ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

2. TİP KONUMSAL UYARLANMIŞ ÇATI VE ONUN TZITZEICA VE SMARANDACHE EĞRİLERİNE UYGULANMASI

Kübra AVCI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2023

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Kübra AVCI tarafından hazırlanan **"2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatı ve Onun Tzitzeica ve Smarandache Eğrilerine Uygulanması"** adlı tez çalışması 10/05/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Dr. Öğr. Üyesi Kahraman Esen ÖZEN

Jüri Üyeleri **:**

Başkan **:** Dr. Öğr. Üyesi Kahraman Esen ÖZEN
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Dr. Öğr. Üyesi Celalettin KAYA
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Hidayet Hüda KÖSAL
Matematik Anabilim Dalı
Sakarya Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hamit ALYAR

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatı ve Onun Tzitzeica ve Smarandache Eğrilerine Uygulanması**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı"yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (10/05/2023).

Kübra AVCI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

2. TİP KONUMSAL UYARLANMIŞ ÇATI VE ONUN TZITZEICA VE SMARANDACHE EĞRİLERİNE UYGULANMASI

Kübra AVCI

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Kahraman Esen ÖZEN

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş bölümü olup literatür bilgisine ayrılmıştır. İkinci bölümde matematiksel temel kavramlara ve tezin orijinal kısmı için faydalı olacağı düşünülen bazı fiziksel kavramlara değinilmiştir. Üçüncü bölümde bu çalışmada önemli yer tutan Konumsal Uyarlanmış Çatının inşa süreci açıklanmıştır. Dördüncü bölüm çalışmamızın orijinal kısmını oluşturan bölümlerden ilki olup bu bölümde çalışmamızın temelini oluşturan 2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatı tanıtılmış ve bu çatıya göre açısal hız vektörü verilmiştir. Beşinci bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında yer alan Tzitzeica eğrilerine dair karakterizasyonlar verilmiş ve küresel Tzitzeica eğrileri için bazı sonuçlar elde edilmiştir. Son bölümde ise 2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatıya göre özel Smarandache eğrilerinin ürettiği yörüngeler ve bu yörüngelerin Frenet elemanları üzerinde durulmuştur.

2023, 57 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Parçacık kinematiği, Konumsal uyarlanmış çatı, Tzitzeica eğrileri, Smarandache eğrileri

ABSTRACT

Master of Science Thesis

TYPE 2 PAF AND ITS APPLICATION TO TZITZEICA AND SMARANDACHE CURVES

Kübra AVCI

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Asst. Dr. Kahraman Esen ÖZEN

This thesis includes six sections. The first section is an introduction devoted to the literature knowledge. In the second section, basic mathematical and some physical concepts thought to be useful for the original part of the thesis are mentioned. In the third section, the construction process of the Positional Adapted Frame which has importance for this study is explained. Fourth section is the first of the sections which constitute the original part of our study. Type 2-Positional Adapted Frame which constitutes the basis of our study is introduced and the angular velocity vector is given according to this frame in this section. In fifth section, some characterizations related to Tzitzeica curves in 3-dimensional Euclidean space are given and some results are obtained for the spherical Tzitzeica curves. In the last section, the trajectories generated by special Smarandache curves according to the Type 2- Positional adapted Frame and the Frenet elements of these trajectories are emphasized.

2023, 57 pages

Keywords: Particle kinematics, Positional adapted frame, Tzitzeica curves, Smarandache curves

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Kahraman Esen ÖZEN'e çalışma süresince her türlü yol gösterici tavrı, desteği ve sabrı için teşekkürü borç bilirim. Ayrıca bu günlere gelmemde desteği olan canım ailem ve tezimde manevi desteklerini esirgemeyen tüm arkadaşlarıma da teşekkür ederim.

Kübra AVCI
Çankırı, Mayıs 2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**
ABSTRACT ..... **ii**
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... **iii**
İÇİNDEKİLER ..... **iv**
SİMGELER DİZİNİ ..... **v**
KISALTMALAR DİZİNİ ..... **vi**
ŞEKİLLER DİZİNİ ..... **vii**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL KAVRAMLAR **4**
2.1. Matematiksel Kavramlar **4**
2.2. Fiziksel Kavramlar **13**
3. KONUMSAL UYARLANMIŞ ÇATI **18**
4. İKİNCİ TİP (2. TİP) KONUMSAL UYARLANMIŞ ÇATI **23**
5. İKİNCİ TİP (2. TİP) KONUMSAL UYARLANMIŞ ÇATIYA GÖRE TZITZEICA EĞRİLERİNİN KARAKTERİZASYONU **30**
6. İKİNCİ TİP (2. TİP) KONUMSAL UYARLANMIŞ ÇATIYA GÖRE ÖZEL SMARANDACHE EĞRİLERİNİN ÜRETTİĞİ YÖRÜNGELER **42**
7. TARTIŞMA VE SONUÇ **53**
KAYNAKLAR **54**
ÖZGEÇMİŞ **57**

SİMGELER DİZİNİ

$\boldsymbol{T_{E^n}\,\alpha(t)}$	$\boldsymbol{\alpha}$ eğrisinin $\boldsymbol{\alpha(t)}$ noktasındaki tanjant uzayı
$\boldsymbol{v}$	Ani hız vektörü
$\mathbf{a}$	Ani ivme vektörü
$\mathbf{B}$	Binormal vektör
$\mathbf{N}$	Birim asli normal vektör
$\mathbf{T}$	Birim teğet vektör
τ	Burulma fonksiyonu
$\mathbf{P}$	Çizgisel momentum vektörü
$\overrightarrow{\boldsymbol{\omega}}$	Darboux vektörü
κ	Eğrilik fonksiyonu
$\mathbf{K}, \mathbf{N}, \mathbf{R}$	2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatının baz vektörleri
$\sigma_2(s^*)$	$\mathbf{K}_\alpha\mathbf{N}_\alpha$ −Smarandache yörüngesi
$\sigma_3(s^*)$	$\mathbf{K}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$ −Smarandache yörüngesi
$\boldsymbol{x}$	Konum vektörü
$\mathbf{T}, \mathbf{M}, \mathbf{Y}$	Konumsal Uyarlanmış Çatının baz vektörleri
$\sigma_1(s^*)$	$\mathbf{N}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$ −Smarandache yörüngesi
E^n	n-boyutlu Öklid uzayı
$\|\quad\|$	Norm
H_o	O noktasındaki açısal momentum
$S^2_{O,r}$	Orijin merkezli r yarıçaplı küre
$\langle\,.\,\rangle$	Öklid iç çarpım
d	Öklid metriği
I	Reel Öklid uzayında bir açık aralık
$\wedge$	$\mathbb{R}^3$ te vektörel çarpım

KISALTMALAR DİZİNİ

PAF	Positional Adapted Frame (Konumsal Uyarlanmış Çatı)
Type-2 PAF	Type-2 Positional Adapted Frame (2. Tip Konumsal Uyarlanmış çatı)
vd.	Ve Diğerleri

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Eğri (Yüce 2017)..... 7
Şekil 2.2 Parametre değişimi (Yüce 2017) 7
Şekil 2.3 Yay uzunluğu (Sabuncuoğlu 2014) 8
Şekil 2.4 Parçacığın yer vektörü (Tameroğlu ve Özbek 1972)..... 13
Şekil 2.5 Parçacığın hız vektörü (Tameroğlu ve Özbek 1972) 14
Şekil 2.6 Hız değişimi (Tameroğlu ve Özbek 1972)..... 15
Şekil 2.7 Moment (Tameroğlu ve Özbek 1972)..... 16
Şekil 2.8 Açısal momentum vektörü (Tameroğlu ve Özbek 1972) 17
Şekil 3.1 Konumsal Uyarlanmış Çatının İnşası (Özen *et al.* 2021a) 20

1. GİRİŞ

Eğriler teorisi bilim ve teknolojinin birçok uygulama sahasında kendine yer bulduğu için diferansiyel geometrinin en çok rağbet gören konuları arasında yer alır. Eğriler teorisi farklı boyutlara sahip birçok farklı uzayda çalışılmış olsa da 3-boyutlu Öklid uzayı bu uzaylar arasında en çok tercih edilen uzaydır. Biz de bu çalışmamızda 3-boyutlu Öklid uzayı üzerinde çalışacağız. Uzayda alınan farklı iki eğri için bunların Frenet vektörleri ve Frenet eğrilikleri arasındaki ilişkilere dayanarak bazı özel eğriler tanımlanmıştır. Bu özel eğrilerin en bilinenleri arasında Involüt-Evolüt eğri çifti, Bertrant eğri çifti, Mannheim eğri çifti, Tzitzeica eğrileri ve Smarandache eğrileri yer almaktadır.

Bu çalışmada Tzitzeica eğrileri ve Smarandache eğrileri üzerinde durulacaktır. Tzitzeica eğrileri Rumen matematikçi Gheorghe Tzitzeica (1911) tarafından ortaya konan bir özel eğri sınıfıdır. 3-boyutlu Öklid uzayında bir Tzitzeica eğrisi eğrinin 2. Frenet eğriliğinin, eğrinin herhangi bir noktasındaki oskülatör düzlemin başlangıç noktasına olan uzaklığının karesine oranının sabit olmasıyla karakterize edilir (Tzitzeica 1911). Crasmareanu **(**2002) çalışmasında 3-boyutlu Öklid uzayında Tzitzeica koşulunu sağlayan hiperbolik, eliptik ve silindirik eğrileri harmonik denklemin çözümüne dayanacak şekilde ifade etmiştir. Karacan and Bükcü (2009) ise gerçekleştirdikleri çalışmada E_1^3 uzayında eliptik silindirik Tzitzeica eğrilerini bir harmonik denklemin çözümüne dayanacak şekilde ifade etmiştir. Diğer yandan E_1^3 uzayında Tzitzeica tipi non-null eğriler Aydın and Ergüt (2014) tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada yazarlar Tzitzeica eğrileri ile rektifiyen eğriler arasındaki ilişkileri vermiştir. Bu konuyla alakalı bir başka çalışma ise Bayram *et al*. (2018) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada yazarlar Tzitzeica eğrilerini eğriliklerine göre karakterize etmişlerdir. Ayrıca sabit eğrilikli Tzitzeica eğrisi olamayacağını göstermişlerdir. Yakın geçmişte ise Eren and Ersoy (2021) 3-boyutlu Öklid uzayında Tzitzeica eğrisi olma koşullarını 1. ve 2. tip Bishop çatılarına göre elde etmiştir. Son olarak Özen *et al.* (2022a) bu tezin konusunu oluşturan 2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatıya göre Tzitzeica eğrilerini karakterize etmiş ve küresel Tzitzeica eğrilerine dair önemli sonuçlara ulaşmıştır.

Smarandache eğrileri üzerine Turgut and Yılmaz (2008) bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışmada yazarlar Smarandache eğrilerini Minkowski uzayında ele almış ve E_1^4 de $\mathbf{TB_2}$ Smarandache eğrileri için bazı özel halleri incelemiş, bu eğrinin Frenet çatı elemanlarını elde etmiştir. İki yıl sonra Ali (2010) Smarandache eğrilerini Öklid uzayında göz önüne almıştır. Gerçekleştirilen bu çalışmada özel Smarandache eğrileri ifade edilmiş ve bu eğrilerin Frenet elemanları hesaplanmıştır. Bu iki öncü çalışma Minkowski uzayında ve Öklid uzayında gerçekleştirilecek birçok çalışmaya referans olmuştur.

Şenyurt ve Sivas (2013) ise $\mathbf{NC}-$ Smarandache eğrisini tanımlamışlardır (Burada $\mathbf{C}$, Darboux vektörünü belirtmektedir). Ayrıca **NB** ve **TNB**- Smarandache eğrilerinin eğriliklerini vermişlerdir. Aynı yıl Bektaş and Yüce (2013), 3-boyutlu Öklid uzayında Darboux çatısına göre Smarandache eğrilerini ele almış ve bunlara dair önemli birkaç karakterizasyonu elde etmiştir. Çetin *et al.* (2014) ise 3-boyutlu Öklid uzayında özel Smarandache eğrilerini Bishop çatısına göre incelemiş ve bu eğrilere dair geometrik özellikler sunmuştur. Aynı yıl Taşköprü and Tosun (2014), Sabban çatısına göre Smarandache eğrilerini ele almış ve önemli bazı sonuçlar ortaya koymuştur. Bundan bir yıl sonra Çalışkan and Şenyurt (2015) küresel göstergeler için Smarandache eğrilerini Sabban çatısına göre incelemiştir. 2015 yılından günümüze değin 3-boyutlu Öklid uzayında Smarandache eğrilerine dair birçok spesifik çalışma farklı çatılara göre gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmalardan öne çıkan bazıları şunlardır: (Şenyurt and Çalışkan 2017, Şenyurt *et al.* 2019, Şenyurt *et al.* 2020, Özen and Tosun 2021a, Nurkan and Güven 2022).

Yukarıda bahsedilen çalışmalardan da görüleceği üzere ortanormal hareketli çatılar konusu eğriler teorisinde önemli bir yere sahiptir. Ortonormal hareketli çatılar üzerine çalışan araştırmacılar için dönüm noktası 19. yüzyılda Frenet çatısının keşfedilmesi olmuştur (Frenet 1852). Bu keşfin ardından birçok yeni çatı inşa edilmiştir. Bu çatılardan öne çıkan bazıları Darboux çatısı, Bishop çatısı, Sabban çatısı, Tip 2- Bishop çatısı ve q-çatıdır. Bu çatılara ilişkin temel kaynaklar sırasıyla şu şekildedir: (Darboux 1896, Bishop 1975, Koenderink 1990, Yılmaz and Turgut 2010, Dede *et al.* 2015).

Yakın geçmişte Özen and Tosun (2021a) bu çalışmamıza da ışık tutan Konumsal Uyarlanmış Çatıyı litaretüre sunmuştur. Bu çatı Özen and Tosun (2021b) tarafından Smarandache eğrilerini ele almak için kullanılmıştır. Benzer amaç doğrultusunda Solouma (2021) çalışmasında da bu çatıdan faydalanılmıştır. Özen *et al.* (2022b) çalışmalarında Tzitzeica eğrilerini, İşbilir *et al.* (2022) çalışmalarında Mannheim eğrilerini, İşbilir *et al.* (2023a) çalışmalarında Bertrand eğrilerini, Gürbüz (2022) çalışmasında Lorentz kuvvetini, İşbilir *et al.* (2023b) çalışmalarında Spinorları bu çatıyı kullanarak ele almışlardır.

Bu tezde Konumsal Uyarlanmış Çatının yeni bir versiyonu tanımlanmış ve bu çatıya 2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatı ismi verilmiştir. Ayrıca, 3-boyutlu Öklid uzayında Tzitzeica eğrileri için bu çatıya göre bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir. Son olarak, 2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatıya göre özel Smarandache eğrilerinin ürettiği yörüngeler ele alınmış ve bu yörüngelerin Frenet elemanları hesaplanmıştır. Bu çalışmanın amacı diferansiyel geometri ve parçacık kinematiğinin bazı özel uygulamalarında faydalı olacağını düşündüğümüz 2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatıyı bu konuya ilgi duyabilecek araştırmacılara tanıtmaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Matematiksel Kavramlar

Tanım 2.1.1 Boştan farklı bir *M* kümesine karşılık, *K* cismi üzerinde bir *V* vektör uzayı göz önüne alınsın.

$$f: M \times M \to V$$

fonksiyonu

A$_1$) $\forall \quad P, \theta, R \quad i$çin $\quad f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$,

A$_2$) $\forall\ P \in M$ ve $\forall\ \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in M$ mevcuttur.

