ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

θ-DÖNÜŞÜMLERİ VE QUASİ METRİK UZAYDA BAZI SABİT NOKTA SONUÇLARI

Ali Ahmed Mohammed AL SFOOK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2023

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Ali Ahmed Mohammed AL SFOOK tarafından hazırlanan **"θ-Dönüşümleri ve Quasi Metrik Uzayda Bazı Sabit Nokta Sonuçları"** adlı tez çalışması 09.02.2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR

Jüri Üyeleri **:**

Başkan **:** Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Mustafa ASLANTAŞ
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Hakan ŞAHİN
Matematik Anabilim Dalı
Bursa Teknik Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hamit ALYAR

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**θ-Dönüşümleri ve Quasi Metrik Uzayda Bazı Sabit Nokta Sonuçları**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı"yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (09.02.2023).

Ali Ahmed Mohammed AL SFOOK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

θ-DÖNÜŞÜMLERİ VE QUASİ METRİK UZAYDA BAZI SABİT NOKTA SONUÇLARI

Ali Ahmed Mohammed AL SFOOK

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR

Bu tez çalışması ana başlıklar şeklinde beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde sabit nokta kavramının hem tek değerli hem de küme değerli gelişimsel sürecinden bahsedilmiştir. Literatür Özeti bölümünde tez çalışmas boyunca kullanılan eserler sırasıyla açıklanmıştır. Materyal ve Metot bölümü ise içerisinde beş alt kısımdan oluşmaktadır. Metrik ve quasi metrik kavramları derinlemesine incelenip, bu uzaylarda elde edilmiş belli başlı teoremlere değinilmiştir. Ayrıca tezin ana fikrini oluşturan θ-büzülme kavramı verilerek bu büzülme yardımıyla elde edilen teoremler ve ispatları verimiştir. Araştırma bulguları olan dördüncü bölümde quasi metrik uzaylarda küme değerli θ- büzülme dönüşümü verilmiş olup dört farklı sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Tartışma-Sonuç bölümünde ise bu çalışma üzerine yapılabilecek bazı çalışmalar için fikirler verimiştir.

2023, 40 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Sabit nokta, Quasi metrik uzay, θ-büzülme, Küme değerli dönüşümler.

ABSTRACT

Master of Science Thesis

θ-CONTRACTIONS AND SOME FIXED POINT RESULTS ON QUASI METRIC SPACE

Ali Ahmed Mohammed AL SFOOK

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR

This thesis study consists of five chapters in the form of main titles. In the introduction, both single-valued and multivalued developmental processes of the fixed point concept are mentioned. In the Literature Summary section, the works used throughout the thesis are explained in order. The Material and Method section consists of five subsections.The concepts of metric and quasimetric are examined in depth and the main theorems obtained in these spaces are mentioned. In addition, the theorems and proofs obtained with the help of this contraction are given by giving the concept of θ-contraction, which is the main idea of the thesis. In the fourth chapter, which is the research findings, the set valued θ-contraction transformation in quasimetric spaces is given and four different fixed point theorems are obtained. In the Discussion-Conclusion section, ideas for some studies that can be done on this study are given.

2023, 40 pages

Keywords: Fixed point, Quasi metric space, θ -contraction, Multivalued contraction.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Öncelikle üzerimdeki emeği büyük olan ve bu yolda beni aydınlığa ileten değerli hocam Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR e teşekkürü bir borç bilirim. Sizden aldığım yardımın ve bilgilerin hiç hakkını ödeyemem, elinizden gelenin fazlasını yaptınız. Hakkınızda ne kader konuşursam iyiliğiniz anlatamam. Aynı zamanda benim hep ve her zaman iyiliğimi düşünenler ve kendilerinden çok iyi olmamı istiyenler elerinden gelini yapanlar canlarım babam, annem, kardeşlerim, sizleri saygılarımı ve teşekkürlerimi sunuyorum.

Ali Ahmed Mohammed AL SFOOK
Çankırı, Şubat 2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**
ABSTRACT ..... **ii**
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... **iiii**
İÇİNDEKİLER ..... **iiv**
SİMGELER DİZİNİ ..... **v**
1. GİRİŞ **1**
2. LİTERATÜR ÖZETİ **3**
3. MATERYAL VE METOT **4**
3.1 Metrik Uzaylar **4**
3.2 Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri ve θ Büzülme **9**
3.3 Metrik Uzaylarda Küme Değerli Dönüşümler ve Hausdorff Metriği **11**
3.4 Metrik Uzaylarda Küme Değerli Dönüşümler İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri **15**
3.5 Quasi Metrik Uzaylar **23**
4. BULGULAR VE TARTIŞMA **28**
4.1 Quasi Metrik Uzayda Küme Değerli θ-Büzülmeler **28**
5. SONUÇ VE ÖNERİLER **36**
KAYNAKLAR **37**
ÖZGEÇMİŞ **40**

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Negatif olmayan reel sayılar
$\{x_n\}$	Dizi
(X, d)	Metrik uzay

1. GİRİŞ

Temel ve sosyal bilimler, tıp ve ekonomi gibi günlük hayatımızda çoğu yerde karşımıza çıkan birçok problemi matematiksel modellemeler ile çözebiliriz. Bu modellemeler aracılığıyla denklem sistemleri oluşturulup bu denklemlerin çözümleri araştırılmaktadır. Bu denklemler her zaman yaşadığımız uzayda olmayı bazı denklem çözümleri için daha karmaşık olan soyut uzaylara ihtiyaç duyulmaktadır. Denklemin çözümü araştırılırken çözümün varlığı varsa kaç tane olduğu, nasıl bulunabileceği ve bu uzayın yapısı nedir gibi sorular başlıca cevap bekleyen unsurlardır. Eğer bir denklemin çözümü varsa bu problem belirli bir operatörün bir sabit noktasının bulunması problemiyle eş değerdir. Bundan dolayı sabit nokta teorisindeki sonuçlar operatör denklemlerinin çözümünün varlığının elde edilmesi için kullanılmaya başlamıştır.

$\mathcal{Q}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm, $\mathcal{X}$ boş olmayan bir küme iken $\mathcal{Q}x = x$ şartını doğrulayan $x \in \mathcal{X}$ değerine $\mathcal{Q}$ nin bir sabit noktası denir.

1922 yılında Banach tam metrik uzaylarda ilk sabit nokta teoremini
"$(\mathcal{X}, \rho)$ bir tam metrik uzay ve $\mathcal{Q}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \mathcal{X}$ için

$$\rho(\mathcal{Q}x, \mathcal{Q}y) \leq \alpha\rho(x, y)$$

olacak biçimde $\alpha \in [0, 1)$ var ise $\mathcal{Q}$ dönüşümünün $\mathcal{X}$ de bir tek sabit noktası vardır. Üstelik her $x_0 \in \mathcal{X}$ için $\{\mathcal{Q}^n x_0\}$ dizisi $\mathcal{T}$ nin bu sabit noktasına yakınsar."
şeklinde büzülme ve büzülme tip dönüşümler için ifade ve ispat etmiştir.

Buna ilave olarak, matematikte önemli problemlerin çözümünün varlığı ve tekliği için büzülme dönüşüm kuralı kullanışlı olduğundan bu kuralı pek çok araştırmacı genişletmiş ve genelleştirmiştir. Dahası her küme değerli büzülme dönüşümünün tam metrik uzaylarda bir sabit noktasının var olduğunu 1969 yılında nadler Hausdorff metriğini kullanarak ispatlamıştır.

Sabit nokta teori çalışmalarının ispatında Cauchy dizisi ve metrik uzayın tamlığı tanımları bütün metrik uzaylardaki sabit nokta teori çalışmalarındaki en önemli unsurlardır. Duffin ve Karlovitz tarafından 1968 yılında simetri şartı kaldırılarak quasi metrik uzay(asimetrik uzay) tanımını vermişledir. Sabit nokta teori çalışmalarının bu uzaya genellemesinin ve geliştirilmesinin olması için ispatlardaki öneminden dolayı Cauchy dizisi ve tamlık tanımlarının üzerinde durulmuştur. Bu tanımlamalarla 7 farklı Cauchy dizisi ve bu uzaydan elde edilen topolojilere bağlı olarak 3 farklı yakınsaklık tanımı quasi metrik uzayda elde edilmiştir. Seçilen Cauchy dizisinin türü ve dizinin yakınsaklık çeşidine göre uygun tamlık kullanıldığından quasi metrik uzayda yapılan sabit nokta çalışmaları literatürde önemli bir yer almaktadır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Hem lisans hem de lisansüstü eğitimlerde kullanılan bazı kitaplar (Koçak 2009, Mucuk 2010 ve Soykan 2012) genel tanım ve teoremler için kullanılmıştır. İlk olarak Banach sabit nokta teoremi detaylı bir şekilde irdelenmiş, daha sonra Banach sabit nokta teoreminin tam metrik uzaylardaki genelleştirmeleri bazı çalışmalar aracılığıyla incelenmiştir (Banach 1922, Abbas *et al.* 2013, Ahmad *et al.* 2015, Al-Rawashded ve Ahmad 2016). Ayrıca bazı uzaylardaki çeşitli genelleştirmeleri de detaylandırılarak Banach sabit nokta teoreminin birçok uygulaması öğrenilmeye çalışılmıştır (Jungck 1986, Beg ve Abbas 2006, Jeong ve Rhoades 2007, Altun *et al.* 2010, Hussain *et al.* 2015). Yine yapılan literatür taramasında α -geçişlilik kavramı ve bu kavram üzerine yapılmış olan çalışmalar incelenmiştir (Samet *et al.* 2012, Kumam *et al.* 2013, Durmaz *et al.* 2014, Gaba 2014, Liu *et al.* 2016). Dahası küme değerli dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri ve çeşitli örnekleri incelenmiştir (Reich 1972, Mizoguchi ve Takashaski 1989, Suzuki 2008, Vetro 2015). Quasi metrik uzayın oluşturduğu topolojik yapı farklı ve daha da genel olmasından dolayı quasi metrik uzayların sınıflandırılması, birçok örneği, genel tanım ve teoremleri incelenmiştir (Romeguera 1982, Kunzi ve Vajner 1994, Latif ve Al-Mezel 2011, Alegre *et al.* 2014, Altun *et al.* 2017, Dağ *et al.* 2017). Jleli ve Samet'in 2014 yılında Banach sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesi olan θ-büzülme tanımını verdiği çalışmada ayrıca incelenmiştir. Dahası bu çalışmayı kullanarak birçok yazar çeşitli genelleştirmeler elde etmiştir (Hançer *et al.* 2017, Durmaz 2017, Durdana ve Jamshaid 2019).

3. MATERYAL VE METOT

Materyal ve yöntem bölümünde, tezin okunulabilirliğine ve anlaşılabilirliğine yardımcı olmak amacıyla literatürdeki bazı temel tanım ve bunların bilinen sonuçları verilip, verilen bu ifadelerin diğer bölümlerde kullanılabilmesi için hatırlatma yapmak amaçlanmıştır.

3.1 Metrik Uzaylar

3.1.1. Tanım $d: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve X boş olmayan bir küme olsun.

i. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
ii. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,
iii. Her $x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X kümesinde metrik ve (X, d) sıralı ikilisine metrik uzay denir. Bu durumda X in elemanlarına noktalar ve $d(x, y)$ değerine de x noktası ile y noktası arasındaki uzaklık denir.

