4d^2>4a^2-\frac{a^4}{d^2}$ ifadesine denktir. Şimdi, eğer V > 0 ise $4a^2-\frac{a^4}{d^2}>c^2$ ifadesine denk olan, $d^2\left(4a^2-c^2\right)>a^4$ eşitsizliği vardır. Bu nedenle, $4d^2>4a^2-\frac{a^4}{d^2}>c^2$ olur ki böylece $2d>c$ dir.

Bu tür dörtyüzlülerin küçük örnekleri Tablo 3.5 te gösterilmiştir. Bu listelenmiş dörtyüzlülerden sadece biri rasyonel bir yüzey alanına sahiptir: Burada (78, 169)(78, 169)(144, 169) dörtyüzlüsünün sahip olduğu rasyonel yüzey alanı $A_{a,a,c}=2160$ dır.

Tablo 3.5. Rasyonel Hacimli $(a,\ d)(a,\ d)(c,\ d)$ Dörtyüzlüleri

m	***n***	***p***	***a***	***c***	***d***	**V**
1	1	1	6	8	9	48
1	1	2	18	16	81	3456
1	2	1	18	32	81	3456
2	3	3	34	48	289	55488
1	1	3	42	24	49	7056
1	3	1	42	72	49	7056
2	1	3	78	48	169	97344
2	3	1	78	144	169	97344
2	1	1	126	112	112	84672

Bilinen Heron dörtyüzlülerin hiçbiri, 3 *(viii)* gösterimli değildir. Yüzey alanı denklemlerinde a, c, d' yi yerine yazdığımızda;

$$A_{a,a,c}^2 = 256m^2n^2\left(4m^2-n^2-p^2\right)^4\left[\left(4m^2+n^2+p^2\right)^2-16m^2n^2\right]$$

$$A_{d,d,a}^2 = 16m^2\left(4m^2-n^2-p^2\right)^2\left(4m^2+n^2+p^2\right)^4\left(n^2+p^2\right)$$

$$A_{d,d,c}^2 = 64m^2n^2\left(4m^2-n^2-p^2\right)^2\left[\left(4m^2+n^2+p^2\right)^4-64m^2n^2\left(4m^2-n^2-p^2\right)^2\right]$$

ifadeleri elde edilir. Eğer, yüzeylerden herhangi birinin tam sayı alanlı olmasını istiyorsak, $X,\ Y$ veya $Z \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$X^2 = \left(4m^2+n^2+p^2\right)^2-16m^2n^2,\ \ Y^2 = n^2+p^2,$$
$$Z^2 = \left(4m^2+n^2+p^2\right)^4-64m^2n^2\left(4m^2-n^2-p^2\right)^2$$

olması gerekir. Bu ifadelerde $n = 2kl$ ve $\mathrm{p} = k^2-l^2$ yazarsak, $\mathrm{Y} = k^2+l^2$ olur. Bu durumda,

$$A_{d,d,a} = 4m\left(k^2+l^2\right)\left(4m^2-\left(k^2+l^2\right)^2\right)\left(4m^2+\left(k^2+l^2\right)^2\right)^2$$

yüzey alanlı ve rasyonel hacimli dörtyüzlülerin sonsuz bir ailesi elde edilir.

Buradan,

$$A_{a,a,c}^2 = 1024m^2k^2l^2\left(4m^2-\left(k^2+l^2\right)^2\right)^4\left[\left(4m^2+\left(k^2+l^2\right)^2\right)^2-64m^2k^2l^2\right]$$

$$A_{d,d,c}^2 = 256m^2k^2l^2\left(4m^2-\left(k^2+l^2\right)^2\right)^2$$
$$\left[\left(4m^2+\left(k^2+l^2\right)^2\right)^4-256m^2k^2l^2\left(4m^2-\left(k^2+l^2\right)^2\right)^2\right]$$

$A_{d,d,a}$ ve $A_{a,a,c}$ nin ikisinin birden rasyonel olduğu dörtyüzlü vardır. Örneğin; k = 7, l = 6, m = 34 aldığımızda elde edilen (12546, 28577)(12546, 28577) (3744, 28577) dörtyüzlüsü,

$$A_{d,d,a} = 43722810,\quad A_{a,a,c} = 10069920,\quad A_{d,d,c} = 3024\sqrt{670331713}$$

yüzey alanlarına ve V = 215696452608 hacmine sahiptir.