özelliklerini sağlıyorsa M ye V ile birleştirilmiş afin uzay denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.2 M afin uzayının eşleştiği vektör uzayının bir iç çarpım uzayı olması durumunda *M* ye özel olarak Öklid uzay adı verilir (Şahin 2022).

Tanım 2.1.3 $\mathbb{R}^n$ vektör uzayında keyfi $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektörleri için

$$g = \langle .,. \rangle : \mathbb{R}^n x \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

şeklinde tanımlı g fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpım belirtir. Bu iç çarpım $\mathbb{R}^n$ uzayında Öklid iç çarpımı olarak adlandırılır.

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

değerine de $\vec{x}$ vektörünün uzunluğu veya normu denir (Özdemir 2020).

Tanım 2.1.4 $\mathbb{R}^3$ uzayında $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörel çarpımı

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

şeklinde tanımlanır. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ vektörü $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörlerine dik bir vektördür (Özdemir 2020).

Not 2.1.5 $\mathbb{R}^n$ reel sıralı $n-$liler kümesi $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı ile eşleşen bir afin uzay olup $\mathbb{R}^n$ vektör uzayının yukarıda belirtilen Öklid iç çarpımı ile ele alındığı durumlarda, $\mathbb{R}^n$ reel sıralı $n-$liler kümesi için E^n gösterimi kullanılır (Özdemir 2020).

Tanım 2.1.6

$$d: E^n \times E^n \to \mathbb{R}$$

$$(K, L) \to d(K, L) = \left\| \overrightarrow{KL} \right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (l_i - k_i)^2}$$

şeklinde tanımlanmış d fonksiyonuna E^n Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu denir. $d(K, L)$ reel sayısına $K = (k_1, k_2, \ldots, k_n),\ L = (l_1, l_2, \ldots, l_n) \in E^n$ noktaları arasındaki uzaklık denir. (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.1.7 E^n de uzaklık fonksiyonu metrik olma şartlarını sağlar (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.8 Bir V iç çarpım uzayında $\vec{\rho}, \vec{r}$ sıfırdan farklı iki vektör ise bu iki vektör arasındaki açı

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{\rho}, \vec{r} \rangle}{\|\vec{\rho}\|\|\vec{r}\|}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

eşitliği ile tanımlanır (Şahin 2022).

Tanım 2.1.9 E^n de $(n+1)$ −sayıdaki $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ sıralı noktalarına $\mathbb{R}^n$ de karşılık gelen (n) −sayıdaki $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektörleri $\mathbb{R}^n$ için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ sistemine E^n nin bir dik çatısı veya Öklid çatısı denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.10 $E^n, n-$ boyutlu Öklid uzayında

$$E_0 = (0,0,\dots,0), E_1 = (1,0,\dots,0), \dots, E_n = (0,0,\dots,1)$$

verilmek üzere $\{E_0, E_1, \dots, E_n\}$ çatısına standart Öklid çatısı ismi verilir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.11 E^n de herhangi bir X noktasının E^n deki standart Öklid çatısına göre verilen ifadesi

$$\overrightarrow{E_0X} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{E_0X}$$

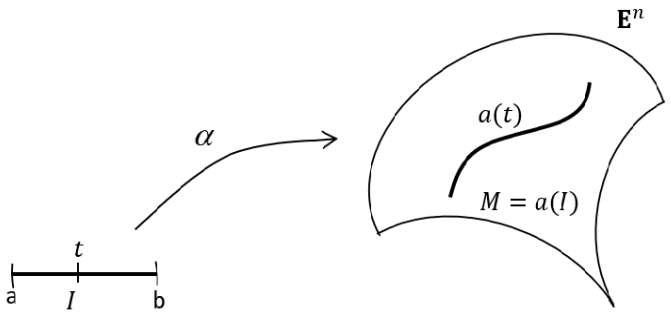
şeklindedir. Buradaki $x_i: E^n \to \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$ fonksiyonlarına X noktasının Öklid koordinat fonksiyonları ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ reel değerli sıralı fonksiyon n −lisine E^n nin Öklid koordinat sistemi denir (Hacısalihoğlu 2000).

Tanım 2.1.12 $I \subseteq \mathbb{R}, I = (a, b)$ bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha: I \to E^n$$

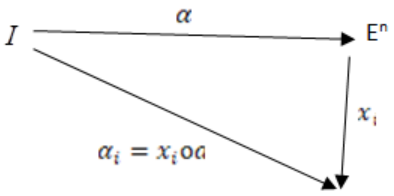
$$t \to \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\alpha(I) \subset E^n$ alt kümesine E^n de diferansiyellenebilir eğri (veya parametrik eğri) denir. $\alpha: I \to E^n$, C^k sınıfından ise α ya C^k sınıfından eğri denir.



Şekil 2.1 Eğri (Yüce 2017)

Tanım 2.1.13 E^n de Öklid koordinat fonksiyonları $x_1, x_2, \dots, x_n$ olarak verilirse



Şekil 2.2 Parametre değişimi (Yüce 2017)

diyagramı oluşturulabilir (Yüce 2017).

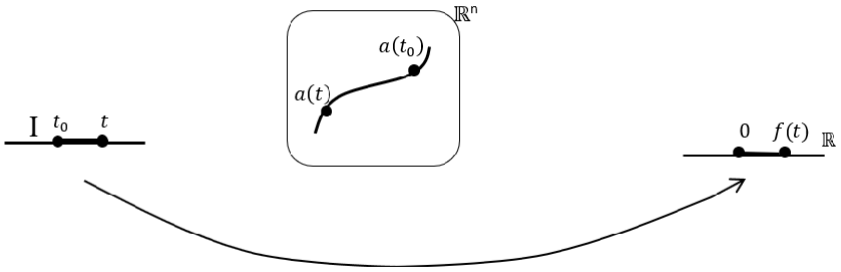
Tanım 2.1.14 $\alpha: I \to E^n$ eğri belirtmek üzere her $t \in I$ sayısı için α nın t ye karşılık gelen $\alpha(t)$ noktasındaki $\alpha'(t) \in T_{E^n}\,\alpha(t)$ tanjant vektörüne eğrinin hız vektörü denir ve

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\Big|_t, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}\Big|_t\right)\Big|_{\alpha(t)}$$

denklemi ile gösterilmektedir (Hacısalihoğlu 1980).

Tanım 2.1.15 $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. Her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ oluyorsa α eğrisine düzenli eğri (regüler eğri) denir (Sabuncuoğlu 2014).

Tanım 2.1.16 $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ eğrisi için $t_0 \in I$ olmak üzere eğri üstünde $\alpha(t_0)$ noktasından başlayarak yay uzunluğunu ölçmeye başlansın.



Şekil 2.3 Yay uzunluğu (Sabuncuoğlu 2014)

$t < t_0$ ise $\alpha(t_0)$ ve $\alpha(t)$ noktaları arasında bulunan eğri parçasının uzunluğunun negatifi $f(t)$ olsun. $t = t_0$ için $f(t_0) = 0$ olarak tanımlansın. $t_0 < t$ ise $\alpha(t_0)$ ve $\alpha(t)$ noktaları arasında bulunan eğri parçasının uzunluğu $f(t)$ olsun. Böylece I aralığından $\mathbb{R}$ ye giden bir $f: t \to f(t)$ fonksiyonu tanımlanmış olur. Bu fonksiyona, α eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu denir (Sabuncuoğlu 2014).

Teorem 2.1.17 $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu f olmak üzere

$$f' = \|\alpha'\| \tag{2.1}$$

eşitliği sağlanır (Sabuncuoğlu 2014).

Teorem 2.1.18 $\alpha: I \to \mathbb{R}^n$ eğrisinin yay uzunluğu fonksiyonu f ile gösterilmek üzere

$$f(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(u)\| \, du \tag{2.2}$$

eşitliği geçerlidir (Sabuncuoğlu 2014).

Tanım 2.1.19 M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall t \in I$ için

$$\|\alpha'(t)\| = 1 \tag{2.3}$$

ise M eğrisi (I, α) ya göre birim hızlı eğridir denir. Eğrinin $t \in I$ parametresine yay parametresi ismi verilir (Hacısalihoğlu 2000).

Teorem 2.1.20 $\alpha: I \to E^n$ birim hızlı olmayan regüler eğri olsun. Her $s \in J$ için

$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s)$$

eğrisini birim hızlı kılacak şekilde bir $h: J \to I$ parametre dönüşümü vardır (Özdemir 2020).

Sonuç 2.1.21 E^n uzayındaki bir regüler eğri, birim hızlı hale gelecek şekilde yeniden parametrelendirilebilir (Sabuncuoğlu 2014).

Tanım 2.1.22 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s) \tag{2.4}$$

eşitliğiyle belirli $\mathbf{T}(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektörü denir (Sabuncuoğlu 2014).

Tanım 2.1.23 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\kappa: I \to \mathbb{R},\ \kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| \tag{2.5}$$

fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına ise eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir (Sabuncuoğlu 2014).

Tanım 2.1.24 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi dikkate alınsın.

$$\mathbf{N}(s) = \frac{1}{\kappa(s)}\mathbf{T}'(s) \tag{2.6}$$

eşitliği ile belirli $\mathbf{N}(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki birinci dik vektörü (asli normali) adı verilir (Sabuncuoğlu 2014).

Tanım 2.1.25 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi dikkate alınsın.

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \wedge \mathbf{N}(s) \tag{2.7}$$

eşitliği ile tanımlı $\mathbf{B}(s)$ vektörüne α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki ikinci dik vektörü (binormali) adı verilir (Sabuncuoğlu 2014).

Tanım 2.1.26 $\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)$ vektörlerine, $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet vektörleri adı verilir. $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ kümesine ise α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet çatısı denir (Sabuncuoğlu 2014).

Tanım 2.1.27 Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları **T,N,B** olmak üzere,

$$\tau: I \to \mathbb{R},\ \tau(s) = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle \tag{2.8}$$

fonksiyonu α eğrisinin burulma fonksiyonu olarak verilir (Sabuncuoğlu 2014).

Teorem 2.1.28 Birim hızlı $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları **T,N,B** olmak üzere,

$$\mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}$$

$$\mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \tag{2.9}$$

$$\mathbf{B}' = -\tau\mathbf{N}$$

eşitliği geçerlidir (Sabuncuoğlu 2014).

Tanım 2.1.29 $\mathbb{R}^3$ uzayında , $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları **T, N, B** olsun.

- Sp{ $\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{N}(s)$} düzlemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki dokunum düzlemi veya oskülatör düzlemi,

- Sp{ $\mathbf{N}(s)$, $\mathbf{B}(s)$} düzlemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki dik düzlemi veya normal düzlemi,

- Sp{$\mathbf{T}(s)$, $\mathbf{B}(s)$} düzlemine α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki doğrultma düzlemi veya rektifiyan düzlemi denir (Sabuncuoğlu 2014).

Teorem 2.1.30 $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi için Frenet vektör alanları **T,N,B** olmak üzere

$$\mathbf{N} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{T}, \quad \mathbf{B} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{N} \tag{2.10}$$

eşitliği geçerlidir (Sabuncuoğlu 2014).

Teorem 2.1.31 $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı olmayan bir eğri olmak üzere α nın Frenet vektör alanları için

$$\mathbf{T} = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} \ , \qquad \mathbf{B} = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} \ , \qquad \mathbf{N} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{T} \tag{2.11}$$

eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca α nın eğrilik ve burulması;

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} \ , \qquad \tau = \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \tag{2.12}$$

şeklinde hesaplanır (Sabuncuoğlu 2014).

Tanım 2.1.32 $\alpha(t)$, uzayda regüler bir eğri ve $\vec{u}$ uzayda sabit birim vektör olmak üzere, α eğrisinin teğet vektörü **T,** $\vec{u}$ ile sabit bir açı yapıyorsa, α eğrisine "helis" ismi verilir. Yani;

$$\langle \vec{\mathbf{T}}, \vec{u} \rangle = cos\theta = c, \quad c = sabit$$

olmalıdır. Buradaki $\vec{u}$ sabit vektörüne "helisin ekseni" denir (Şahin 2022).

Tanım 2.1.33 Bir uzay eğrisinin Frenet çatısına göre açısal hız vektörüne Darboux vektörü denir ve $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ ile gösterilir**.** Bir α eğrisinin **T,N,B** Frenet vektör alanları için Darboux vektörü

$$\mathbf{T}' = \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{T}$$

$$\mathbf{N}' = \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{N}$$

$$\mathbf{B}' = \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{B}$$

eşitliklerini sağlar (Özdemir 2020).

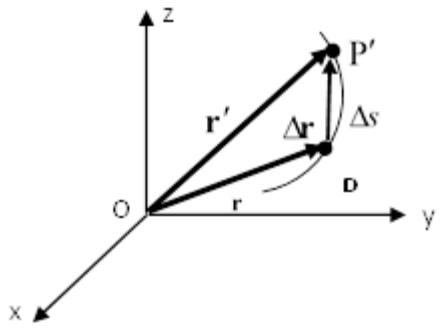
Teorem 2.1.34 Birim hızlı bir α eğrisi için $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ çatısının Darboux vektörü

$$\vec{\boldsymbol{\omega}} = \tau\mathbf{T} + \kappa\mathbf{B} \tag{2.13}$$

eşitliği ile belirtilir (Özdemir 2020).

2.2. Fiziksel Kavramlar

Bir parçacık doğrusal olmayan bir çizgi üzerinde ilerliyorsa bu parçacık eğrisel hareket yapmaktadır denir.



Şekil 2.4 Parçacığın yer vektörü (Tameroğlu ve Özbek 1972)

Şekil 2.4'teki P konumu için bir dik koordinat sisteminde O başlangıç noktasından P'ye doğru bir **r** vektörü alınır. Bu vektörün *r* şiddeti ile koordinat eksenlerince doğrultusu ve yönü tanımlanacağından noktanın konumu eksenlere göre tam belirlenmiş olur. Çizilmiş olan **r** vektörüne noktanın t anındaki yer vektörü denir.

Aynı noktanın $t + \Delta t$ zamanındaki konumu P′ yü ve yerini tanımlayan $\mathbf{r}'$ vektörünü düşünelim. P ile P′noktalarını birleştiren $\Delta \boldsymbol{r}$ vektörü, yer vektörünün Δt zaman aralığındaki değişimi olsun (Şekil 2.4).