3.1.2. Tanım (X, d) bir metrik uzay, $t \in X$ ve $\beta > 0$ bir reel sayı olsun. $B_{(X,d)}(z, \beta) = \{x \in X: d(x, z) < \beta\}$ kümesine β-yarıçaplı z merkezli açık yuvar, $D_{(X,d)}(z, \beta) = \{x \in X: d(x, z) \leq \beta\}$ kümesine β-yarıçaplı z merkezli kapalı yuvar ve $S_{(X,d)}(z, \beta) = \{x \in X: d(x, z) = \beta\}$ kümesine β-yarıçaplı z merkezli yuvar yüzeyi denir.

3.1.3. Tanım (X, d) bir metrik uzay ve $N \subseteq X$ olsun. Her $x \in N$ için $B(x, \varepsilon) \subseteq N$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı mevcutsa N kümesine d -açık küme veya kısaca açık küme denir. $X \setminus N$ kümesi açıksa N kümesine kapalı küme denir.

3.1.1. Teorem Her (X, d) metrik uzayında her $B(x, \varepsilon)$ açık yuvarı açık bir küme ve her $D(x, \varepsilon)$ kapalı yuvarı kapalı bir kümedir.

3.1.4 Tanım $\mathfrak{X}$ boş olmayan bir küme ve $\tau, \mathfrak{X}$ in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer τ sınıfı

a) $\emptyset, \mathfrak{X} \in \tau$,
b) τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti τ ya ait,
c) τ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi τ ya aittir.

şartlarını sağlıyorsa τ sınıfına $\mathfrak{X}$ üzerinde bir topoloji ve $(\mathfrak{X}, \tau)$ ikilisine de topolojik uzay denir.

3.1.5 Tanım $(\mathfrak{X}, \tau)$ topolojik uzay, $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ ve $\{\mathfrak{x}_n\} \subseteq \mathfrak{X}$ bir dizi olsun. $\mathfrak{x} \in G$ olacak şekildeki bütün G açık kümeleri için, $n \geq n_0$ iken $\mathfrak{x}_n \in G$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{\mathfrak{x}_n\}$ dizisi $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ noktasına yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{x} = \mathfrak{x}$ ya da $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}$ biçiminde gösterilir.

3.1.6 Tanım $(\mathfrak{X}, \tau)$ ve $(\mathfrak{G}, \sigma)$ topolojik uzaylar, $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{G}$ bir fonksiyon ve $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ olsun. Eğer $f(\mathfrak{x}) \in V$ olacak şekildeki her $V \in \sigma$ için $\mathfrak{x} \in U$ ve $f(U) \subseteq V$ olacak biçimde bir $U \in \tau$ varsa f fonksiyonuna $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ de süreklidir, eğer f fonksiyonu $\mathfrak{X}$ in bütün noktalarında sürekliyse fonksiyona sürekli fonksiyon denir.

3.1.7 Tanım $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{G}$ bir fonksiyon ve $(\mathfrak{X}, \tau_1)$ ve $(\mathfrak{G}, \tau_2)$ iki topolojik uzay olsun. $(\mathfrak{x}, \tau_1)$ topolojik uzayında $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}$ iken $(\mathfrak{G}, \tau_2)$ uzayında $f(\mathfrak{x}_n) \to f(\mathfrak{x})$ oluyorsa f fonksiyonuna $\mathfrak{x}$ noktasında dizisel sürekli, eğer f fonksiyonu $\mathfrak{X}$ uzayının bütün noktalarında dizisel sürekli ise fonksiyona bu uzayda dizisel sürekli denir.

3.1.8 Tanım $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$, $(\mathfrak{X}, \square)$ bir metrik uzay ve $M, N \subseteq \mathfrak{X}$ olsun. Bu durumda

$$D(M, N) = \inf \{\square(m, n) : m \in M, n \in N\}$$

değerine M ve N kümeleri arasındaki uzaklık,

$$D(\mathfrak{x}, M) = \inf\{\mathfrak{d}(\mathfrak{x}, m) : m \in M\}$$

değerine $\mathfrak{x}$ noktasının M kümesine uzaklığı,

$$\mathfrak{d}(M) = \sup\{\mathfrak{d}(m, n) : m \in M, n \in N\}$$

değerine M kümesinin çapı, eğer $\mathfrak{d}(M) = \infty$ ise M kümesine sınırsız küme, eğer $\mathfrak{d}(M) < \infty$ ise M kümesine sınırlı küme denir.

3.1.9 Tanım $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ bir metrik uzay olsun. Bu durumda

$$\tau_{\mathfrak{d}} = \{U \subseteq \mathfrak{X} : U \text{ kümesi } (\mathfrak{X}, \mathfrak{d}) \text{ uzayında açık}\}$$

sınıfı $\mathfrak{X}$ de bir topoloji olup bu topoljiye $\tau_{\mathfrak{d}}$ ye göre metrik topolojisi yada $\mathfrak{d}$ metriği tarafından ürettilen topoloji denir ve $(\mathfrak{X}, \tau_{\mathfrak{d}})$ sıralısına metrik topolojik uzay denir.

3.1.10 Tanım $\{\mathfrak{x}_n\}$ elemanları $\mathfrak{X}$ kümesinde bulunan bir dizi ve $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ bir metrik uzay olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathfrak{x}_n \in B(\mathfrak{x}, \varepsilon)$ olacak biçimde bir n_0 doğal sayısı varsa $\{\mathfrak{x}_n\}$, $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ noktasına yakınsıyor ve $\mathfrak{x}$ noktasına $\{\mathfrak{x}_n\}$ dizisinin limiti adı verilir.

3.1.2 Teorem Yakınsak her dizinin limiti metrik uzaylarda tektir.

3.1.11 Tanım $\{\mathfrak{x}_n\}$, $\mathfrak{X}$ de bir dizi ve $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ bir metrik uzay olsun. Eğer $m > n > n_0$ özelliğindeki her m, n doğal sayısı ve her $\varepsilon > 0$ için $\mathfrak{d}(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_m) < \varepsilon$ olacak biçimde için bir n_0 doğal sayısı varsa $\{\mathfrak{x}_n\}$ dizisine Cauchy dizisi, $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsak ise tam metrik uzay denir .

3.1.1 Önerme $\{\mathrm{x_n}\}$, $\mathfrak{X}$ de bir dizi, $(\mathfrak{X}, \mathfrak{d})$ bir metrik uzay ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < \infty$$

ise $\{x_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir.

3.1.11 Tanım (X, ρ) ve (Y, e) metrik uzaylar, $f : (X, \rho) \to (Y, e)$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $f\big(B(x_0,\delta)\big) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ var ise, diğer bir deyişle her $\varepsilon > 0$ için $\rho(x_0, x) < \delta$ olduğunda $e\big(f(x_0), f(x)\big) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonu x_0 da sürekli ve eğer f X in bütün noktalarında sürekliyse fonksiyona sürekli fonksiyon denir.

3.1.12 Tanım Bir (X, ρ) metrik uzayında (açık) kümelerin bir ailesi $\{G_i : i \in I\}$ olsun. Eğer $A \subseteq X$ için

$$A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$$

oluyorsa $\{G_i : i \in I\}$ koleksiyonuna A kümesinin bir (açık) örtüsü denir. $\{G_i : i \in I\}$ kolaksiyonu A kümesinin bir (açık) örtüsü ve $J \subset I$ olmak üzere $\{G_i : i \in J\}$ koleksiyonu A nın bir örtüsü ise $\{G_i : i \in J\}$ örtüsüne $\{G_i : i \in I\}$ örtüsünün bir alt örtüsü denir. Bu durumda J sonlu ise $\{G_i : i \in J\}$ örtüsüne $\{G_i : i \in I\}$ örtüsünün sonlu alt örtüsü denir.

3.1.13 Tanım $A \subseteq X$ ve (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Eğer A nın bütün açık örtülerinin sonlu bir alt ötüsü varsa A kümesine kompakttır denir. (X, ρ) uzayına da kompakt metrik uzay denir.

3.1.3 Teorem Kompakt bir (X, ρ) metrik uzayının her kapalı alt kümesi de kompakttır.

3.1.4 Teorem A, X in boştan farklı bir kompakt alt kümesi ve (X, τ) topolojik uzay olsun. Eğer $f : A \to \mathbb{R}$ sürekli ise $f(b) = \inf f(A)$ ve $f(a) = \sup f(A)$ olacak biçimde $a, b \in A$ vardır.

3.1.5 Teorem Bir $(\mathbb{X}, \square)$ metrik uzayında her dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır ancak ve ancak bu uzay kompakttır.

3.1.6 Teorem A ve $B, \mathbb{X}$ in boştan farklı alt kümeleri ve $(\mathbb{X}, \square)$ metrik uzay olsun. Eğer A kompakt ise $D(A, B) = \square(p, B)$ olacak biçimde bir $p \in A$ noktası vardır.

3.1.1 Lemma $A, \mathbb{X}$ in kompakt bir alt kümesi, $(\mathbb{X}, \square)$ bir metrik uzay ve $\mathfrak{x} \in \mathbb{X}$ olsun. Bu durumda $\square(\mathfrak{x}, a) = \square(\mathfrak{x}, A)$ olacak biçimde bir $a \in A$ noktası vardır.

3.2 Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri ve θ -Büzülme

Tam metrik uzaylardaki sabit nokta teori ilk olarak Banach ile 1922 yılında çalışılmıştır.

3.2.1. Teorem $\mathcal{Z}: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ bir dönüşüm ve $(\mathcal{X}, \mathcal{d})$ bir tam metrik uzay olsun. Her $\mathfrak{x}, \mathfrak{o} \in \mathcal{X}$ için

$$\mathcal{d}(\mathcal{Z}\mathfrak{x}, \mathcal{Z}\mathfrak{o}) \leq \alpha \mathcal{d}(\mathfrak{x}, \mathfrak{o})$$

olacak biçimde $\alpha \in [0,1)$ var ise $\mathcal{Z}$ dönüşümünün $\mathcal{X}$ de tek bir sabit noktası vardır. Ayrıca her $\mathfrak{x}_0 \in \mathcal{X}$ için $\{\mathcal{Z}^n \mathfrak{x}_0\}$ dizisi $\mathcal{Z}$ nin bu sabit noktasına yakınsar.

Jleli ve Samet θ -büzülme dönüşümü tanımını $\theta: (0, \infty) \to (1, \infty)$ olmak üzere

(θ_1) θ azalmayan

(θ_2) Her $\{\mathcal{z}_n\} \subset (0, \infty)$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} \theta(\mathcal{z}_n) = 1$ ancak ve ancak $\lim_{n\to\infty} \mathcal{z}_n = 0^+$

(θ_3) $\lim_{\mathcal{z}\to 0^+} \frac{\theta(t)-1}{\mathcal{z}^r} = \ell$ olacak biçimde $r \in (0,1)$ ve $\ell \in (0, \infty]$ vardır

şartlarını sağlayan tüm θ dönüşümlerinin ailesi Θ olarak tanımlansın şeklinde 2014 yılında vermiştir. Bu tanım bilinen büzülme dönüşümü kavramını da kapsamaktadır. Ayrıca bu tanım aracılığı ile yeni bir teorem ifade ve ispat etmişlerdir. Ayrıca, Jleli ve Samet bu çalışmalarında θ -büzülme dönüşümü ile ifade ve ispat ettikleri teoremin Banach sabit nokta teoreminin bir genelleştirmesi olduğunu bir örnek yardımıyla göstermişlerdir.

