T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİSLERİN HADAMARD ÇARPIMLARININ NORMLARI VE SPEKTRAL YARIÇAPLARI İÇİN SINIRLAR

Zeki BİLGİÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya-2007

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MATRİSLERİN HADAMARD ÇARPIMLARININ
NORMLARI VE SPEKTRAL YARIÇAPLARI
İÇİN SINIRLAR

ZEKİ BİLGİÇ

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. DURMUŞ BOZKURT

2007, 54 sayfa

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE
Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI

Bu çalışmada "Two Applications of a Bound on the Hadamard Product with a Cauchy Matrix [1]", "Some Bounds for the Spectral Radius of the Hadamard Product of Matrices [2]" ve "Eigenvalues of Hadamard Powers of Large Symmetric Pascal Matrices [3]" adlı makaleler dört bölüm olarak derlenmiştir.

Birinci bölümde çalışmada kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde bir Cauchy matrisi ile Hadamard çarpımın üzerindeki bir sınırın iki uygulaması incelenmiştir.

Üçüncü bölümde negatif olmayan iki matrisin Hadamard çarpımının spektral yarıçapı için bazı sınırlar incelenmiştir. Bazı sonuçlar M-matrislerini içermektedir.

Son bölümde *n.* mertebeden bir pozitif reel simetrik Pascal matrisinin Hadamard kuvvetinin öz değerleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hadamard çarpım, Spektral yarıçap, pozitif tanımlı matris, pozitif yarı tanımlı matris, singüler değerler.

ABSTRACT

Ms Thesis

NORMS OF HADAMARD PRODUCT OF MATRİCES
AND BOUNDS FOR SPECTRAL RADİUS

ZEKİ BİLGİÇ

SELÇUK UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLİED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATİICS

Supervisor: Prof. Dr. DURMUŞ BOZKURT

2007, 54 pages

Jury: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE
Yrd. Doç. Dr. Ayşe NALLI

This study consist of four sections and investigated three articles titled "Two Applications of a Bound on the Hadamard Product with a Cauchy Matrix [1]", "Some Bounds for the Spectral Radius of the Hadamard Product of Matrices [2]" ve "Eigenvalues of Hadamard Powers of Large Symmetric Pascal Matrices [3]".

In the first section, we gave basic definitions and theorems.

In the section two, it is investigated two applications of a bound on the Hadamard product with Cauchy matrix.

In the section three, it is investigated some bounds for the spectral radius of Hadamard product of nonnegative two matrices. Some results involves M-matrices.

In the last section, it is investigated eigenvalues of Hadamard powers of a positive real symmetric pascal matrix order n.

Keywords: Hadamard product, spectral radius, positive definite matrix, positive semidefinite matrix, singular values.

ÖNSÖZ

Bu çalışma bir derleme olup Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim üyesi Prof. Dr. Durmuş BOZKURT yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde genel tanımlar, vektör normları ve matris normları ile ilgili tanım ve bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde bir Cauchy matrisi içeren Hadamard çarpımlarının normları için sınırlar elde edilmiştir. Üçüncü bölümde iki negatif olmayan matrisin Hadamard çarpımının spektral yarıçapı için bazı sınırlar verilmiştir. Dördüncü bölümde S_n, (i, j) bileşenli elemanı $\binom{i+j-2}{j-1}$ olan n. mertebeden pozitif reel simetrik pascal matrisi ve x, pozitif reel sayı olmak üzere S_n matrisinin $S_n^{(x)}$ Hadamard kuvvetinin öz değerleri göz önüne alınmaktadır. Özellikle de k pozitif tamsayısı için $S_n^{(k)}$'nın perron kökünün ve izinin yaklaşık olarak $\frac{4^k}{4^k-1}\binom{2n-2}{n-1}^k$'ya eşit olduğu gösterilmiştir.

Tez çalışmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değeli hocam Prof. Dr. Durmuş BOZKURT'a teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Zeki BİLGİÇ
Konya 2007

SEMBOLLER

$\lambda(A)$: A matrisinin öz değeri

$\tau(A)$: A matrisinin en küçük öz değeri

$s(A)$: A matrisinin spektrumu (A matrisinin öz değerlerinin kümesi)

$\rho(A)$: A matrisinin spektral yarıçapı veya perron kökü(A matrisinin en büyük öz değeri)

$\sigma(A)$: A matrisinin singüler değerleri(AA^* matrisinin öz değerlerinin karekökleri)

$iz(A)$: A matrisinin izi

$\|A\|_1$: A matrisinin sütun normu

$\|A\|_\infty$: A matrisinin satır normu

$\|A\|_e$: A matrisinin Euclidean(veya Frobenius veya Schur) normu

$\|A\|_2$: A matrisinin spektral norm(veya 2. norm)

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ……1

1.1 Genel Tanımlar……..1

1.2. Vektör Normları……...……8

1.3 Matris Normları…….. ….....12

2. BİR CAUCHY MATRİSİ İÇEREN HADAMARD ÇARPIMI ÜZERİNE BİR SINIRIN İKİ UYGULAMASI……..……...……..…….....23

2.1. $AX - BX = S$ in Çözümleri İçin Bir Sınır……...……23

2.2. Üniter Çarpan İçin Bir Genel Permütasyon Sınırı…….. …….24

2.3. Pozitif Yarı Tanımlı Çarpanın Permütasyonu……. ……31

3. MATRİSLERİN HADAMARD ÇARPIMLARININ SPEKTRAL YARIÇAPI İÇİN BAZI SONUÇLAR…….……...…….……...32

3.1. Bazı Sınırlar ve Köşegen Dominantlık……... …...…..32

3.2. B^{-1}, M- Matrisi Olduğu Zaman Keskin Bir Üst Sınır…….……...36

4. MERTEBESİ BÜYÜK SİMETRİK PASCAL MATRİSLRİNİN HADAMARD KUVVETLERİNİN ÖZ DEĞERLERİ……..…..…… …43

4.1. Perron Kökü İçin Bir Alt Sınır…….....……43

4.2. İz ve Pozitif Tamsayı Hadamard Kuvvetler……. ...…47

4.3. Konjektürler ve Bir İlgili Matris……..…...50

KAYNAKLAR……..... ……..…52

1. GİRİŞ

1.1. Genel Tanımlar

Bu çalışmada amacımız singüler olmayan kompleks bir matrisin kutupsal ayrışımında üniter çarpan için bir genel pertürbasyon sınır bulmaktır. Elde etmek istediğimiz esas sonuç Cauchy tipi Hadamard çarpan operatörü üzerindeki bir sınırdan bulunur. Belirli Slyvester denklemleri için çözüm operatör normları üzerine bir sınır araştırıldığında benzer bir durumla karşılaşılır.

Tanım 1.1.1.(Singüler Değer)

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ ve A^*, A'nın eşlenik transpozesi olmak üzere AA^* veya A^*A matrisinin öz değerlerinin kareköklerine A'nın singüler değerleri denir ve

$$\sigma(A)=\left\{\sqrt{\lambda_i}:\lambda_i, AA^*\text{'nın öz değerleri}\right\} \tag{1.1}$$

olarak gösterilir.

Örnek 1.1.1.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

matrisinin singüler değerlerini bulalım:

$$AA^*=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

olup, buradan

$$\left|\lambda I-AA^*\right|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -3\\ -3 & \lambda-5\end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2-10\lambda+16=0$$

$\lambda_1=8$ ve $\lambda_2=2$ elde edilir ki

$\sigma(A)=\left\{2\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$, A matrisinin singüler değerleridir.

Örnek 1.1.2.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 1+i \end{pmatrix}$$

matrisinin singüler değerlerini bulalım:

$$A^*A=\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -i & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2i & 1+i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2-i \\ 2+i & 3 \end{pmatrix}$$

olup, buradan

$$\left|\lambda I - A^*A\right|=\begin{vmatrix} \lambda-5 & -2+i \\ -2-i & \lambda-3 \end{vmatrix}=0$$

$$\lambda^2-8\lambda+10=0$$

$\lambda_1=\frac{8}{2}+\sqrt{\frac{24}{4}}\cong 6.44$ ve $\lambda_2=\frac{8}{2}-\sqrt{\frac{24}{4}}\cong 1.55$ elde edilir ki singüler değer tanımı gereğince A matrisinin singüler değerleri $\sigma_1\cong 2,53$ ve $\sigma_2\cong 1,24$ bulunur.

$M_{m,n}(\mathbb{C})$; $m\times n$ tipindeki kompleks matrislerin kümesini ve $M_n(\mathbb{C})\equiv M_{n,n}(\mathbb{C})$ de $n\times n$ tipindeki kompleks matrislerin kümesini göstersin. Herhangi $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ matrisinin sıralı singüler değerlerini $\sigma_{\max}(A)\equiv\sigma_1(A)\geq\ldots\geq\sigma_{\min\{m,n\}}(A)\equiv\sigma_{\min}(A)\geq 0$ şeklinde gösterelim. $A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ matrisleri için; eğer $A=VBW$ olacak şekilde, $V\in M_m(\mathbb{C})$ ve $W\in M_n(\mathbb{C})$ üniter matrisleri varsa A ve B matrislerine üniter olarak denktir denir. $M_{m,n}(\mathbb{C})$ üzerindeki herhangi $\|\cdot\|$ normu; her $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $V\in M_m(\mathbb{C})$ ve $W\in M_n(\mathbb{C})$ üniter matrisleri için $\|VAW\|=\|A\|$ şartını sağlarsa adı geçen $\|\cdot\|$ normu üniter olarak değişmezdir. Denk olarak, bu şekildeki bir norm, simetriktir. Buradan anlaşılmaktadır ki, her zaman $\|XAY\|\leq\sigma_1(X)\|A\|\sigma_1(Y)$ sınırı sağlanır [16].

Örnek 1.1.3.

$V=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $W=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ ve $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ matrisleri

$VV^*=I$, $WW^*=I$ ve $AA^*=I$ olduğu için birer üniter matristir.

$$VAW=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

olup, $\|VAW\|_e$ ve $\|A\|_e$ normları hesaplandığında $\|VAW\|_e=\|A\|_e$ olduğundan $\|\ \|_e$ normu üniter olarak değişmezdir.

Benzer şekilde, $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ ve $Y=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ matrisleri için

$\|XAY\|_e=\sqrt{308}$, $\|A\|_e=\sqrt{10}$, $\sigma_1(X)=2\sqrt{2}$, $\sigma_1(Y)=3\sqrt{2}$ değerleri için

$\sqrt{308}=\|XAY\|_e\le\sigma_1(X)\|A\|_e\,\sigma_1(Y)=12\sqrt{10}$ sınırı sağlanır.

Tanım 1.1.2.(Hadamard Çarpım)

$A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ ve $B=(b_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ matrislerinin Hadamard çarpımı $A\circ B=(a_{ij}b_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ şeklinde verilir.

Tanım 1.1.3.(Cauchy Matrisi)

$\alpha_i,\beta_j\in\mathbb{R}$ ve $\alpha_i+\beta_j\neq 0$ olmak üzere $\left[\frac{1}{\alpha_i+\beta_j}\right]$ şeklinde tanımlanan matrise Cauchy matrisi denir

Teorem 1.1.1.

$\{\alpha_i\}_{i=1}^m,\{\beta_i\}_{i=1}^n$, reel kısımları pozitif olan kompleks sayılar dizisi ve $\|\cdot\|$, $M_{m,n}(\mathbb{C})$ üzerinde verilen norm olsun. Eğer, $m\neq n$ ise $\|\cdot\|$ normunun üniter olarak değişmez olduğunu farz edelim. Eğer, $m=n$ ise $\|\cdot\|$ normunun ya üniter olarak değişmez olduğunu

ya da $\mathbb{C}^n$ üzerindeki bir mutlak norm tarafından indüklenmiş norm olduğunu farz edelim. Bu takdirde; $X \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ olmak üzere

$$\left\| \left[\frac{1}{\alpha_i + \beta_j} \right] \circ X \right\| \leq \frac{1}{\min \operatorname{Re} \alpha_i + \min \operatorname{Re} \beta_j} \|X\| \tag{1.2}$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

İspat.

$D(t) = diag(e^{-\alpha_1 t}, ..., e^{-\alpha_m t})$ ve $E(t) = diag(e^{-\beta_1 t}, ..., e^{-\beta_n t})$ olsun. Böylece;

$$\begin{aligned}
\left\| \left[\frac{1}{\alpha_i + \beta_j} \right] \circ X \right\| &= \left\| \left[\frac{x_{ij}}{\alpha_i + \beta_j} \right] \right\| = \left\| \left[\int_0^\infty e^{-\alpha_i t} \, x_{ij} \, e^{-\beta_j t} dt \right] \right\| \\
&= \left\| \int_0^\infty D(t) \, X \, E(t) \, dt \right\| \leq \int_0^\infty \|D(t) \, X \, E(t)\| \, dt \\
&\leq \int_0^\infty \sigma_1(D(t)) \, \|X\| \sigma_1(E(t)) \, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\min \operatorname{Re} \alpha_i t} \, \|X\| e^{-\min \operatorname{Re} \beta_j t} \, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(\min \operatorname{Re} \alpha_i + \min \operatorname{Re} \beta_j) t} \, \|X\| \, dt \\
&= \frac{1}{\min \operatorname{Re} \alpha_i + \min \operatorname{Re} \beta_j} \|X\|
\end{aligned} \tag{1.3}$$

elde edilir ki, bu da istenendir.