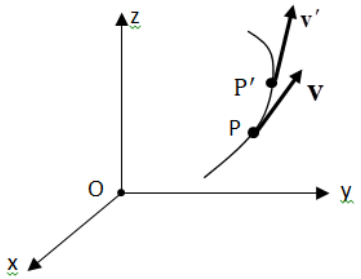
Parçacığın t anındaki ani hızı, Δt zaman aralıklarını ve $\Delta \boldsymbol{r}$ vektör artımlarını oldukça küçük seçerek elde edilir. Bu durumda ani hız

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{2.14}$$

biçiminde elde edilir. Δt ve $\Delta \boldsymbol{r}$ mesafeleri daraldıkça**,** P ve P′ noktaları birbirine yakınlaşır. Bu halde de **v** vektörü limitsel olarak parçacığın yörüngesine teğet olur. **v** vektörünün şiddeti olan v ye parçacığın yörünge hızı denir. Yörünge hızı (2.14) denkleminde $\Delta \boldsymbol{r}$ vektörü yerine PP′ kiriş uzunluğu koyularak bulunabilir. Δt azaldıkça, PP′ kiriş boyu PP′ yayının Δs boyuna yaklaşır (Şekil 2.4). Buradan da

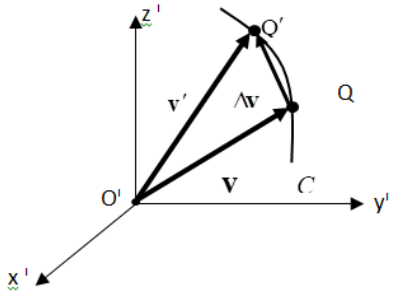
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{PP}'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \tag{2.15}$$

yazılır.



Şekil 2.5 Parçacığın hız vektörü (Tameroğlu ve Özbek 1972)

Parçacığın t anındaki hızı ile $t + \Delta t$ anındaki $\mathbf{v}'$ hızını düşünelim (Şekil 2.5). **v** ve $\mathbf{v}'$vektörleri için O′ başlangıç noktasına taşıma işlemi gerçekleştirelim (Şekil 2.6). Q noktası ve Q′ noktasını birleştiren $\Delta \mathbf{v}$ vektörü Δt zaman aralığında parçacığın hızındaki değişimi gösterir. Şekil 2.6'da verilen C eğrisi parçacığın ani hız vektörlerinin uçları tarafından çizilen eğridir.



Şekil 2.6 Hız değişimi (Tameroğlu ve Özbek 1972)

Parçacığın t zamanındaki ani ivmesi, Δt ve $\Delta \mathbf{v}$ yi gittikçe küçülterek bulunur. Yani ani ivme

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{2.16}$$

vektörü ile verilir (Tameroğlu ve Özbek 1972).

Tanım 2.2.1 v hızı ile hareket eden m kütleli parçacığın çizgisel (doğrusal) momentumu kütle ve hızın çarpımı olarak tanımlanır. Yani

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v} \tag{2.17}$$

dir. Newton'un ikinci hareket yasası nedeniyle, bir parçacığın çizgisel (doğrusal) momentumunun değişme hızı (zamana göre türevi) parçacığa etki eden net kuvvettir. Yani

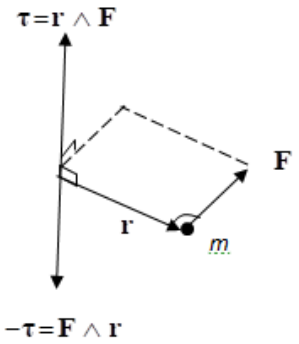
$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \tag{2.18}$$

olur (Beichner ve Serway 2008).

Tanım 2.2.2 Bir **F** kuvveti için seçilmiş bir eksene göre döndürme etkisine moment denir. Matematiksel olarak moment kavramı yer vektörü ile kuvvet vektörünün vektörel çarpımıdır:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}. \tag{2.19}$$

Burada **r** yer vektörü olarak verilen cismin dönme ekseni ile cisme uygulanan kuvvet vektörü **F** arasındaki vektördür.



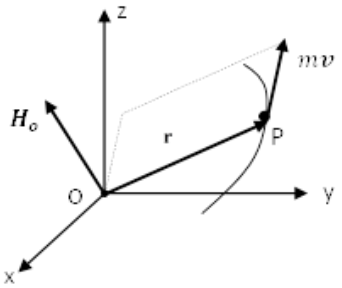
Şekil 2.7 Moment (Tameroğlu ve Özbek 1972)

Tanım 2.2.3 OXYZ sabit koordinat sisteminde hareket halinde bulunan m kütlesine sahip bir P parçacığı düşünülürse parçacık için herhangi bir anındaki momentumu olan mv vektörünün O noktasına göre momenti, parçacığın o anda O ya göre, momentumunun momenti veya açısal momentumu olarak ifade edilir. Ho ile gösterilir.

P nin yer vektörü **r** ile ifade edilmek üzere bir vektörün momenti kavramı göz önüne alınarak

$$\mathrm{H}_o = \mathbf{r} \wedge \mathrm{m}\mathbf{v} \tag{2.20}$$

bulunur (Tameroğlu ve Özbek 1972). Buradan H_o vektörünün **r** ile m**v** nin bulunmuş olduğu düzleme dik olduğu anlaşılmaktadır (Şekil 2.8).



Şekil 2.8 Açısal momentum vektörü (Tameroğlu ve Özbek 1972)

3. KONUMSAL UYARLANMIŞ ÇATI

Tezimizin bu bölümünde Özen and Tosun (2021a) çalışması temel alınacak ve bize gerekli olan kısımlar özetlenecektir.

E^3 uzayında sabit m kütleli bir parçacık yörüngesi boyunca hareket etsin. Uzayda keyfi bir O orijin noktası seçelim ve bu parçacığın t anındaki konum vektörünü $\mathbf{x}$ ile gösterelim. Yay uzunluğu s, t anına karşılık gelmek üzere $\alpha = \alpha(s)$ yörüngemizin birim hızlı parametrezisyonunu ifade etsin. Bu durumda $\alpha(s)$ noktasındaki birim teğet vektör, hız vektörü ve lineer momentum vektörü aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\mathbf{T}(s) = \frac{d\boldsymbol{x}}{ds}$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \left(\frac{ds}{dt}\right)\mathbf{T}(s) \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{p}(t) = m\left(\frac{ds}{dt}\right)\mathbf{T}(s).$$

Öte yandan $\alpha(s)$ noktasında

$$x = \langle \alpha(s), \mathbf{T}(s)\rangle \mathbf{T}(s) + \langle \alpha(s), \mathbf{N}(s)\rangle \mathbf{N}(s) + \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle \mathbf{B}(s) \tag{3.2}$$

eşitliği Frenet çatısına göre yazılabilir. Casey (2011) t anında parçacığın konum vektörü ile lineer momentum vektörünün vektörel çarpımı yardımıyla, parçacığın O orijin noktasına göre açısal momentumu aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\mathrm{H}_O = m\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle \left(\frac{ds}{dt}\right)\mathbf{N}(s) - m\langle \alpha(s), \mathbf{N}(s)\rangle \left(\frac{ds}{dt}\right)\mathbf{B}(s). \tag{3.3}$$

Bu çalışmada parçacığın açısal momentum vektörünün asla sıfır vektörüne karşılık gelmeyeceğini varsayacağız. Yani; kendimizi sıfırlanmayan açısal momentuma sahip yörüngeler ile kısıtlayacağız. Bu varsayım sayesinde, $\langle \alpha(s), \mathbf{N}(s)\rangle$ ve $\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle$

katsayı fonksiyonlarının aynı anda sıfır olmayacağını garanti etmiş oluruz. Yine bu varsayım sayesinde teğet doğrusunun yörünge boyunca O orijin noktasından geçmediğinden emin olabiliriz. Tekrar (3.2) denkleminde verilen $\mathbf{x}$ konum vektörüne geri dönelim ve bu vektörün zıt(ters) yönünde uzanan

$$-x = \langle -\alpha(s), \mathbf{T}(s)\rangle \mathbf{T}(s) + \langle -\alpha(s), \mathbf{N}(s)\rangle \mathbf{N}(s) + \langle -\alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle \mathbf{B}(s) \tag{3.4}$$

vektörünü göz önüne alalım. Bu vektörün $\alpha(s)$ noktasındaki anlık oskülatör düzlem $\pi_1(s)$ ve anlık rektifiyen düzlem $\pi_2(s)$ üzerine izdüşümleri hareketli çatımızı kurmamızda bize oldukça yardımcı olacaktır. Başlangıç noktası $\alpha(s)$ ve bitiş noktası O orijin noktasından $\pi_1(s)$ düzlemine atılan dikmenin ayağı olan vektör;

$$\boldsymbol{r}(s) = \langle -\alpha(s), \mathbf{T}(s)\rangle \mathbf{T}(s) + \langle -\alpha(s), \mathbf{N}(s)\rangle \mathbf{N}(s) \tag{3.5}$$

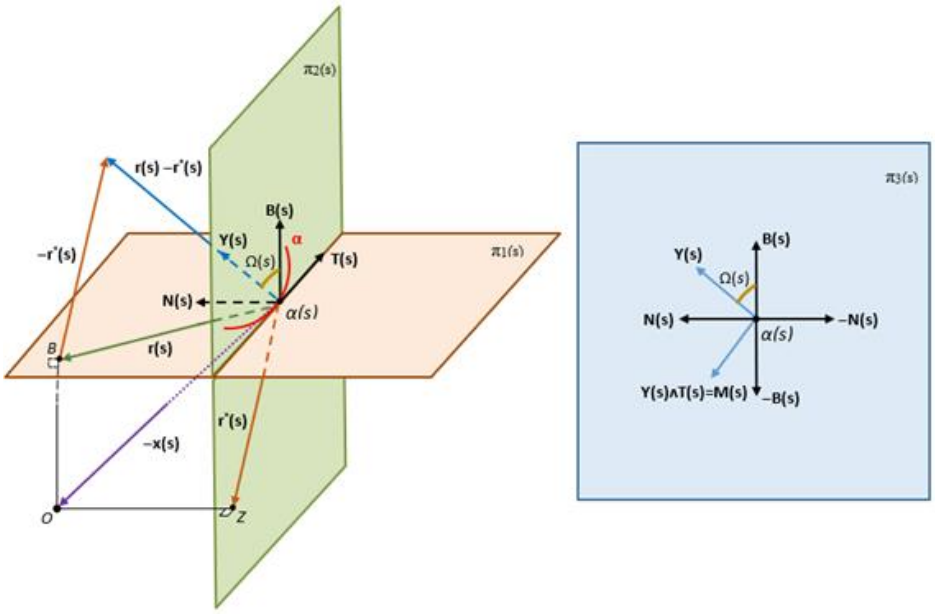
şeklinde ifade edilebilir ve yukarıda bahsettiğimiz izdüşümlerden ilkine karşılık gelir. Öte yandan başlangıç noktası $\alpha(s)$ ve bitiş noktası O orijin noktasından $\pi_2(s)$ düzlemine atılan dikmenin ayağı olan vektör

$$\boldsymbol{r}^*(s) = \langle -\alpha(s), \mathbf{T}(s)\rangle \mathbf{T}(s) + \langle -\alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle \mathbf{B}(s) \tag{3.6}$$

biçiminde ifade edilebilir ve bahsettiğimiz izdüşümlerden ikincisine karşılık gelir. $\boldsymbol{r}(s)$ vektörü ile $-\boldsymbol{r}^*(s)$ vektörünü toplarsak başlangıç noktası $\alpha(s)$ olan ve $\alpha(s)$ noktasındaki anlık normal düzlem $\pi_3(s)$ üzerinde uzanan

$$\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}^*(s) = \langle -\alpha(s), \mathbf{N}(s)\rangle \mathbf{N}(s) + \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle \mathbf{B}(s) \tag{3.7}$$

vektörüne ulaşırız.



Şekil 3.1 Konumsal Uyarlanmış Çatının İnşası (Özen *et al.* 2021a)

Şekil 3.1 dikkatlice incelenirse $\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}^*(s)$ vektörünün başlangıç noktası $\pi_2(s)$ üzerindeki dikme ayağı ve bitiş noktası $\pi_1(s)$ üzerindeki dikme ayağı olan vektöre denk olduğu görülür.

Şimdi $\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}^*(s)$ vektörünün yönündeki birim vektörün belirlenip belirlenemeyeceği durumları tartışalım.

- $\pi_1(s)$ ve $\pi_2(s)$ düzlemlerinin her ikisinin de orijin noktasını içermediği durumda dikme ayakları hem birbirlerinden hem de orijin noktasından farklı olacaktır. Dolayısıyla bu farklı iki ayak sıfırdan farklı $\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}^*(s)$ vektörünü üretir ve $\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}^*(s)$ vektörü yönündeki birim vektör belirlenebilir.

- $\pi_1(s)$ ve $\pi_2(s)$ düzlemlerinden yalnızca bir tanesi orijin noktasını içerdiği durumda, orijin noktasını içeren düzlem üzerindeki dikme ayağı orijinin kendisine tekabül edecektir. Bu durum için öteki düzlemdeki dikme ayağı orijinden farklı olacaktır. Dolayısıyla istenen birim vektör birinci maddedekine benzer şekilde kolayca belirlenebilir.

- $\pi_1(s)$ ve $\pi_2(s)$ düzlemlerinin orijin noktasını içerdiği durumda her iki düzlemdeki dikme ayağı da orijin noktasına karşılık gelecektir. Bu durumda $\boldsymbol{r}(s) - \boldsymbol{r}^*(s)$ vektörü sıfır vektörü olup bu vektör yönünde birim vektör belirlenemez.

Görüldüğü üzere yalnızca üçüncü durumda istediğimiz birim vektörü elde edemiyoruz. Üçüncü durumun gerçekleşmesi için teğet vektörün O orijin noktasından geçmesi gerekir. Daha önceden açısal momentum ile ilgili yaptığımız varsayım buna engel olur. Dolayısıyla bu varsayım altında çalıştığımız sürece $\boldsymbol{r}(s) - r^*(s)$ vektörü yönündeki birim vektörü saptayabiliriz. Bu vektörü $\mathbf{Y}(s)$ ile gösterirsek; aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{r(s)-r^*(s)}{\|r(s)-r^*(s)\|} = \frac{\langle -\alpha(s), \mathbf{N}(s)\rangle}{\sqrt{\langle \alpha(s), \mathbf{N}(s)\rangle^2 + \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle^2}}\mathbf{N}(s) + \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle}{\sqrt{\langle \alpha(s), \mathbf{N}(s)\rangle^2 + \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle^2}}\mathbf{B}(s) \tag{3.8}$$

$\mathbf{Y}(s)$ ile birim teğet vektör $\mathbf{T}(s)$ yi vektörel çarparak, diğer baz vektörümüz $\mathbf{M}(s)$ yi

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{Y}(s) \wedge \mathbf{T}(s) = \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle}{\sqrt{\langle \alpha(s), \mathbf{N}(s)\rangle^2 + \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle^2}}\mathbf{N}(s) + \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{N}(s)\rangle}{\sqrt{\langle \alpha(s), \mathbf{N}(s)\rangle^2 + \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle^2}}\mathbf{B}(s) \tag{3.9}$$

biçiminde elde ederiz. Böylece pozitif yönlendirilmiş ortanormal hareketli çatımıza yani; $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ sistemine ulaşırız. Bu sisteme Konumsal Uyarlanmış Çatı adını vermekteyiz. $\mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s), \mathbf{M}(s)$ ve $\mathbf{Y}(s)$ vektörleri $\alpha(s)$ noktasındaki anlık normal düzlemimiz $\pi_3(s)$ içinde yer aldığından ve $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ Frenet Çatısı ile $\{\mathbf{T}, \mathbf{M}, \mathbf{Y}\}$ Konumsal Uyarlanmış Çatımız $\mathbf{T}$ teğet vektörünü ortak alarak içerdiğinden, bu iki çatı arasında

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{M}(s) \\ \mathbf{Y}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\Omega(s) & -sin\Omega(s) \\ 0 & sin\Omega(s) & cos\Omega(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

ilişkisi geçerlidir. Burada $\Omega(s)$, $\mathbf{B}(s)$ ve $\mathbf{Y}(s)$ arasında, $\mathbf{B}(s)$ vektöründen $\mathbf{Y}(s)$ vektörüne doğru pozitif olarak yönlendirilmiş açıdır.