3.2.1.Tanım $\mathcal{Z}: \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ bir dönüşüm, $(\mathcal{X}, \mathcal{d})$ bir metrik uzay ve $\theta \in \Theta$ olsun. Eğer $\mathcal{d}(\mathcal{Z}\mathfrak{x}, \mathcal{Z}\mathfrak{o}) > 0$ olacak şekildeki her $\mathfrak{x}, \mathfrak{o} \in \mathcal{X}$ için

$$\theta\big(d(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y)\big) \leq \big[\theta\big(d(x, y)\big)\big]^{k} \qquad (3.2.1)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k \in (0,1)$ elemanı varsa $\mathcal{T}$ ye θ- büzülme dönüşümü denir. θ fonksiyonu olarak bazı özel fonksiyonlar alınırsa literatürdeki bazı büzülmeleri θ- büzülme aracılığıyla elde edebiliriz.

3.2.1.Örnek $\theta: (0, \infty) \to (1, \infty)$ ve $\theta(t) = e^{\sqrt{t}}$ olmak üzere $\theta \in \Theta$ dır. tanımdaki eşitisizlikten, $\mathcal{T}x \neq \mathcal{T}y$ ve her $x, y \in X$ için

$$d(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq k^2\, d(x, y)$$

elde edilir. Ayrıca $\mathcal{T}x = \mathcal{T}y$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) \leq k^2\, d(x, y)$$

dir. O halde $\mathcal{T}$ bilinen büzülme dönüşümüdür. Ayrıca, $\mathcal{T}$ bir büzülebilir dönüşüm olup buradan bütün θ-büzülme dönüşümlerinin sürekli bir dönüşüm olduğu görülebilir.

Banach büzülme dönüşümü prensibinin bir genelleştirilmiş hali θ-büzülme dönüşümü aracılığıyla aşağıdaki biçimde ifade edilmiştir.

3.2.2.Teorem $\mathcal{T}: X \to X$ bir θ-büzülme dönüşümü ve (X, d) bir tam metrik uzay ise $\mathcal{T}$, X de bir tek sabit noktaya sahiptir.

3.3 Metrik Uzaylarda Küme Değerli Dönüşümler ve Hausdorff Metriği

3.3.1 Tanım $\mathfrak{X} \neq \emptyset$ ve $\mathfrak{G} \neq \emptyset$ olacak şekilde iki farklı küme ve $\mathcal{Z} \subseteq \mathfrak{X} \times \mathfrak{G}$ ise $\mathcal{Z}$ ye $\mathfrak{X}$ den $\mathfrak{G}$ ye bir küme değerli dönüşüm denir. $\mathcal{Z} : \mathfrak{X} \to \mathcal{P}(\mathfrak{G})$ ile gösterilir. Burada $\mathcal{P}(\mathfrak{G}), \mathfrak{G}$ nin boş olmayan tüm alt kümelerinin sınıfıdır. $\mathcal{Z} : \mathfrak{X} \to \mathcal{P}(\mathfrak{G})$ küme değerli dönüşümün tersi

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{g}) \in \mathcal{Z} \Leftrightarrow (\mathfrak{g}, \mathfrak{x}) \in \mathcal{Z}^{-1}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ ve $\mathcal{Z}, \mathfrak{X}$ den $\mathfrak{G}$ ye küme değerli dönüşüm olsun.

$$\mathcal{Z}\mathfrak{x} = \{\mathfrak{g} \in \mathfrak{G} : (\mathfrak{x}, \mathfrak{g}) \in \mathcal{Z}\}$$

$\mathcal{Z}$ nin $\mathfrak{x}$ noktasındaki görüntü kümesidir. Yine $A \subseteq \mathfrak{X}$için,

$$\mathcal{Z}(A) = \bigcup_{\mathfrak{x} \in A} \mathcal{Z}\mathfrak{x}$$

kümesi A nın $\mathcal{Z}$ küme değerli dönüşüm altındaki görüntüsüdür. Ayrıca,

$$\bigcup_{\mathfrak{x} \in A} \mathcal{Z}\mathfrak{x} = \{\mathfrak{g} \in \mathfrak{G} : \mathcal{Z}^{-1}(\mathfrak{g}) \cap A \neq \emptyset\}$$

dır. $B \subseteq \mathfrak{G}$ için, B nin $\mathcal{Z}^{-1}$ altındaki görüntüsü (veya $\mathcal{Z}$ altındaki ters görüntüsü)

$$\mathcal{Z}^{-1}(B) = \bigcup_{\mathfrak{g} \in B} \mathcal{Z}^{-1}(\mathfrak{g})$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde

$$\bigcup_{\mathfrak{o} \in B} \mathcal{Z}^{-1}(\mathfrak{o}) = \{\mathfrak{x} \in \mathfrak{X} : \mathcal{Z}\mathfrak{x} \cap B \neq \emptyset\}$$

olduğu gösterilebilir.

3.3.2 Tanım $\mathcal{Z} : \mathfrak{X} \to \mathcal{P}(\mathfrak{X})$ dönüşümü için $\mathfrak{x}_0 \in \mathcal{Z}\mathfrak{x}_0$ olacak biçimde $\mathfrak{x}_0 \in \mathfrak{X}$ mevcut ise bu noktaya $\mathcal{Z}$ nin sabit noktası,

$$F(\mathcal{Z}) = \{\mathfrak{x} \in \mathfrak{X} : \mathfrak{x} \in \mathcal{Z}\mathfrak{x}\}$$

kümesine de dönüşümünün sabit noktalarının kümesi denir.

3.3.1 Örnek $\mathfrak{X} = [0,1]$ olmak üzere $\mathcal{Z} : \mathfrak{X} \to \mathcal{P}(\mathfrak{X})$ dönüşümü,

$$\mathcal{Z}\mathfrak{x} = \begin{cases} \{1\} & , \ 0 \leq \mathfrak{x} < \frac{1}{2} \\ [0,1] & , \ \mathfrak{x} = \frac{1}{2} \\ [0,1-\mathfrak{x}] & , \ \frac{1}{2} < \mathfrak{x} \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\mathcal{Z}(0) = \{1\} \ , \ \mathcal{Z}\left(\frac{3}{4}\right) = \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

$$\mathcal{Z}\left(\frac{1}{2}\right) = [0,1] \ , \ \mathcal{Z}\left(\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right) = [0,1]$$

$$\mathcal{Z}\left(\left(0, \frac{1}{4}\right)\right) = \{1\} \ , \ \mathcal{Z}\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)\right) = \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

olduğu görülebilir. Burada $\frac{1}{2} \in \mathcal{Z}\ \frac{1}{2} = [0,1]$ olup $\frac{1}{2}$, $\mathcal{Z}$ nin bir sabit noktasıdır.

3.3.3 Tanım $\mathcal{Z} : \mathcal{X} \to P(\mathcal{Y})$ bir küme değerli dönüşüm ve $\mathcal{X}$ ve $\mathcal{Y}$ iki topolojik uzay olsun. Eğer $\mathcal{Y}$ deki bütün açık kümelerin ters görüntüsü $\mathcal{X}$ de açık ise $\mathcal{Z}$ ye alttan yarı sürekli dönüşüm, $\mathcal{Y}$ deki bütün kapalı kümelerin ters görüntüsü $\mathcal{X}$ de kapalı oluyorsa, $\mathcal{Z}$ ye üsten yarı sürekli, eğer bir küme değerli dönüşüm hem alttan hem de üstten yarı sürekli ise bu dönüşüme süreklidir denir.

$(\mathcal{X}, d)$ bir metrik uzay ve $\mathcal{CB}(\mathcal{X}), \mathcal{X}$ in tüm kapalı ve sınırlı alt kümelerin koleksiyonu, $\mathcal{C}(\mathcal{X}), \mathcal{X}$ in boştan farklı bütün sınırlı alt kümelerin koleksiyonu, $\mathcal{K}(\mathcal{X})$, $\mathcal{X}$ in boştan farklı bütün kompakt alt kümelerin koleksiyonu, $\mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathcal{X}$ in boştan farklı bütün kapalı alt kümelerin koleksiyonu olsun. Bu durumda $\mathcal{K}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{CB}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{X})$ ve $\mathcal{K}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{CB}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{X})$ olduğu açıktır. $A, B \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ için,

$$\delta(A,B) = \sup_{\mathfrak{x} \in A} \{D(\mathfrak{x}, B)\} = \sup_{\mathfrak{x} \in A} \inf_{\mathfrak{b} \in B} d(\mathfrak{x}, \mathfrak{b})$$

ve

$$H(A,B) = \max \{\delta(A,B), \delta(B,A)\}$$

$$= \max\left\{\sup_{\mathfrak{x} \in A} \inf_{\mathfrak{b} \in B} d(\mathfrak{x}, \mathfrak{b}), \sup_{\mathfrak{x} \in B} \inf_{\mathfrak{b} \in A} d(\mathfrak{x}, \mathfrak{b})\right\}$$

şeklinde tanımlansın. δ ve H, $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \times \mathcal{P}(\mathcal{X})$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyon değildirler. Tanımlar dikkate alındığında $(\mathcal{X}, d)$ metrik uzayında eğer A ve B sınırlı alt kümelerse $\delta(A,B), \delta(B,A)$ ve $H(A,B)$ değerleri reel sayılardır.

3.3.1 Önerme $(\mathcal{X}, d)$ bir metrik uzay olsun. H fonksiyonu $\mathcal{CB}(\mathcal{X})$ üzerinde Hausdorff metriğini denir.

Hausdorff metriği ye bağlıdır. Dahası $(\mathfrak{X},)$ tam metrik uzay ise $(\mathcal{CB}(\mathfrak{X}), H)$ ve $(\mathcal{K}(\mathfrak{X}), H)$ metrik uzayları da tamdır.

3.3.1 Lemma $A, B \in \mathcal{CB}(\mathfrak{X})$ ve $a \in A$ olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için,

$$(a, b) \leq H(A, B) + \varepsilon$$

olacak biçimde bir $b \in B$ vardır. Bu lemmayı ayrıca " $A, B \in \mathcal{CB}(\mathfrak{X})$ ve $a \in A$ olsun. O zaman her $q > 1$ için,

$$(a, b) \leq qH(A, B)$$

olacak biçimde bir $b \in B$ vardır" şeklinde de ifade edebiliriz.

3.4 Metrik Uzaylarda Küme Değerli Dönüşümler ve Bazı Sabit Nokta Teoremleri

3.4.1 Tanım $\mathcal{T} : \mathfrak{X} \to \mathcal{CB}(\mathfrak{X})$ küme değerli dönüşümve $(\mathfrak{X}, d)$ bir metrik uzay olsun. Eğer her $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{X}$ için,

$$H(\mathcal{T}\mathfrak{x}, \mathcal{T}\mathfrak{y}) \leq L d(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

olacak biçimde $L > 0$ değeri mevcutsa $\mathcal{T}$ ye küme değerli Lipschitz dönüşümü adı verilir. L değerini en küçük yapan değere $\mathcal{T}$ nin Lipschitz sabiti denir ve k ile gösterilir. Şayet $k = 1$ ise genişlemeyen dönüşüm, $k < 1$ ise $\mathcal{T}$ ye küme değerli büzülme dönüşümü adı verilir.