Örnek 1.1.4.

$\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = 1$ olmak üzere $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ matrisi Cauchy matrisi ve

$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ matrisi için $C \circ X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\|C \circ X\|_e = \frac{\sqrt{233}}{12}$ ve $\|X\|_e = \sqrt{10}$ olup

$$\frac{\sqrt{233}}{12} = \left\| \left[\frac{1}{\alpha_i + \beta_j} \right] \circ X \right\|_e \leq \frac{1}{\min \operatorname{Re} \alpha_i + \min \operatorname{Re} \beta_j} \|X\|_e = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

eşitsizliği sağlanmaktadır.

Üniter olarak değişmez olan normlar simetrik olduğundan (1.3) eşitsizliği bu normlar için ele alınır. Eğer $m = n$ ve norm; $\mathbb{C}^n$ üzerinde bir mutlak norm tarafından indüklenmiş ise bu takdirde yine (1.3) eşitsizliği ele alınır. Çünkü; bu şekildeki bütün normlar alt çarpanlanabilirdir ve köşegen matrisler üzerinde $\|diag(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)\| = \|\max \gamma_i\|$ eşitliğini sağlar [15].

Tanım 1.1.4.(Spektral Yarıçap**)**

$A \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere A'nın mutlak değerce en büyük öz değerine A'nın spektral yarıçapı denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir. Eğer $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ matrisleri negatif olmayan matrisler ise bu takdirde $\rho(A)$, A'nın spektral yarıçapını göstermek üzere

$$\rho(A \circ B) \leq \rho(A)\rho(B) \tag{1.4}$$

eşitsizliği vardır. Bu durumda $\rho(A)$, A nın Perron köküne eşittir. Bu eşitsizlik olağanüstü bir eşitsizliktir ve bazı simetrileri üzerinde barındırır. Örneğin; eğer A ve B matrislerinin genel matris çarpımları komütatif ise eşitsizlik değişmeden kalır.

$B \in M_n(\mathbb{R})$ negatif olmayan matrisinin Perron kökünün monotonluğundan dolayı

$$\max_{i=1,...,n} b_{ii} \leq \rho(B) \tag{1.5}$$

eşitsizliği geçerlidir [15]. B negatif olmayan köşegen matris olduğu zaman alt sınır açık bir şekilde elde edilir. Burada $A, B \geq 0$ olduğunda $\rho(A \circ B)$ için

$$\rho(A \circ B) \leq \rho(A) \max_{i=1,...,n} b_{ii} \tag{1.6}$$

şeklinde daha iyi bir sınıra sahip olmak mümkün olur mu sorusu akla gelir.

(1.6) deki eşitsizlik doğru ise bu eşitsizlik daha iyi ve hesaplanabilir basit bir üst sınır olacaktır.

Örnek 1.1.5.

$A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}10 & 8\\ 8 & 10\end{pmatrix}$, $A\circ B=\begin{pmatrix}50 & 24\\ 24 & 50\end{pmatrix}$ matrisleri için

$\rho(A)=8$, $\rho(B)=18$ ve $\rho(A\circ B)=74$ matrislerin spektral yarıçapı olmak üzere

A ve B matrisleri için (1.4), (1.5) ve (1.6) eşitsizlikleri sağlanır. Bununla birlikte aşağıdaki örnekte görüleceği gibi,

$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $A\circ B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

olup, $\rho(A)=1, \rho(B)=3, \rho(A\circ B)=2$ ve $\max_{i=1,2} b_{ii}=1$ den böylece (1.6) eşitsizliği sağlanmaz. Bu örnek, direkt toplama I_{n-2} eklenerek $(n\geq 3)$ olmak üzere $n\times n$ matrislere genişletilebilir.

Tanım 1.1.5.(Pascal Matrisi**)**

$i,j=1,2,...,n$ için $s_{ij}=\binom{i+j-2}{j-1}$**,** olmak üzere $S_n=(s_{ij})$ şeklinde tanımlanan reel simetrik matrise Pascal matrisi denir.

U_n involutory matris($U_n=U_n^{-1}$ şeklindeki matrisler) olmak üzere, S_n ; $S_n=U_n{}^T U_n$ şeklinde bir ayrışıma sahip olduğundan, S_n'in öz değerlerinin bir takım ilginç özelliklere sahip olduğunu göstermek kolaydır. Örneğin; S_n, n farklı öz değere sahiptir ve $\{\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},...,\frac{1}{\lambda_n}\}=\{\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\}$ dir. Pozitif S_n matrisinin en büyük öz değeri (yani Perron kökü), araştırıldı. S_n'in Perron kökünün, n artarken oldukça hızlı bir şekilde arttığı görülmüştür. Bu hızlı artış ile bu öz değerler için tanımlanabilir bir formül bulmak mümkün değildir. Bu durumu açığa kavuşturan daha fazla veri elde etmek için S_n matrisi $\binom{2n-2}{n-1}^{-1}$

ile çarpılırsa, yani $R_n = \begin{pmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{pmatrix}^{-1} S_n$ düzenli simetrik pascal matrisinin $\rho(R_n)$ Perron kökünü göz önüne alalım. R_n'in hem $\rho(R_n)$ perron kökü ve hem de $iz(R_n)$ izi yakınsaktır. Tablo 1'deki verilerden

$$\lim_{n\to\infty} \rho(R_n) = \lim_{n\to\infty} iz(R_n) = \frac{4}{3}$$

olduğu görülmektedir. $iz(R_n)$ için bu ifadeyi ispatlamak zor değildir. Ancak $\rho(R_n)$ için bir ispatın yapılması daha zordur. Maalesef MATLAB da hesaplamalar, $D^{-1}R_nD$ matrisinin satır toplamları için kullanışlı bir alt sınır veren bir köşegen D matrisi verdi. Böylece $\lim_{n\to\infty} \rho(R_n) = \lim_{n\to\infty} iz(R_n) = \frac{4}{3}$ olduğunu görmüş oluruz. Bu n nin büyük değerleri için S_n matrisinin bir öz değerinin diğer $n-1$ tane öz değerinin toplamından daha büyük olduğunu veya bir başka değişle S_n'in bir dominant öz değere sahip olduğunu gösterir.

Tablo 1. R_n'in Perron kökü ve izi

n	$\rho(R_n)$	$iz(R_n)$
20	1.3296	1.3457
40	1.3315	1.3392
60	1.3321	1.3372
80	1.3324	1.3362
100	1.3326	1.3356
120	1.3327	1.3352
140	1.3328	1.3349

Bu sonuçlar Hadamard kuvvetlere de doğal olarak genişletilebilir

Örnek 1.1.6.

$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ pascal matrisi için $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ve $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$R_2 = \frac{1}{2} S_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ olup $iz(R_2) = \frac{3}{2}$ olarak bulunur.

$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ pascal matrisi için $\lambda_1 = 4-\sqrt{15}$, $\lambda_2 = 1$ ve $\lambda_3 = 4+\sqrt{15}$

$R_3 = \frac{1}{6} S_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ olup $iz(R_3) = \frac{3}{2}$ olarak bulunur.

Tanım 1.1.6.(Hadamard Kuvvet)

x bir reel sayı ve $A = (a_{ij})$, $n.$ mertebeden negatif olmayan bir matris olsun. A'nın her bir elemanlarının $x.$ kuvvetinin alınması ile elde edilen $A^{(x)} = (a_{ij}{}^{x})$, $n.$ mertebeli matrisi A'nın Hadamard kuvveti denir.

1.2. Vektör Normları

Tanım 1.2.1.(İç Çarpım)

V, F (reel veya kompleks sayılar) cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun.

$$(.,.) : VxV \to F \tag{1.7}$$

dönüşümü

i) $\forall x \in V$ için $(x,x) \geq 0$ ve $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

ii) $\forall x, y \in V$ için $(x,y) = \overline{(y,x)},$

iii) $\forall x, y \in V$ ve $\alpha \in F$ için $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$,

iv) $\forall x, y, z \in V$ için $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)$

aksiyomlarını sağlıyorsa, bu dönüşüme V üzerinde bir iç çarpım denir ve $x, y \in V$ için (x, y) şeklinde gösterilir. Üzerinde iç çarpım tanımlı vektör uzayına *iç çarpım uzayı* denir. Eğer V vektör uzayı reel sayılar cismi üzerinde tanımlı ise bu uzaya *Euclidean Uzay*, kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı ise *üniter uzay* denir.

Tanım 1.2.2.(Vektör Normu)

V, F (reel veya kompleks sayılar) cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. Eğer,

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+ \tag{1.8}$$

dönüşümü;

i) $\forall x \in V$ için $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (pozitif özelliği),

ii) $\forall x \in V$ ve $\alpha \in F$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homojenlik özelliği)

iii) $\forall x, y \in V$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

aksiyomlarını sağlıyorsa, $x \in V$ olmak üzere negatif olmayan $\|x\|$ sayısına x vektörünün normu denir. Diğer bir ifade ile x sayısının pozitif bir sayıya dönüştürülmesi işlemine norm denir.

İç çarpım ile vektör normu arasında sıkı bir ilişki vardır. Genel anlamda $x, y \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere bu iki vektörün iç çarpımı

$$(x, y) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \ldots + x_n\overline{y}_n$$

dir. Burada $x = y$ alınırsa

$$(x, x) = x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + \ldots + x_n\overline{x}_n = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \|x\|^2$$

elde edilir.

Teorem 1.2.1.

V bir iç çarpım uzayı olmak üzere,

$f : x \to \|x\| = (x, x)^{1/2}$

dönüşümü V üzerinde bir norm tanımlar.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in V$ olmak üzere bazı vektör normları;

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, toplam normu,

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$, Euclidean (Frobenius) normu,

$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$, maksimum norm

şeklinde verilir.

Bu normlardan ilk ikisi $p-$(veya Hölder) normu olarak bilinen ve

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty$$

ile tanımlı normun özel durumlarıdır. Üçüncüsü ise, $p = \infty$ durumuna karşılık gelir.

Herhangi bir $x \in V$ vektörünün toplam, maksimum ve Frobenius normları arasında

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_2 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_2,$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \|x\|_1,$$
$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n} \|x\|_1,$$
$$\frac{1}{n} \|x\|_1 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_1,$$
$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n \|x\|_\infty,$$
$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n} \|x\|_\infty,$$

bağıntıları mevcuttur [5].

Örnek 1.2.1.

$x=(3,4,12)$ vektörü için

$\|x\|_1 = 3+4+12 = 19$

$\|x\|_e = \sqrt{3^2+4^2+12^2} = 13$

$\|x\|_{\infty 1} = 12$

$\|x\|_p = \sqrt[p]{3^p+4^p+12^p}$

olup x vektörü için yukarıdaki normlar arası bağıntılar sağlanmaktadır.

Tanım 1.2.3.(Hölder Eşitsizliği**)**

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$|(x,y)| \le \|x\|_p \|y\|_q \tag{1.9}$$

ile tanımlanan eşitsizliğe *Hölder Eşitsizliği* denir. Bu eşitsizlik $p=q=2$ için *Cauchy Schwarz* eşitsizliği olarak bilinir.

Teorem 1.2.2.

V bir iç çarpım uzayı ve $x, y \in V$ olsun. Bu durumda,

i) $|(x,y)| \le \|x\|_2 \|y\|_2$, Cauchy Schwarz Eşitsizliği

ii) $\|(x,y)\|_2 \le \|x\|_2 \|y\|_2$, Üçgen Eşitsizliği

eşitsizlikleri geçerlidir [5] .

İspat.

i) $x, y \in V$ vektörleri için iç çarpım ve Euclidean normu tanımlarından,

$$\begin{aligned} 0 \le \|x+\alpha y\|_2^2 &= (x,x)+(x,\alpha y)+(\alpha y,x)+(\alpha y,\alpha y) \\ &= \|x\|_2^2 + \bar{\alpha}(x,y) + \overline{\bar{\alpha}(x,y)} + \bar{\alpha}\alpha + \|y\|_2^2 \end{aligned}$$

yazılır. Eğer x veya y sıfır vektörü ise iddia açık olarak doğrudur. $(x, y) \neq 0$ ise bu eşitsizlikte $\alpha = -\dfrac{\|x\|_2^2}{(x, y)}$ seçersek,

$$0 \leq -\|x\|_2^2 + \frac{\|x\|_2^4 \cdot \|y\|_2^2}{|(x, y)|^2}$$

olup

$$\|x\|_2^2 |(x, y)|^2 \leq \|x\|_2^4 \cdot \|y\|_2^2$$

veya

$$|(x, y)| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$$

elde edilir.

ii) $x, y \in V$ vektörleri için,

$$\begin{aligned} \|x + y\|_2^2 &= \|x\|_2^2 + (x, y) + (y, x) + \|y\|_2^2 \\ &= \|x\|_2^2 + 2\,\mathrm{Re}(x, y) + \|y\|_2^2 \\ &\leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2 \\ &\leq \left(\|x\|_2 + \|y\|_2\right)^2 \end{aligned}$$

bu eşitliğin her iki yanının karekökü alınırsa ispat tamamlanır.

