ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KUANTUM FARK DENKLEMLERİ TARAFINDAN ÜRETİLEN OPERATÖRLERİN SPEKTRAL ANALİZİ

Nuray ORHAN

MATEMATİK

ÇANKIRI
2023

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Nuray ORHAN tarafından hazırlanan **"Kuantum Fark Denklemleri Tarafından Üretilen Operatörlerin Spektral Analizi"** adlı tez çalışması 17/04/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Dr. Öğr. Üyesi Şerifenur CEBESOY ERDAL

Jüri Üyeleri **:**

Başkan **:** Doç. Dr. Yelda AYGAR KÜÇÜKEVCİLİOĞLU
Matematik
Ankara Üniversitesi

Üye **:** Dr. Öğr. Üyesi Şerifenur CEBESOY ERDAL
Matematik
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Dr. Öğr. Üyesi Gül UĞUR KAYMANLI
Matematik
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hamit ALYAR

Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**Kuantum Fark Denklemleri Tarafından Üretilen Operatörlerin Spektral Analizi**" konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel İntihal Tespit Programı"yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (17/04/2023).

Nuray ORHAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KUANTUM FARK DENKLEMLERİ TARAFINDAN ÜRETİLEN OPERATÖRLERİN SPEKTRAL ANALİZİ

Nuray ORHAN

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Şerifenur CEBESOY ERDAL

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, fonksiyonel analiz ve spektral teoride iyi bilinen bazı temel tanım ve teoremlerden bahsedilmiş, diferensiyel denklemler ile ilgili gerekli ön bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölüm, üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda, $\ell^2(q^{\mathbb{Z}})$ Hilbert uzayında q-fark denklemi yardımıyla üretilen T q-fark operatörü tanımlanmış ve bu operatörün Jost çözümleri tanıtılmıştır. İkinci kısımda, T operatörünün rezolventi ve spektrumu elde edilmiştir. Üçüncü kısımda ise, T operatörünün özdeğerleri ve spektral tekillikleri çalışılmıştır. Dördüncü ve son bölüm ise, sonuç ve öneriler için ayrılmıştır.

2023, 60 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Jost çözümü, Jost fonksiyonu, Kuantum fark denklemleri, Özdeğer, Spektral tekillik

ABSTRACT

Master of Science Thesis

SPECTRAL ANALYSIS OF OPERATORS GENERATED BY QUANTUM DIFFERENCE EQUATIONS

Nuray ORHAN

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Advisor: Asst. Prof. Dr. Şerifenur CEBESOY ERDAL

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, some well known definitions and theorems of functional analysis and spectral theory are mentioned, required preliminary informations of differential equations are given. The third chapter consists of three sections, In the first section, the q-difference operator T is defined in $\ell^2(q^{\mathbb{Z}})$ Hilbert space which is generated by the q-difference equation and Jost solutions of this operator is introduced. In the second section, resolvent and spectrum of the operator T are obtained. In the third chapter, eigenvalues and spectral singularities of T are studied. The fourth and last chapter is devoted to the conclusion and suggestions.

2023, 60 pages

Keywords: Jost solution, Jost function, Quantum difference equations, Eigenvalue, Spectral singularity.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

"Kuantum Fark Denklemleri Tarafından Üretilen Operatörlerin Spektral Analizi" başlıklı tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, tezimin yazımı sırasına bana katkıda bulunan ve her aradığımda ilgi ve desteğini esirgemeyen, bilgi ve yardımlarından yararlandığım çalışmamı şekillendiren sayın hocam Dr. Öğr. Üyesi Şerifenur CEBESOY ERDAL'a, tez çalışmam sürecinde çalışmam için ihtiyacım olan zamanı bana ayıran idareci ve öğretmen arkadaşlarıma çok teşekkür ederim. Ve son olarak eğitim hayatım boyunca tüm zorlukları benimle göğüsleyen ve hayatımın her evresinde bana destek olan sevgili annem, babam ve kardeşlerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Nuray ORHAN

Çankırı, Mayıs 2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**
ABSTRACT ..... **ii**
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... **iii**
İÇİNDEKİLER ..... **iv**
SİMGELER DİZİNİ ..... **v**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR **6**
3. KUANTUM FARK OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL ANALİZİ **14**
3.1 Kuantum Analizi ve İlgili Kuantum Fark Operatörü **14**
3.2 *T* Operatörünün Jost Çözümü ve Jost Fonksiyonu **17**
3.3 *T* Operatörünün Rezolventi ve Spektrumu **39**
3.4 *T* Operatörünün Özdeğer ve Spektral Tekillikleri **51**
4. SONUÇ VE ÖNERİLER **56**
KAYNAKLAR **57**
ÖZGEÇMİŞ **60**

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{\Pi}$	Çarpım sembolü
$\|\|f\|\|$	f fonksiyonunun formu
$\langle f, g\rangle$	f ile g fonksiyonlarının iç çarpımı
$\mu(t)$	Graininess fonksiyonu
Δ	Keyfi zaman skalasında delta türev
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
λ	Spektral parametre
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\sum$	Toplam sembolü
$\sigma(T)$	T operatörünün spektrumu
$\sigma_c(T)$	T operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_d(T)$	T operatörünün özdeğerler kümesi
$\sigma_{ss}(T)$	T operatörünün spektral tekillikler kümesi
$[x]$	x sayısının tam kısmı
$W[y, z]$	y ile z fonksiyonlarının Wronskiyeni
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$
$q^{\mathbb{Z}}$	$\{q^n : n \in \mathbb{Z}\}$
$\overline{q^{\mathbb{Z}}}$	$q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$
$\ell^2(q^{\mathbb{Z}})$	$\left\{y : q^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C} : \sum_{t\in q^{\mathbb{Z}}} \mu(t)\|y(t)\|^2 < \infty\right\}$
$\mathbb{C}_{\pm}$	$\{z \in \mathbb{C} : \pm Imz > 0\}$
$\overline{\mathbb{C}}_{\pm}$	$\{z \in \mathbb{C} : \pm Imz \geq 0\}$