3.4.1 Teorem $\mathcal{T} : \mathfrak{X} \to \mathcal{CB}(\mathfrak{X})$ bir küme değerli büzülme dönüşüm ve $(\mathfrak{X}, d)$ bir tam metrik uzay olsun. Bu şartlar altında $\mathcal{T}, \mathfrak{X}$ kümesinde $x \in \mathcal{T}x$ olacak şekilde bir sabit noktaya sahiptir.

Mizoguchi ve Takahashi tarafından elde edilen en önemli teoremlerden biri de aşağıda tanımı ve ifadesi verilen küme değerli sabit nokta teoremidir.

3.4.2 Tanım $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ bir fonksiyon ve $t \in [0, \infty)$ iken

$$\lim_{s \to t^+} \sup \varphi(s) < 1$$

şartı sağlanıyorsa φ fonksiyonuna *Mizoguchi-Takahashi* fonksiyonu denir

3.4.1 Örnek $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ azalmayan veya artmayan ise bu durumda φ bir *Mizoguchi-Takahashi* fonksiyondur.

3.4.2 Örnek $\varphi : [0, \infty) \to [0, 1)$ ve

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{sint}{t} & , \quad t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \\ 0 & , \quad t \notin \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa φ, bir *Mizoguchi-Takahashi* değildir.

Reich 1972 yılında yapmış olduğu bir çalışmasında aşağıdaki teoremi ifade ve ispat etmiştir.

3.4.2 Teorem $\mathcal{Z} : \mathcal{X} \to \mathcal{K}(\mathcal{X})$ bir dönüşüm ve $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ bir tam metrik uzay olsun. $k : (0, \infty) \to [0, 1)$ ve her $t \in (0, \infty)$ için

$$\lim_{r \to t^+} \sup k(r) < 1$$

şartını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ olacak şekildeki her $\mathfrak{x}, \mathfrak{o} \in \mathcal{X}$ için,

$$H(\mathcal{Z}\mathfrak{x}, \mathcal{Z}\mathfrak{o}) \leq k\big(\mathcal{D}(\mathfrak{x}, \mathfrak{o})\big)\mathcal{D}(\mathfrak{x}, \mathfrak{o})$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\mathcal{Z}$ bir sabit noktaya sahiptir.

Reich' in bu teoreminden sonra Teorem 3.4.3 de $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ yerine $\mathcal{CB}(\mathcal{X})$ alındığında $\mathcal{Z}$ bir sabit noktaya sahip midir problemi 1974 yılında ortaya atılmıştır. Dahası birçok yazar bu problem üzerine çalışmalar yapmasına rağmen problemin çözümü bir açıklığa ulaşamamıştır. Fakat birtakım yaklaşık cevaplar elde edilmiş olup bunlardan 1989 yılında en anlamlı olarak ortaya konulan Mizoguchi ve Takahashi tarafından aşağıdaki teoremle verilen halidir.

3.4.3 Teorem (Mizoguchi-Takahashi Teoremi) $\mathcal{Z} : \mathcal{X} \to \mathcal{CB}(\mathcal{X})$ bir dönüşüm ve $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ bir tam metrik uzay olsun. $k : (0, \infty) \to [0, 1)$ ve her $t \in [0, \infty)$ için

$$\limsup_{r \to t^+} k(r) < 1$$

şartını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere $\mathfrak{x} \neq \mathfrak{o}$ olacak şekildeki her $\mathfrak{x}, \mathfrak{o} \in \mathfrak{X}$ için,

$$H(\mathcal{C}\mathfrak{x}, \mathcal{C}\mathfrak{o}) \leq k\big(\square(\mathfrak{x}, \mathfrak{o})\big)\square(\mathfrak{x}, \mathfrak{o})$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $\mathcal{C}$ bir sabit noktaya sahiptir.

Jleli 2014 yılında θ-büzülme kavramını verdikten sonra Nadler tip sabit nokta teoremlerini Hançer 2017 yılında küme değerli dönüşümler için aşağıdaki biçimde ifade ve ispat etmiştir.

3.4.4 Teorem $(\mathfrak{X}, \square)$ bir tam metrik uzay, $\mathcal{C} : \mathfrak{X} \to \mathcal{K}(\mathfrak{X})$ bir dönüşüm ve $\theta \in \Theta$ olsun. $H(\mathcal{C}\mathfrak{x}, \mathcal{C}\mathfrak{o}) > 0$ olacak şekildeki her $\mathfrak{x}, \mathfrak{o} \in \mathfrak{X}$ için,

$$\theta\big(H(\mathcal{C}\mathfrak{x}, \mathcal{C}\mathfrak{o})\big) \leq \big[\theta\big(\square(\mathfrak{x}, \mathfrak{o})\big)\big]^k$$

eşitsizliği bir $k \in (0,1)$ için sağlanıyorsa $\mathcal{C}$ bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $\mathfrak{x}_0 \in \mathfrak{X}$ keyfi bir nokta ve $\mathfrak{x}_1 \in \mathcal{C}\mathfrak{x}_0$ olsun. Eğer $\mathfrak{x}_1 \in \mathcal{C}\mathfrak{x}_1$ ise $\mathfrak{x}_1$ in $\mathcal{C}$ nin sabit noktası olduğunu biliyoruz. $\mathfrak{x}_1 \notin \mathcal{C}\mathfrak{x}_1$ olsun. O halde $\mathcal{C}\mathfrak{x}_1$ kapalı olduğundan, $\square(\mathfrak{x}_1, \mathcal{C}\mathfrak{x}_1) > 0$ olur. Diğer taraftan, $\square(\mathfrak{x}_1, \mathcal{C}\mathfrak{x}_1) \leq H(\mathcal{C}\mathfrak{x}_0, \mathcal{C}\mathfrak{x}_1)$ olduğundan (Θ_1) göz önüne alınırsa,

$$\theta\big(\square(\mathfrak{x}_1, \mathcal{C}\mathfrak{x}_1)\big) \leq \theta\big(H(\mathcal{C}\mathfrak{x}_0, \mathcal{C}\mathfrak{x}_1)\big)$$

olur. Böylece $\mathcal{C}$ bir küme değerli θ-büzülme dönüşümü olduğundan,

$$\theta\big(\square(\mathfrak{x}_1, \mathcal{C}\mathfrak{x}_1)\big) \leq \theta\big(H(\mathcal{C}\mathfrak{x}_0, \mathcal{C}\mathfrak{x}_1)\big) \leq \big[\theta\big(\square(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_0)\big)\big]^k$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\mathcal{Q}\,\mathfrak{x}_1$ kompakt olduğundan,

$$\square(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \square(\mathfrak{x}_1, \mathcal{Q}\,\mathfrak{x}_1)$$

olacak biçimde $\mathfrak{x}_2 \in \mathcal{Q}\,\mathfrak{x}_1$ vardır. Bu durumda yukarıdaki eşitsizlikten,

$$\theta\big(\square(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)\big) \leq \theta\big(H(\mathcal{Q}\,\mathfrak{x}_0, \mathcal{Q}\,\mathfrak{x}_1)\big) \leq \big[\theta\big(\square(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_0)\big)\big]^k$$

olur. Bu durum tekrar edilirse, her n doğal sayısı için $\mathfrak{x}_{n+1} \in \mathcal{Q}\,\mathfrak{x}_n$ ve $\mathfrak{x}_n \notin \mathcal{Q}\,\mathfrak{x}_n$ olmak üzere,

$$\theta\big(\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})\big) \leq \big[\theta\big(\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n-1})\big)\big]^k$$

eşitsizliğini sağlayan $\mathfrak{X}$ de bir $\{\mathfrak{x}_n\}$ dizisi bulunabilir.

Şimdi, her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})$ olsun. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ olup yukarıdaki eşitsizlik kullanılırsa,

$$\theta(a_n) \leq [\theta(a_{n-1})]^k \leq [\theta(a_{n-2})]^{k^2} \leq \cdots \leq [\theta(a_0)]^{k^n}$$

elde edilir. Buradan, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$1 < \theta(a_n) \leq [\theta(a_0)]^{k^n}$$

bulunur. O halde $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \theta(a_n) = 1$$

olur. Böylece (θ_2) den,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0^+$$

elde edilir. Ayrıca (θ_3) ten,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(a_n)-1}{(a_n)^r} = \ell$$

olacak biçimde $0 < r < 1$ ve $0 < \ell < \infty$ vardır.

$B = \frac{\ell}{2}$ ve $\ell < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda limit tanımından, her $n \geq n_0$ için,

$$\left|\frac{\theta(a_n)-1}{(a_n)^r} - \ell\right| \leq B$$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan her $n \geq n_0$ için,

$$\frac{\theta(a_n)-1}{(a_n)^r} \geq \ell - B$$

elde edilir. Yani her $n \geq n_0$ için $A = 1/B$ olmak üzere,

$$n(a_n)^r \leq An[\theta(a_n) - 1]$$

eşitsizliği sağlanır. Varsayalım ki $\ell = \infty$ olsun. Buradan $B > 0$ herhangi bir reel sayı olmak üzere limit tanımında her $n \geq n_0$ için,

$$\frac{\theta(a_n)-1}{(a_n)^r} \geq B$$

olacak biçimde n_0 doğal sayısı vardır. Buradan $A = \frac{1}{B}$ iken ve her $n \geq n_0$ için,

$$n(a_n)^r \leq [\theta(a_n) - 1]An$$

elde edilir. O halde her koşulda da $n \geq n_0$ için,

$$n(a_n)^r \leq An[\theta(a_n) - 1]$$

olacak biçimde $A \in (0, \infty)$ ve n_0 doğal sayısı vardır. Böylece her n doğal sayısı için, $\theta(a_n) \leq [\theta(a_0)]^{k^n}$ olduğundan her $n \geq n_0$ için,

$$n(a_n)^r \leq An\left[[\theta(a_0)]^{k^n} - 1\right]$$

olur. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n)^r = 0$$

bulunur. Böylece, her $n \geq n_1$ için,

$$n(a_n)^r \leq 1$$

olacak biçimde n_1 doğal sayısı vardır. Dolayısıyla her $n \geq n_1$ için

$$a_n \leq \frac{1}{n^{1/r}}$$

bulunur. Dahası, $\{\mathfrak{x}_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olup olmadığını gösterelim. Bunun için $m > n \geq n_1$ olmak üzere m, n doğal sayılarını göz önüne alalım. ,

Bu durumda

$$□(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_m) \leq □(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1}) + □(\mathfrak{x}_{n+1}, \mathfrak{x}_{n+2}) + \cdots + □(\mathfrak{x}_{m-1}, \mathfrak{x}_m)$$

$$= a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{m-1}$$

$$= \sum_{i=n}^{m-1} a_i$$

$$\leq \sum_{i=n}^{\infty} a_i$$

$$\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/r}}$$

elde edilir. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/r}}$ serisi yakınsak olduğuna göre $n \to \infty$ için limit alındığında $□(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_m) \to 0$ olup buradan $\{\mathfrak{x}_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir. $(\mathfrak{X}, □)$ uzayı tam metrik uzay olduğundan $\{\mathfrak{x}_n\}$ dizisi bu uzayın bir z noktasına yakınsar. Ayrıca, (θ_1) şartından, $ↂ\mathfrak{x} \neq ↂ\mathfrak{б}$ olmak üzere her $\mathfrak{x}, \mathfrak{б} \in \mathfrak{X}$ için,

$$H(ↂ\mathfrak{x}, ↂ\mathfrak{б}) < □(\mathfrak{x}, \mathfrak{б})$$

eşitsizliği sağlanır. O zaman her $\mathfrak{x}, \mathfrak{б} \in \mathfrak{X}$ için,

$$H(ↂ\mathfrak{x}, ↂ\mathfrak{б}) \leq □(\mathfrak{x}, \mathfrak{б})$$

sağlanır. O halde $n \in \mathbb{N}$ için,

$$□(\mathfrak{x}_{n+1}, ↂz) \leq H(ↂ\mathfrak{x}_n, ↂz) \leq □(\mathfrak{x}_n, z)$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa, $□(z, ℶ z) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $z \in \overline{ℶ z} = ℶ z$ olur. Ayrıca, küme değerli her büzülme dönüşümü $\theta(t) = e^{\sqrt{t}}$ ile birlikte küme değerli her büzülme dönüşümü bir küme değerli θ- büzülme dönüşümüdür.