1.3. Matris Normları

Tanım 1.3.1.(Matris Normu)

$M_n(F)$ elemanları, F cisminden alınan $n \times n$ matrislerin kümesi ve $A, B \in M_n(F)$, $\alpha \in F$ olmak üzere,

N1) $\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

N2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$, $(\alpha \in F)$

N3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

N4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

aksiyomlarını sağlayan

$$\|\cdot\| : M_n(F) \to \mathbb{R}^+ \tag{1.10}$$

dönüşümüne *matris normu* denir. Bir A matrisinin normu genel anlamda $\|A\|$ ile gösterilir ve $\|A\|$ daima pozitif bir sayıdır.

Eğer bu aksiyomlardan N1, N2 ve N3 sağlanıyorsa bu norma *genelleştirilmiş matris normu* denir. O halde her matris normu, genelleştirilmiş matris normudur diyebiliriz. Aynı zamanda matris normları, vektör normlarının genelleştirilmişleridir.

Şimdi yukarıdaki norm aksiyomlarını sağlayan bazı matris normlarını şu şekilde verebiliriz.

$A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ olmak üzere;

$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$, sütun normu,

$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, satır normu,

$$\|A\|_e = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)}$$
$$= \sqrt{iz\left(A^*A\right)} = \sqrt{iz\left(AA^*\right)} \quad \text{, Euclidean(veya Frobenius veya Schur) normu,}$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2(A)} \qquad r : rank$$

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} = \sigma_{\max}(A)$, spektral norm(veya 2. norm)

Burada $\lambda_{\max}(A^*A)$, A^*A (veya AA^*) nın maksimum öz değeri ve $\sigma_{\max}(A)$ da A matrisinin maksimum singüler değeridir.

Örnek 1.3.1.

$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ matrisi için

$AA^{*}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 12\\ 12 & 13\end{pmatrix}$ olup $\lambda_1(AA^{*})=25$ $\lambda_2(AA^{*})=1$, $\sigma_{\max}(A)=\sqrt{25}=5$

$\|A\|_1=2+3=5$

$\|A\|_\infty=3+2=5$

$\|A\|_e=\sqrt{3^2+2^2+3^2+2^2}=\sqrt{26}$

$\|A\|_2=\sqrt{\sigma_{\max}(A)}=\sqrt{25}=5$

elde edilir.

Şimdi de A matrisinin ℓ_p normu, ℓ_{pq} karma(veya Hölder) normu ile ℓ_{op} operatör normlarının tanımlarını verelim.

Tanım 1.3.2. (ℓ_p Normu)

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ matrisinin ℓ_p normu,

$$\|A\|_p=\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{1/p},\qquad (1\le p<\infty) \tag{1.11}$$

şeklinde tanımlanır. Şayet $p=\infty$ ise

$$\|A\|_\infty=\lim_{n\to\infty}\|A\|_p=\max_{i,j}|a_{ij}|, \tag{1.11.a}$$

dir.

Örneğin $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ matrisi ve $p=3$ için ℓ_3 normu

$\|A\|_3=\sqrt[3]{3^3+2^3+3^3+2^3}=\sqrt[3]{70}$

elde edilir.

Tanım 1.3.3. (ℓ_{pq} Normu)

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ matrisinin ℓ_{pq} karma normu,

$$\|A\|_{pq}=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|^{p}\right)^{q/p}\right)^{1/q}, \qquad (1\le p,q<\infty) \tag{1.12}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $p=q$ alınırsa ℓ_{pq} normu, ℓ_{p} normuna dönüşür.

Örneğin $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 12\end{pmatrix}$ matrisi $p=2$ ve $q=3$ için ℓ_{23} normu

$\|A\|_{23}=\sqrt[3]{(3^2+4^2)^{3/2}+(5^2+12^2)^{3/2}}=\sqrt[3]{2322}$ elde edilir.

Tanım 1.3.4. (ℓ_{op} Normu)

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ matrisi ve $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ vektörü için ℓ_{op} operatör normu, $(1\le p<\infty)$

olmak üzere;

$$\|A\|_{op}=\max\left\{\|Ax\|_{p}:\|x\|_{p}=1\right\} \tag{1.18}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.3.1.

Genelleştirilmiş bir matris normu daima matrisin elemanlarına bağlıdır. Yani $\varepsilon>0$ olmak üzere her i,j için $|a_{ij}-b_{ij}|<\delta$ iken

$$\big|\|A\|-\|B\|\big|<\varepsilon$$

olacak şekilde ε'a bağlı $\delta>0$ vardır [5].

İspat.

A ve B $n\times n$ matrisler olsun. E_{ij}, $e_{ij}=1$ ve diğer bütün elemanları sıfır olan $E_{ij}=e_i e_j^{T}$ şeklinde bir matris ise

$A-B=\sum_{i.j}(a_{ij}-b_{ij})E_{ij}$ olur. $m=\max_{i,j}\left\|E_{ij}\right\|$ alınırsa N1 aksiyomundan $m>0$ olacaktır.

N2 ve N3 aksiyomlarından

$\left\|A-B\right\|\le\sum_{i.j}\left|a_{ij}-b_{ij}\right|\cdot\left\|E_{ij}\right\|\le m\sum_{i.j}\left|a_{ij}-b_{ij}\right|$ elde edilir. Herhangi bir $\varepsilon>0$ için $\delta=\frac{\varepsilon}{mn^2}$

alalım. Eğer A ve B matrislerini $i,j=1,2,...,n$ için

$$\left|a_{ij}-b_{ij}\right|<\delta$$

olacak şekilde seçersek

$$\left\|A-B\right\|\le mn^2\delta=\varepsilon$$

elde ederiz. $\left|a_{ij}-b_{ij}\right|<\delta$ ve $\left\|A-B\right\|\ge\left\|A\right\|-\left\|B\right\|$ olduğundan

$$\left\|\left\|A\right\|-\left\|B\right\|\right\|<\varepsilon$$

olur ki bu da istenendir.

Örnek 1.3.2.

$A=\begin{pmatrix}1&4\\2&2\end{pmatrix}$ ve $B=\begin{pmatrix}-4&2\\4&0\end{pmatrix}$ matrisleri için $\left|a_{ij}-b_{ij}\right|<\delta$ olacağı için $\delta=5.1$ seçilirse

$\varepsilon=\delta mn^2=5.1\times1\times4=20.4$ ve $\left\|A-B\right\|_e=\sqrt{37}\le20.4$

Teorem 1.3.2.

$\rho(A)$, A matrisinin spektral yarıçapını göstermek üzere ve $\left\|A\right\|$ herhangi bir matris normu olmak üzere $\rho(A)\le\left\|A\right\|$ eşitsizliği vardır [5].

İspat.

x_i λ_i öz değerine karşılık gelen öz vektör olmak üzere her i için

$$\left\|x_i\lambda_i\right\|\le\left\|A\right\|$$

$$\left\|x_i\right\|\left|\lambda_i\right|\le\left\|A\right\|$$

$|\lambda_i| \le \|A\|$

$\max|\lambda_i| \le \|A\|$

$\rho(A) \le \|A\|$ olur.

Örnek 1.3.3.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ matrisi için $\lambda_1 = 8$ $\lambda_2 = 2$ $\rho(A) = 8$ $\|A\|_e = \sqrt{68}$ olup

$8 = \rho(A) \le \|A\|_e = \sqrt{68}$ eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.3.3.

Eğer bir A matrisinin öz değerleri $\lambda_i (i = 1, 2, ..., n)$ ve singüler değerleri $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge ... \ge \sigma_n$ ise bu takdirde

$$\sigma_n \le |\lambda_i| \le \sigma_1 \tag{1.19}$$

dir [5].

Örnek 1.3.3.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ matrisi için $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4 + \sqrt{15}$, $\lambda_2 = 4 - \sqrt{15}$,ve

$\sigma_1(A) = 4 - \sqrt{15}$, $\sigma_2(A) = 4 + \sqrt{15}$, $\sigma_3(A) = 1$ olup

$1 = \sigma_1 \le |\lambda_i| \le \sigma_3 = 4 + \sqrt{15}$ eşitsizliği sağlanır.

Tanım 1.3.5.(Matris Normu İle Vektör Normunun Uygunluğu**)**

Herhangi bir A matrisi ile x vektörü için,

$$\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\| \tag{1.20}$$

eşitsizliği mevcut ise bu durumda $\|A\|$ matris normu $\|x\|$ vektör normu ile uygundur denir.

Burada $Ax = \lambda x$ karakteristik denklemini dikkate alırsak,

$$\|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \le \|A\| \cdot \|x\|$$

eşitsizliğinden

$$|\lambda| \le \|A\|$$

elde edilir. Yani A matrisinin $\|A\|$ normu üst değerler için bir üst sınır teşkil eder. Diğer bir ifade ile A matrisinin öz değerleri, $\|A\|$ yarıçaplı bir çemberin içinde veya üzerinde bulunur. Esasen bu tanım matris normu aksiyomlarından N4'ün bir sonucudur. Şöyle ki, $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$ eşitsizliğinde B matrisini ilk sütunu x vektörü, diğer sütunları sıfır vektörü olarak alırsak $\|x\| = \|A\|$ olacağından

$$\|Ax\| = \|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\| = \|A\| \cdot \|x\|$$

elde edilir.

Örnek 1.3.4.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi ve $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektörü için

$\|A\|_e = \sqrt{10}$, $\|x\| = \sqrt{13}$ $Ax = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\|Ax\|_e = \sqrt{65}$, olup

$\sqrt{65} = \|Ax\|_e \le \|A\|_e \|x\| = \sqrt{130}$ eşitsizliği sağlandığından $\|x\|$ normu $\|A\|_e$ ile uygundur.

Tanım 1.3.6.(Sınır Normu)

Belirli bir vektör normu için, bu vektör normuna uygun matris normları arasında en küçük olanına matrisin *sınır normu* veya *en küçük üst sınırı* denir ve küs(A) ile gösterilir.

Bir A matrisinin $\|x\|$ vektör normuna ait sınır normu denilince $\|Ax\| \le c\|x\|$ eşitsizliğini sağlayan bir c sayısı anlaşılır ki, bu c sayısı bütün vektörler için $eküs(A) = \min_x c$

Olarak tanımlanır ve (1.20) eşitsizliğinden

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

yazılır. Eğer $x \neq 0$ olmak üzere $z = \frac{x}{\|x\|}$ ve

$$\|A\| = \sup_{\|z\|=1} \|Az\|$$

elde edilir.

Teorem 1.3.4.

Eğer $\|A\| = \sup_{\|z\|=1} \|Az\|$ olacak şekilde bir z vektörü varsa bu durumda $\|A\|$ bir matris normudur [5].

İspat.

Sırasıyla matris normu aksiyomlarını göstermemiz yeterli olacaktır.

N1) Eğer $A \neq 0$ ise $\|z\| = 1$ olmak üzere $Az \neq 0$ olacak şekilde bir z vektörü daima vardır. O halde $0 < \|Az\| \leq \|A\| \cdot \|z\|$'den $0 < \|A\|$ olur. Eğer $\|A\| = 0$ ise $\|z\| = 1$ olan her z için daima $\|Az\| = 0$ olur. Biz z vektörünü birim vektör alırsak Az matrisi, A matrisinin sütunlarına karşılık gelir. $\|A\| = 0$ olduğundan A matrisinin sütunları sıfırdır. Dolayısıyla A matrisi, sıfırdır.

N2) c bir skiler olmak üzere,

$$\|cA\| = \max_{\|z\|=1} \|cAz\| = |c| \max_{\|z\|=1} \|Az\| = |c| \|A\|$$

dır.

N3) z_0, $\|z_0\| = 1$ olmak üzere $\|(A+B)z_0\| = \|A+B\|$ olacak şekilde bir vektör olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}\|A+B\| &= \|(A+B)z_0\| \\ &\le \|Az_0\| + \|Bz_0\| \\ &\le \|A\|\|z_0\| + \|B\|\|z_0\| \\ &= \|A\| + \|B\|\end{aligned}$$

N4) z_0, $\|ABz_0\| = \|AB\|$ ve $\|z_0\| = 1$ olacak şekilde tanımlansın. Buradan,

$$\begin{aligned}\|AB\| &= \|ABz_0\| \\ &\le \|A\|\|Bz_0\| \\ &\le \|A\|\|B\|\|z_0\| \\ &= \|A\|\|B\|\end{aligned}$$

olur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 1.3.7.(Matris Normlarının Denkliği**)**

A $m\times n$ tipinde bir matris ve $p,q \in \{1,2,E,\infty\}$ olsun. $\|A\|_p$ ve $\|A\|_q$ herhangi iki norm, $c_1(p,q)$ ve $c_2(p,q)$ pozitif sabitler olmak üzere

$$c_1\|A\|_p \le \|A\|_q \le c_2\|A\|_p \tag{1.21}$$

eşitsizliği varsa bu iki matris normu denktir denir.