Konumsal Uyarlanmış Çatıya göre türev formülleri

$$k_3(s) = \tau(s) - \Omega'(s)$$

$$tan\Omega(s) = \frac{k_2(s)}{k_1(s)} \tag{3.11}$$

$$\kappa(s) = \sqrt{k_1^2(s) + k_2^2(s)}$$

olmak üzere;

$$\mathbf{T}'(s) = k_1(s)\mathbf{M}(s) + k_2(s)\mathbf{Y}(s)$$

$$\mathbf{M}'(s) = -k_1(s)\mathbf{T}(s) + k_3(s)\mathbf{Y}(s) \tag{3.12}$$

$$\mathbf{Y}'(s) = -k_2(s)\mathbf{T}(s) - k_3(s)\mathbf{M}(s)$$

eşitlikleri ile belirlidir. Yukarıda belirtilen $\Omega(s)$ dönme açısı;

$$\Omega(s) = \begin{cases} arctan\left(\frac{\langle -\alpha(s), \mathbf{N}(s)\rangle}{\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle}\right), & \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle > 0 \\ arctan\left(\frac{\langle -\alpha(s), \mathbf{N}(s)\rangle}{\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle}\right) + \pi, & \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle < 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle = 0, \quad \langle \alpha(s), \mathbf{N}(s)\rangle > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle = 0, \quad \langle \alpha(s), \mathbf{N}(s)\rangle < 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

yardımıyla kolayca hesaplanmaktadır. Detaylar için Özen and Tosun (2021a) çalışmasına bakılabilir.

4. İKİNCİ TİP (2. TİP) KONUMSAL UYARLANMIŞ ÇATI

Bu bölümde Özen *et al.* (2022a) çalışması esas alınacak ve tezimizin geri kalanı için önemli olan hususlar vurgulanacaktır.

3. bölümde söz ettiğimiz keyfi parçacığı ve onun $\alpha = \alpha(s)$ birim hızlı yörüngesini, birim teğet vektörünü, hız vektörünü, lineer momentum vektörünü, konum vektörünü ve açısal momentum vektörünü dikkate almaya bu bölümde ve ileriki bölümlerde devam edeceğiz. Bu kısımda varsayımımızı açısal momentum vektörünün normal bileşenin asla sıfır olmayacağı varsayımı ile değiştirelim. Bu varsayımdan hareket eder ve (3.3) denklemini göz önüne alırsak $\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle$ fonksiyonunun asla sıfır olmayacağını garanti etmiş oluruz. Dolayısıyla $\alpha(s)$ eğrimizin normal vektörünün ürettiği doğrunun asla orijinden geçmediğinden emin olabiliriz. (3.4) denkleminde verdiğimiz $-x$ vektörünü tekrar dikkate alalım. Bu vektörün $\alpha(s)$ noktasındaki normal düzlem $\pi_3(s)$ ye dik izdüşümünü $\boldsymbol{u}(s)$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\boldsymbol{u}(s) = \langle -\alpha(s), \mathbf{N}(s) \rangle \mathbf{N}(s) + \langle -\alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle \mathbf{B}(s) \tag{4.1}$$

yazabiliriz. Diğer yandan bu vektörün $\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör düzlem düzlem $\pi_1(s)$ ye dik izdüşümü (3.5) denklemine denk geldiğini daha önce belirtmiştik. (4.1) denklemi ve (3.5) denklemi kullanılarak

$$\boldsymbol{u}(s) - \boldsymbol{r}(s) = \langle \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle \mathbf{T}(s) - \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle \mathbf{B}(s) \tag{4.2}$$

denklemi kolayca elde edilebilir. $\boldsymbol{u}(s) - \boldsymbol{r}(s)$ vektörü $\alpha(s)$ noktasındaki anlık rektifiyen düzlem $\pi_2(s)$ üzerinde yer alır. Şimdi $\boldsymbol{u}(s) - \boldsymbol{r}(s)$ vektörünün yönündeki birim vektörünün saptanıp saptanamayacağı durumları ele alalım.

- $\pi_1(s)$ ve $\pi_3(s)$ düzlemlerinin her ikisinin de orijin noktasını içermediği durumda dikme ayakları birbirinden ve orijin noktasından farklı olacaktır. Bu nedenle $\boldsymbol{u}(s) - \boldsymbol{r}(s)$ vektörü yönündeki birim vektör belirlenebilir.

- $\pi_1(s)$ ve $\pi_3(s)$ düzlemlerinden yalnızca bir tanesi orijin noktasını içerdiği takdirde orijini içeren düzlem üzerindeki dikme ayağı orijinin kendisine karşılık gelir. Bu durumda diğer düzlemdeki dikme ayağı orijinden farklı olacaktır. Dolayısıyla $\boldsymbol{u}(s) - \boldsymbol{r}(s)$ yönündeki birim vektör birinci maddedekine benzer şekilde kolayca saptanabilir.

- $\pi_1(s)$ ve $\pi_3(s)$ düzlemlerinin ikisinin de orijini içermesi durumunda iki düzlemdeki dikme ayağı da orijine tekabül eder. Bu takdirde $\boldsymbol{u}(s) - \boldsymbol{r}(s)$ vektörü sıfır vektörü olup bu yönde birim vektörü saptamak imkansızdır.

Dikkat edilirse sadece üçüncü durumda istediğimiz birim vektörü saptayamıyoruz. Üçüncü durumun ortaya çıkması için $\alpha(s)$ eğrimizin normal vektörünün üreteceği doğrunun orijinden geçmesi gereklidir. Fakat bu bölümün başında açısal momentum ile ilgili yaptığımız varsayım bunun önüne geçer. Sonuç olarak bu çalışma boyunca ele alacağımız bütün yörüngeler için $\boldsymbol{u}(s) - \boldsymbol{r}(s)$ yönündeki birim vektörü belirleyebiliriz. Bu vektörü $\mathbf{K}(s)$ ile gösterirsek

$$\mathbf{K}(s) = \frac{\boldsymbol{u}(s)-\boldsymbol{r}(s)}{\|\boldsymbol{u}(s)-\boldsymbol{r}(s)\|} = \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s)\rangle}{\sqrt{\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s)\rangle^2 + \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle^2}}\mathbf{T}(s) - \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle}{\sqrt{\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s)\rangle^2 + \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle^2}}\mathbf{B}(s) \qquad (4.3)$$

eşitliği verilebilir. $\mathbf{K}(s)$ vektörü ile $\mathbf{N}(s)$ birim normal vektörünü vektörel çarparsak diğer baz vektörümüz olan $\mathbf{R}(s)$ yi elde ederiz.

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{K}(s) \wedge \mathbf{N}(s) = \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle}{\sqrt{\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s)\rangle^2 + \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle^2}}\mathbf{T}(s) + \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s)\rangle}{\sqrt{\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s)\rangle^2 + \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s)\rangle^2}}\mathbf{B}(s) \qquad (4.4)$$

böylelikle pozitif yönlendirilmiş ortanormal hareketli çatı $\{\mathbf{K}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{R}(s)\}$ ye ulaşırız. Bu sisteme 2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatı adı verilmektedir. $\mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s), \mathbf{K}(s)$ ve $\mathbf{R}(s)$ vektörleri $\alpha(s)$ noktasındaki anlık rektifiyen düzlem $\pi_2(s)$ üzerinde yer alacağından ve $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ Frenet Çatısı ile $\{\mathbf{K}, \mathbf{N}, \mathbf{R}\}$ 2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatımız $\mathbf{N}$ birim normal vektörünü ortak olarak içerdiğinden bu iki çatı arasında

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}(s)\\ \mathbf{N}(s)\\ \mathbf{R}(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cos\Omega(s) & 0 & -sin\Omega(s)\\ 0 & 1 & 0\\ sin\Omega(s) & 0 & cos\Omega(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{T}(s)\\ \mathbf{N}(s)\\ \mathbf{B}(s)\end{bmatrix} \tag{4.5}$$

bağıntısı geçerlidir. Bu eşitlikte yer alan $\Omega(s)$ açısı $\mathbf{B}(s)$ ve $\mathbf{R}(s)$ arasında $\mathbf{B}(s)$ vektöründen $\mathbf{R}(s)$ vektörüne doğru pozitif yönlendirilmiş açıdır.

(4.5) denklemini kullanılarak

$$\mathbf{K}(s) = cos\Omega(s)\mathbf{T}(s) - sin\Omega(s)\mathbf{B}(s)$$

$$\mathbf{K}'(s) = (cos\Omega(s)\boldsymbol{T}(s) - sin\Omega(s)\boldsymbol{B}(s))'$$

$$= -\Omega'(s)sin\Omega(s)\mathbf{T}(s) + cos\Omega(s)\kappa(s)\,\mathbf{N}(s) - \Omega'(s)cos\Omega(s)\mathbf{B}(s) + \tau(s)sin\Omega(s)\mathbf{N}(s)$$

$$= (\kappa(s)cos\Omega(s) + \tau(s)sin\Omega(s))\mathbf{N}(s) - \Omega'(s)\left(sin\Omega(s)\mathbf{T}(s) + cos\Omega(s)\mathbf{B}(s)\right)$$

$$= (\kappa(s)cos\Omega(s) + \tau(s)sin\Omega(s))\mathbf{N}(s) - \Omega'(s)\mathbf{R}(s)$$

ve

$$\mathbf{R}(s) = sin\Omega(s)\mathbf{T}(s) + cos\Omega(s)\mathbf{B}(s)$$

$$\mathbf{R}'(s) = \left(sin\Omega(s)\mathbf{T}(s) + cos\Omega(s)\mathbf{B}(s)\right)'$$

$$= \Omega'(s)cos\Omega(s)\mathbf{T}(s) + \kappa(s)sin\Omega(s)\mathbf{N}(s) - \Omega'(s)sin\Omega(s)\mathbf{B}(s) - \tau(s)cos\Omega(s)\mathbf{N}(s)$$

$$= \Omega'(s)\left(cos\Omega(s)\mathbf{T}(s) - sin\Omega(s)\mathbf{B}(s)\right) + \left(\kappa(s)sin\Omega(s) - \tau(s)cos\Omega(s)\right)\,\mathbf{N}(s)$$

$$= \Omega'(s)\mathbf{K}(s) + \left(\kappa(s)sin\Omega(s) - \tau(s)cos\Omega(s)\right)\,\mathbf{N}(s)$$

olduğu görülebilir. Buna ek olarak $\mathbf{R}(s) \wedge \mathbf{K}(s)$ vektörel çarpımının türevinden faydalanarak

$$\mathbf{N}'(s) = (\mathbf{R}(s) \wedge \mathbf{K}(s))'$$

$$= \mathbf{R}'(s) \wedge \mathbf{K}(s) + \mathbf{R}(s) \wedge \mathbf{K}'(s)$$

$$= \left[\Omega'(s)\mathbf{K}(s) + \left(\kappa(s)sin\Omega(s) - \tau(s)cos\Omega(s)\right)\mathbf{N}(s)\right] \wedge \mathbf{K}(s)$$

$$+\mathbf{R}(s) \wedge [(\kappa(s)cos\Omega(s) + \tau(s)sin\Omega(s))\mathbf{N}(s) - \Omega'(s)\mathbf{R}(s)]$$

$$= -(\kappa(s)cos\Omega(s) + \tau(s)sin\Omega(s))\mathbf{K}(s) + \left(-\kappa(s)sin\Omega(s) + \tau(s)cos\Omega(s)\right)\mathbf{R}(s)$$

olduğu da görülebilir. Bu eşitliklere 2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatı' ya göre türev formülleri adı verilir. Diğer yandan,

$$k_1(s) = \kappa(s)cos\Omega(s) + \tau(s)sin\Omega(s)$$

$$k_2(s) = -\Omega'(s) \tag{4.6}$$

$$k_3(s) = -\kappa(s)sin\Omega(s) + \tau(s)cos\Omega(s)$$

gösterimini kullanırsak yukarıda bahsettiğimiz türev formüllerini matris formunda aşağıdaki gibi elde edebiliriz:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K}'(s)\\ \mathbf{N}'(s)\\ \mathbf{R}'(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & k_1(s) & k_2(s)\\ -k_1(s) & 0 & k_3(s)\\ -k_2(s) & -k_3(s) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{K}(s)\\ \mathbf{N}(s)\\ \mathbf{R}(s)\end{bmatrix} \tag{4.7}$$

$\{\mathbf{K}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{R}(s), k_1(s), k_2(s), k_3(s)\}$, $a = a(s)$ yörünge eğrisinin Konumsal Uyarlanmış Çatı elemanları olarak isimlendirilir. (4.3), (4.4) ve (4.5) numaralı denklemler karşılaştırılsa

$$sin\Omega(s) = \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle}{\sqrt{\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle^2 + \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle^2}} \tag{4.8}$$

$$cos\Omega(s) = \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle}{\sqrt{\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle^2 + \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle^2}} \tag{4.9}$$

olup buradan görülmektedir ki; $\Omega(s)$ dönme açısı

$$tan\Omega(s) = \frac{\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle}{\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle} \tag{4.10}$$

ifadesini sağlamaktadır. (4.8), (4.9), (4.10) denklemlerini ve arctan fonksiyonunun tanım aralığı göz önüne alarak $\Omega(s)$ dönme açısını aşağıdaki gibi belirleyebiliriz.

$$\Omega(s) = \begin{cases} arctan\left(\frac{\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle}{\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle}\right), & \langle \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle > 0 \\ arctan\left(\frac{\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle}{\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle}\right) + \pi, & \langle \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \langle \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle = 0, \quad \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \langle \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle = 0, \quad \langle \alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle < 0 \end{cases} \tag{4.11}$$

(4.11) denklemi üzerinden şu irdelemeyi yapabiliriz.

- $\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle = 0$, $\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle > 0$ iken $\{\mathbf{K}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{R}(s), k_1(s), k_2(s), k_3(s)\}$ sistemi $\{-\mathbf{B}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{T}(s), \tau(s), 0, -\kappa(s)\}$ sistemine karşılık gelir.

- $\langle \alpha(s), \mathbf{T}(s) \rangle = 0$, $\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle < 0$ iken $\{\mathbf{K}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{R}(s), k_1(s), k_2(s), k_3(s)\}$ sistemi $\{\mathbf{B}(s), \mathbf{N}(s), -\mathbf{T}(s), \tau(s), 0, \kappa(s)\}$ sistemine karşılık gelir.

Bu bölümde son olarak fizik ve geometride önemli yer tutan açısal hız vektörünü 2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatı için elde edelim.