Yukarıdaki teoremde, θ nın şartlarına,

(θ_4) inf $A > 0$ olacak biçimdeki her $A \subset (0, \infty)$ için $\theta(\inf A) = \inf \theta(A)$

şartı eklenirse, $\mathcal{K}(\mathfrak{X})$ yerine $\mathcal{CB}(\mathfrak{X})$ alınabilir. Dikkat edelimki (θ_1) şartına sahip olan bir θ fonksiyonunun (Θ_4) şartını karşılaması ancak ve ancak o fonksiyonun sağdan sürekli olması ile mümkündür. Anlaşılır olması için

$$\Xi = \{\theta : (\theta_1) - (\theta_4) \text{ özelliklerini sağlayan } \theta : (0, \infty) \to (1, \infty) \text{ fonksiyonu }\}$$

sınıfını göz önüne alalım.

3.4.5 Teorem $ℶ : \mathfrak{X} \to \mathcal{CB}(\mathfrak{X})$ bir dönüşüm, $(\mathfrak{X}, □)$ bir tam metrik uzay ve $\theta \in \Xi$ olsun. $H(ℶ \mathfrak{x}, ℶ \mathfrak{б}) > 0$ olacak şekildeki her $\mathfrak{x}, \mathfrak{б} \in \mathfrak{X}$ için,

$$\theta\big(H(ℶ \mathfrak{x}, ℶ \mathfrak{б})\big) \leq \big[\theta\big(□(\mathfrak{x}, \mathfrak{б})\big)\big]^k$$

eşitsizliği bir $k \in (0,1)$ için sağlanıyorsa $ℶ$ bir sabit noktaya sahiptir.

3.5 Quasi Metrik Uzaylar

3.5.1 Tanım $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$, bir fonksiyon X boş olmayan bir küme olsun. Her $x, y, z \in X$ için

1. $d(x, x) = 0$

2. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

3. $d(x, y) = d(y, x) = 0$ ise $x = y$

4. $d(x, y) = 0$ ise $x = y$

koşulları verilsin.

- (1) ve (2) koşulları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X de quasi-pseudo metrik ve (X, d) ikilisine quasi-pseudo metrik uzay,

- (1), (2) ve (3) koşulları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X de quasi metrik ve (X, d) ikilisine quasi metrik uzay,

- (1), (2) ve (4) koşulları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X de $\mathbf{T_1}$-quasi metrik ve (X, d) ikilisine $\mathbf{T_1}$-quasi metrik uzay denir.

Yukarıda verilen koşullar sonucunda Bütün metrik uzaylar bir $\mathbf{T_1}$-quasi metrik uzaydır. Ayrıca görülebilir ki bütün $\mathbf{T_1}$-quasi metrik uzaylar bir quasi metrik uzaydır. Dahası yine açıktır ki bütün quasi metrik uzaylar da bir quasi-pseudo metrik uzaydır.

3.5.2 Tanım Quasi-pseudo metrik uzay $(\mathcal{X}, \mathcal{d})$ olsun. $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ reel sayısı ve $\mathcal{x}_{\mathbf{0}} \in \mathcal{X}$ için $\mathbf{B}_{\mathcal{d}}(\mathcal{x}_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \{\mathcal{y} \in \mathcal{X}: \mathcal{d}(\mathcal{x}_{\mathbf{0}}, \mathcal{y}) < \boldsymbol{\varepsilon}\}$ kümesi $\mathcal{x}_{\mathbf{0}}$ merkezli $\boldsymbol{\varepsilon}$ yarıçaplı açık yuvar, $\mathbf{B}_{\mathcal{d}}[\mathcal{x}_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{\varepsilon}] = \{\mathcal{y} \in \mathcal{X}: \mathcal{d}(\mathcal{x}_{\mathbf{0}}, \mathcal{y}) \leq \boldsymbol{\varepsilon}\}$kümesi $\mathcal{x}_{\mathbf{0}}$ merkezli $\boldsymbol{\varepsilon}$ yarıçaplı kapalı yuvar denir.

$\{\mathbf{B}_{\mathcal{d}}(\mathcal{x}, \boldsymbol{\varepsilon}): \mathcal{x} \in \mathcal{X}$ **ve** $\boldsymbol{\varepsilon > 0}\}$ açık yuvar ailesini baz alarak $\mathcal{X}$ üzerinde bir $\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{d}}$ topolojisi üretir. Eğer $\mathcal{d}$fonksiyonu $\mathcal{X}$ üzerinde bir quasi metrik ise, üretilen $\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{d}}$ topolojisi bir $\mathbf{T_0}$-topolojisi, $\mathbf{T_1}$-quasi metrik ise, üretilen $\boldsymbol{\tau}_{\mathcal{d}}$ topolojisi bir $\mathbf{T_1}$-topolojisidir.

$\mathcal{X}$ üzerinde $\mathcal{d}$quasi-pseudo metriği göz önüne alınarak$\mathcal{d}^{-1}(\mathcal{x}, \mathcal{y}) = \mathcal{d}(\mathcal{y}, \mathcal{x})$, $\mathcal{d}^{\mathbf{s}}(\mathcal{x}, \mathcal{y}) = \mathbf{maks}\{\mathcal{d}(\mathcal{x}, \mathcal{y}), \mathcal{d}^{-1}(\mathcal{x}, \mathcal{y})\}$, $\mathcal{d}_{+}(\mathcal{x}, \mathcal{y}) = \mathcal{d}(\mathcal{x}, \mathcal{y}) + \mathcal{d}^{-1}(\mathcal{x}, \mathcal{y})$ fonksiyonları tanımlansın. Burada $\mathcal{d}^{-1}$, $\mathcal{d}^{\mathbf{s}}$ ve $\mathcal{d}_{+}$ fonksiyonları tanımları dikkate alındığında her biri $\mathcal{X}$ üzerinde bir quasi-pseudo metriktir. Diğer yandan, eğer $\mathcal{d}$fonksiyonu quasi metrik ise $\mathcal{d}^{\mathbf{s}}$ ve $\mathcal{d}_{+}$ fonksiyonlarının $\mathcal{X}$ üzerinde birer metriktir. Bunun yanında $\mathcal{d}$quasi-pseudo metriği

$$\mathcal{x} \neq \mathcal{y} \Rightarrow \mathcal{d}(\mathcal{x}, \mathcal{y}) + \mathcal{d}^{-1}(\mathcal{x}, \mathcal{y}) > \mathbf{0}$$

şartını sağlıyorsa $\mathcal{d}^{\mathbf{s}}$ ve $\mathcal{d}_{+}$fonksiyonları $\mathcal{X}$ üzerinde bir metriktir.

3.5.1 Örnek $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ olsun. Her $\mathcal{x}, \mathcal{y} \in \mathcal{X}$ için $\mathcal{d}(\mathcal{x}, \mathcal{y}) = \mathbf{maks}\{\mathcal{y}^{\mathbf{2}} - \mathcal{x}^{\mathbf{2}}, \mathbf{0}\}$ olacak biçimde tanımlana $\mathcal{d}$ fonksiyonu quasi metrik değildir fakat quasi-pseudo metriktir.

3.5.2 Örnek $\mathcal{X}$ boştan farklı herhngi bir küme, her $\mathcal{x}, \mathcal{y} \in \mathcal{X}$ için $\mathcal{d}(\mathcal{x}, \mathcal{y}) = \mathbf{0}$ şeklinde tanımlı $\Upsilon: \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^{+}$ fonksiyonu bir quasi-pseudo metrik olup $(\mathcal{X}, \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{d}})$ uzayı bir kaba uzaydır.

3.5.3 Örnek $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ olsun. Her $\mathcal{x}, \mathcal{y} \in \mathcal{X}$ için $\mathcal{d}(\mathcal{x}, \mathcal{y}) = \mathbf{maks}\{\mathcal{y} - \mathcal{x}, \mathbf{0}\}$ olacak biçimde tanımlanan bir $\mathcal{d}$ fonksiyonu bir $\boldsymbol{T_1}$-quasi metrik değildir fakat quasi metriktir.

3.3.1 Not Örnek 3.3.1 de de görüleceği gibi $\mathcal{d}$ bir quasi-pseudo metrik iken $(\mathcal{X}, \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{d}})$ uzayı $\mathbf{T_0}$ uzayı olmayabilir. Fakat, $(\mathcal{X}, \mathcal{d})$ bir quasi metrik uzay ise $(\mathcal{X}, \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{d}})$ uzayı bir $\mathbf{T_0}$

uzayıdır. Dahası, d bir quasi metrik ise (X, τ_d) uzayı $\mathbf{T_1}$ olmayabilir. Hatta, d, X üzerinde bir $\mathbf{T_1}$ -quasi metrik ise (X, τ_d) uzayı $\mathbf{T_1}$ uzayıdır.

3.5.3 Tanım $x \in X$ ve (X, d) bir quasi metrik uzay olsun.

1. $\{x_n\}$ dizisi X te τ_d topolojisine göre x noktasına yakınsıyorsa bu diziye d-yakınsak adı verilir ve $x_n \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow d(x, x_n) \to 0$ şeklinde gösterilir.

2. $\{x_n\}$ dizisi X te $\tau_{d^{-1}}$ topolojisine göre x noktasına yakınsıyorsa bu diziye d^{-1}-yakınsak adı verilir ve $x_n \xrightarrow{d^{-1}} x \Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0$ şeklinde gösterilir.

3. $\{x_n\}$ dizisi X te τ_{d^s} topolojisine göre x noktasına yakınsıyorsa bu diziye d^s-yakınsak adı verilir ve $x_n \xrightarrow{d^s} x \Leftrightarrow d^s(x_n, x) \to 0$ şeklinde gösterilir.