Bu tanımla birlikte matris normları arasındaki bağıntıları şu şekilde verebiliriz. Bir $A=(a_{ij})_{m\times n}$ matrisi için $rank(A)=r$ ve $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_e$, $\|\cdot\|_2$ sembolleri sırası ile A matrisinin sütun, satır, Frobenius(Euclidean) ve spektral normlarını göstermek üzere aşağıdaki normlar geçerlidir. Bizim burada çalışmamız için esas teşkil eden $\|\cdot\|_2$ (spektral normunu veren aralıkları vermemiz yeterli olacaktır.

1) $\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_1$

2) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\|A\|_\infty$

ve $rank(A)=r$ olmak üzere $r \le \min(m,n)$ olacağından,

3) $$\frac{1}{\sqrt{\min(m,n)}}\|A\|_e \le \frac{1}{\sqrt{r}}\|A\|_e \le \|A\|_2 \le \|A\|_e \qquad (1.22)$$

vardır. (1.22) eşitsizliği;

4) $$\frac{1}{\sqrt{r}}\|A\|_e = \sqrt{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\frac{1}{r}iz(A^*A)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^{\,2}} \le \sqrt{\frac{r\sigma_{\max}^2}{r}}$$

$$= \sigma_{\max} = \|A\|_2$$

ve

5) $$\|A\|_2 \le \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2} = \|A\|_e$$

olduğundan

6) $$\frac{1}{\sqrt{r}}\|A\|_e \le \|A\|_2 \le \|A\|_e \qquad (1.23)$$

kolayca görülebilir. Ayrıca yine $\|\cdot\|_2$ normu için

7) $$\frac{1}{\sqrt[4]{mn}}\sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty} \le \|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$$

bağıntısı geçerlidir.

Örnek 1.3.5.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ matrisi için $\|A\|_1 = 10$, $\|A\|_\infty = 10$, $\|A\|_e \cong 8.124$ $\|A\|_2 \cong 7.8476$,

$r = rank(A) = 2$ ve $m = n = 3$ değerleri için,

1) $\frac{10}{\sqrt{3}} \le 7.8476 \le 10\sqrt{3}$,

2) $\frac{10}{\sqrt{3}} \le 7.8476 \le 10\sqrt{3}$

3) $\frac{1}{\sqrt{3}}8.124 \le \frac{1}{\sqrt{2}}8.124 \le 7.8476 \le 8.124$

4) $\frac{1}{\sqrt{2}}8.124 \le 7.8476$

5) $7.8476 \le 8.124$

6) $\frac{1}{\sqrt{2}}8.124 \le 7.8476 \le 8.124$

7) $\frac{1}{\sqrt{3}}10 \le 7.8476 \le 10$

2. BİR CAUCHY MATRİSİ İÇEREN HADAMARD ÇARPIMI ÜZERİNE BİR SINIRIN İKİ UYGULAMASI

2.1. $AX - BX = S$ in Çözümleri İçin Bir Sınır

Eğer $A \in M_m(\mathbb{C})$, $B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri ayrık spektruma sahipseler, bu takdirde her $S \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ için $T_{A,B}(X) = AX - XB = S$ denklemi bir tek $X \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ çözümüne sahiptir. Bir çok yazar A ve B üzerine konulan çeşitli şartlar altında $T_{A,B}^{-1} : S \to X$ çözüm operatörünün normu üzerine sınırlar elde etmişlerdir [9],[10] ve [11].

Teorem 2.1.1.

$A \in M_m(\mathbb{C})$, $B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri; sırası ile spektrumları $\{\alpha_i\}_{i=1}^m, \{\beta_i\}_{i=1}^n$ olan iki normal matris olsun. Bu takdirde; $M_{m,n}(\mathbb{C})$ üzerindeki her üniter olarak değişmez $\|\cdot\|$ normu için $\|X\| \le \eta^{-1}\|AX - BX\|$ eşitsizliği geçerlidir [1].

İspat.

$A \to e^{i\theta}A + cI$ ve $B \to e^{i\theta}B + cI$ şeklindeki normalliği koruyan eş zamanlı dönüşümler olsun. $\theta \in \mathbb{R}$ ve $c \in \mathbb{C}$ için sınırlar koruduğundan dolayı genelliği bozmaksızın, her i, j için $\mathrm{Re}\,\alpha_i \ge \frac{\eta}{2}$ ve $\mathrm{Re}\,\beta_j \le -\frac{\eta}{2}$ olsun. V, W üniter ve $\mathcal{A} = diag(\alpha_1, ..., \alpha_m)$, $\mathcal{B} = diag(\beta_1, ..., \beta_n)$ olmak üzere $A = V\mathcal{A}V^*$ ve $B = W\mathcal{B}W^*$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} AX - BX &= V\mathcal{A}V^*X - XW\mathcal{B}W^* = V\left\{\mathcal{A}\underbrace{(V^*XW)}_{Y} - \underbrace{(V^*XW)}_{Y}\mathcal{B}\right\}W^* \\ &= V\{\mathcal{A}Y - Y\mathcal{B}\}W^* = V\left\{\left[\alpha_i y_{ij} - y_{ij}\beta_j\right]\right\}W^* \\ &= V\left\{\left[\alpha_i - \beta_j\right] \circ Y\right\}W^* \end{aligned}$$

dir. Teorem 1.1.1'den

$$\|X\| = \|V^* XW\| = \|Y\| = \left\| \left[\frac{1}{\alpha_i + (-\beta_j)} \right] \circ \left(\left[\alpha_i - \beta_j \right] \circ Y \right) \right\|$$

$$\leq \frac{1}{\min \operatorname{Re} \alpha_i + \min \operatorname{Re}(-\beta_j)} \left\| \left[\alpha_i - \beta_j \right] \circ Y \right\|$$

$$= \frac{1}{\min \operatorname{Re} \alpha_i - \max \operatorname{Re} \beta_j} \left\| V \left(\left[\alpha_i - \beta_j \right] \circ Y \right) W^* \right\|$$

$$= \frac{1}{\min \operatorname{Re} \alpha_i - \max \operatorname{Re} \beta_j} \|AX - XB\| \leq \frac{1}{\eta} \|AX - XB\|$$

elde edilir.

2.2. Üniter Çarpan İçin Bir Genel Pertürbasyon Sınırı

$V, W \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri üniter ve $\Sigma = diag(\sigma_1(A), ..., \sigma_n(A))$ olmak üzere her $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisi $A = V\Sigma W^*$ şeklinde bir singüler değer ayrışımına sahiptir. $U(A) = VW^*$ matrisi üniter ve $|A| = W\Sigma W^*$ matrisi pozitif tanımlı olmak üzere; $A = (VW^*)(W\Sigma W^*)$ yazılırsa $A = U(A)|A|$ şeklinde bir kutupsal ayrışım vardır. $A^* = W\Sigma V^* = (WV^*)(V\Sigma V^*) = U(A)^*(V\Sigma V^*)$ olduğundan, A^*'ın her zaman $U(A)^*$ üniter çarpan olan bir kutup ayrışımına sahip olduğunu söylemek mümkündür. Eğer $Y, Z \in M_n(\mathbb{C})$ üniter matrisler ise,

$$YAZ^* = (YU(A)Z^*)(Z|A|Z^*)$$

bize; verilen bir kutupsal ayrışımına sahip bir matrisin herhangi üniter denginin bir kutupsal ayrışımını verir.

$A \in M_n(\mathbb{C})$'in kutupsal ayrışımında pozitif tanımlı çarpan, $|A| = (AA^*)^{1/2}$ olarak her zaman tek bir şekilde belirlenir. Ancak A'nın singüler olması durumunda üniter çarpan için bir çok seçim vardır. Eğer A, singüler olmayan bir matris ise bu takdirde $|A|$'da singüler değildir ve $U(A) = A|A|^{-1}$ üniter çarpan, tek bir şekilde belirlenir.

Lemma 2.2.1.

$\alpha_i, \beta_i > 0$, olmak üzere $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in M_{2n}(\mathbb{C})$ Hermityen matrislerinin sırası ile $\{\pm\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ ve $\{\pm\beta_i\}_{i=1}^{n}$ spektrumlarına sahip olduğunu farz edelim. Bu takdirde, her $Y \in M_{2n}(\mathbb{C})$ ve her üniter olarak değişmez $\|\cdot\|$ normu için

$$\left\|U(\widetilde{A})Y - YU(\widetilde{B})\right\| \leq \frac{2}{\min \alpha_i + \min \beta_j}\left\|\widetilde{A}Y - Y\widetilde{B}\right\|$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

İspat.

$\alpha_i, \beta_i > 0$ olmak üzere; $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in M_{2n}(\mathbb{C})$ matrisleri hermityen, singüler olmayan ve sırasıyla $\{\pm\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ ve $\{\pm\beta_j\}_{i=1}^{n}$ spektrumlara sahip matrisler olsun. I_n, $n \times n$ birim matrisi, $V, W \in M_{2n}(\mathbb{C})$ matrisleri üniter, $A = diag(\alpha_1, ..., \alpha_n, -\alpha_1, ..., -\alpha_n)$ ve $B = diag(\beta_1, ..., \beta_n, -\beta_1, ..., -\beta_n)$ olmak üzere $\widetilde{A} = VAV^*$ ve $\widetilde{B} = WBW^*$ yazılsın. $U(\mathcal{A}) = U(\mathcal{B}) = I_n \oplus (-I_n) \equiv \mathcal{I}$ olduğundan, $U(\widetilde{A}) = V\mathcal{I}V^*$ ve $U(\widetilde{B}) = W\mathcal{I}W^*$ elde ederiz. Herhangi $Y \in M_{2n}(\mathbb{C})$ için,

$$X \equiv V^*YW = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix},\ X_{ij} \in M_n(\mathbb{C}),$$

ve

$$\begin{aligned} \widetilde{A}Y - Y\widetilde{B} &= V\left\{\mathcal{A}\left(V^*YW\right) - \left(V^*YW\right)\mathcal{B}\right\}W^* \\ &= V\left\{\mathcal{A}X - X\mathcal{B}\right\}W^* \\ &= V\begin{bmatrix} \left[\alpha_i - \beta_j\right] o\, X_{11} & \left[\alpha_i + \beta_j\right] o\, X_{12} \\ \left[\alpha_i + \beta_j\right] o\, (-X_{21}) & -\left[\alpha_i - \beta_j\right] o\, X_{22} \end{bmatrix} W^* \end{aligned}$$

olur. Herhangi $Z \in M_{2n}(\mathbb{C})$ için,

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix},\ Z_{ij} \in M_n(\mathbb{C})$$

olsun.

$$\hat{Z} = \begin{bmatrix} 0 & Z_{12} \\ Z_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

blok Z matrisinden elde edilen pinching matrisini göstersin. Herhangi üniter olarak değişmeyen $\|\cdot\|$ azalan norm için;

$$\left\|\hat{Z}\right\| = \left\|\frac{1}{2}(\mathcal{I}Z\mathcal{I})\right\| \le \frac{1}{2}\left(\|Z\| + \|\mathcal{I}Z\mathcal{I}\|\right) = \frac{1}{2}\left(\|Z\| + \|Z\|\right) = \|Z\|$$

$$\left\|U(\widetilde{A})Y - YU(\widetilde{B})\right\| = \left\|(V\mathcal{I}V^*)(VXW^*) - (VXW^*)(W\mathcal{I}W^*)\right\|$$

$$= \|\mathcal{I}X - X\mathcal{I}\| = \left\|\begin{bmatrix} 0 & 2X_{12} \\ -2X_{21} & 0 \end{bmatrix}\right\|$$

$$= 2\left\|\begin{matrix} 0 & \left[\dfrac{\alpha_i + \beta_j}{\alpha_i + \beta_j}\right] o X_{12} \\ \left[\dfrac{\alpha_i + \beta_j}{\alpha_i + \beta_j}\right] o(-X_{21}) & 0 \end{matrix}\right\|$$

$$\le \frac{2}{\min \alpha_i + \min \beta_j}\left\|\begin{bmatrix} 0 & \left[\alpha_i + \beta_j\right] o(X_{12}) \\ -\left[\alpha_i + \beta_j\right] o(X_{21}) & 0 \end{bmatrix}\right\| \tag{2.1}$$

$$\le \frac{2}{\min \alpha_i + \min \beta_j}\left\|\begin{bmatrix} \left[\alpha_i - \beta_j\right] o(X_{11}) & \left[\alpha_i + \beta_j\right] o(X_{12}) \\ -\left[\alpha_i + \beta_j\right] o(X_{21}) & -\left[\alpha_i - \beta_j\right] o(X_{22}) \end{bmatrix}\right\| \tag{2.2}$$

$$= \frac{2}{\min \alpha_i + \min \beta_j}\left\|\widetilde{A}Y - Y\widetilde{B}\right\|$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 2.2.1'de verilen hermityen matrisler için problem üniter olarak değişmez normlar ve singüler değerler içinde doğal olarak ortaya çıkar.