Varsayalım ki $\omega(s)$ açısal hız vektörü 2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatı'nın baz vektörleri cinsinden

$$\omega(s) = a(s)\mathbf{K}(s) + b(s)\mathbf{N}(s) + c(s)\,\mathbf{R}(s) \tag{4.12}$$

şeklinde ifade edilsin. $\omega(s)$ vektörü

$$\begin{aligned} \mathbf{K}'(s) &= \omega(s) \wedge \mathbf{K}(s) \\ \mathbf{N}'(s) &= \omega(s) \wedge \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{R}'(s) &= \omega(s) \wedge \mathbf{R}(s) \end{aligned} \tag{4.13}$$

eşitliklerini sağlayacağından

$$\begin{aligned} \mathbf{K}'(s) &= -b(s)\mathbf{R}(s) + c(s)\mathbf{N}(s) \\ \mathbf{N}'(s) &= a(s)\mathbf{R}(s) - c(s)\mathbf{K}(s) \\ \mathbf{R}'(s) &= -a(s)\mathbf{N}(s) + b(s)\mathbf{K}(s) \end{aligned} \tag{4.14}$$

yazabiliriz. (4.7) denklemi ile (4.14) denklemi karşılaştırılırsa

$$\begin{aligned} a(s) &= k_3(s) \\ b(s) &= -k_2(s) \\ c(s) &= k_1(s) \end{aligned} \tag{4.15}$$

olduğu kolayca görülür. Bu ifadeler (4.12) denkleminde yerine yazıldığı taktirde 2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatı için açısal hız vektörü

$$\vec{\boldsymbol{\omega}}(s) = k_3(s)\mathbf{K}(s) - k_2(s)\mathbf{N}(s) + k_1(s)\mathbf{R}(s) \tag{4.16}$$

biçiminde elde edilir.

5. İKİNCİ TİP (2. TİP) KONUMSAL UYARLANMIŞ ÇATIYA GÖRE TZITZEICA EĞRİLERİNİN KARAKTERİZASYONU

Bu bölümde ve tezimizin geri kalanında Özen *et al.* (2022a) çalışması esas alınmaya devam edicilecetir. İlk olarak $\alpha = \alpha(s)$ yörüngesinin bir Tzitzeica eğrisi olması için gereken şartları elde edeceğiz ve küresel Tzitzeica eğrilerine dair bazı sonuçlar sunacağız.

3-boyutlu Öklid uzayında sıfırdan farklı burulmaya ve pozitif eğriliğe sahip bir eğrinin Tzitzeica eğrisi olması için

$$\frac{\tau}{\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle^2} = c = sbt \tag{5.1}$$

eşitliğini sağlaması gerekir. Bu eşitlikte τ eğrinin burulmasını ifade ederken $\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle^2$ ise orijinden oskülatör düzleme olan uzaklığın karesini ifade etmektedir. $\alpha = \alpha(s)$ yörüngesi bir Tzitzeica eğrisi iken $\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle$ ifadesi parametrenin her s değeri için sıfırdan farklı olacaktır. Bu sayede açısal momentumun normal bileşeninin yörüngemiz boyunca sıfır olmadığını söyleyebiliriz. Dolayısıyla $\alpha = \alpha(s)$ yörüngesi bir Tzitzeica eğrisi iken varsayımımız sağlandığından 2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatı iyi tanımlı olacaktır.

Teorem 5.1 $a = a(s)$ yörüngesi için

$$\frac{\tau}{\langle \alpha(s), \mathbf{B}(s) \rangle^2} = \frac{k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega}{\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R} \rangle^2} \tag{5.2}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. (2.11) ve (2.12) denklemlerinden

$$\tau = \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \quad , \qquad \mathbf{B} = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}$$

eşitliklerinin sağlandığını biliyoruz. Bunları kullanarak

$$\frac{\tau}{\langle \alpha, \mathbf{B} \rangle^2} = \frac{\frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}}{\left\langle \alpha, \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|} \right\rangle^2}$$

$$= \frac{\frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}}{\frac{1}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} \langle \alpha, \alpha' \wedge \alpha'' \rangle^2}$$

$$= \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{\langle \alpha, \alpha' \wedge \alpha'' \rangle^2}$$

olduğu kolayca görülebilir. Öte yandan denklem (4.5) gereğince

$$\alpha' = \mathbf{T} = cos\Omega \mathbf{K} + sin\Omega \mathbf{R}$$

yazılabilir. Böylece

$$\alpha' = cos\Omega \mathbf{K} + sin\Omega \mathbf{R}$$

$$\alpha'' = (cos\Omega \mathbf{K} + sin\Omega \mathbf{R})'$$

$$= -(k_2 + \Omega')sin\Omega \mathbf{K} + (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)\mathbf{N} + (k_2 + \Omega')cos\Omega \mathbf{R}$$

$$= (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)\mathbf{N}$$

$$\alpha''' = ((k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)\mathbf{N})'$$

$$= -k_1(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)\mathbf{K} + \big((k_1' - k_3\Omega')cos\Omega - (k_3' + k_1\Omega')sin\Omega\big)\mathbf{N}$$

$$+ k_3(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)\mathbf{R}$$

elde edilir. Buradan hareketle

$$\alpha' \wedge \alpha'' = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{N} & \mathbf{R} \\ cos\Omega & 0 & sin\Omega \\ 0 & k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega) sin\Omega \mathbf{K} + (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega) cos\Omega \mathbf{R}$$

$$\langle \alpha, \alpha' \wedge \alpha'' \rangle^2 = \langle \alpha, -(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega) sin\Omega \mathbf{K} + (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega) cos\Omega \mathbf{R} \rangle^2$$

$$= ((k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega) \langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R} \rangle)^2$$

$$= (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^2 \langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R} \rangle^2$$

$$\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle = (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^2 (k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)$$

bulunur. Yukarıda türetilen ifadeler göz önüne alınırsa

$$\frac{\tau}{\langle \alpha, \mathbf{B} \rangle^2} = \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle}{\langle \alpha, \alpha' \wedge \alpha'' \rangle^2} = \frac{k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega}{\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R} \rangle^2}$$

olup ispat tamamlanır.

Sonuç 5.2 $a = a(s)$ yörüngesi bir Tzitzeica eğrisidir ancak ve ancak

$$\frac{k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega}{\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R} \rangle^2}$$

ifadesi sıfır fonksiyonundan farklı sabit bir fonksiyondur.

Not 5.3 Türev formüllerinden

$$\mathbf{N}' = -k_1 \mathbf{K} + \mathrm{k}_3 \mathbf{R}$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitliğin sağ tarafını $(sin^2\Omega + cos^2\Omega)$ ile çarparsak

$$\mathbf{N}' = -k_1\left(sin^2\Omega + cos^2\Omega\right)\mathbf{K} + \mathrm{k}_3\left(sin^2\Omega + cos^2\Omega\right)\mathbf{R}$$

$$= (-k_1 cos^2\Omega\mathbf{K} + k_3 sin^2\Omega\mathbf{R}) + (-k_1 sin^2\Omega\mathbf{K} + \mathrm{k}_3 cos^2\Omega\mathbf{R})$$

yazılabilir. Son eşitliğin sağ tarafına $-k_1 sin\Omega cos\Omega\mathbf{R} + \mathrm{k}_3 sin\Omega cos\Omega\mathbf{K}$ vektörünü ve onun ters yönde yönlendirilmişi olan $k_1 sin\Omega cos\Omega\mathbf{R} - \mathrm{k}_3 sin\Omega cos\Omega\mathbf{K}$ vektörünü eklersek

$$\mathbf{N}' = (-k_1 cos^2\Omega\mathbf{K} - k_1 sin\Omega cos\Omega\mathbf{R} + \mathrm{k}_3 sin\Omega cos\Omega\mathbf{K} + k_3 sin^2\Omega\mathbf{R})$$

$$+\left(-k_1 sin^2\Omega\mathbf{K} + k_1 sin\Omega cos\Omega\mathbf{R} - \mathrm{k}_3 sin\Omega cos\Omega\mathbf{K} + \mathrm{k}_3 cos^2\Omega\mathbf{R}\right)$$

$$= (-\mathrm{k}_1 cos\Omega + k_3 sin\Omega)(cos\Omega\mathbf{K} + sin\Omega\mathbf{R}) + (k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)(-sin\Omega\mathbf{K} + cos\Omega\mathbf{R})$$

elde edilir. Öte yandan (4.5) denkleminden $\mathbf{T} = cos\Omega\mathbf{K} + sin\Omega\mathbf{R}$ yazılabilir.

$$(cos\Omega\mathbf{K} + sin\Omega\mathbf{R})'$$

$$= -\Omega' sin\Omega\mathbf{K} + cos\Omega(k_1\mathbf{N} + k_2\mathbf{R}) + \Omega' cos\Omega\mathbf{R} + sin\Omega(-k_2\mathbf{K} + k_3\mathbf{N})$$

$$= (-\Omega' sin\Omega - k_2 sin\Omega)\mathbf{K} + (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)\mathbf{N} + (\Omega' cos\Omega + k_2 cos\Omega)\mathbf{R}$$

$$= (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)\mathbf{N}$$

olup

$$(cos\Omega\mathbf{K} + sin\Omega\mathbf{R})' = (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)\mathbf{N}$$

elde edilir. Yine (4.5) denkleminden $\mathbf{B} = -sin\Omega\mathbf{K} + cos\Omega\mathbf{R}$ yazılabilir.

$(-sin\Omega\mathbf{K} + cos\Omega\mathbf{R})'$

$= -\Omega' cos\Omega\mathbf{K} - sin\Omega(k_1\mathbf{N} + \mathrm{k}_2\mathbf{R}) - \Omega' sin\Omega\mathbf{R} + cos\Omega(-k_2\mathbf{K} - k_3\,\mathbf{N})$

$= (-\Omega' cos\Omega - k_2 cos\Omega)\mathbf{K} + (-k_1 sin\Omega - k_3 cos\Omega)\mathbf{N} + (-k_2 sin\Omega — \Omega' sin\Omega)\mathbf{R}$

$= -(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)\mathbf{N}$

olup

$$(-sin\Omega\mathbf{K} + cos\Omega\mathbf{R})' = -(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)\mathbf{N}$$

olduğu görülebilir.

Teorem 5.4 $\alpha = \alpha(s)$ yörüngesi orijin merkezli r yarıçaplı birim hızlı küresel eğri olarak alınırsa aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\frac{k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)} = \left(\frac{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}{(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^2}\right)'.$$

Kanıt. $\alpha = \alpha(s)$ yörüngesi orijin merkezli r yarıçaplı birim hızlı küresel eğri olsun. Yani yörünge $S^2_{O,r}$ üzerinde yer alsın. Bu durumda

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = r^2$$

olacaktır. Bu ifadenin yay parametresine göre türevi alınırsa,

$$\langle \alpha, \alpha' \rangle = 0$$

Olup (4.5) denkleminden yola çıkarak teorem 5.1 kanıtında belirtilen $\alpha' = cos\Omega\mathbf{K} + sin\Omega\mathbf{R}$ eşitliği yerine yazıldığı taktirde;

$$\langle \alpha, cos\Omega\mathbf{K} + sin\Omega\mathbf{R} \rangle = 0 \tag{5.3}$$

bulunur.

(5.3) denklemi üzerinden tekrar türev alınırsa

$$0 = \langle \alpha', cos\Omega\mathbf{K} + sin\Omega\mathbf{R} \rangle + \langle \alpha, (cos\Omega\mathbf{K} + sin\Omega\mathbf{R})' \rangle$$

$$0 = \langle cos\Omega\mathbf{K} + sin\Omega\mathbf{R}\,, cos\Omega\mathbf{K} + sin\Omega\mathbf{R} \rangle + \langle \alpha, (cos\Omega\mathbf{K} + sin\Omega\mathbf{R})' \rangle$$

$$= (sin\Omega^2 + cos\Omega^2) + \langle \alpha, (cos\Omega\mathbf{K} + sin\Omega\mathbf{R})' \rangle$$

elde edilir. Son ifadede Not 5.3'te belirtilen $(cos\Omega\mathbf{K} + sin\Omega\mathbf{R})' = (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)\mathbf{N}$ eşitliği yerine yazılırsa

$$0 = 1 + \langle \alpha, (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)\mathbf{N} \rangle$$

ve

$$-1 = (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{N} \rangle \tag{5.4}$$

olup

$$\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{N} \rangle = \frac{-1}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)} \tag{5.5}$$

eşitliğine ulaşılır. (5.4) denkleminin türevi alınırsa;

$$0 = (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{N}\rangle + (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)[\langle \boldsymbol{\alpha}', \mathbf{N}\rangle + \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{N}'\rangle]$$

$$= (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{N}\rangle + (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)\left\langle \begin{matrix} \boldsymbol{\alpha}, (-k_1 cos\Omega + k_3 sin\Omega)(cos\Omega \mathbf{K} + sin\Omega \mathbf{R}) \\ +(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)(-sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}) \end{matrix} \right\rangle$$

$$= (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{N}\rangle - (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^2\langle \boldsymbol{\alpha}, cos\Omega \mathbf{K} + sin\Omega \mathbf{R}\rangle$$

$$+(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)\langle \boldsymbol{\alpha}, (-sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R})\rangle$$

$$= (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{N}\rangle + (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle$$

yazılabilir. Son ifadede (5.5) denklemi kullanılırsa

$$0 = -\frac{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)} + (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle$$

olup buradan da

$$\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle = \frac{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^2 (k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)} \tag{5.6}$$

denilebilir. (5.6) denklemi

$$\frac{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^2} = (k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle \tag{5.7}$$

biçiminde tekrar düzenlenebilir. (5.7) denkleminde her iki tarafın yay parametresine göre türevi alındığı taktirde

$$\left(\frac{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^2}\right)'$$

$$= (k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)'\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle + (k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)\,\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle'$$

$$= (k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)'\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle$$

$$+(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)[\langle cos\Omega \mathbf{K} + sin\Omega \mathbf{R}, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle + \langle \alpha, (-sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R})'\rangle]$$

$$= (k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)'\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle + (k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)\langle \alpha, -(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)\mathbf{N}\rangle$$

$$= (k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)'\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle - (k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)^2 \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{N}\rangle$$

olup (5.5) ve (5.6) denklemleri son ifadede yerine yazılırsa

$$\left(\frac{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^{\mathbf{2}}}\right)' = \frac{(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)'(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^{\mathbf{2}}(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)} + \frac{(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)^2}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)}$$

ya da başka bir deyişle

$$\frac{(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)^2}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)} = \left(\frac{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^2}\right)' - \frac{(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)'(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^{\mathbf{2}}(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)} \qquad (5.8)$$

elde edilir. Son ifadede gerekli düzenlemeler yapıldığı taktirde

$$\frac{(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)^2}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)} = \frac{\begin{array}{c}(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)''(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^{\mathbf{2}} \\ -2(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)((k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)')^2 \\ -(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^{\mathbf{2}}(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)'(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'\end{array}}{(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^{\mathbf{4}}}$$

olup

$$\frac{(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)} = \frac{\begin{array}{c}(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)''(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^{\mathbf{2}} \\ -2(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)((k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)')^2 \\ -(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^{\mathbf{2}}(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)'(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'\end{array}}{(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)^2(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^{\mathbf{4}}}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı

$$\left(\frac{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}{(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^2}\right)'$$

ifadesinin türevine karşılık gelmektedir. Buradan yola çıkarak

$$\frac{(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)} = \left(\frac{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}{(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^2}\right)'$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Önerme 5.5 $\alpha = \alpha(s)$ yörüngesi bir Tzitzeica eğrisi ise aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)'\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle = -2(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)^2 \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{N}\rangle.$$