Bu bölümde, şimdiye kadar ilk önce rasyonel hacme odaklandık ve sonra yüzey alanlarının rasyonel olması için çabaladık. Bunun tam tersi bir yaklaşım kullandığımızı varsayalım ve

$$A_{a,a,c}^2 = c^2\left(4a^2-c^2\right),\quad A_{d,d,a}^2 = a^2\left(4d^2-a^2\right),\quad A^2{}_{d,d,c} = c^2\left(4d^2-c^2\right)$$

denklemlerine rasyonel çözümler veren dörtyüzlü varsa hacmin rasyonel olup olmadığını araştıralım. Yüzey alanlarını veren bu denklemlerden son ikisine bakalım. Kiriş yöntemini kullandığımızda,

$$a = 4uv \text{ veya } 2\left(u^2-v^2\right),\ c = 4wx \text{ veya } 2\left(w^2-x^2\right),\ d = u^2+v^2 = w^2+x^2$$

olduğunu görürüz. Böylece

$$u = r^2-s^2+t^2,\ v = 2rs,\ w = r^2+s^2-t^2,\ x = 2rt$$

elde ederiz. $a = 4uv$, $c = 4wx$ alınarak, yapılan bilgisayar paket programlarıyla yapılan araştırma sonucunda; *(r, s, t)* = (3, 28, 35), (4, 21, 35), (18, 35, 38), (19, 36, 35) ve (25, 24, 23) değerleri elde edilir. Bütün bu değerler, yüzey alanlarının hepsi rasyonel ama hacmi irrasyonel olan dejenere olmamış (bozulmamış) dörtyüzlüler verir. *a* ve *c* için bu tür parametreler seçildiğinde hacim denklemi şöyledir:

$$(12V)^2 = 4096r^4t^2\left(r^2+s^2-t^2\right)^2\left[4s^2\left(r^2-s^2\right)^2 - t^2\left(r^2-3s^2+t^2\right)^2\right]$$
$$\left[\left(r^4-6r^2s^2+s^4-t^4\right)^2 - 4s^2t^2\left(3r^2-s^2+t^2\right)^2\right]$$

Bilgisayar destekli yapılan araştırmalar sonucunda; 3 *(viii)* gösterimli (bozulmuş) dejenere olmuş çok sayıda Heron dörtyüzlüsü keşfetmiştir. Maalesef, bu durum dejenere olmamış Heron dörtyüzlülerinin varlığını göstermek için modüler aritmetik tartışmalarını kullanma girişimlerini engellemektedir.

3.3.9. 3*(ix)* Durumu

Bu gösterim, (*a, b, c*) yüzeyinin iki kopyasına ve aynı zamanda iki farklı ikizkenar yüzeye sahiptir. 3*(ix)* gösterimli bir dörtyüzlünün hacmini veren denklem aşağıdaki gibidir:

$$(12V)^2 = a^2\left(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-2a^4-b^4-c^4\right)$$
$$= a^2\left(2a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)-(b-c)^2(b+c)^2\right)$$

Buchholz (1992), 3*(ix)* gösterimli ve rasyonel hacimli (*a, b, c*) = (12, 7, 11), (28, 15, 27), (36, 19, 35) olan dörtyüzlüleri listelemiştir. Buchholz, verdiği ilk örneği üzerinde çalışarak, $a = 3(c-b)$ yazmış ve buradan;

$$[a:b:c] = \left[12p^2-144pq+408q^2 : 7p^2-78pq+238q^2 : 11p^2-126pq+374q^2\right]$$