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ spektrumları sırası ile $\{\pm\sigma_i(A)\}_{i=1}^n$ ve $\{\pm\sigma_i(B)\}_{i=1}^n$ olan matrisler olmak üzere,

$$\widetilde{A} \equiv \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \widetilde{B} \equiv \begin{bmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{bmatrix},$$

formundaki $2n \times 2n$ tipindeki $\widetilde{A}$ ve $\widetilde{B}$ hermityen matrislerini göz önüne alalım[15]. Bu formdaki blok matrisler; singüler değer ayrışımına en yakın yaklaşımlardan birinde Jordan tarafından kullanılır. Bu şekildeki matrislerin kutupsal ayrışımı,

$$U(\widetilde{A}) = \begin{bmatrix} 0 & U(A) \\ U(A)^* & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \left|\widetilde{A}\right| = \begin{bmatrix} \left|A^*\right| & 0 \\ 0 & \left|A\right| \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\widetilde{A} = U(\widetilde{A})\left|\widetilde{A}\right|$ şeklinde kolaylıkla hesap edilir.

$X \in M_n(\mathbb{C})$ için, $Y = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}$ ise,

$$\begin{aligned} \widetilde{A}Y - Y\widetilde{B} &= \begin{bmatrix} 0 & AX - XB \\ A^*X - XB^* & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} AX - XB & 0 \\ 0 & A^*X - XB^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.3}$$

ve

$$\begin{aligned} U(\widetilde{A})Y - YU(\widetilde{B}) &= \begin{bmatrix} 0 & U(A)X - XU(B) \\ U(A)^*X - XU(B)^* & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} U(A)X - XU(B) & 0 \\ 0 & U(A)^*X - XU(B)^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.4}$$

olur. Sonuç olarak,

$$U(A)^*X - XU(B)^* = -U(A)^*\{U(A)X - XU(B)\}U(B)^*,$$

olduğu görülür ki, böylece $U(A)X - XU(B)$ ve $U(A)^*X - XU(B)^*$'ın singüler değerleri aynıdır. Bununla birlikte; $AX - XB$ ve $A^*X - XB^*$'nin aynı singüler değerlere sahip olması gerekmez.

Teorem 2.2.1.

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri singüler olmayan matrisler olsun. Bu takdirde her $X \in M_n(\mathbb{C})$ ve de her üniter olarak değişmez $\|\cdot\|$ normu için

$$\|U(A)X - XU(B) \oplus U(A)X - XU(B)\| \leq \frac{2}{\sigma_{\min}(A) + \sigma_{\min}(B)} \|(AX - XB) \oplus (A^*X - XB^*)\| \quad (2.5)$$

eşitsizliği geçerlidir [1].

İspat.

Lemma 2.2.1'deki (2.3) ve (2.4)ifadeleri kullanılırsa ispat kolayca yapılır.

Eşitsizlik hem A hem de B üniter iken eşitlik olacağından (2.5)'deki sınır keskindir.

$\|X\|_2 = \sigma_{\max}(X)$ spektral norm ve, $\|X\|_p \equiv \left(\sum_{i=}^{n} \sigma_i(X)^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$

Schetten p normları için (2.5) eşitsizliğinin her iki tarafı, açık olarak singüler değerlerin fonksiyonlarıdır.

Sonuç 2.2.1.

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri, singüler olmayan matrisler olsun. Bu takdirde her $X \in M_n(\mathbb{C})$ ve herhangi $p \geq 1$ için;

$$\|U(A)X - XU(B)\|_2 \leq \frac{2}{\sigma_{\min}(A) + \sigma_{\min}(B)} \max\left\{\|AX - XB\|_2, \|A^*X - XB^*\|_2\right\} \quad (2.6)$$

ve

$$\|U(A)X - XU(B)\|_p \leq \frac{2^{1-\frac{1}{p}}}{\sigma_{\min}(A) + \sigma_{\min}(B)} \max\left(\|AX - XB\|_p^p + \|A^*X - XB^*\|_p^p\right)^{1/p} \quad (2.7)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Eğer $A^*X - XB^*$ ve $AX - XB$ üniter olarak denk iseler bu takdirde (2.5),(2.6) ve (2.7) basitleştirilebilir [1].

Sonuç 2.2.2.

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ verilsin. A ve B'nin singüler olmadığını ve $A^*X - XB^*$ ile $AX - XB$'nin üniter olarak denk olduklarını farz edelim. Bu takdirde her $X \in M_n(\mathbb{C})$ ve de her üniter olarak değişmez $\|\cdot\|$ normu için

$$\|U(A)X - XU(B)\| \le \frac{2}{\sigma_{\min}(A) + \sigma_{\min}(B)} \|AX - XB\| \tag{2.8}$$

dir. Özellikle de (2.8) eşitsizliği X hermityen veya ters hermityen ise hem A hem de B ile ele alınır [1].

İspat.

k tane en büyük singüler değerin toplamı olan Ky Fan k-normu için (2.5)'yi göz önüne alalım. Eğer $k = 2m$ ise, bu takdirde (2.5) $m = 1, ..., n$ için

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(U(A)X - XU(B)) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2m} \sigma_i(U(A)X - XU(B) \oplus (U(A)X - XU(B))) \\ &\le \frac{1}{\sigma_{\min}(A) + \sigma_{\min}(B)} \sum_{i=1}^{2m} \sigma_i((AX - XB) \oplus (A^*X - XB^*)) \\ &= \frac{2}{\sigma_{\min}(A) + \sigma_{\min}(B)} \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(AX - XB)\end{aligned}$$

olur. Her üniter olarak değişmez $\|\cdot\|$ normu için Ky Fan dominantlık teoremi

$$\|U(A)X - XU(B)\| \le \frac{2}{\sigma_{\min}(A) + \sigma_{\min}(B)} \|AX - XB\|$$

şekline gelir. Son iddia, belirtilen şartlar altında

$$A^*X - XB^* = \pm(AX - XB)^*$$

eşitliğinin gösterilmesiyle sonuçlanır.

Eğer (2.8)'de $X = I$ alınırsa, [15]'de R.C.Li tarafından ispatlanan

$$\|U(A) - U(B)\| \le \frac{2}{\sigma_{\min}(A) + \sigma_{\min}(B)} \|A - B\| \tag{2.9}$$

sınırını elde edilir ki, R.C.Li bu sınırı Teorem 2.1.1'de matrisleri hertmityen alarak bulmuştur. $\|U(A)-U(B)\|$ üzerine diğer sınırlar bilinmektedir.

Bununla birlikte bu sınırların çoğu; ya asimptotiktir ya da sadece kısıtlamalar altında doğrudur.

(2.5)'in son bir özel durumu,Schatten p-normları için dikkate değerdir. $\|\cdot\|_2$ Frobenius normu; eş zamanlı olarak Schatten 2-normudur. Herhangi $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ için

$$\begin{aligned} \|AX - XB\|_2^2 &= iz(AX - XB)^*(AX - XB) \\ &= iz(X^*A^*AX + XBB^*X^*) - iz(A^*XBX^* + AXB^*X^*), \end{aligned} \tag{2.10}$$

elde ederiz. Burada (2.10)'daki ikinci terim, A yerine A^* ve B yerine B^* konulursa değişmezdir ve ilk terim; eğer A ve B normal ise aynı değişmezliğe sahiptir. Böylece A ve B normal matrisleri için, $AX - XB$ ve $A^*X - XB^*$'nin Frobenius normları aynıdır. Herhangi $p \in (1,\infty)$ ve A ve B normal matrisleri için $\|A^*X - XB\|_p \le c_p \le \|AX - XB\|$ olduğu [6]'daki Teorem 2.7'den görülür ki, burada c_p yalnızca p ye bağlı olan genel bir sabittir. Biz henüz $c_p = 1$ alınabileceğini gösterdik. Sonuç 2.2.1'deki sınırlar, aşağıdaki sonuca götürür.

Sonuç 2.2.3.

$A, B, X \in M_n(\mathbb{C})$ için A ve B singüler olmayan ve normal matrisler olsunlar. Bu takdirde ,

$$\|U(A)X - XU(B)\|_2 \le \frac{2}{\sigma_{\min}(A) + \sigma_{\min}(B)} \|AX - XB\|_2,$$

ve her $p \in (1,\infty)$ için,

$$\|U(A)X - XU(B)\|_2 \le \frac{2^{1-\frac{1}{p}}(1 + c_p^p)^{\frac{1}{p}}}{\sigma_{\min}(A) + \sigma_{\min}(B)} \|AX - XB\|_p,$$

olacak şekilde yalnızca p 'ye bağlı olan bir c_p sabiti vardır [1].

2.3. Pozitif Yarı Tanımlı Çarpanın Pertürbasyonu

$\||A|-|B|\|$'yi sınırlandırma probleminin önceki bölümde çalışılan probleme doğal bir yakınlığı vardır. Sonuçlar bazı ilginç yeni sınırlar verdi. Bir ileriki hesaplamanın

$$\begin{aligned}|A|-|B| &= \frac{1}{2}(U(A)+U(B))^*(A-B)+\frac{1}{2}(U(A)-U(B))^*(A+B)\\ &= U(A)^*(A-B)+(U(A)-U(B))^*B\\ &= U(B)^*(A-B)+(U(A)-U(B))^*A\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ matrisleri singüler olmayan matrislerdir. Her üniter olarak değişmeyen norm, simetrik olduğundan

$$\||A|-|B|\| \le \left\{\begin{array}{l}\|A-B\|+\frac{1}{2}\sigma_{\max}(A+B)\|U(A)-U(B)\|\\ \|A-B\|+\sigma_{\max}(B)\|U(A)-U(B)\|\\ \|A-B\|+\sigma_{\max}(A)\|U(A)-U(B)\|\end{array}\right\} \tag{2.11}$$

elde ederiz. (2.9)'deki sınır ve süreklilik daha sonra en son sonucumuzu verir.

Teorem 2.3.1.

$A,B\in M_n(\mathbb{C})$ matrislerinden en az biri singüler olmayan matris olacak şekilde verilsin. Bu takdirde; $M_n(\mathbb{C})$ üzerindeki her üniter olarak değişmez $\|\cdot\|$ normu için ;

$$\||A|-|B|\| \le \left(1+\frac{\min\{\sigma_{\max}(A+B),2\sigma_{\max}(A),2\sigma_{\max}(B)\}}{\sigma_{\min}(A)+\sigma_{\min}(B)}\right)\|A-B\| \tag{2.12}$$

eşitsizliği geçerlidir.

$|A|X-X|B|$, $AX-XB$ ve A^*X-XB^*'i içeren ilgili eşitsizlikler;

$$|A|X-X|B| \le \left\{\begin{array}{l}\|AX-XB\|+\sigma_{\max}(B)\|U(A)X-XU(B)\|\\ \|A^*X-XB^*\|+\sigma_{\max}(A)\|U(A)X-XU(B)\|\end{array}\right\}$$

Sınırları, Teorem 2.2.1 ve onun sonuçlarını kullanarak benzer bir yolla da elde edilebilir [1].

(2.12)'deki katsayı, n'den bağımsızdır. Ancak, A ve B'ye bağlıdır.

3. MATRİSLERİN HADAMARD ÇARPIMLARININ SPEKTRAL YARIÇAPI İÇİN BAZI SONUÇLAR

3.1. Bazı Sınırlar ve Köşegen Dominantlık

Tanım 3.1.1.(Satır Dominant ve Sütun Dominant)

$A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})\in M_n(\mathbb{C})$ olsun. Her $i=1,...,n$ ve $j\neq i$ için

$|a_{ii}|\geq|a_{ij}|$ $(|a_{ii}|\geq|a_{ji}|)$

oluyorsa A matrisine köşegen olarak kendisinin satır elemanlarına veya sütun elemanlarına göre dominanttır denir.

Eşitsizliği ters çevirerek, matrisin köşegen olarak, kendisinin satır elemanlarına veya sütun elemanlarına alt dominantlığını tanımlarız. Kesin olarak köşegen dominantlık benzer şekilde [16]'de tanımlanır.

Teorem 3.1.1.

$A\geq 0, B\geq 0$ negatif olmayan matrisler olsunlar. Eğer DBD^{-1} matrisi kendisinin satır veya sütun elemanlarına köşegen dominant olacak şekilde bir pozitif köşegen D matrisi varsa bu takdirde

$$\rho(B)\leq izB \tag{3.1}$$

ve

$$\rho(A\circ B)\leq\rho(A)\max_{i=1,...,n} b_{ii} \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanır. Bundan başka eğer DBD^{-1} matrisi, kendisinin sütun veya satır elemanlarına köşegen alt dominant olacak şekilde bir pozitif köşegen D matrisi varsa bu takdirde

$$\rho(B)\geq izB$$

ve

$\rho(A)\max_{i=1,...,n} b_{ii}\leq\rho(A\circ B)$ 'dır [2].

İspat.