Burada açıkça görülmektedir ki $x_n \xrightarrow{d^s} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d} x$ ve $x_n \xrightarrow{d^{-1}} x$ olmasıdır.

Yukarıdaki yakınsaklık tanımları dikkate alındığında Quasi metrik uzayında yakınsak bir dizinin limitinin tek olmayabileceği görülebilir.

3.5.4 Tanım $\{x_n\}$, X içerisinde bir dizi ve (X, d) bir quasi metrik uzay olsun.

- Her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ için $d(x, x_n) < \varepsilon$ olacak biçimde $x \in X$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine sol d-Cauchy dizisi denir.

- Her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak biçimde $x \in X$ ve $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine sağ d-Cauchy dizisi denir.

- Her $\varepsilon > 0$ ve $n, k \in \mathbb{N}$ ve $n \geq k \geq n_0$ için $d(x_k, x_n) < \varepsilon$ olacak biçimde $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine sol K-Cauchy dizisi denir.

- Her $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ ve $\boldsymbol{n, k} \in \mathbb{N}$ ve $\boldsymbol{n \geq k \geq n_0}$ için $d(x_n, x_k) < \boldsymbol{\varepsilon}$ olacak biçimde $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine sağ $\boldsymbol{K}$-Cauchy dizisi denir.

- Her $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ ve $\boldsymbol{n \geq n_0}$ için $d(x_{n_0}, x_n) < \boldsymbol{\varepsilon}$ olacak biçimde $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine zayıf sol $\boldsymbol{K}$-Cauchy dizisi denir.

- Her $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ ve $\boldsymbol{n \geq n_0}$ için $d(x_n, x_{n_0}) < \boldsymbol{\varepsilon}$ olacak biçimde $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine zayıf sağ $\boldsymbol{K}$-Cauchy dizisi denir.

- Her $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ ve $\boldsymbol{n, k \geq n_0}$ için $d(x_n, x_k) < \boldsymbol{\varepsilon}$ olacak biçimde $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine $d^{\boldsymbol{s}}$-Cauchy dizisi denir.

Yukarıdaki Cauchy dizisi tanımları dikkate alındığında $\{x_n\}$ dizisi $d^{\boldsymbol{s}}$-Cauchy dizisidir ancak ve ancak $\{x_n\}$ dizisi hem sağ $\boldsymbol{K}$-Cauchy hem de sol $\boldsymbol{K}$-Cauchydir.

Quasi metrik uzayda, metrik uzaylarda olduğu gibi her yakınsak dizinin Cauchy dizisi olması gerekmemektedir.

Biliyoruz ki bir metrik uzayda her Cauchy dizisi yakınsak olması o uzayın tam olmasını gerektirmektedir. Ancak quasi metrik uzayda tamlık tanımı tek türlü olmadığından dolayı aşağıdaki tanımdan da görülebileceği gibi tek türlü Cauchy dizisi tanımı yapılamamaktadır.

3.5.5 Tanım (X, d) bir quasi metrik uzay olsun.

- Eğer bütün (zayıf) sağ (sol) $\boldsymbol{K}$-Cauchy dizisi d yakınsak ise (X, d) metrik uzayına (zayıf) sağ (sol) $\boldsymbol{\mathcal{K}}$-tam denir.

- Eğer bütün (zayıf) sağ (sol) $\boldsymbol{K}$-Cauchy dizisi d^{-1} yakınsak ise (X, d) metrik uzayına (zayıf) sağ (sol) $\boldsymbol{\mathcal{M}}$-tam denir.

- Eğer bütün (zayıf) sağ (sol) $\boldsymbol{K}$-Cauchy dizisi $\boldsymbol{s}$ yakınsak ise (X, d) metrik uzayına (zayıf) sağ (sol) $\boldsymbol{Smyth}$-tam denir.

3.5.2. Not. $\{x_n\}$, (X, d) quasi metrik uzayında bir dizi olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{d}(x_n, x_{n+1}) < \infty$$

sağlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi bu uzayda sol $\boldsymbol{K}$-Cauchy dizisidir.

3.5.3 Not X kümesinin boş olmayan tüm alt kümelerinin sınıfı $\mathcal{P}(\mathrm{X})$, (X, d) bir quasi metrik uzay olmak üzere, X kümesinin boş olmayan τ_{d}-kapalı alt kümlerinin sınıfı $C_{\mathrm{d}}(\mathrm{X})$, X kümesinin boş olmayan τ_{d}-kompakt alt kümlerinin sınıfı $K_{\mathrm{d}}(\mathrm{X})$, X kümesinin boş olmayan ve her $x \in \mathrm{X}$ için $\mathrm{d}(x, A) = \mathrm{d}(x, a)$ olacak biçimde $a = a(x) \in A$ vardır şartını sağlayan alt kümelerinin sınıfı $A_{\mathrm{d}}(\mathrm{X})$ olarak gösterilmektedir. Eğer (X, d) bir metrik uzay ise $K_{\mathrm{d}}(\mathrm{X}) \subseteq A_{\mathrm{d}}(\mathrm{X}) \subseteq C_{\mathrm{d}}(\mathrm{X})$ olduğu kolayca görülmektedir. Fakat bu sınıflar eğer (X, d) bir quasi metrik uzaysa birbirinden bağımsızdır. Dahası, (X, d) metrik uzayı bir T_1-quasi metrik uzay ise $A_{\mathrm{d}}(\mathrm{X}) \subseteq C_{\mathrm{d}}(\mathrm{X})$ olmasına rağmen quasi metrik uzayda bu sınıflar birbirinden bağımsızdır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1 Quasi Metrik Uzayda Küme Değerli θ-Büzülmeler

Önceki bölümlerde metrik uzay ve quasi metrik uzay kavramları incelenip bu uzaylarda hem tek değerli hemde küme değerli bazı sabit nokta teoremleri verilmiştir. Bu bölümde quasi metrik uzaylarda küme değerli θ -büzülme dönüşümleri ele alınıp bu dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri ifade ve ispat edilecektir.

$(\mathcal{X}, \square)$ bir quasi metrik, $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ bir dönüm $\theta \in \Theta$ ve $\beta \geq 0$ olsun. $\square(\mathfrak{x}, \mathcal{T}\mathfrak{x}) > 0$ olacak şekildeki her $\mathfrak{x} \in \mathcal{X}$ için $\theta_\beta^{\mathfrak{x}} \subseteq \mathcal{X}$ olacak şekilde

$$\theta_\beta^{\mathfrak{x}} = \{\mathfrak{s} \in \mathcal{T}\mathfrak{x} : \theta(\square(\mathfrak{x}, \mathfrak{s})) \leq [\theta(\square(\mathfrak{x}, \mathcal{T}\mathfrak{x}))]^\beta\}$$

tanımlansın. Bu tanımdan eğer $\beta_1 \leq \beta_2$ ise $\theta_{\beta_1}^{\mathfrak{x}} \leq \theta_{\beta_2}^{\mathfrak{x}}$ olduğu açıktır. Ayrıca $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to A_\square(\mathcal{X})$ ise her $\beta \geq 0$ ve $\square(\mathfrak{x}, \mathcal{T}\mathfrak{x}) > 0$ olacak şekildeki her $\mathfrak{x} \in \mathcal{X}$ için $\theta_\beta^{\mathfrak{x}} \neq \emptyset$ dır.

4.1.1 Teorem $(\mathcal{X}, \square)$ bir sol $\mathcal{K}$-tam T_1- quasi metrik uzay, $\mathcal{T} : \mathcal{X} \to A_\square(\mathcal{X})$ bir küme değerli dönüşüm ve $\theta \in \Theta$ olsun. Eğer $\square(\mathfrak{x}, \mathcal{T}\mathfrak{x}) > 0$ olacak şekildeki herhangi $\mathfrak{x} \in \mathcal{X}$ için

$$\theta(\square(\mathfrak{s}, \mathcal{T}\mathfrak{s})) \leq [\theta(\square(\mathfrak{x}, \mathfrak{s}))]^\alpha$$

şartını sağlayan $\mathfrak{s} \in \theta_\beta^{\mathfrak{x}}$ olacak biçimde $\alpha \in (0,1)$ varsa $\mathcal{T}$-küme değerli dönüşümü $\alpha < \beta$ ve $\mathfrak{x} \to \square(\mathfrak{x}, \mathcal{T}\mathfrak{x})$, $\tau_\square$ -ye göre alttan yarı sürekli olacak biçimde $\mathcal{X}$ içinde bir $\mathfrak{x} \in \mathcal{T}\mathfrak{x}$ sabit noktasına sahiptir.

İspat: Varsayalım ki, $\mathcal{T}$ nin $\mathcal{X}$ kümesinde bir sabit noktası olmasın. Yani $\mathfrak{x} \notin \mathcal{T}\mathfrak{x}$ olsun. Bu durumda her $\mathfrak{x} \in \mathcal{X}$ için $\square(\mathfrak{x}, \mathcal{T}\mathfrak{x}) > 0$ dır. (Dikkat edelim ki eğer $\square(\mathfrak{x}, \mathcal{T}\mathfrak{x}) = 0$ ise $\mathcal{T}\mathfrak{x} \in A_\square(\mathcal{X})$ olduğu için $\square(\mathfrak{x}, a) = \square(\mathfrak{x}, \mathcal{T}\mathfrak{x}) = 0$ olacak biçimde $a \in \mathcal{T}\mathfrak{x}$ vardır.

Böylece □-fonksiyonu T_1-quasi metrik olduğundan $a = \mathfrak{x} \in \mathcal{C}\mathfrak{x}$ dir). Şimdi her $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ için $\mathcal{C}\mathfrak{x} \in A_{\square}(\mathfrak{X})$ olduğundan $\theta_{\beta}^{\mathfrak{x}}$ Kümesi boştan farklıdır. $\mathfrak{x}_0$- noktası $\mathfrak{X}$- içinde bir başlangıç noktası olsun. Bu durumda

$$\theta\,(\square(\mathfrak{x}_1\,,\mathcal{C}\,\mathfrak{x}_1))\;\leq\;[\theta\,(\square(\mathfrak{x}_0,\mathfrak{x}_1))]^{\alpha}$$

olacak biçimde $\mathfrak{x}_1 \in \theta_{\beta}^{\mathfrak{x}_0}$ vardır. Ayrıca yine $\mathfrak{x}_1 \in \mathfrak{X}$ için

$$\theta\,(\square(\mathfrak{x}_2\,,\mathcal{C}\,\mathfrak{x}_2)) \leq [\theta\,(\square(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2))]^{\alpha}$$

olacak biçimde $\mathfrak{x}_2 \in \theta_{\beta}^{\mathfrak{x}_1}$ vardır. Bu işleme devam edilirse oluşturulan $\{\mathfrak{x}_n\}$ iterasyon dizisi için

$$\theta(\square(\mathfrak{x}_{n+1},\mathcal{C}\,\mathfrak{x}_{n+1})) \leq [\theta(\square(\mathfrak{x}_n,\mathfrak{x}_{n+1}))]^{\alpha} \qquad (4.1.1)$$