çözümünü bulmuştur. Bu çözüm için hacim denklemi;

$$V = 48\left|p^2-34q^2\right|\left(p^2-12pq+34q^2\right)^2$$

olarak bulunur. Bir başka sonsuz aile, (*a, b, c*) = (28, 15, 27) ile aynı süreç takip edilerek bulunabilir. Burada $\frac{a}{c-b} = \frac{28}{27-15} = \frac{7}{3}$ olduğundan, $a = \frac{7}{3}(c-b)$ yazarsak;

$$\left(\frac{324V}{7(c-b)^2}\right)^2 = (803b-443c)^2 - 890(27b-15c)^2$$

biçimindeki dördüncü dereceden homojen ifadeyi elde ederiz. Burada

$$X=\frac{324V}{7(c-b)^2},\quad Y=803b-443c,\quad Z=27b-15c$$

olarak alırsak; $\left(\frac{Y}{X},\frac{Z}{X}\right)=(-1,0)$ başlangıç çözümüyle kiriş yöntemini uyguladığımızda, $Y=p^2+890q^2$, $Z=2pq$ bulunur. Burada b ve c için çözüm arandığından;

$[a:b:c]=\left[28p^2-1680pq+24920q^2:15p^2-886pq+13350q^2:27p^2-1606pq+24030q^2\right]$ sonucuna ulaşılır.Bu durumda hacim

$$V=\frac{784}{3}\left|p^2-890q^2\right|\left(p^2-60pq+890q^2\right)^2$$

olarak elde edilir Üçüncü sonsuz aile, Buchholz (1992) un verdiği üçüncü örnek olan (a,b,c) = (36, 19, 35) kullanılarak bulunabilir. Burada $\frac{a}{c-b}=\frac{36}{35-19}=\frac{9}{4}$ olduğundan, $a=\frac{9}{4}(c-b)$ yazarsak;

$$\left(\frac{256V}{3(c-b)^2}\right)^2=(3408b-1848c)^2-9490(35b-19c)^2$$

homojen dördüncü dereceden ifadeyi elde ederiz. Burada

$$X=\frac{256V}{3(c-b)^2},\quad Y=(3408b-1848c),\ Z=(35b-19c)$$

olarak alalım. Sonra $\left(\frac{Y}{X},\frac{Z}{X}\right)=(-1,0)$ başlangıç çözümüyle kiriş yöntemini uyguladığımızda $\mathrm{Y}=\mathrm{p}^2+9490\mathrm{q}^2$, $\mathrm{Z}=2\mathrm{pq}$ bulunur. b ve c için çözüm arandığında elde edilen sonuç;

$[a:b:c]=\left[36p^2-7020pq+341640q^2:19p^2-3696pq+180310q^2:35p^2-6816pq+332150q^2\right]$ olarak bulunur. Bu durumda hacim,

$$V=216\left|p^2-9490q^2\right|\left(p^2-195pq+9490q^2\right)^2$$

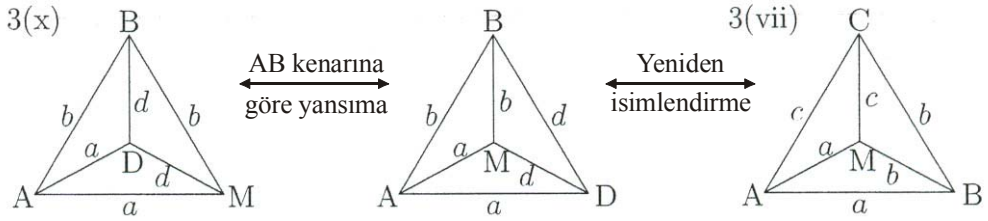
olur. Eğer,

$$X^2=(x_1b-x_2c)^2-x_3(c_0b-b_0c)^2$$

denkleminde geçen x_1, x_2, x_3 katsayıları bulunabilirse, aşağıda denklemi verilen sonsuz aileyi elde etmek için, yukarıda kullanılan süreç verilen herhangi bir (a_0, b_0, c_0) çözümüne uygulanabilir.