Bilinmelidir ki; $A \circ (DBD^{-1}) = D(A \circ B)D^{-1}$ dir ve böylece $\rho(A \circ B) = \rho(A \circ (DBD^{-1})$ dir. Dahası; B nin ve DBD^{-1} in köşegen elemanları aynıdır. Böylece B'nin kendisinin satır ve sütun elemanlarına köşegen dominant olduğunu varsayabiliriz. Farz edelim ki; B, kendisinin sütun elemanlarına köşegen dominant olsun, Bu takdirde,

$$A \circ B \le A \; diag(b_{11},...,b_{nn}) \le A \max_{i=1,...,n} b_{ii} \tag{3.3}$$

dir. [15]'de Perron kökünün monotonluğundan (3.2)'yi veren

$$\rho(A \circ B) \le \rho(A \; diag(b_{11},...,b_{nn})) \le \rho(A) \max_{i=1,...,n} b_{ii} \tag{3.4}$$

eşitsizliği yazılır.

(3.1)'i elde etmek için J_n bütün elemanları 1 olan $n \times n$ matris olmak üzere (3.4)'te $A = J_n$ yazmak yeterlidir. Bu takdirde

$$\rho(A \circ B) \le \rho(J_n \; diag(b_{11},...,b_{nn})) = izB$$

dir.

Örnek 3.1.1.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ve $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ köşegen matrisi için,

$DBD^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $A \circ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ olup $\rho(B) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, $izB = 5$, $\rho(A \circ B) = 5$,

değerleri için

$$\frac{5+\sqrt{5}}{2} = \rho(B) \le izB = 5 \text{ ve } 5 = \rho(A \circ B) \le \rho(A) \max_{i=1,...,n} b_{ii} = (\sqrt{6}+1) \cdot 3,$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Uyarılar.

-(3.1)'deki izB için üst sınır, $B = J_n$ seçimi ile elde edilebilir.

-Her negatif olmayan B matrisi için; $\max_{i=1,\ldots,n} b_{ii} \le \rho(B)$ eşitsizliği doğru olmasına rağmen eğer teoremdeki varsayım kaldırılırsa (3.1) deki $\rho(B) \le izB$ eşitsizliği sağlanmayabilir. Örneğin, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ indirgenemeyen matrisi için bu eşitsizlik sağlanmaz.

-Eğer $A \ge 0, B \ge 0$ matrislerinin her ikisi de kendi sütun veya satır elemanlarına köşegen dominant ise bu durumda,

$$\rho(A \circ B) \le \max_{i=1,\ldots,n} a_{ii} \max_{i=1,\ldots,n} b_{ii}$$

eşitsizliği sağlanmaz. Örneğin,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1.5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisleri için

$$A \circ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

olup

$$\rho(A \circ B) \approx 4.6180 > 4 = \max_{i=1,2} a_{ii} \max_{i=12} b_{ii}$$

elde edilir ki eşitsizlik sağlanmaz.

Tanım 3.1.2.($M - matrisi$ **)**

$Z_n = \{A \in \mathbb{R}_{n\times n} : a_{ij} \le 0, i \ne j\}$ olsun. $\rho(P)$ $P \ge 0$ matrisinin spektral yarıçapı ve I_n, $n \times n$ birim matris olmak üzere $A = sI_n - P$ ve $s \ge \rho(P), (s \ge 0)$ olacak şekilde bir $P \ge 0$ matrisi varsa $A \in Z_n$ matrisine $M - matrisi$ denir[16,20].

$\mathcal{M}_n$ ile bütün $n \times n$ tipindeki singüler olmayan M matrisleri gösterilsin. $\mathcal{M}_n^{-1} := \{A^{-1} : A \in \mathcal{M}\}$ kümesine de M matrislerinin terslerinin kümesi olsun..

Örnek 3.1.2.

$P=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\rho(P)=4$, $s=5\geq\rho(P)=4$ alalım,

$A=sI-P=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 9\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -9\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ matrisi $M-matrisi$'dir.

Benzer şekilde

$P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\rho(P)=1$, $s=2\geq\rho(P)=1$ alınması ile elde edilen,

$A=sI-P=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ birim matrisi de matrisi $M-matrisi$'dir.

Sonuç 3.1.1.

B $n\times n$ tipinde negatif olmayan bir matris olsun. Eğer, DBD^{-1} kendisinin sütun veya satır elemanlarına köşegen dominant olacak şekilde pozitif köşegen D matrisi varsa bu takdirde

$$\max\{\rho(A\circ B):A\geq 0,\rho(A)=1\}=\max_{i=1,\ldots,n} b_{ii}$$

dir [2].

İspat.

$A\in Z_n$ olması için gerek ve yeter şart A matrisinin singüler olmaması ve $A\geq 0$ olmasıdır[16]. $\mathcal{M}_n$ ile $\mathcal{M}_n^{-1}$'in, pozitif köşegen D matrisi aracılığı ile benzerlik altında değişmez olduğu açıktır. Yani, $D\mathcal{M}_nD^{-1}=\mathcal{M}_n$ ve $D\mathcal{M}_n^{-1}D^{-1}=\mathcal{M}_n^{-1}$ dir. Ayrıca [25]'den $\mathcal{M}_n^{-1}$'in Hadamard-kapalı olması için gerek ve yeter şart $n\leq 3$ olması gerektiği bilinmektedir.

Örnek 3.1.3.

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ için $A\circ B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ ve

$$\frac{5+\sqrt{5}}{2} = \rho(A \circ B) \leq \max_{i=1,\ldots,n} b_{ii} = 3$$

B matrisi değiştirilip $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ alındığında $A \circ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ elde edilir ve

$3 = \rho(A \circ B) = \max_{i=1,\ldots,n} b_{ii} = 3$ eşitlik durumu elde edilir ki bu da bizim sonucumuzu destekler bir sonuçtur.

Sonuç 3.1.2.

A ve B $n \times n$ tipinde negatif olmayan matrisler olsunlar. Eğer $B \in \mathcal{M}_n^{-1}$ ise bu takdirde

$$\rho(B) \leq izB$$

ve

$$\rho(A \circ B) \leq \rho(A) \max_{i=1,\ldots,n} b_{ii}$$

dir. Böylece eğer $B \in \mathcal{M}_n^{-1}$ ise bu takdirde

$$\max\{\rho(A \circ B) : A \geq 0, \rho(A) = 1\} = \max_{i=1,\ldots,n} b_{ii}$$

dir [2].

İspat.

$B^{-1} \in \mathcal{M}_n$ olduğundan;[26]'dan $DB^{-1}D^{-1}$, kesin olarak satır köşegen dominant olacak şekilde bir pozitif köşegen D matrisi vardır. Bu takdirde, DBD^{-1}'in tersi kendi sütun elemanlarına kesin olarak dominanttır[16].

3.2. B^{-1}, M- Matrisi Olduğu Zaman Keskin Bir Üst Sınır

$s(A)$, $A \in \mathcal{M}_n$ matrisinin spektrumunu ve

$$\tau(A) = \min\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in s(A)\},$$

olmak üzere $A, B \in \mathcal{M}_n$ ve $\beta_{ij} \in B^{-1}$ ise

$$\tau(A \circ B^{-1}) \geq \tau(A) \min_{i=1,\ldots,n} \beta_{ii} \tag{3.5}$$

eşitsizliği sağlanır. [16]'da,

$$\tau(A) = \frac{1}{\rho(A^{-1})}$$

olduğu bilinmektedir ve bu değer $A \in \mathcal{M}_n$'in bir pozitif öz değeridir. $\tau(A)$ sayısı; sık sık A matrisinin minimum öz değeri olarak isimlendirilir. Gerçekten de $s > \rho(P)$ ve $P \geq 0$ olmak üzere eğer $A = sI_n - P$ ise

$$\tau(A) = s - \rho(P),$$

dir[22]. Böylece $\tau(A)$, A matrisinin singülerliğe ne kadar yakın olduğunun bir ölçüsüdür.

Eğer $A, B \in \mathcal{M}_n$ ise $A \circ B^{-1} \in \mathcal{M}_n$ dir. [21]'da Chen $\tau(A \circ B^{-1})$ için

$$\tau(A \circ B^{-1}) \geq \tau(A)\tau(B) \min_{i=1,\ldots,n} \left[\left(\frac{a_{ii}}{\tau(A)} + \frac{b_{ii}}{\tau(B)} - 1 \right) \frac{\beta_{ii}}{b_{ii}} \right] \tag{3.6}$$

şeklinde keskin bir sınır bulmuştur. Her $i = 1, \ldots, n$ için $a_{ii} \geq \tau(A)$ olduğundan (3.6), (3.5)'i gerektirir. (3.6) eşitsizliği

$$\left(\tau(A \circ B^{-1})\right)^{-1} \leq \frac{\rho(A^{-1})\rho(B^{-1})}{\min\limits_{i=1,\ldots,n} \left[\left(a_{ii}\rho(A^{-1}) + b_{ii}\rho(B^{-1}) - 1 \right) \frac{\beta_{ii}}{b_{ii}} \right]}$$

formunda tekrar yazılabilir. Bununla birlikte, bu $\rho(A \circ B^{-1})$ için bir üst sınır değildir. Sonuç 3.12, Chen'in bulduğu sınırı ve onun ispatı üzerinde yoğunlaşıldığında, $A \geq 0$ ve $B \in \mathcal{M}_n^{-1}$ olmak üzere $\rho(A \circ B)$ için keskin bir üst sınır bulmak istiyoruz. [26, Lemma 2.2]'deki lemmaya ihtiyaç duyacağız. Eğer A kesin köşegen dominant matris ise bu takdirde [16]'da iyi bilinen Gersgorin Teoremi'nden A singüler değildir [16].

Örnek 3.2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n \text{ ve } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n \text{ matrisleri için}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 9 \\ 1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0,\ s(A) = \{1, 7\},\ \text{ve}\ \tau(A) = 1,$$

$$A \circ B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ ve } s(A \circ B^{-1}) = \{4\},\ \text{ve}\ \tau(A \circ B^{-1}) = 4$$

olur, bu durumda (3.5)'deki

$$4 = \tau(A \circ B^{-1}) \geq \tau(A) \min_{i=1,\ldots,n} \beta_{ii} = 1 \cdot 1$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ matrisi için } s(A^{-1}) = \{\frac{1}{7}, 1\},\ \text{ve}\ \rho(A^{-1}) = 1,$$

$$1 = \tau(A) = \frac{1}{\rho(A^{-1})} = 1$$

eşitliği sağlanır, $A = sI - P$ için, Örnek 3.1.2'de $\rho(P) = 4$, $s = 5$ alınmıştı, bu durumda

$$1 = \tau(A) = s - \rho(P) = 5 - 4$$

eşitliği de sağlanır.

Önerme 3.2.1.

$A \in M_n(\mathbb{C})$ satır veya sütunlarına köşegen dominant singüler olmayan bir matris olsun.

Yani, her $i = 1, \ldots, n$ için

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \text{ veya} \left(|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ji}| \right)$$

olsun. Eğer $A^{-1} = (b_{ij})$ ise bu takdirde

$$|b_{ij}| \leq \frac{\sum_{k \neq j} |a_{jk}|}{a_{jj}} |b_{ii}| \text{ veya } \left(|b_{ji}| \leq \frac{\sum_{k \neq j} |a_{kj}|}{a_{jj}} |b_{ii}| \right) \text{ dir [2].}$$

İspat.

$A \in M_n(\mathbb{C})$ satırlarına köşegen dominant singüler olmayan bir matris olsun. Bu takdirde her $a_{ii} \neq 0$ dır.Aksi halde bütün satır 0 olacak ve sonuçta A matrisi singüler olacaktır. Dolayısıyla [16, sayfa 129 problem 17(a)] uygulandığında

$$|b_{ij}| \leq \frac{\sum_{k \neq j} |a_{jk}|}{a_{jj}} |b_{ii}|$$

eşitsizliği elde edilir. Sütunlar için A^T 'yi almak yeterlidir.

Örnek 3.2.2.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ köşegen dominant matrisi için $A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ olup

$\frac{5}{16} = |b_{ij}| \leq \frac{\sum_{k \neq j} |a_{jk}|}{a_{jj}} |b_{ii}| = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{16}$ eşitsizliği sağlanmaktadır.

Teorem 3.2.1.

$A \geq 0$ ve $B \in \mathcal{M}_n^{-1}$ olsun.

i) Eğer A nilpotent (yani $\rho(A) = 0$) ise bu takdirde $\rho(A \circ B) = 0$ dır.

ii) Eğer A nilpotent değil ise bu takdirde, $B^{-1} = (\beta_{ij})$ olmak üzere

$$\rho(A \circ B) \leq \frac{\rho(A)}{\rho(B)} \max_{i=1,\ldots,n} \left[\left(\frac{a_{ii}}{\rho(A)} + \beta_{ii}\rho(B) - 1 \right) \frac{b_{ii}}{\beta_{ii}} \right] \leq \rho(A) \max_{i=1,\ldots,n} b_{ii}$$

dir [2].