olacak biçimde $\mathfrak{x}_{n+1} \in \theta_{\beta}^{\mathfrak{x}_n}$ vardır. Şimdi $\{\mathfrak{x}_n\}$ dizisinin bir sol K-Cauchy olduğunu gösterelim. $\mathfrak{x}_{n+1} \in \theta_{\beta}^{\mathfrak{x}_n}$ olduğu için

$$\theta(\square(\mathfrak{x}_n,\mathfrak{x}_{n+1})) \leq [\theta\,(\square(\mathfrak{x}_n,\mathcal{C}\,\mathfrak{x}_n))]^{\beta} \qquad (4.1.2)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (4.1.1) ve (4.1.2) eşitsizliklerinden

$$\theta(\square(\mathfrak{x}_{n+1},\mathcal{C}\,\mathfrak{x}_{n+1})) \leq [\theta(\square(\mathfrak{x}_n,\mathcal{C}\,\mathfrak{x}_n))]^{\alpha\beta}$$

ve

$$\theta(\square(\mathfrak{x}_{n+1},\mathfrak{x}_{n+2}))\;\leq\;[\theta\,(\square(\mathfrak{x}_n,\mathfrak{x}_{n+1}))]^{\alpha\beta}$$

elde edilir. Ayrıca bu yolla

$$\theta(\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})) \leq [\theta\ (\square(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1))]^{(\alpha\beta)^n} \tag{4.1.3}$$

ve

$$\theta(\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{z}\,\mathfrak{x}_n)) \leq [\theta\ (\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{z}\,\mathfrak{x}_n))]^{(\alpha\beta)^n} \tag{4.1.4}$$

elde edilir. (4.1.4) eşitsizliğinde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \theta\big(\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})\big) = 1$$

olup $(\theta 2)$ özelliğinden

$$\lim_{n\to\infty} \square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1}) = 0$$

elde edilir. Yine $(\theta 3)$ şartından

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\theta\big(\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})\big) - 1}{\square(\mathfrak{x}_n\ , \mathfrak{x}_{n+1})^k} \right) = \ell$$

olacak biçimde $0 < k < 1$ ve $\ell\ \epsilon\ (0, \infty]$ vardır. Şimdi $\ell\ <\ \infty$ ve $\lambda_1 = \frac{\ell}{2}\ >\ 0$ olsun. Limit tanımından her $n\ \geq\ n_1$ için

$$\left| \frac{\theta\big(\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})\big) - 1}{\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})^k} - \ell \right| \leq\ \lambda_1$$

olacak şekide $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n > n_1$ için

$$\frac{\theta\big(\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})\big) - 1}{\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})^k} \geq \ell - \lambda_1 = \frac{\ell}{2} = \lambda_1$$

sağlanır. Bu durumda her $n > n_1$ için $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ olduğunda

$$n.\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})^k \leq \lambda_2 n[\theta\big(\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})\big) - 1]$$

olur. Kabul edelim ki $\ell = \infty$ ve $\lambda_1 > 0$ keyfi bir pozitif sayı olsun. Limit tanımından her $n > n_1$ için

$$\lambda_1 \leq \frac{\theta\big(\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})\big) - 1}{\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})^k}$$

olacak biçimde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Öyle ki her $n > n_1$ için $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ olduğunda

$$n.\square(\mathfrak{x}_n, , \mathfrak{x}_{n+1})^k \leq \lambda_2 n[\theta\big(\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})\big) - 1]$$

sağlanır. Böylece her durum sonucunda her $n > n_1$ için

$$n.\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})^k \leq \lambda_2 n[\theta\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1}) - 1] \tag{4.1.5}$$

olacak biçimde $\lambda_2 > 0$ ve $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda (4.1.3) ve (4.1.5) eşitsizlikleriyle

$$n.\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})^k \leq \lambda_2\, n[\theta(\square(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1))]^{[(\alpha\beta)^n - 1]}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}(n\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1})^k) = 0$$

elde edilir. Ayrıca her $n > n_2$ için

$$\square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{1/k}} \tag{4.1.6}$$

olacak biçimde $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda $m > n > n_2$ Olacak biçimde ki her $m, n \in \mathbb{N}$ için (4.1.6) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_m) &\leq \square(\mathfrak{x}_n, \mathfrak{x}_{n+1}) + \square(\mathfrak{x}_{n+1}, \mathfrak{x}_{n+2}) + \ \ldots + \square(\mathfrak{x}_{m-1}, \mathfrak{x}_m) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \square(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \square(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}} \end{aligned}$$

elde edilir. $k \in (0,1)$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$ serisi yakınsak olduğundan $\{\mathfrak{x}_n\}$ dizisi $(\mathfrak{X}, \square)$ quasi metrik uzayında bir sol K-Cauchy dizisidir. $(\mathfrak{X}, \square)$ sol K-tam, $\{\mathfrak{x}_n\}$ dizisi bu uzayda $\square$-yakınsak olduğudan $n \to \infty$ için $\square(z, \mathfrak{x}_n) \to 0$ olacal biçimde $z \in \mathfrak{X}$ vardır. Diğer tarafta (4.1.4) eşitsizliği ve (θ_2) şartından

$$\lim_{n\to\infty} \square(\mathfrak{x}_n, \mathcal{Q}\,\mathfrak{x}_n) = 0$$

dır. Ayrıca $\mathfrak{x} \to \square(\mathfrak{x}, \mathcal{Q}\,\mathfrak{x})$, $\tau_{\square}$ -ye göre alttan yarı sürekli olduğundan

$$0 < \square(z, \mathcal{Q}\,z) \leq \lim_{n\to\infty} inf\ \square(\mathfrak{x}_n, \mathcal{Q}\,\mathfrak{x}_n) = 0$$

olur ki bu durum bir çelişki olup $z \in \mathcal{Q}\,z$ dir.

4.1.1 Not $K_{\square^{-1}} \subseteq A_{\square}(\mathfrak{X})$ olduğundan yukarıdaki teoremde her $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ için $\mathcal{Q}\,\mathfrak{x} \in K_{\square^{-1}}(\mathfrak{X})$ alınabilir.

4.1.2 Teorem $(\mathfrak{X}, \square)$ bir sol M-tam T_1-quasi metrik uzay, $\mathcal{Q} : \mathfrak{X} \to A_{\square}(\mathfrak{X})$ bir küme değerli dönüşüm ve $\theta \in \Theta$ olsun. Eğer $\square(\mathfrak{x}, \mathcal{Q}\,\mathfrak{x}) > 0$ olacak şekildeki herhangi $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ için

$$\theta\,(\square(\mathfrak{o}\ , \mathcal{Q}\,\mathfrak{o}))\ \leq\ [\theta\,(\square(\mathfrak{x}\ , \mathfrak{o}))]^{\alpha}$$

şartını sağlayan $\mathfrak{s} \in \theta_{\beta}^{\mathfrak{x}}$ olacak biçimde $\alpha \in (0,1)$ varsa $\mathcal{Z}$-küme değerli dönüşümü $\alpha < \beta$ ve $\mathfrak{x} \to \mathcal{D}(\mathfrak{x}, \mathcal{Z}\mathfrak{x})$, $\tau_{\mathcal{D}^{-1}}$ -ye göre alttan yarı sürekli olacak biçimde $\mathfrak{X}$ içinde bir $\mathfrak{x} \in \mathcal{Z}\mathfrak{x}$ sabit noktasına sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $\mathcal{Z}$ dönüşümünün $\mathfrak{X}$ kümesinde bir sabit noktası olmasın.. Yani $z \notin \mathcal{Z}z$ olsun. Bu durumda $\{\mathfrak{x}_n\}$ iterasyon dizisinin bir sol K-Cauchy dizisi olduğu Teorem 4.1.1-in ispatındaki gibi gösterilebilir. $\{\mathfrak{x}_n\}$ dizisi bu uzayda $\mathcal{D}^{-1}$ yakınsak ve $(\mathfrak{X}, \mathcal{D})$ bir sol M-tam olduğundan $n \to \infty$ için limit alındığında $\mathcal{D}(\mathfrak{x}_n, z) \to 0$ olacak biçimde $\mathfrak{X}$ kümesinde bir z noktası vardır. Ayrıca

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}(\mathfrak{x}_n, \mathcal{Z}\mathfrak{x}_n) = 0$$

ve $\mathfrak{x} \to \mathcal{D}(\mathfrak{x}, \mathcal{Z}\mathfrak{x})$, $\tau_{\mathcal{D}^{-1}}$ e göre alttan yarı sürekli olduğu için

$$0 < \mathcal{D}(z, \mathcal{Z}z) \leq \lim_{n\to\infty} inf\ \mathcal{D}(\mathfrak{x}_n, \mathcal{Z}\mathfrak{x}_n) = 0$$

olur ki bu bir tutarsızlık oluşturduğundan dolayı $\mathcal{Z}$ dönüşümü $\mathfrak{X}$ içinde bir sabit noktaya sahiptir.

Yukarıdaki teorem aynı şartlarla sadece $A_{\mathcal{D}}(\mathfrak{X})$ yerine $C_{\mathcal{D}}(\mathfrak{X})$ kümesi olarak değiştirilirse $\mathcal{Z}$ dönüşümünün bir sabit noktası olmayabilir. Ama fonksiyon sınıfı için aşağıdaki teoremde olduğu gibi Θ ailesi yerine Ξ ailesi alınırsa $\mathcal{Z}$ dönüşümünün $\mathfrak{X}$ içinde bir sabit noktaya sahip olduğu garanti edilmiş olur.

4.1.3 Teorem $(\mathfrak{X}, \mathcal{D})$ bir sol $\mathcal{K}$-tam quasi metrik uzay, $\mathcal{Z} : \mathfrak{X} \to C_{\mathcal{D}}(\mathfrak{X})$ bir küme değerli dönüşüm ve $\theta \in \Xi$ olsun. Eğer $\mathcal{D}(\mathfrak{x}, \mathcal{Z}\mathfrak{x}) > 0$ olacak şekildeki herhangi $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ için

$$\theta\ (\mathcal{D}(\mathfrak{s}, \mathcal{Z}\mathfrak{s})) \leq [\theta\ (\mathcal{D}(\mathfrak{x}, \mathfrak{s}))]^{\alpha}$$