$$[a:b:c]=\Big[a_0(b_0-c_0)p^2+2a_0(x_1-x_2)pq+a_0(b_0-c_0)x_3q^2:$$
$$b_0(b_0-c_0)p^2-2(b_0-c_0)x_2pq+b_0(b_0-c_o)x_3q^2:$$
$$c_0(b_0-c_0)p^2-2(b_0-c_0)x_1pq+c_0(b_0-c_o)x_3q^2\Big]$$

3.3.10. 3 *(x)* Durumu



Şekil 3.3. 3*(x)* Durumu, 3*(vii)* Durumuyla Aynı

Şekil 3.3 deki 3*(x)* durumunun, aslında 3*(vii)* durumunun, aşağıda verilen kenarlar arası eşleşmeyi sağlayan, aynadaki görüntüsü olduğunu gösterir. Buna göre;

$$a_{3(vii)} \Leftrightarrow a_{3(x)}, \quad b_{3(vii)} \Leftrightarrow d_{3(x)}, \quad c_{3(vii)} \Leftrightarrow b_{3(x)}$$

olarak bulunur. Her iki gösterim de aynı hacme, aynı yüzey alanlarına, aynı kenar uzunluklarına sahiptir ve böylece 3 *(x)* yeni bir parametrik durum değildir.

3.4. 4, 5 ve 6 Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler

Buchholz (1992), değişkenlerin sayısını azaltmak ve böylece üzerinde çalışılabilir denklemler elde etmek umuduyla, araştırmasını 1, 2 ve 3 parametreli dörtyüzlülerle sınırlandırmıştır. Araştırmayı tamamlamak amacıyla, aşağıda 4, 5 ve 6 parametreli dörtyüzlü gösterimleri de ayrıca incelenecektir.

4 – Dört Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler

(i) $a = b = c, d, e, f,$

(ii) $a = b = d, c, e, f,$

(iii) $a = b = f, c, d, e,$

(iv) a = d, b = e, c, f,

(v) a = d, b = f, c, e,

(vi) a = b, d = f, c, e

(vii) a = b, d = e, c, f

5 – Beş Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler

(i) *a = d, b, c, e, f,*

(ii) a = b, c, d, e, f

6 – Altı Parametreye Bağlı Dörtyüzlüler

(i) a, b, c, d, e, f

Bu durumların hepsi için rasyonel hacimli dörtyüzlü bulabilir. Tablo 3.6 da her gösterim için bir örnek listelenmiştir. (Chisholm, 2004)

Tablo 3.6. Rasyonel Hacimli 4, 5 ve 6 Parametreye Bağlı Dörtyüzlülere Örnekler

Durum	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	***V***
4(i)	8	8	8	11	13	15	96
4(ii)	8	8	13	8	15	14	21
4(iii)	13	13	6	8	10	13	96
4(iv)	5	7	6	5	7	8	24
4(v)	9	15	8	9	11	15	84
4(vi)	10	10	13	16	15	16	231
5(i)	8	5	7	8	14	12	15
5(ii)	4	4	2	5	6	7	6
6(i)	6	5	2	7	8	4	6

4 *(i)* gösterimli bir dörtyüzlü Heron olamaz. Çünkü, yüzeylerinden biri eşkenar üçgendir. 4(iv), 4*(vii)*, 5*(ii)* ve 6*(i)* gösterimli Heron dörtyüzlüler daha önceden bilinmektedir. Tablo 3.7 de her birine bir örnek verilmiştir. (Chisholm, 2004)