Kanıt. $\alpha = \alpha(s)$ yörüngesi bir Tzitzeica eğrisi olsun. Sonuç (5.2) gereğince

$$\frac{k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega}{\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle^2} = c$$

yazılabilir. Bu eşitliğin türevini alır ve $(-sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R})' = -(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)\mathbf{N}$ türev formülünü hesaba katarsak

$$0 = (k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)'\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle^2$$

$$-2(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle \langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle'$$

yani

$$0 = (k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)'\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle^2 + 2(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)^2 \langle \alpha, -sin\Omega + cos\Omega \mathbf{R}\rangle \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{N}\rangle$$

elde edilir. Son eşitliğin iki tarafı da $\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle$ ye bölünürse;

$$0 = (k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)'\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle + 2(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)^2 \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{N}\rangle$$

olup

$$(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)'\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle = -2(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)^2 \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{N}\rangle$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 5.6 $\alpha = \alpha(s)$ yörüngesi $S^2_{O,r}$ küresi üzerinde yer alan birim hızlı küresel bir Tzitzeica eğrisi ise aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\frac{(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)'}{2(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)^3} = \frac{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}.$$

Kanıt. $\alpha = \alpha(s)$ yörüngesi $S^2_{O,r}$ küresi üzerinde yer alan birim hızlı küresel bir Tzitzeica eğrisi olsun. Önerme 5.5'te geçen

$$(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)'\langle \alpha, -sin\Omega \mathbf{K} + cos\Omega \mathbf{R}\rangle = -2(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)^2 \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{N}\rangle$$

ifadesi dikkate alınır ve burada (5.5) ve (5.6) denklemleri kullanılırsa

$$(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)' \frac{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^2 (k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)}$$
$$= -2(k_1 sin\Omega + k_3 os\Omega)^2 \frac{-1}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)}$$

bulunur. Son eşitlikte gerekli düzenlemelerin ardından

$$\frac{(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)'}{2(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)^3} = \frac{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır.

Sonuç 5.7 $\alpha = \alpha(s)$ yörüngesinin $S^2_{O,r}$ küresi üzerinde yer alan birim hızlı küresel bir Tzitzeica eğrisi olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega) = \sqrt{\frac{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)''(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega) - 2((k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)')^2}{3(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^2}}$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt. Teorem 5.6'da verilen eşitlik

$$(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)' = \frac{2(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)^3 (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}$$

formunda tekrar düzenlenebilir. Bu ifade (5.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)^2}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)} = \left(\frac{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^2}\right)' - \frac{\frac{2(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)^3 (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)'}{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^2 (k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)}$$

olup gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra

$$(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega) = \sqrt{\frac{(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)''(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega) - 2((k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)')^2}{3(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^2}}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat biter.

Sonuç 5.8 $\alpha = \alpha(s)$ yörüngesinin $S^2_{O,r}$ küresi üzerinde yer alan birim hızlı küresel bir Tzitzeica eğrisi olduğunu varsayalım. $(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)$ sabit fonksiyon ve $(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)$ sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega = \frac{\sqrt{3}(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)}{\lambda_1 \sin\left(\sqrt{3}(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)\right) - \lambda_2 cos\left(\sqrt{3}(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)\right)}$$

eşitliği sağlanır. (Burada λ_1 ve λ_2 birer reel sabit sayıdır.)

Kanıt. Varsayalım ki $\alpha = \alpha(s)$ yörüngesi $S^2_{O,r}$ küresi üzerinde yer alan birim hızlı küresel bir Tzitzeica eğrisi $(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)$ sabit fonksiyon ve $(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)$ sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Sonuç 5.7'de verilen denklem

$$\begin{bmatrix} (k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)''(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega) - 2((k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)')^2 \\ -3(k_1 cos\Omega - k_3 sin\Omega)^2(k_1 sin\Omega + k_3 cos\Omega)^2 \end{bmatrix} = 0$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü bizi aradığımız sonuca ulaştırır.

6. İKİNCİ TİP (2. TİP) KONUMSAL UYARLANMIŞ ÇATIYA GÖRE ÖZEL SMARANDACHE EĞRİLERİNİN ÜRETTİĞİ YÖRÜNGELER

Bu bölümde 2. Tip Konumsal Uyarlanmış çatıya göre **KN , KR** ve **NR** −Smarandache eğrilerinin ürettiği özel yörüngeleri 3-boyutlu Öklid uzayında inceleyeceğiz ve bunların Frenet vektörlerini ve Frenet eğriliğini vereceğiz.

3-boyutlu Öklid uzayında Frenet çatısına göre özel Samarandache eğrilerinin ürettiği yörüngeler ilk olarak Ali (2010) tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmada $\delta = \delta(s)$ birim hızlı eğrisinden elde edilen **TN**, **NB**, **TNB** −Samarandache eğrileri sırasıyla

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{T} + \mathbf{N})$$

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{N} + \mathbf{B})$$

$$\beta(s^*) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{T} + \mathbf{N} + \mathbf{B})$$

biçiminde tanımlanmıştır (Ali 2010). Biz de bu tanımı dikkate alarak $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{N}_\alpha$, $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$, $\mathbf{N}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$ −Samarandache eğrilerinin ürettiği özel yörüngeleri tanımlayacağız ve bunlara sırasıyla $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{N}_\alpha$ − Samarandache yörüngesi, $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$ − Samarandache yörüngesi ve $\mathbf{N}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$ − Samarandache yörüngesi adlarını vereceğiz. Burada alt indis olarak kullandığımız α gösterimi en başından beri dikkate aldığımız (kısıt ve varsayımlara uyan) birim hızlı yörünge eğrimizi ifade etmektedir.

Tanım 6.1 $\mathbf{N}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$ −Smarandache yörüngesi

$$\sigma_1(s^*) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{N}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha) \tag{6.1}$$

biçiminde tanımlanır.

Şimdi $\mathbf{N}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$ −Smarandache yörüngesinin Frenet elemanlarını elde etmeye çalışalım:

(6.1) denkleminin s yay parametresine göre türevini alırsak

$$\sigma_1' = \frac{d\sigma_1}{ds^*}\cdot\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{N}_\alpha' + \mathbf{R}_\alpha')$$

veya buna denk olarak

$$\mathbf{T}_{\sigma_1}\cdot\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}((-k_1-k_2)\mathbf{K}_\alpha - k_3\mathbf{N}_\alpha + k_3\mathbf{R}_\alpha) \tag{6.2}$$

yazabiliriz. (6.2) denklemi vektörel ifade belirttiğinden her iki tarafın normunu alabiliriz. Böylece

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{(-k_1-k_2)^2+(-k_3)^2+k_3^2} = \frac{\sqrt{2k_3^2+(k_1+k_2)^2}}{\sqrt{2}} \tag{6.3}$$

elde ederiz ve bu ifadeyi (6.2) denkleminde yerine yazarak

$$\mathbf{T}_{\sigma_1}.\frac{\sqrt{2k_3^2+(k_1+k_2)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-(k_1+k_2)\mathbf{K}_\alpha - k_3\mathbf{N}_\alpha + k_3\mathbf{R}_\alpha)$$

$$\mathbf{T}_{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{2k_3^2+(k_1+k_2)^2}}.(-(k_1+k_2)\mathbf{K}_\alpha - k_3\mathbf{N}_\alpha + k_3\mathbf{R}_\alpha)$$

$$\mathbf{T}_{\sigma_1} = (2k_3^2+(k_1+k_2)^2)^{-1/2}.(-(k_1+k_2)\mathbf{K}_\alpha - k_3\mathbf{N}_\alpha + k_3\mathbf{R}_\alpha) \tag{6.4}$$

sonucuna ulaşırız. Görüldüğü gibi bu denklem bize $\mathbf{N}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$ −Smarandache yörüngesinin birim teğet vektörünü vermektedir. Bu denklemin tekrar s ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d\mathbf{T}_{\sigma_1}}{ds^*}\cdot\frac{ds^*}{ds}=-\frac{1}{2}(2k_3^2+(k_1+k_2)^2)^{-3/2}.\big(4k_3k_3'+2(k_1+k_2)(k_1'+k_2')\big).(-(k_1+k_2)\mathbf{K}_\alpha-k_3\mathbf{N}_\alpha+k_3\mathbf{R}_\alpha)$$

$$+(2k_3^2+(k_1+k_2)^2)^{-1/2}[(-(k_1'+k_2')\mathbf{K}_\alpha-(k_1+k_2)(k_1\mathbf{N}_\alpha+k_2\mathbf{R}_\alpha)-k_3'\mathbf{N}_\alpha-k_3(-k_1\mathbf{K}_\alpha+k_3\mathbf{R}_\alpha)+k_3'\mathbf{R}_\alpha+k_3(-k_2\mathbf{K}_\alpha-k_3\mathbf{N}_\alpha)]$$

$$=(2k_3^2+(k_1+k_2)^2)^{-3/2}.\big((-2k_3k_3'-(k_1+k_2)(k_1'+k_2')\big).(-(k_1+k_2)\mathbf{K}_\alpha-k_3\mathbf{N}_\alpha+k_3\mathbf{R}_\alpha)+(2k_3^2+(k_1+k_2)^2)^{-1/2}.[(-(k_1'+k_2')+(k_1-k_2)k_3)\mathbf{K}_\alpha$$

$$+(-k_1(k_1+k_2)-k_3'-k_3^2)\mathbf{N}_\alpha\quad+(-k_2(k_1+k_2)-k_3^2+k_3')\mathbf{R}_\alpha]$$

$$\begin{aligned}=(2k_3^2+(k_1+k_2)^2)^{-3/2}&[\big(2k_3k_3'+(k_1+k_2)(k_1'+k_2')\big)(k_1+k_2)\mathbf{K}_\alpha\\&+[\big(2k_3k_3'+(k_1+k_2)(k_1'+k_2')\big)k_3\mathbf{N}_\alpha+\big(-2k_3k_3'-(k_1+k_2)(k_1'+k_2')\big)k_3\mathbf{R}_\alpha\\&+(2k_3^2+(k_1+k_2)^2)(-(k_1'+k_2')+(k_1-k_2)k_3)\mathbf{K}_\alpha\\&+(2k_3^2+(k_1+k_2)^2)(-k_1(k_1+k_2)-k_3'-k_3^2)\mathbf{N}_\alpha\\&+(2k_3^2+(k_1+k_2)^2)(-k_2(k_1+k_2)-k_3^2+k_3')\mathbf{R}_\alpha]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=(2k_3^2+(k_1+k_2)^2)^{-3/2}&[2(k_1+k_2)k_3k_3'+(k_1+k_2)^2(k_1'+k_2')-2k_3^2(k_1'+k_2')\\&+2k_3^3(k_1-k_2)-(k_1+k_2)^2(k_1'+k_2')+(k_1+k_2)^2(k_1-k_2)k_3)\mathbf{K}_\alpha\\&+(2k_3^2k_3'+(k_1+k_2)k_3(k_1'+k_2')-2k_1(k_1+k_2)k_3^2-2k_3^2k_3'-2k_3^4-k_1(k_1+k_2)^3\\&-(k_1+k_2)^2k_3'-(k_1+k_2)^2k_3^2)\mathbf{N}_\alpha+(-2k_3^2k_3'-k_3(k_1+k_2)(k_1'+k_2')\\&-2k_2k_3^2(k_1+k_2)-2k_3^4+2k_3^2k_3'-k_2(k_1+k_2)^3-k_3^2(k_1+k_2)^2\\&+(k_1+k_2)^2k_3')\mathbf{R}_\alpha]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=(2k_3^2+(k_1+k_2)^2)^{-3/2}&[(k_3(k_1+k_2)[2k_3'+k_1^2-k_2^2]+2k_3^2[k_1k_3-k_2k_3-k_1'-k_2'])\mathbf{K}_\alpha+\\&\big((k_1+k_2)[k_3(k_1'+k_2')-2k_1k_3^2-(k_1+k_2)k_3'-k_3^2(k_1+k_2)-k_1(k_1+k_2)^2]-2k_3^4\big)\mathbf{N}_\alpha+\\&((k_1+k_2)[-k_3(k_1'+k_2')-2k_2k_3^2+(k_1+k_2)k_3'-k_3^2(k_1+k_2)-k_2(k_1+k_2)^2]-2k_3^4)\ \mathbf{R}_\alpha]\end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadede

$$v_1=k_3(k_1+k_2)[2k_3'+k_1^2-k_2^2]+2k_3^2[k_1k_3-k_2k_3-k_1'-k_2']$$

$$v_2=(k_1+k_2)[k_3(k_1'+k_2')-2k_1k_3^2-(k_1+k_2)k_3'-k_3^2(k_1+k_2)-k_1(k_1+k_2)^2]-2k_3^4$$

$$v_3 = (k_1 + k_2)[-k_3(k_1' + k_2') - 2k_2k_3^2 + (k_1 + k_2)k_3' - k_3^2 - k_3^2(k_1 + k_2) - k_2(k_1 + k_2)^2] - 2k_3^4$$

notasyon değişikliği yapılırsa

$$\frac{d\mathbf{T}_{\sigma_1}}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds} = (2k_3^2 + (k_1 + k_2)^2)^{-3/2}.(v_1\mathbf{K}_\alpha + v_2\mathbf{N}_\alpha + v_3\mathbf{R}_\alpha)$$

denklemine ulaşılır. Burada denklem (6.3) yerine yazılarak kolayca

$$\frac{dT_{\sigma_1}}{ds^*} = \sqrt{2}(2k_3^2 + (k_1 + k_2)^2)^{-2}.(v_1\mathbf{K}_\alpha + v_2\mathbf{N}_\alpha + v_3\mathbf{R}_\alpha) \tag{6.5}$$

olduğu görülebilir. (6.5) denkleminde taraf tarafa norm alınırsa $\mathbf{N}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$ −Smarandache yörüngesinin eğriliği

$$\left\|\frac{d\mathbf{T}_{\sigma_1}}{ds^*}\right\| = \frac{\sqrt{2(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}}{(2k_3^2+(k_1+k_2)^2)^2} = \kappa_{\sigma_1} \tag{6.6}$$

şeklinde bulunur. (6.5) ve (6.6) denklemlerinden hareketle $\mathbf{N}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$ − Smarandache yörüngesinin birim asli normal vektörü de

$$\frac{\frac{d\mathbf{T}_{\sigma_1}}{ds^*}}{\left\|\frac{d\mathbf{T}_{\sigma_1}}{ds^*}\right\|} = \mathbf{N}_{\sigma_1} = \frac{\sqrt{2}(v_1\mathbf{K}_\alpha + v_2\mathbf{N}_\alpha + v_3\mathbf{R}_\alpha)}{(2k_3^2 + (k_1 + k_2)^2)^2}.\frac{(2k_3^2 + (k_1 + k_2)^2)^2}{\sqrt{2}\sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}}$$

$$\mathbf{N}_{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}}.(v_1\mathbf{K}_\alpha + v_2\mathbf{N}_\alpha + v_3\mathbf{R}_\alpha) \tag{6.7}$$

formunda elde edilir.