şartını sağlayan $\mathfrak{s} \in \theta_\beta^{\mathfrak{x}}$ olacak biçimde $\alpha \in (0,1)$ varsa $\mathcal{Z}$-küme değerli dönüşümü $\alpha < \beta$ ve $\mathfrak{x} \to \mathcal{H}(\mathfrak{x}, \mathcal{Z}\mathfrak{x})$, $\tau_{\mathcal{H}}$ -ye göre alttan yarı sürekli olacak biçimde $\mathfrak{X}$ içinde bir $\mathfrak{x} \in \mathcal{Z}\mathfrak{x}$ sabit noktasına sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $\mathcal{Z}$ dönüşümünün $\mathfrak{X}$ içerisinde bir sabit noktası olmasın. Böylece bütün $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ için $\mathcal{H}(\mathfrak{x}, \mathcal{Z}\mathfrak{x}) > 0$ dır. (Dikkat edelim ki eğer $\mathcal{H}(\mathfrak{x}, \mathcal{Z}\mathfrak{x}) = 0$ ise $\mathfrak{x} \in C_{\mathcal{H}}(\mathfrak{X}) = \mathcal{Z}\mathfrak{x}$ dir). $\theta \in \Xi$ olduğundan her $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ için $\theta_\beta^{\mathfrak{x}}$ kümesi boştan farklıdır. $\mathfrak{x}_0$-noktası $\mathfrak{X}$- içinde bir başlangıç noktası olsun. Bu durumda

$$\theta\,(\mathcal{H}(\mathfrak{x}_1, \mathcal{Z}\mathfrak{x}_1)) \leq [\theta\,(\mathcal{H}(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1))]^{\alpha}$$

olacak biçimde $\mathfrak{x}_1 \in \theta_\beta^{\mathfrak{x}_0}$ vardır. (θ_4) şartından

$$\theta\,(\mathcal{H}(\mathfrak{x}_1, \mathcal{Z}\mathfrak{x}_1)) = \inf_{\mathfrak{s} \in \mathcal{Z}\mathfrak{x}_1} \theta\,(\mathcal{H}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{s}))$$

yazılabilir. Buradan

$$\theta(\mathcal{H}(\mathfrak{x}_1, \mathcal{Z}\mathfrak{x}_1)) \leq [\theta(\mathcal{H}(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1))]^{\alpha}$$

ve $0 < \alpha < \gamma < 1$ olduğunda

$$\inf_{\mathfrak{s} \in \mathcal{Z}\mathfrak{x}_1} \theta(\mathcal{H}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{s})) \leq [\theta(\mathcal{H}(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1))]^{\alpha} < [\theta(\mathcal{H}(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1))]^{\gamma}$$

elde edilir. Böylece

$$\theta(\mathcal{H}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)) \leq [\theta(\mathcal{H}(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1))]^{\gamma}$$

olacak biçimde $\mathfrak{x}_2 \in \mathcal{Z}\mathfrak{x}_1$ vardır. İspatın devamı Teorem 1 de $\mathcal{Z}z \in C_{\mathcal{H}}(\mathfrak{X})$ olarak düşünülerek yapılabilir.

4.1.4 Teorem $(\mathfrak{X}, \square)$ bir sol M-tam quasi metrik uzay, $\mathcal{Z} : \mathfrak{X} \to C_{\square}(\mathfrak{X})$ bir küme değerli dönüşüm ve $\theta \in \Xi$ olsun. Eğer $\square(\mathfrak{x}, \mathcal{Z}\,\mathfrak{x}) > 0$ olacak şekildeki herhangi $\mathfrak{x} \in \mathfrak{X}$ için

$$\theta\,(\square(\mathfrak{s}\,, \mathcal{Z}\,\mathfrak{s})) \;\leq\; [\theta\,(\square(\mathfrak{x}\,, \mathfrak{s}))]^{\alpha}$$

şartını sağlayan $\mathfrak{s} \;\in \theta_{\beta}^{\mathfrak{x}}$ olacak biçimde $\alpha \in (0,1)$ varsa $\mathcal{Z}$ küme değerli dönüşümü $\alpha < \beta$ ve $\mathfrak{x} \to \square(\mathfrak{x}\,, \mathcal{Z}\,\mathfrak{x})$, $\tau_{\square^{-1}}$ -ye göre alttan yarı sürekli olacak biçimde $\mathfrak{X}$ içinde bir $\mathfrak{x} \in \mathcal{Z}\,\mathfrak{x}$ sabit noktasına sahiptir.

İspat: Varsayalım ki $\mathcal{Z}$ dönüşümünün $\mathfrak{X}$ içerisinde bir sabit noktası olmasın. Yani $z \notin \mathcal{Z}\,z$ olsun. Bu durumda Teorem 4.1.3 ün ispatındaki gibi $\{\mathfrak{x}_n\}$ iterasyon dizisinin bir sol M-Cauchy dizisi olduğu gösterilebilir. $(\mathfrak{X}, \square)$ bir sol M-tam ve $\{\mathfrak{x}_n\}$ dizisi bu uzayda $\square^{-1}$ yakınsak olduğundan $n \to \infty$ için limit alındığında $\square(\mathfrak{x}_n, z) \to 0$ olacak biçimde $\mathfrak{X}$ kümesinde bir z noktası vardır.
Ayrıca,

$$\lim_{n\to\infty} \square(\mathfrak{x}_n, \mathcal{Z}\,\mathfrak{x}_n) = 0$$

ve $\mathfrak{x} \to \square(\mathfrak{x}, \mathcal{Z}\,\mathfrak{x})$, $\tau_{\square^{-1}}$ e göre alttan yarı sürekli olduğu için

$$0 < \square(z, \mathcal{Z}\,z) \leq \lim_{n\to\infty} inf\; \square(\mathfrak{x}_n, \mathcal{Z}\,\mathfrak{x}_n) = 0$$

olur ki bu bir tutarsızlık oluşturduğundan dolayı $\mathcal{Z}$ dönüşümü $\mathfrak{X}$ içinde bir sabit noktaya sahiptir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ilk olarak metrik uzaylar ve bu uzaylardaki sabit nokta teoremlerine ve θ-büzülme kavramlarına değinilmiştir. Daha sonra bazı sabit nokta sonuçları küme değerli dönüşümler ele alınarak incelenmiştir. Dahası quasi metrik uzayın tanımı ve bu uzayın özellikleri de incelenmiştir. Çalışmanın esas bölümünde ise quasi metrik uzay üzerinde verilen küme değerli dönüşümlerin θ- büzülme yardımıyla bazı sonuçları incelenmiştir. Ayrıca bu çalışmada dikkat edilebileceği gibi küme değerli θ büzülme dönüşümlerinde belirtilen k sabiti $(0,1)$ aralığına aittir. Öneri olarak bu sabit her $\mathfrak{x}, \mathfrak{o} \in \mathfrak{X}$ için $\mathfrak{x}$ ile $\mathfrak{o}$ arasındaki uzaklığa bağlı $(0, \infty)$ dan $[0, 1)$ e bir fonksiyon olarak alınıp quasi metrik uzaylarda lineer olmayan küme değerli θ -büzülme dönüşümü olarak da incelenebilir.

KAYNAKLAR

Abbas, M., Ali, B. ve Romaguera, S. 2013. Fixed and periodic points of generalized contractions in metric spaces, Fixed Point Theory Appl., 11 pages.

Ahmad, J., Al-Rawashdeh, A. and Azam, A. 2015. New fixed point theorems for generalized F-contractions in complete metric Spaces, Fixed Point Theory Appl. 18 pages.

Alegre, C., Marin, J. and Romeguera, S., A. 2014. Fixed point theorem for generalized contractions involving ω-distances on complete quasi-metric spaces, Fixed Point Theory Applications, 40, 8 pp..

Al-Rawashdeh, A. ve Ahmad, J. 2016. Common Fixed Point Theorems for JS-Contractions. Bull. Math. Anal. Appl, 8, 12–22.

Altun, I., Damjanovi´c, B. E Djori´c, D. 2010. Fixed point and common fixed point theorems on ordered cone metric spaces, Applied Mathematics Letters 23, 310-316.

Altun, I., Olgun, M. and Mınak, G. 2017. Classification of completeness of quasi metric space and some new fixed point results. Nonlinear Functional Analysis and Applications, 22 (2), 371-384.

Banach, S. 1922. Sur les op´erations dans les ensembles abstraits et leur applications aux ´equations int´egrales, Fundam. Math., 3, 133–181.

Beg, I. and Abbas, M. 2006. Coincidence point and invariant approximation for mappings satisfying generalized weak contractive condition, Fixed Point Theory Appl., 7 pages. 1

Dağ, H., Minak, G., and Altun, I. 2017. Some fixed point results for multivalued F–contractions on quasi metric spaces, Rev. R. Acad.Cienc. Exactas Fs. Nat. Ser. A Mat. RACSAM, 111, 177–187.

Durdana, L. and Jamshaid, A. 2019. Fixed point theorems for Θ-contractions in left K-complete T1-quasi metric space. J. Nonlinear Sci. Appl. 12(10), 667-674.

Durmaz, G. 2017 , Some theorems for a new type of multivalved contractive maps on metric space, Turkish Journal of Mathematics, 41(4), 1092-1100.

Durmaz, G., Mınak, G. and Altun, I. 2014. Fixed point results for α-ψ-contractive mapping including almost contractions and applications. Abstract and Applied Analysis, Article ID 869123.

Gaba, Y. U. 2014. Startpoints and (α-γ)-contractions in quasi-pseudometric spaces. Journal of Mathematics. Article ID 709253.

Hançer, H. A. Mınak, G. and Altun, I. 2017. On a broad category of multivalued weakly Picard operators, Fixed Point Theory, 18(1), 229-336.

Hussain, N., Ahmad, J., Ciric, L.,and Azam, A. 2015. Coincidence point theorems for generalized contractions with application to integral equations, Fixed Point Theory Appl., 13 pages.

Jeong, G. S. and Rhoades, B. E. 2007. Maps for which $F(T) = F(T^n)$, In: Fixed Point Theory and Applications, Nova Science Publishers, 71–105.

Jleli, M. and Samet B. 2014. A new generalization of the Banach contraction principle. Journal of Inequalities and Applications, 2014,38, 8.

Jungck, G. 1986. Compatible mappings and common fixed points, Internat. J. Math. Math. Sci., 9, 771–779.

Koçak, M. 2009 . Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar. Furkan Ofset, Eskişehir.

Kumam, P., Vetro C. and Vetro, F. 2013. Fixed points for weak α-ψ -contractions in partial metric spaces. Abstract and Applied Analysis, Article ID 986028.

Künzi, H. P. A. and Vajner, V. 1994. Weighted quasi-metrics. Annals of the New York Academy of Sciences, 728, 64-67.

Latif A. and Al-Mezel S. A. 2011. Fixed point results in quasimetric spaces. Fixed Point Theory and Applications. Article ID 178306.

Liu, X. D., Chang, S. S., Xiao, Y. And Zhao, L. C. 2016. Some fixed point theorems corcerning (ψ, ϕ) -type contraction in complete metric spaces. Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 9(6), 4127-4136.

Mizoguchi, N. and Takahashi, W. 1989. Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces, Journal of Mathematical Analysis and Applications,141(1), 177-188.

Mucuk, O. 2010. Topoloji ve kategori. Nobel Yayın Dağıtım. Ankara.

Reich, S. 1972. Fixed points of contractive functions, Bollettino dell'Unione Mathematica Italiana, 5, 26–42.

Romeguera, S. 1982. Left K-completeness in quasi-metric spaces. Mathematische Nachrichten, 157, 15-23.

Samet, B., Vetro C. and Vetro, P. 2012. Fixed point theorems for α-ψ contractive type mappings. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 75, 2154-2165.

Soykan, Y. 2012. Metrik Uzaylar Topolojisi. Nobel Yayın Dağıtım. Ankara.

Suzuki, T. 2008. Mizoguchi-Takahashisxed point theorem is a real generalization of Nadlers. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 340, 752-755.

Vetro, F. 2015. A generalization of Nadler fixed point theorem, Carpathian J. Math., 31, 403–410.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Ali Ahmed Mohammed Alsfook

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2019-Halen
Lisans	Mosul Üniversite, Mosul	2005-2010

İş Deneyimi

Yıl	**Kurum**	**Görev**

Akademik Aktiviteler