İspat.

i) Eğer A negatif olmayan nilpotent matris ise bu takdirde A ile bir kesin üst üçgen (negatif

olmayan)matrise pertürbasyon benzerdir[23, teorem 3]. Böylece $A \circ B$ de aynı özelliklere sahiptir. Buradan $\rho(A \circ B) = 0$ dır.

ii) İkinci eşitsizlik için $B^{-1} \in \mathcal{M}_n$ olduğundan Her $A \geq 0$ için, $\max_{i=1,\ldots,n} a_{ii} \leq \rho(A)$, $b_{ii} \geq 0$ ve her

$$\beta_{ii} > \tau(B^{-1}) > 0, i = 1,\ldots,n \tag{3.7}$$

olur.

İlk eşitsizlik için Chen'in ispatını kullanabiliriz. $\rho(\cdot)$ Hadamard çarpım ve matris tersi alma işlemleri altında sürekli fonksiyonlar olduğundan $\alpha \geq \rho(P)$ olacak şekilde $P \geq 0$ olmak üzere $A \geq 0$ ve $B^{-1} = \alpha I - P \in \mathcal{M}_n$ olduğunu kabul edebiliriz. Ayrıca bunların indirgenemez olduklarını da kabul edebiliriz. Aksi takdirde A ve P matrislerinde sıfırların bulunduğu pozisyonlara yeterince küçük $\varepsilon > 0$ değerlerini koyarız.

v ve w, sırasıyla P^T ve A'nın sağ Perron öz vektörleri olsun. Yani, $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$(B^{-1})^T v = \tau(B^{-1})v, \qquad Aw = \rho(A)w$$

olacak şekilde pozitif vektörler olsun. Böylece $v^T B^{-1} = \tau(B^{-1})v^T$ veya denk olarak

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \beta_{kj} = \tau(B^{-1})v_j, \qquad j = 1,\ldots,n$$

dir.

$$C := VB^{-1}, \qquad V := diag(v_1,\ldots,v_n)$$

matrislerini tanımlayalım. B^{-1}'in köşegen dışındaki β_{ij} $(i \neq j)$ elemanları pozitif olmadığından ve $\tau(B^{-1}) > 0$ olduğundan, C kesin sütun köşegen dominanttır. $v_j > 0, \beta_{kj} \leq 0, (k \neq j), \beta_{jj} > 0$ olduğundan $C^{-1} = BD^{-1}$'e Önerme 3.2.1 uygulanırsa her $i \neq j$ için

$$\frac{b_{ij}}{v_j} = \frac{|b_{ij}|}{|v_j|} \leq \frac{\sum_{k \neq j} |v_k \beta_{kj}|}{|v_j \beta_{jj}|} \cdot \frac{|b_{ii}|}{|v_i|} = -\frac{\sum_{k \neq j} v_k \beta_{kj}}{v_j \beta_{jj}} \frac{b_{ii}}{v_i} = \frac{\left(\beta_{jj} - \tau(B^{-1})\right) v_j}{v_j \beta_{jj}} \frac{b_{ii}}{v_i}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $i \neq j$ için

$$b_{ij} \le \frac{\left(\beta_{ii} - \tau(B^{-1})\right) v_j b_{ii}}{\beta_{jj} v_i}$$

olur. Bileşenleri

$$z_i := \frac{w_i \beta_{ii}}{v_i \left(\beta_{ii} - \tau(B^{-1})\right)} > 0, \qquad i = 1, ..., n$$

şeklinde olan pozitif bir $z \in \mathbb{R}^n$ vektörü tanımlansın. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
[(A \circ B)z] &= a_{ii} b_{ii} z_i + \sum_{i \neq j} a_{ij} b_{ij} z_j \\
&\le a_{ii} b_{ii} z_i + \sum_{i \neq j} a_{ij} \frac{\left(\beta_{jj} - \tau(B^{-1})\right) v_j b_{ii}}{\beta_{jj} v_i} \cdot \frac{w_j \beta_{jj}}{v_j \left(\beta_{jj} - \tau(B^{-1})\right)} \\
&= a_{ii} b_{ii} z_i + \frac{b_{ii}}{v_i} \sum_{i \neq j} a_{ij} w_j \\
&= a_{ii} b_{ii} z_i + \frac{b_{ii}}{v_i} (\rho(A) - a_{ii}) w_i \\
&= b_{ii} z_i \left[a_{ii} + \frac{1}{\beta_{ii}} \left(\rho(A) - a_{ii}\right)\left(\beta_{ii} - \tau(B^{-1})\right) \right] \\
&= \frac{b_{ii}}{\beta_{ii}} \rho(A) \tau(B^{-1}) \left[\frac{a_{ii}}{\rho(A)} + \frac{\beta_{ii}}{\tau(B^{-1})} - 1 \right] z_i \\
&\le \rho(A) \tau(B^{-1}) \max_{i=1,...,n} \left[\left(\frac{a_{ii}}{\rho(A)} + \frac{\beta_{ii}}{\tau(B^{-1})} - 1 \right) \frac{b_{ii}}{\beta_{ii}} \right] z_i
\end{aligned}$$

olur. $\tau(B^{-1}) = \dfrac{1}{\rho(B)}$ olduğundan arzu edilen sonucu elde ederiz. Şimdi (1.5)'den

$$\left(\frac{a_{ii}}{\rho(A)} + \beta_{ii} \rho(B) - 1 \right) \frac{b_{ii}}{\beta_{ii}} \le \beta_{ii} \rho(B) \frac{b_{ii}}{\beta_{ii}} = \rho(B) b_{ii}, i = 1, ..., n$$

elde ederiz. Böylece ikinci eşitsizlik hemen elde edilir.

Örnek 3.2.3.

i) Nilpotent ($\rho(A) = 0$) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi ve $B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n^{-1}$ matrisi için

$A \circ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{3}{7} & 0 \end{pmatrix}$ ve $\rho(A \circ B) = 0$ bulunur.

ii) Nilpotent olmayan ($\rho(A) = 21 \neq 0$) $A = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}$ matrisi ve $B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n^{-1}$

matrisi için $B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -9 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n$ ve $A \circ B = \begin{pmatrix} 4 & 18 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ Hadamard çarpım için

$$\rho(A \circ B) = 10$$

$$\frac{\rho(A)}{\rho(B)} \max_{i=1,\ldots,n} \left[\left(\frac{a_{ii}}{\rho(A)} + \beta_{ii}\rho(B) - 1 \right) \frac{b_{ii}}{\beta_{ii}} \right] = 10$$

$$\rho(A) \max_{i=1,\ldots,n} b_{ii} = 12$$

elde edilir ki bu değerler için

$$\rho(A \circ B) \leq \frac{\rho(A)}{\rho(B)} \max_{i=1,\ldots,n} \left[\left(\frac{a_{ii}}{\rho(A)} + \beta_{ii}\rho(B) - 1 \right) \frac{b_{ii}}{\beta_{ii}} \right] \leq \rho(A) \max_{i=1,\ldots,n} b_{ii}$$

eşitsizliği sağlanmaktadır.

Biz sadece, B'nin singüler olmayan ve negatif olmayan bir matris olduğunu farz edersek yani B matrisinin $B^{-1} \in \mathcal{M}_n$ şartını kaldırırsak, Teorem 3.2.1'deki iki eşitsizliğin artık doğru olmadığını görürüz. Örneğin eğer;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A \circ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ise bu takdirde $\rho(A) = 1, \rho(B) = 3, \rho(A \circ B) = 2$ olur. Ancak,

$$\frac{\rho(A)}{\rho(B)} \max_{i=1,\ldots,n} \left[\left(\frac{a_{ii}}{\rho(A)} + \beta_{ii}\rho(B) - 1 \right) \frac{b_{ii}}{\beta_{ii}} \right] = -2 \text{ olur.}$$

4. MERTEBESİ BÜYÜK SİMETRİK PASCAL MATRİSLERİNİN HADAMARD KUVVETLERİNİN ÖZDEĞERLERİ

4.1. Perron Kökü İçin Bir Alt Sınır

D, köşegen elemanları $S_n^{(x)}$'in son sütununun elemanları olan bir köşegen matris olmak üzere $D^{-1}R_n^{(x)}D$ matrisinin satır toplamları $i=1,2,...,n$, $i \le n$, i ve n pozitif tamsayıları için r_{ni}, $D^{-1}R_n^{(x)}D$ matrisinin i satırındaki tüm elemanların toplamı olmak üzere;

$$r_{ni}(x)=\frac{1}{\binom{n+i-2}{n-1}^x\binom{2n-2}{n-1}^x}\sum_{j=1}^{n}\binom{i+j-2}{j-1}^x\binom{n+j-2}{j-1}^x$$

şeklindedir. Aşağıdaki lemmalar, $x>0$ için $\{\rho(R_n^{(x)})\}$ dizisinin alt limiti üzerine bir sınır elde etmede kullanılacaktır.

Lemma 4.1.1.

Her $x>0$ reel sayısı ve $n\ge 2$ tamsayısı için

$$r_{n1}(x)>r_{n2}(x)>...>r_{nn}(x)$$

dir [3].

İspat.

$x>0$, $n\ge 2$ ve $w_{ij}(x)\in R_n^{(x)}$ olmak üzere,

$$w_{ij}(x)=\frac{\binom{i+j-2}{j-1}^x}{\binom{n+i-2}{n-1}^x},\ 1\le i,j\le n$$

olsun. Buradan

$$w_{ij}(x)=\prod_{k=2}^{i}\left(\frac{i+j-k}{i+n-k}\right)^x,$$

olacaktır.

Böylece $1 \le i \le n$ için $w_{in}(x) = 1$ ve $1 \le j \le n$ için $w_{1j}(x) > w_{2j}(x) > ... > w_{nj}(x)$

olur. Buradan $1 \le i \le n$ için $r_{ni} = \dfrac{1}{\binom{2n-2}{n-1}^x} \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(x) \binom{n+j-2}{j-1}^x$

olduğundan $r_{n1}(x) > r_{n2}(x) > ... > r_{nn}(x)$ dir.

Şimdi, $r_n(x) = r_{nn}(x)$ yazalım ve $\{r_n(x)\}$ dizisini göz önüne alalım.

Örnek 4.1.1.

$n = 3$ ve $x = 1$ için S_3 pascal matrisini göz önüne aldığımızda

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},\ D^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } R_3 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ olup}$$

$$D^{-1}R_3D = \frac{1}{6}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 6 & 18 & 36 \\ 2 & 12 & 36 \\ 1 & 9 & 36 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $D^{-1}R_nD$ matrisinin i'inci satır toplamı r_{3i} olmak üzere,

$$r_{31} = \frac{1}{36}(6+18+36) = \frac{60}{36},$$

$$r_{32} = \frac{1}{36}(2+12+36) = \frac{50}{36},$$

$$r_{33} = \frac{1}{36}(1+9+36) = \frac{46}{36},$$

elde edilir ve $n = 3$ için $r_{31}(1) > r_{32}(1) > r_{33}(1)$ olduğu görülür.

Lemma 4.1.2.

Her $x > 0$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = L_x \le \frac{4^x}{4^x - 1}$$

olacak şekilde bir L_x pozitif sayısı vardır [3].

İspat.

$x>0$ ve n pozitif bir tamsayı olsun. Bu takdirde,

$$r_n(x)=\frac{1}{\binom{2n-2}{n-1}^{2x}}\sum_{j=1}^{n}\binom{n+j-2}{j-1}^{2x}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\binom{2n-k-1}{n-k}}{\binom{2n-2}{n-1}}\right)^{2x}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=2}^{k}\left(\frac{n+1-i}{2n-i}\right)^{2x}$$

elde ederiz. Böylece, $n=1,2,...,$ için $r_n(x)<r_{n+1}(x)$ ve

$$r_n(x)\le\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4^x}\right)^{k-1}=\frac{4^x\left(1-(\frac{1}{4^x})^n\right)}{4^x-1}$$

olur. Buradan, $\{r_n(x)\}$ dizisi sınırlı artan bir dizidir ve

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4^x\left(1-(\frac{1}{4^x})^n\right)}{4^x-1}\right)=\frac{4^x}{4^x-1}$$

bulunur.

Lemma 4.1.3.

Her $x>0$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=\frac{4^x}{4^x-1}$$

dir [3].

İspat.

$x>0$ verilsin. $\{r_n(x)\}$ dizisinin $\{r_{n^2}(x)\}$ alt dizisi de lemma 4.1.2'de adı geçen L_x'e yakınsar. Bununla birlikte; her pozitif n tamsayısı için

$$r_{n^2}(x) \geq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\binom{2n^2-k-1}{n^2-k}}{\binom{2n^2-2}{n^2-1}} \right)^{2x}$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{n^2-n+1}{2n^2-n} \right)^{2x} \right)^{k-1}$$

$$= \frac{\left(\frac{2n^2-n}{n^2-n+1} \right)^{2x} \left(1-\left(\left(\frac{n^2-n+1}{2n^2-n} \right)^{2x} \right)^{n} \right)}{\left(\frac{2n^2-n}{n^2-n+1} \right)^{2x} - 1}$$

eşitsizliğinin varlığı görülür ve buradan;

$$\frac{4^x}{4^x-1} \geq \lim_{n\to\infty} r_n(x) = L_x = \lim_{n\to\infty} r_{n^2}(x) \geq \frac{4^x}{4^x-1}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.1.