Tablo 3.7. 4, 5 ve 6 Parametreye Bağlı Heron Dörtyüzlüsüne Örnekler

Durum	*a, b, c, d, e, f*	$A_{a,b,c}$	$A_{a,e,f}$	$A_{b,d,f}$	$A_{c,d,e}$	*V*
4(iv)	990, 901, 793, 308, 901, 793	338184	338184	120120	120120	27320832
4(vii)	680, 615, 185, 185, 208, 680	55500	69888	55500	15912	3144960
5(ii)	319, 221, 210, 175, 175, 318	23100	26796	18564	14700	1034880
6(i)	117, 80, 53, 52, 51, 84	1800	1890	2016	1170	18144

Ayrıca Güntsche (1907), 6 kenar uzunluğunu 1 parametreye bağlı olarak ifade etmiş ve Heron dörtyüzlülerinin

$$a = 4p(p+1)(p-1)\left(p^2+1\right)\left(p^2+2p-1\right)\left(p^3+p^2+p-1\right)$$
$$\left(p^3+p^2-p+1\right)\left(p^4+2p^3-2p+1\right)$$
$$b = (p+1)(p-1)\left(p^3+p^2+p-1\right)\left(p^3+p^2-p+1\right)$$
$$\left(p^5+p^4+4p^2-3p+1\right)\left(p^5+3p^4+4p^3+p-1\right)$$
$$c = (p+1)^2(p-1)^2\left(p^3+p^2+p-1\right)\left(p^3+p^2-p+1\right)$$
$$\left(p^4+4p^2-4p+1\right)\left(p^4+4p^3+4p^2+1\right)$$
$$d = 2p\left(p^4+2p^3-2p+1\right)$$
$$\left(p^{12}+4p^{11}+6p^{10}+4p^9+3p^8+16p^7+12p^6-16p^5+3p^4-4p^3+6p^2-4p+1\right)$$
$$e = \left(p^2+1\right)\left(p^2+2p-1\right)^2\left(p^4+1\right)$$
$$\left(p^8+2p^7+2p^6+6p^5+2p^4-6p^3+2p^2-2p+1\right)$$
$$f = \left(p^2+1\right)\left(p^2+2p-1\right)\left(p^4-4p^2+1\right)$$
$$\left(p^4+2p^3+2p^2-2p+1\right)\left(p^6+2p^5+3p^4-3p^2+2p-1\right)$$

ve

$$a = (p+1)(p-1)\left(p^4+2p^3+2p+1\right)\left(p^4-2p^3-2p+1\right),$$
$$b = (p+1)(p-1)\left(p^4+2p^3+4p^2+2p+1\right)\left(p^4-2p^3+4p^2-2p+1\right),$$
$$c = 4p(p+1)(p-1)\left(p^2+1\right)\left(p^4+1\right),$$
$$d = 2p\left(p^8+4p^6-6p^4+4p^2+1\right),$$
$$e = 2p\left(p^4+2p^2-1\right)\left(p^4-2p^2-1\right),$$
$$f = \left(p^2+1\right)\left(p^4+2p^3-2p+1\right)\left(p^4-2p^3+2p+1\right)$$

biçiminde iki sonsuz ailesini vermiştir.

Bu ikinci aile, iki tane dik yüzeye sahiptir. Bunlar; (*a, b, c*) ve (*a, e, f*) dir. Hacmi veren formül ise $V = \frac{1}{3} a A_{c,d,e}$ biçimindedir.

Geri kalan gösterimler için, eğer 4 *(ii)*, 4 *(v)* veya 5 *(i)* gösterimleri Heron dörtyüzlü sayısını artırıyorsa, bu dörtyüzlüler Teorem 2.4 ün 2A şartını ve Teorem 2.5 in 3A, 3D veya 3E şartlarından birini sağlayacaktır. 4 *(iii)* gösterimli bir Heron dörtyüzlü, 2B şartı ile 3B, 3D veya 3E şartlarından birini sağlamak zorundadır. 4 *(vi)* gösterimli bir Heron dörtyüzlü de 2C şartı ile 3C, 3D veya 3E den birini sağlamak zorundadır.