(6.4) ve (6.7) denklemleri göz önüne alınırsa $\mathbf{N}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$ − Smarandache yörüngesinin binormal vektörü, birim teğet vektör ile birim normal vektörün vektörel çarpımı yardımıyla aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\mathbf{B}_{\sigma_1} = \mathbf{T}_{\sigma_1} \wedge \mathbf{N}_{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{(2k_3^2 + (k_1+k_2)^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{K}_\alpha & \mathbf{N}_\alpha & \mathbf{R}_\alpha \\ -(k_1+k_2) & -k_3 & k_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{\sigma_1} = \frac{(-k_3v_3 - k_3v_2)\mathbf{K}_\alpha + (k_1v_3 + k_2v_3 + k_3v_1)\mathbf{N}_\alpha + (-k_1v_2 - k_2v_2 + k_3v_1)\mathbf{R}_\alpha}{\sqrt{(2k_3^2 + (k_1+k_2)^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)}}.$$

Tanım 6.2 $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{N}_\alpha$ −Smarandache yörüngesi

$$\sigma_2(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\mathbf{K}_\alpha + \mathbf{N}_\alpha) \tag{6.8}$$

biçiminde tanımlanır.

Şimdi $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{N}_\alpha$ −Smarandache yörüngesinin Frenet elemanlarını elde etmeye çalışalım:

(6.8) denkleminin s yay parametresine göre türevini alırsak

$$\sigma_2' = \frac{d\sigma_2}{ds^*} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{K}_\alpha' + \mathbf{N}_\alpha')$$

veya buna denk olarak

$$\mathbf{T}_{\sigma_2} \cdot \frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-k_1\mathbf{K}_\alpha + k_1\mathbf{N}_a + (k_2+k_3)\mathbf{R}_\alpha) \tag{6.9}$$

yazabiliriz. (6.9) denklemi vektörel ifade belirttiğinden her iki tarafın normunu alabiliriz. Böylece

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(-k_1)^2 + k_1^2 + (k_2+k_3)^2} = \frac{\sqrt{2k_1^2 + (k_2+k_3)^2}}{\sqrt{2}} \tag{6.10}$$

elde ederiz ve bu ifadeyi (6.9) denkleminde yerine yazarak

$$\mathbf{T}_{\sigma_2}.\frac{\sqrt{2k_1^2+(k_2+k_3)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.(-k_1\mathbf{K}_\alpha+k_1\mathbf{N}_a+(k_2+k_3)\mathbf{R}_\alpha)$$

$$\mathbf{T}_{\sigma_2}=\frac{1}{\sqrt{2k_1^2+(k_2+k_3)^2}}.(-k_1\mathbf{K}_\alpha+k_1\mathbf{N}_a+(k_2+k_3)\mathbf{R}_\alpha)$$

$$\mathbf{T}_{\sigma_2}=(2k_1^2+(k_2+k_3)^2)^{-1/2}.(-k_1\mathbf{K}_\alpha+k_1\mathbf{N}_a+(k_2+k_3)\mathbf{R}_\alpha) \tag{6.11}$$

sonucuna ulaşırız. Görüldüğü üzere bu denklem bize $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{N}_\alpha-$ Smarandache yörüngesinin birim teğet vektörünü vermektedir. Bu denklemin tekrar s ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{T}_{\sigma_2}}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds}=&-\frac{1}{2}(2k_1^2+(k_2+k_3)^2)^{-3/2}.\big(4k_1k_1'+2(k_2+k_3)(k_2'+k_3')\big)(-k_1\mathbf{K}_\alpha+k_1\mathbf{N}_a\\&+(k_2+k_3)\mathbf{R}_\alpha)+(2k_1^2+(k_2+k_3)^2)^{-1/2}(-k_1'\mathbf{K}_\alpha-k_1(k_1\mathbf{N}_a+k_2\mathbf{R}_\alpha)+k_1'\mathbf{N}_a\\&+k_1(-k_1\mathbf{K}_\alpha+k_3\mathbf{R}_\alpha)+(k_2'+k_3')\mathbf{R}_\alpha+(k_2+k_3)(-k_2\mathbf{K}_\alpha-k_3\mathbf{N}_a))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&(2k_1^2+(k_2+k_3)^2)^{-3/2}.\big(-2k_1k_1'-(k_2+k_3)(k_2'+k_3')\big)(-k_1\mathbf{K}_\alpha+k_1\mathbf{N}_a\\&+(k_2+k_3)\mathbf{R}_\alpha)+(2k_1^2+(k_2+k_3)^2)^{-1/2}[\big(-k_1'-k_1^2-k_2(k_2+k_3)\big)\mathbf{K}_\alpha\\&+\big(-k_1^2+k_1'-k_3(k_2+k_3)\big)\mathbf{N}_a+(k_1(k_3-k_2)+(k_2'+k_3'))\mathbf{R}_\alpha]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&(2k_1^2+(k_2+k_3)^2)^{-3/2}\big[\big(-2k_1k_1'-(k_2+k_3)(k_2'+k_3')\big)(-k_1)\mathbf{K}_\alpha\\&+\big(-2k_1k_1'-(k_2+k_3)(k_2'+k_3')\big)k_1\mathbf{N}_a\\&+\big(-2k_1k_1'-(k_2+k_3)(k_2'+k_3')\big)(k_2+k_3)\mathbf{R}_\alpha\\&+(2k_1^2+(k_2+k_3)^2)\big(-k_1'-k_1^2-k_2(k_2+k_3)\big)\mathbf{K}_\alpha\\&+(2k_1^2+(k_2+k_3)^2)\big(-k_1^2+k_1'-k_3(k_2+k_3)\big)\mathbf{N}_a\\&+(2k_1^2+(k_2+k_3)^2)(k_1(k_3-k_2)+(k_2'+k_3'))\mathbf{R}_\alpha\big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=&(2k_1^2+(k_2+k_3)^2)^{-3/2}[(2k_1^2k_1'+k_1(k_2+k_3)(k_2'+k_3')-2k_1^2k_1'-2k_1^4\\&-2k_1^2k_2(k_2+k_3)-(k_2+k_3)^2k_1'-k_1^2(k_2+k_3)^2-k_2(k_2+k_3)^3)\mathbf{K}_\alpha\\&+(-2k_1^2k_1'-k_1(k_2+k_3)(k_2'+k_3')-2k_1^4+2k_1^2k_1'-2k_1^2k_3(k_2+k_3)\\&-k_1^2(k_2+k_3)^2+(k_2+k_3)^2k_1'-k_3(k_2+k_3)^3)\mathbf{N}_a\\&+(-2k_1k_1'(k_2+k_3)-(k_2+k_3)^2(k_2'+k_3')+2k_1^3(k_3-k_2)+2k_1^2(k_2'+k_3')\\&+k_1(k_2+k_3)^2(k_3-k_2)+(k_2+k_3)^2(k_2'+k_3'))\mathbf{R}_\alpha]\end{aligned}$$

$$= (2k_1^2 + (k_2+k_3)^2)^{-3/2}[((k_2+k_3)[k_1(k_2'+k_3') - 2k_1^2k_2 - (k_2+k_3)k_1' - k_1^2(k_2+k_3) - k_2(k_2+k_3)^2] - 2k_1^4)\mathbf{K}_\alpha + \big((k_2+k_3)[-k_1(k_2'+k_3') - 2k_1^2k_3 - k_1^2(k_2+k_3) + (k_2+k_3)k_1' - k_3(k_2+k_3)^2] - 2k_1^4\big)\mathbf{N}_a + (2k_1^2[k_2'+k_3'+k_1(k_3-k_2)] - k_1(k_2+k_3)[2k_1' + k_2^2 - k_3^2])\mathbf{R}_\alpha]$$

elde edilir. Son ifadede

$$\xi_1 = (k_2+k_3)[k_1(k_2'+k_3') - 2k_1^2k_2 - (k_2+k_3)k_1' - k_1^2(k_2+k_3) - k_2(k_2+k_3)^2] - 2k_1^4$$

$$\xi_2 = (k_2+k_3)[-k_1(k_2'+k_3') - 2k_1^2k_3 - k_1^2(k_2+k_3) + (k_2+k_3)k_1' - k_3(k_2+k_3)^2] - 2k_1^4$$

$$\xi_3 = k_1^2[k_2'+k_3'+k_1(k_3-k_2)] - k_1(k_2+k_3)[2k_1' + k_2^2 - k_3^2]$$

notasyon değişikliği yapılırsa

$$\frac{d\mathbf{T}_{\sigma_2}}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds} = (2k_1^2 + (k_2+k_3)^2)^{-3/2}(\xi_1\mathbf{K}_\alpha + \xi_2\mathbf{N}_a + \xi_3\mathbf{R}_\alpha)$$

denklemine ulaşılır. Burada denklem (6.10) yerine yazılarak kolayca

$$\frac{d\mathbf{T}_{\sigma_2}}{ds^*} = \sqrt{2}(2k_1^2 + (k_2+k_3)^2)^{-2}.(\xi_1\mathbf{K}_\alpha + \xi_2\mathbf{N}_a + \xi_3\mathbf{R}_\alpha) \tag{6.12}$$

olduğu görülebilir. (6.12) denkleminde taraf tarafa norm alınırsa $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{N}_\alpha$ −Smarandache yörüngesinin eğriliği

$$\left\|\frac{d\boldsymbol{T}_{\sigma_2}}{ds^*}\right\| = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}}{\left(2k_1^2+(k_2+k_3)^2\right)^2} = \kappa_{\sigma_2} \tag{6.13}$$

şeklinde bulunur. (6.12) ve (6.13) denklemlerinden hareketle $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{N}_\alpha$ − Smarandache yörüngesinin birim asli normal vektörü de

$$\frac{\frac{d\mathbf{T}_{\sigma_2}}{ds^*}}{\left\|\frac{d\mathbf{T}_{\sigma_2}}{ds^*}\right\|} = \mathbf{N}_{\sigma_2} = \frac{\sqrt{2}(\xi_1\mathbf{K}_\alpha+\xi_2\mathbf{N}_a+\xi_3\mathbf{R}_\alpha)}{\left(2k_1^2+(k_2+k_3)^2\right)^2}.\frac{\left(2k_1^2+(k_2+k_3)^2\right)^2}{\sqrt{2}\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}}$$

$$\mathbf{N}_{\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}}.(\xi_1\mathbf{K}_\alpha + \xi_2\mathbf{N}_a + \xi_3\mathbf{R}_\alpha) \tag{6.14}$$

formunda elde edilir.

(6.11) ve (6.14) denklemleri göz önüne alınırsa $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{N}_\alpha$ −Smarandache yörüngesinin binormal vektörü, birim teğet vektör ile birim normal vektörün vektörel çarpımı yardımıyla aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\mathbf{T}_{\sigma_2}\wedge\mathbf{N}_{\sigma_2} = \mathbf{B}_{\sigma_2} = \frac{1}{\sqrt{\left(2k_1^2+(k_2+k_3)^2\right)(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)}}\begin{bmatrix}\mathbf{K}_\alpha & \mathbf{N}_a & \mathbf{R}_\alpha\\ -k_1 & k_1 & k_2+k_3\\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3\end{bmatrix}$$

$$= \frac{(k_1\xi_3-k_2\xi_2-k_3\xi_2)\mathbf{K}_\alpha+(k_1\xi_3+k_2\xi_1+k_3\xi_1)\mathbf{N}_a-(k_1\xi_2+k_1\xi_1)\mathbf{R}_\alpha}{\sqrt{\left(2k_1^2+(k_2+k_3)^2\right)(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)}}.$$

Tanım 6.3 $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$ −Smarandache yörüngesi benzer şekilde

$$\sigma_3(s^*) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\mathbf{K}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha) \tag{6.15}$$

biçiminde tanımlanır.

Şimdi $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$ −Smarandache yörüngesinin Frenet elemanlarını elde etmeye çalışalım:

(6.15) denkleminin s yay parametresine göre türevini alırsak

$$\sigma_3' = \frac{d\sigma_2}{ds^*}\cdot\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{K}_\alpha' + \mathbf{R}_\alpha')$$

veya buna denk olarak

$$\mathbf{T}_{\sigma_3}.\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}.(-k_2\mathbf{K}_\alpha + (k_1{-}k_3)\mathbf{N}_a + k_2\mathbf{R}_\alpha) \tag{6.16}$$

yazabiliriz.(6.16) denklemi vektörel ifade belirttiğinden her iki tarafın normunu alabiliriz. Böylece

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(-k_2)^2 + (k_1 - k_3)^2 + {k_2}^2} = \frac{\sqrt{2k_2^2+(k_1-k_3)^2}}{\sqrt{2}} \tag{6.17}$$

elde ederiz ve bu ifadeyi (6.16) denkleminde yerine yazarak

$$\mathbf{T}_{\sigma_3}.\frac{\sqrt{2k_2^2 + (k_1 - k_3)^2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.(-k_2\mathbf{K}_\alpha + (k_1{-}k_3)\mathbf{N}_a + k_2\mathbf{R}_\alpha)$$

$$\mathbf{T}_{\sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{2k_2^2 + (k_1 - k_3)^2}}.(-k_2\mathbf{K}_\alpha + (k_1{-}k_3)\mathbf{N}_a + k_2\mathbf{R}_\alpha)$$

$$\mathbf{T}_{\sigma_3} = (2k_2^2 + (k_1 - k_3)^2)^{-1/2}.(-k_2\mathbf{K}_\alpha + (k_1{-}k_3)\mathbf{N}_a + k_2\mathbf{R}_\alpha) \tag{6.18}$$

sonucuna ulaşırız. Görüldüğü üzere bu denklem bize $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{R}_\alpha -$ Smarandache yörüngesinin birim teğet vektörünü vermektedir. Bu denklemin tekrar s ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{T}_{\sigma_3}}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds} = -\frac{1}{2}(2k_2^2 + (k_1 - k_3)^2)^{-3/2}\big(4k_2k_2' + 2(k_1 - k_3)(k_1' - k_3')\big)(-k_2\mathbf{K}_\alpha + (k_1{-}k_3)\mathbf{N}_a \\ + k_2\mathbf{R}_\alpha) + (2k_2^2 + (k_1 - k_3)^2)^{-1/2}(-k_2'\mathbf{K}_\alpha - k_2(k_1\mathbf{N}_a + k_2\mathbf{R}_\alpha) + (k_1' - k_3')\mathbf{N}_a \\ + (k_1 - k_3)(-k_1\mathbf{K}_\alpha + k_3\mathbf{R}_\alpha) + k_2'\mathbf{R}_\alpha + k_2(-k_2\mathbf{K}_\alpha - k_3\mathbf{N}_\alpha))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}= (2k_2^2 + (k_1 - k_3)^2)^{-3/2}\big(-2k_2k_2' - (k_1 - k_3)(k_1' - k_3')\big)(-k_2\mathbf{K}_\alpha + (k_1{-}k_3)\mathbf{N}_a \\ + k_2\mathbf{R}_\alpha) + (2k_2^2 + (k_1 - k_3)^2)^{-1/2}((-k_2' - k_1(k_1 - k_3) - k_2^2)\mathbf{K}_\alpha \\ + (-k_1k_2 + (k_1' - k_3') - k_2k_3)\mathbf{N}_\alpha + (-k_2^2 + k_3(k_1 - k_3) + k_2')\mathbf{R}_\alpha\end{aligned}$$