Her $x>0$ için

$$\liminf_{n\to\infty} \rho(R_n^{(x)}) \geq \frac{4^x}{4^x-1}$$

dir [3].

İspat.

$x>0$ ve D, köşegen elemanları $S_n^{(x)}$'in son sütununun elemanları olan bir köşegen matris olsun ve $B = D^{-1}R_n(x)D$ olarak verilsin. Bu takdirde, pozitif B matrisi, $\rho(R_n^{(x)})$ Perron köküne ve $i=1,2,...,n$ için $r_{ni}(x)$ satır toplamlarına sahiptir. $\rho(R_n^{(x)})$ Perron kökü en

azından en küçük satır toplamı $r_{nn}(x)$ kadar büyük olduğu bilindiğinden Lemma 4.1.1 ve Lemma 4.1.3 den teorem açıktır.

4.2. İz ve Pozitif Tamsayı Hadamard Kuvvetler

Her $x>0$ için ; $\rho(R_n^{(x)})$ ve $iz(R_n^{(x)})$, sırasıyla $R_n^{(x)}$ in Hadamard kuvvetinin izini ve Perron kökünü göstersin.

$x>0$ sayısı için $\{iz(R_n^{(x)})\}$ dizisini göz önüne alalım.

Lemma 4.2.1.

Her $x>0$ ve $n=1,2,...$ için

$$iz(R_{n+1}^{(x)}) = 1+\left(\frac{1}{2(2-\frac{1}{n})}\right)^x iz(R_n^{(x)})$$

dir [3].

İspat.

$x>0$ olsun. Her n pozitif tamsayısı için,

$$\begin{aligned} iz(R_{n+1}^{(x)}) &= \frac{1}{\binom{2n}{n}^x} iz\left(S_{n+1}^{(x)}\right) \\ &= 1+\frac{1}{\binom{2n}{n}^x} iz\left(S_n^{(x)}\right) \\ &= 1+\frac{\binom{2n-2}{n-1}^x}{\binom{2n}{n}^x} iz(R_n^{(x)}) \\ &= 1+\left(\frac{1}{2(2-\frac{1}{n})}\right)^x iz(R_n^{(x)}) \end{aligned}$$

elde ederiz.

Örnek 4.2.1.

$x=1$ için $iz(R_2^{(1)})$, $iz(R_3^{(1)})$, $iz(R_4^{(1)})$ değerleri Lemma 4.2.1'e uygulanırsa

$$R_2^{(1)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \text{ ve } iz(R_2^{(1)})=\frac{3}{2}$$

$$R_3^{(1)}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\end{pmatrix} \text{ ve } iz(R_3^{(1)})=\frac{3}{2}$$

$$R_4^{(1)}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 10\\ 1 & 4 & 10 & 20\end{pmatrix} \text{ ve } iz(R_4^{(1)})=\frac{29}{20}$$

$$n=3 \text{ için } \frac{29}{20}=iz(R_4^{(1)})=1+\left(\frac{1}{2(2-\frac{1}{3})}\right)\underbrace{iz(R_3^{(1)})}_{\frac{3}{2}}=\frac{29}{20}$$

$$n=2 \text{ için } \frac{3}{2}=iz(R_3^{(1)})=1+\left(\frac{1}{2(2-\frac{1}{2})}\right)\underbrace{iz(R_2^{(1)})}_{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$$

eşitliklerinin sağlandığı görülür.

Lemma 4.2.2.

Her $x>0$ sayısı için aşağıdakilerden biri ele alınır.

a) $iz(R_n^{(x)})<iz(R_{n+1}^{(x)}), n=1,2,...$

b) $n\geq m+1$ için $iz(R_n^{(x)})>iz(R_{n+1}^{(x)})$ olacak şekilde bir pozitif m tamsayısı vardır.

ifadelerinden birisi geçerlidir [3].

İspat.

$x>0$ olsun. (a) şıkkının sağlanmadığını kabul edelim. Bu takdirde $iz(R_m^{(x)})\geq iz(R_{m+1}^{(x)})$ olacak şekilde bir m tamsayısı vardır.

İndüksiyon ve Lemma 4.2.1'i kullanarak her $n \geq m+1$ tamsayıları için $iz(R_n^{(x)}) > iz(R_{n+1}^{(x)})$ olduğu görülür

Teorem 4.2.1.

Her $x > 0$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} iz(R_n^{(x)}) = \frac{4^x}{4^x - 1}$$

dir [3].

İspat.

$x > 0$ verilsin. Açıktır ki, $\{iz(R_n^{(x)})\}$, sınırlı bir dizidir ve Lemma 4.2.2'den yeterince büyük n'ler için dizinin monoton olduğunu söyleriz. Böylece $\lim_{n\to\infty} iz(R_n^{(x)})$ limiti mevcuttur ve teorem, Lemma 4.2.1'den ispatlanır.

Şimdi, R_n'in pozitif tamsayı Hadamard kuvvetlerini göz önüne alalım.

Teorem 4.2.2.

Her pozitif k tamsayısı için

$$\lim_{n\to\infty} \rho(R_n^{(k)}) = \frac{4^k}{4^k - 1}$$

dir [3].

İspat.

k bir pozitif tamsayı olsun.Simetrik pozitif tanımlı matrislerin, pozitif tamsayı Hadamard kuvvetleri, pozitif tanımlı olduğundan $R_n^{(k)}$ pozitif tanımlıdır. Böylece $n = 1, 2, ...$ için $\rho(R_n^{(k)}) \leq iz(R_n^{(k)})$ dır ve teoremimiz, Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.2.1 ten ispatlanır.

k, bir pozitif tamsayı olsun. Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2, $S_n^{(k)}$ nın pozitif tanımlı matrisinin, kendinden başka diğer $n-1$ tane öz değerinin toplamından daha büyük olan bir dominant öz değere sahip olduğunu söyler.

4.3. Konjektürler ve Bir İlgili Matris

Burada ‘‘Teorem 4.2.2, R_n’in diğer hadamard kuvvetlerine genişletilebiliri mi?’’ sorusu akla gelmektedir.

Şimdi aşağıdakileri açık problemleri verelim.

Konjektür 4.3.1.

Her pozitif x reel sayısı için,

$$\lim_{n\to\infty} \rho(R_n^{(x)}) = \frac{4^x}{4^x - 1}$$

dir [3].

Teorem 4.2.1’den Konjektür 4.3.1, aşağıdaki konjektüre denktir.

Konjektür 4.3.2.

Her pozitif x reel sayısı için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\rho(R_n^{(x)})}{iz(R_n^{(x)})} = 1$$

dir. Eğer;

$$p_{ij} = \binom{i-1}{j-1}, 1 \le j \le i \le n$$

olmak üzere $P_n = (p_{ij})$

olacak şekilde $n.$ mertebeden reel alt üçgen matris ise bu takdirde

$S_n = P_n P_n^T$ dir[28].

$\hat{S}_n = P_n^T P_n$ pozitif matrisi, S_n ile aynı öz değerlere sahip olduğundan $x = k = 1$ için Teorem 4.2.3 ve Teorem 4.2.1’den aşağıdaki teoremi elde ederiz [3].

Teorem 4.3.1.

Eğer $\rho(S_n)$ ve $iz(S_n)$ sırasıyla $\hat{S}_n$’in Perron kökü ve izi ise bu takdirde

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho(S_n)}{\binom{2n-2}{n-1}}=\frac{4}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{iz(S_n)}{\binom{2n-2}{n-1}}$$

dir [3].

$\rho(S_n^{(x)})$ ve $iz(S_n^{(x)})$, sırasıyla $\hat{S}_n^{(x)}$ Hadamard kuvvetinin Perron kökü ve izi ise, Teorem 4.3.1'den

$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho(S_n^{(x)})}{iz(S_n^{(x)})}=1$ olur.

Buradan aşağıdaki problemi veririz.

Problem 4.3.1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho(S_n^{(x)})}{iz(S_n^{(x)})}=1$$

olacak şekilde bir pozitif x reel sayısı bulunabilir mi?

KAYNAKLAR:

[1] **Roger A. Horn and Fuad Kittaneh,** *Two Applıcatıons of a Bound on the Hadamard Product with a Cauchy Matrix,*The Electronic Journal of Linear Algebra, Vol. 3, pp. 4-12, 1998

[2] **Guang-Hui Cheng,Xiao-Yu Cheng, Ting-Zhu Huang, Tin-Yau Tam,** *Some Bounds for the Spectral Radius of the Hadamard Product of Matrices,* Applied Mathematics E-Notes, 5 (2005), 202-209

[3] **Ashkan Ashrafi, Peter M. Gibson**, *Eigenvalues of Hadamard Powers of Large Symmetric Pascal Matrices,* Linear Algebra and its Applications, 405 (2005), 60-66

[4] **Bozkurt Durmuş, Türen Bahri,** *Lineer Cebir*, Sel-Ün Vakfı Yayınları, Konya 2003.

[5] **Solak Süleyman**,*Cauchy-Toeplitz ve Cauchy Henkel matrislerinin spektral normları için sınırlar ve Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel interval matrislerinin normları,* Selçuk Üniversitesi doktora tezi, Konya 2001.

[6] **A.Abdessemed and E.B. Davies**, *Some Commutator Estimates in the Schatten Classes*, J. London Math. Soc., 39:299-308, 1989.

[7] **R. Bhatia**, *Matrix Factorisations and their Perturbations*, Linear Algebra Appl, 197/198:245-276, 1994.

[8] **R. Bhatia C. Davis**, *A Cauchy Schwarz Inequality for Operators with Applications*, Linear Alcebra Appl., 223/224:119-129, 1995.

[9] **R. Bhatia C. Davis,and A. McIntosh**, *Perturbations of Spectral Subspaces and Solution of Linear Operator Equations*,Linear Algebra Appl., 52/53:45-67, 1983.

[10] **C. Davis and W. M. Kahan**, *The Rotation of Eigenvectors by a Perturbation*. III, SIAM J. Numer. Anal., 7:1-46, 1970

[11] **E. Heinz**, Beitrage *zur Storungstheorie der Spektralzer legung*, Math. Annalen, 123: 415-438, 1951.

[12] **N. J. Higham**, *The Matrix Sign Decomposition and its Relation to the Polar Decomposition*, Linear Algebra Appl.,212/213:3-20, 1994

[13] **F. Kittaneh**, On *the Continuity of the Absolute Value Map in the Schatten Classes*, Linear Alcebra Appl., 118:61-68, 1989.

[14] **R. A. Horn**, *Norm Bounds for Hadamard products and an Aritmetic-Geometric Mean Inequality for Unitarily Invariant Norms*, Linear Alcebra Appl., 223/224:355-361, 1995.

[15] **R. A. Horn, and C.R. Jonson**, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1985.

[16] **R. A. Horn, and C.R. Jonson**, *Topics in Matrix Analysis,* Cambridge University Pres, New York, 1991.

[17] **C. Jordan,** *Memoire sur les Formes Bilinearies*, J. Math. Pures Appl. (Ser. 2),19:35-54, 1874.

[18] **R.-C.Li**, *New Perturbation Bounds for the Unitary Polar Factor*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 16:327-332, 1995.

[19] **R. Mathias**, *Perturbation Bounds for the Polar Decomposition*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 14:588-597, 1993.

[20] **A. Berman R. J. Plemmons**, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Classics in Applied Mathematics, 9, SIAM, Philadelphia, 1994.

[21] **S.C. Chen**, *A Lover Bound for the Minimum Eigenvalue of the Hadamard Product of Matrices*, Linear Algebra Appl., 378(2004), 159-166

[22] **L. Elsner, C. R. Jonson J. A. Dias Da Silva**, *The Perron Root of a Weighted Geometric Mean of Nonnegative Matrices*, Linear and Multilinear Algebra, 24(1988), 1-13.

[23] **J. Z. Hearon**, *Compartmental Matrices with Single Root and Nonnegative Nilpotent Matrices*, Math. Biosci., 14(1972), 135-142.

[24] **Y. Song**, *On an Inequality for the Hadanmard Product of an M-Matrix and its inverse*, Linear Algebra Appl., 305(2000),99-105.

[25] **B. Y. Wang, X. Zhang and F. Zhang**, *On The Hadamard Product of Inverse M-Matrices*, Linear Algebra Appl., 305(2000), 23-31.

[26] **X. Yong and Z. Wang**, *On a Conjecture of Fiedler and Markham*, Linear Algebra Appl., 288(1999), 259-267.

[27] **A. Ashrafi, P. M. Gibson**, *An Involutory Pascal Matrix*, Linear Algebra Appl.387(2004)277-286.

[28] **R.Brawer, M. Pirovino**, *The Linear Algebra of the Pascal Matrix*, Linear Algebra Appl. 174(1992)13-23

[29] **P. Fischer, J. D. Stegeman**, *Fractional Hadamard Powers of Positive Semidefiinite Matrices*, Linear Algebra Appl.371(2003)53-74.

[30] **H. Minc**, *Nonnegative Matrices*, John Wiley, New York, 1988.