3.5. Mükemmel Piramit

Buchholz (1992), kenar uzunlukları, yüzey alanları ve hacmi tamsayı olan dörtyüzlüyü, "mükemmel piramit" olarak tanımlamıştır. Kısacası, "mükemmel piramit" aslında bir Heron dörtyüzlüdür.

Buchholz (1992), verdiği tanımın daha yüksek ve daha düşük boyutlara genişletilebileceğini belirtmiştir.

Örneğin, tek boyutta tam sayı uzunluğa sahip bir doğru parçası, bir mükemmel –1 piramittir. İki boyutta, kenar uzunlukları ve alanı tam sayı olan her üçgen, örneğin (3,4,5) üçgeni, bir mükemmel –2 piramittir. Kısacası her Heron üçgeni, bir mükemmel –2 piramittir.

3.6. Sonuç

Heron dörtyüzlünün, her bir yüzeyi üçgen olduğundan, şöyle bir sonuç çıkarılabilir. Dört tane Heron üçgeni, üçgen eşitsizliği dikkate alınarak bir araya getirildiğinde, bir Heron dörtyüzlü elde edilir. Bu bölümde yapmış olduğumuz araştırma da; bir bir dörtyüzlünün Heron dörtyüzlü olabilmesi için en az üç parametreli bir gösterime sahip olması gerektiği ortaya konulmuştur. Ayrıca dört, beş ve altı parametreli bir gösterime sahip Heron dörtyüzlülerinin varlığına ilişkin örnekler de sunulmuştur.

4. KAYNAKLAR

[1] Bozkurt, D. , 2001, Soyut Cebire Giriş, S. Ü. Vakfı Yayını, Konya.

[2] Buchholz, R. H. , 1992, Perfect Pyramids, Bull. Aust. Math. Soc., vol 45, no. 3.

[3] Buchholz, R. H. , MacDougall, J. A. , 1999, Heron Quadrilaterals With Sides in Arithmetic or Geometric Progression, Bull. , Australia, Math. Soc. 59, 263-269.

[4] Carmichael, R.D., 1952, The Theory of Numbers and Diophantine Analysis, Dover.

[5] Chisholm, C., 2004, Rational and Heron Tetrahedra, BSc (Arch), BMath (Hans) Thesis Submitted to The University of New Castle, NSW for the Degree of Master of Mathematics.

[6] Chisholm, C., MacDougall, J. A. , 2005, Rational Tetrahedra with Edges in Arithmetic Progression, Journal of Number Theory 111, 57 – 80.

[7] Çallıalp, F. , 1999, "Sayılar teorisi", Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi, İstanbul.

[8] Darıyeri, M., 2005, Heron Üçgenlerinin Bazı Özellikleri Üzerine Bir Araştırma, Yüksek Lisans Tezi, S. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

[9] Dickson, L. E., 1952, History of the Theory of Numbers, Vol. 2, Chelsea.

[10] Dove, K. L., Sumner J. S., 1992, Tetrahedra with Integer Edges and Integer Volume, Math. Mag. 65, 104-111.

[11] Gurbanlıyev, A., 2003, Heron Üçgenleri Üzerine, Doktora Tezi, S. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

[12] Guy, R. K., 1981, Unsolved Problems in Number Theory, Springer.

[13] Güntsche, R., (1907), Über Rationale Tetraeder, Archiv Math. Phys.(3)11, 112-114

[14] Kramer, A. V. , Luca, F., 2001, Some Remarks on Heron Triangles, Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae 27, p. 25 – 38.

[15] Rich, B., 1963, Schaum's Outline of Theory and Problems of Plane and Spherical Trigonometry, Schaum Publishing Co, New York.

[16] Sierpinski,W., 1962, Pythagorean Triangles, Graduate School of Science, New York.

[17] Silverman, J. H., Tate, J., 1992, Rational Points on Elliptic Curves, Springer –Verlag.

[18] Şenay, H. , 1989, Sayılar Teorisine Giriş, S. Ü. Fen-Edebiyat Fak., Konya.