$$= (2k_2^2 + (k_1 - k_3)^2)^{-3/2}[\big(2k_2k_2' + (k_1 - k_3)(k_1' - k_3')\big)k_2\mathbf{K}_\alpha$$
$$+ \big(-2k_2k_2' - (k_1 - k_3)(k_1' - k_3')\big)(k_1 - k_3)\mathbf{N}_\alpha$$
$$+ \big(-2k_2k_2' - (k_1 - k_3)(k_1' - k_3')\big)k_2\mathbf{R}_\alpha$$
$$+ (2k_2^2 + (k_1 - k_3)^2)(-k_2' - k_1(k_1 - k_3) - k_2^2)\mathbf{K}_\alpha$$
$$+ (2k_2^2 + (k_1 - k_3)^2)(-k_1k_2 + (k_1' - k_3') - k_2k_3)\mathbf{N}_\alpha$$
$$+ (2k_2^2 + (k_1 - k_3)^2)(-k_2^2 + k_3(k_1 - k_3) + k_2')\mathbf{R}_\alpha]$$

$$= (2k_2^2 + (k_1 - k_3)^2)^{-3/2}[(2k_2^2k_2' + k_2(k_1 - k_3)(k_1' - k_3') - 2k_2^2k_2' - 2k_1k_2^2(k_1 - k_3)$$
$$- 2k_2^4 - (k_1 - k_3)^2k_2' - k_1(k_1 - k_3)^3 - k_2^2(k_1 - k_3)^2)\mathbf{K}_\alpha$$
$$+ (-2k_2k_2'(k_1 - k_3) - (k_1 - k_3)^2(k_1' - k_3') - 2k_1k_2^3 + 2k_2^2(k_1' - k_3') - 2k_2^3k_3$$
$$- k_1k_2(k_1 - k_3)^2 + (k_1 - k_3)^2(k_1' - k_3') - k_2k_3(k_1 - k_3)^2)\mathbf{N}_\alpha + (-2k_2^2k_2'$$
$$- k_2(k_1 - k_3)(k_1' - k_3') - 2k_2^4 + 2k_2^2k_3(k_1 - k_3) + 2k_2^2k_2' - k_2^2(k_1 - k_3)^2$$
$$+ k_3(k_1 - k_3)^3 + (k_1 - k_3)^2k_2')\,\mathbf{R}_\alpha]$$

$$= (2k_2^2 + (k_1 - k_3)^2)^{-3/2}[\big((k_1 - k_3)[k_2(k_1' - k_3') - 2k_1k_2^2 - (k_1 - k_3)k_2' - k_1(k_1 - k_3)^2$$
$$- k_2^2(k_1 - k_3)] - 2k_2^4\big)\mathbf{K}_\alpha$$
$$+ (2k_2^2[k_1' - k_3' - k_1k_2 - k_2k_3] - k_2(k_1 - k_3)[2k_2' + k_1^2 - k_3^2])\mathbf{N}_\alpha$$
$$+ ((k_1 - k_3)[-k_2(k_1' - k_3') + 2k_2^2k_3 - k_2^2(k_1 - k_3) + k_3(k_1 - k_3)^2 + (k_1 - k_3)k_2']$$
$$- 2k_2^4)\,\mathbf{R}_\alpha$$

elde edilir. Son ifadede

$\mu_{1=(k_1-k_3)[k_2(k_1'-k_3')-2k_1k_2^2-(k_1-k_3)k_2'-k_1(k_1-k_3)^2-k_2^2(k_1-k_3)]-2k_2^4}$

$$\mu_2 = 2k_2^2[k_1' - k_3' - k_1k_2 - k_2k_3] - k_2(k_1 - k_3)[2k_2' + k_1^2 - k_3^2]$$

$$\mu_3 = (k_1 - k_3)[-k_2(k_1' - k_3') + 2k_2^2k_3 - k_2^2(k_1 - k_3) + k_3(k_1 - k_3)^2 + (k_1 - k_3)k_2'] - 2k_2^4$$

notasyon değişikliği yapılırsa

$$\frac{d\mathbf{T}_{\sigma_3}}{ds^*}.\frac{ds^*}{ds} = (2k_2^2 + (k_1 - k_3)^2)^{-3/2}(\mu_1\mathbf{K}_\alpha + \mu_2\mathbf{N}_\alpha + \mu_3\mathbf{R}_\alpha)$$

denklemine ulaşılır. Burada denklem (6.17) yerine yazılarak kolayca

$$\frac{d\mathbf{T}_{\sigma_3}}{ds^*} = \sqrt{2}(2k_2^2 + (k_1 - k_3)^2)^{-2}(\mu_1\mathbf{K}_\alpha + \mu_2\mathbf{N}_\alpha + \mu_3\mathbf{R}_\alpha) \tag{6.19}$$

olduğu görülebilir. (6.19) denkleminde taraf tarafa norm alınırsa $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$ −Smarandache yörüngesinin eğriliği

$$\left\|\frac{d\mathbf{T}_{\sigma_3}}{ds^*}\right\| = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2}}{\left(2k_2^2+(k_1-k_3)^2\right)^2} = \kappa_{\sigma_3} \tag{6.20}$$

şeklinde bulunur. (6.19) ve (6.20) denklemlerinden hareketle $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$ − Smarandache yörüngesinin birim asli normal vektörü de

$$\frac{\frac{d\mathbf{T}_{\sigma_3}}{ds^*}}{\left\|\frac{d\mathbf{T}_{\sigma_3}}{ds^*}\right\|} = \mathbf{N}_{\sigma_3} = \frac{\sqrt{2}(\mu_1\mathbf{K}_\alpha+\mu_2\mathbf{N}_\alpha+\mu_3\mathbf{R}_\alpha)}{\left(2k_2^2+(k_1-k_3)^2\right)^2}.\frac{\left(2k_2^2+(k_1-k_3)^2\right)^2}{\sqrt{2}\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2}}$$

$$\mathbf{N}_{\sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2}}.(\mu_1\mathbf{K}_\alpha + \mu_2\mathbf{N}_\alpha + \mu_3\mathbf{R}_\alpha) \tag{6.21}$$

formunda elde edilir.

(6.18) ve (6.21) denklemleri göz önüne alınırsa $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{R}_\alpha$ − Smarandache yörüngesinin binormal vektörü, birim teğet vektör ile birim normal vektörün vektörel çarpımı yardımıyla aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\mathbf{T}_{\sigma_3}\wedge\mathbf{N}_{\sigma_3} = \mathbf{B}_{\sigma_3} = \frac{2}{\sqrt{(k_2^2+(k_1-k_3)^2)(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2)}}.\begin{bmatrix}\mathbf{K}_\alpha & \mathbf{N}_\alpha & \mathbf{R}_\alpha\\ -k_2 & k_1-k_3 & k_2\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\end{bmatrix}$$

$$= \frac{(k_1\mu_3-k_3\mu_3-k_2\mu_2)\mathbf{K}_\alpha+(k_2\mu_3+k_2\mu_1)\mathbf{N}_\alpha-(k_2\mu_2+k_1\mu_1-k_3\mu_1)\mathbf{R}_\alpha}{\sqrt{(k_2^2+(k_1-k_3)^2)(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2)}}.$$

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde Konumsal Uyarlanmış Çatının yeni bir versiyonu olan 2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatı çalışılmıştır. Bu çatı ilk olarak 2022 yılında "Karatekin University Journal of Science" adlı dergide gerçekleştirdiğimiz "Type 2-PAF and its application to Tzitzeica and Smarandache curves" isimli makalemizde tanıtılmıştır. Bu tezde bu makaleden temel kaynak olarak yararlanılmıştır. 2. Tip Konumsal Uyarlanmış Çatı aynı birinci versiyon gibi hareketli bir parçacığın hem kinematiğini hem de yörüngesinin diferansiyel geometrisini birlikte çalışma olanağı sunduğu için bu tezin parçacık kinematiği ve eğriler teorisi üzerine çalışan araştırmacılara fayda sağlayacağı kanaatindeyiz.

KAYNAKLAR

Ali, A. T. 2010. Special Smarandache curves in the Euclidian space, International Journal of Mathematical Combinatorics, 2, 30-36.

Aydın, M. E. and Ergüt, M. 2014. Non-null curves of Tzitzeica type in Minkowski 3-space. Rom. J. Math. Comput. Sci., 4(1), 81-90

Bayram, B. Tunç, E., Arslan, K. and Öztürk, G. 2018. On Tzitzeica curves in Euclidean 3-space E^3, Facta Univ. Ser. Math. Inform, 33(3), 409-416.

Beichner, R.J. ve Serway, R. A. 2008. Fen ve Mühendislik ˙Için Fizik 1 (Mekanik, Mekanik Dalgalar, Termodinamik), Edition, 5, 91–92

Bektaş, Ö. and Yüce, S. 2013. Smarandache curves according to Darboux frame in E^3, Romanian Journal of Mathematics and Computer Science, 3,48-59.

Bishop, R. L. 1975. There is more than one way to frame a curve, The American Mathematical Monthly, 82, 246-251.

Casey, J. 2011. Siacci's resolution of the acceleration vector for a space curve, Meccanica, 46, 471-476.

Crasmareanu, M. 2002. Cylindrical Tzitzeica curves implies forced harmonic oscillators. Balkan J. Geom. Appl., 7(1), 37-42.

Çalışkan, A. and Şenyurt, S. 2015. Smarandache Curves in Terms of Sabban Frame of Spherical Indicatrix Curves, General Mathematics Notes, 31(2).

Çetin, M., Tuncer, Y. and Karacan, M. K. 2014. Smarandache curves according to Bishop frame in Euclidean 3- space, Gen. Math. Notes, 20, 50-66.

Eren, K. and Ersoy, S. 2021. Characterizations of Tzitzeica curves using Bishop frames. Math. Meth. Appl. Sci., 45, 12046-12059

Darboux, G. 1896. Leçons sur la thèorie gènèrale des surfaces I-II-III-IV, Gauthier-Villars, Paris.

Dede, M., Ekici, C. and Tozak, H. 2015. Directional tubular surfaces, International Journal of Algebra, 9, 527-535.

Frenet, F. 1852. Sur les courbes à double courbure, Journal de mathématiques pures et appliquées, 17, 437-447.

Gürbüz, N. E. 2022. The evolution of an electric field with respect to the type-1 PAF and the PAFORS frames in R_1^3, Optik, 250, 168285.

Hacısalihoğlu, H. H. 1980. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi, Elazığ.

Hacısalihoğlu, H. H. 2000. Diferansiyel geometri, Cilt I. Ankara Üniversitesi Fen fakültesi Yayınları, 269 s., Ankara.

İşbilir, Z. Özen, K. E. and Tosun, M. 2022. Mannheim partner p-trajectories in the Euclidean 3-space E^3, Honam Mathematical Journal, 44, 419-431.

İşbilir, Z. Özen, K. E. and Tosun, M. 2023a. Bertrand partner P-trajectories in the Euclidean 3-space E^3, Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics, 72(1), 216-228.

İşbilir, Z. Özen, K. E. and Güner, M. 2023b. Spinor representations of Positional Adapted Frame in the Euclidean 3-space, International Electronic Journal of Geometry, 16(1), 62-72.

Karacan, M. K. and Bükcü B. 2009. On the elliptic cylindrical Tzitzeica curves in Minkowski 3-space, Scientia Magna, 5, 44-48.

Koenderink, J. 1990. Solid shape, MIT Press, Cambridge, MA

Nurkan, S. K. and GÜVEN, İ. 2022. A New Approach For Smarandache Curves, Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 14(1), 155-165.

Özen, K. E., Tosun, M. and Avcı, K. 2022a. Type 2-positional adapted frame and its application to Tzitzeica on Smarandache curves, Karatekin University Journal of Science, 1(1), 42-53.

Özen, K. E., İşbilir, Z. and Tosun, M. 2022b. Characterization of Tzitzeica curves using positional adapted frame. Konuralp Journal of Mathematics, 10(2), 260-268.

Özen, K. E. and Tosun, M. 2021a. A new moving frame for trajectories with non-vanishing angular momentum, Journal of Mathematical Sciences and Modelling, 4, 7- 18.

Özen, K.E. and Tosun, M. 2021b. Trajectories generated by special Smarandache curves according to Positional Adapted Frame, Karamanoglu Mehmetbey University Journal of Engineering and Natural Sciences, 3, 15-23.

Özdemir, M. 2020. Diferansiyel geometri, Altın Nokta Basım Yayın Dağıtım, 448 s., İzmir.

Sabuncuoğlu, A. 2014. Diferansiyel geometri, Nobel Yayınevi, 514 s., Ankara.

Solouma, E.M. 2021. Characterization of Smarandache trajectory curves of constant mass point particles as they move along the trajectory curve via PAF, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 13, 14-30.

Şahin, B. 2022. Diferansiyel geometri, Palme Yayınevi, 325 s., İzmir.

Şenyurt, S. and Çalışkan, A. 2017. Smarandache curves of Mannheim curve couple according to Frenet frame, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 5(1), 122-136.

Şenyurt, S., Altun, Y. and Cevahir, C. 2019. Smarandache curves according to Sabban frame belonging to Mannheim curves pair, Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 68(1), 500-513.

Şenyurt, S. ve Sivas, S. 2013. Smarandache Eğrilerine Ait Bir Uygulama, Ordu Üniversitesi Bilimsel Teknik Dergisi, 3(1), 46-60.

Şenyurt, S., Cevahir, C. and Altun, Y. 2020. On the Smarandache curves of spatial quaternionic involute curve, Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences, 90, 827-837.

Tameroğlu, S.S. ve Özbek, T., 1972. Mühendisler için Mekanik, Cilt II. İnkılap ve Aka Basımevi.

Taşköprü, K. and Tosun, M. 2014. Smarandache curves on S^2, Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica, 32, 51-59.

Turgut, M. and Yılmaz, S. 2008. Smarandache Curves in Minkowski Space-time, International Journal of Mathematical Combinatorics, 3, 51-55.

Tzitzeica, M. G. 1911. Sur certaines courbes gouches, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 28, 9-32.

Yılmaz, S. and Turgut, M. 2010. A new version of Bishop frame and an application to spherical images, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 371, 764-776.

Yüce, S. 2017. Öklid uzayında diferansiyel geometri, Pegem Akademi, 557 s., Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Kübra AVCI

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2020-2023
Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü	2010-2015

İş Deneyimi

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2015-2023	İskilip Anadolu Lisesi	Matematik Öğrt.
2023-Halen	İskilip İbn-i Sina MTAL	Matematik Öğrt.

Akademik Aktiviteler

1. Özen, K. E., Tosun, M., and Avcı, K. 2022. Type 2-positional adapted frame and its application to Tzitzeica on Smarandache curves, Karatekin University Journal of Science, 1(1): 42-53.

2. 2018 yılı J18B083 nolu İskilip Anadolu Lisesi Bilim Fuarı 4006 Tübitak proje yürütücülüğü