1. GİRİŞ

Gerçek yaşamda karşılaşılan birçok problemin çözümünde kullanılan en etkili araçların başında matematiksel modeller gelir. Bir matematiksel model, günlük yaşamda ekonomi, mühendislik, biyoloji, fizik, kimya ve daha birçok alanda oluşan problemleri gerçeğine en uygun şekilde matematik dilini kullanarak taklit eder. Basit modellerden genel sonuçlar elde edilebildiğinden, kullanılan modelleme teknikleri genellikle başarılı ve son derece kullanışlıdır. Uygulamalı matematikte de, problemler diferensiyel denklemler teorisi kullanılarak uygun modellemeler yardımıyla ele alınır. Uygulamalı matematiğin bir alt dalı olan spektral teori ise çoğunlukla başlangıç ya da sınır değer problemleri ile kurulan bu modellemeleri uygun operatörler yardımı ile inceler. Özetle, spektral teoride amaç, problemle uyumlu operatörü kurup, o operatörün özellikleri yardımıyla problemi çözmeye çalışmaktır. Literatürde ilk olarak diferensiyel operatörlerin spektral analizi yapılmıştır ve diferensiyel bir operatör kullanılarak incelenen ilk problem Sturm-Liouville problemidir.

$$-[p(x)y'(x)]' + q(x)y(x) = \lambda g(x)y(x)$$

diferensiyel denklemi ve belirli bir sınırlı aralığın uç noktalarındaki sınır koşulları ile ortaya konulan spektral problemlere Sturm-Liouville problemleri denir. Burada $p, q\ ve\ g$ bağımsız değişkenin fonksiyonları, λ ise bir spektral parametredir. Sturm-Liouville problemleri ilk olarak 19. yüzyılda Fransız asıllı iki matematikçi Charles Sturm ve Joseph Liouville tarafından ortaya çıkmıştır (Sturm 1836, Liouville 1836). Yıllar içinde teori hızla gelişmiş ve Sturm-Liouville operatörünün spektral analizinin yapılması birçok matematikçi ve fizikçinin ilgi alanı haline gelmiştir.

Sturm-Liouville operatörleri selfadjoint ve non-selfadjoint olmak üzere ikiye ayrılır. Eşleniği kendisine eşit olan operatöre selfadjoint, eşleniği kendisinden farklı olan operatöre ise non-selfadjoint operatör denir. Diğer yandan, katsayıları sürekli fonksiyonlardan oluşan ve tanım kümesi sonlu bir küme olan operatörler regüler,

katsayılarından en az biri süreksiz fonksiyonlardan oluşan veya tanım kümesi sonsuz olan operatörler singüler operatörlerdir. İlk olarak 1960 yılında Naimark

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad x \in \mathbb{R}_+ := [0, \infty)$$

diferensiyel ifadesinin ve

$$y'(0) - hy(0) = 0$$

başlangıç koşulunun yardımı ile

$$L^2(0, \infty) := \left\{ f : \int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

Hilbert uzayındaki singüler non-selfadjoint operatörünün spektral analizini yapmıştır (Naimark 1960). Burada λ spektral parametre, h kompleks sayı ve q kompleks değerli bir fonksiyondur. Bu çalışmada, diferensiyel operatörün spektrumunun sürekli spektrum, özdeğer ve spektral tekilliklerden oluştuğu ispatlanmıştır. Spektral tekillik selfadjoint operatörlerde bulunmaz, non-selfadjoint operatörlerde bulunur ve bunlar öz fonksiyonların tamlığını bozan, özdeğer olmayan noktalardır. Spektral tekilliğe sahip diferensiyel operatörler birçok matematikçinin ilgi alanı olmuş bu alanda çok önemli çalışmalar yapılmıştır (Schwartz 1960, Lyance 1967, Pavlov 1967, Naimark 1968, Nagy 1986).

Non-selfadjoint diferensiyel operatörlerin spektral analizi ile ilgili yapılan çalışmalara farklı bir yaklaşım da Marchenko tarafından yapılmıştır (Marchenko 1963). λ kompleks bir parametre, q ise reel değerli bir fonksiyon olmak üzere, Marchenko

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda^2 y, & 0 \le x < \infty \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

başlangıç değer probleminin belirli çözümlerini araştırmıştır ve bu problemin

$$\lim_{x\to\infty} y(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = 1, \quad \lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+ := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \qquad Im\lambda \geq 0\} \tag{1.2}$$

şartını sağlayan sınırlı çözümüne Jost çözümü adını vermiştir. Üstelik bu sınırlı çözümün

$$\int_0^\infty x|q(x)|dx < \infty \tag{1.3}$$

şartı altında

$$e(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x,t)\, e^{i\lambda t} dt \tag{1.4}$$

gösterimine sahip olduğunu göstermiştir. Burada K fonksiyonu q yardımıyla tanımlanan çekirdek fonksiyonudur. $e(x,\lambda)$ çözümü λ değişkenine göre açık üst düzlemde yani $\mathbb{C}_+ := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \ Im\lambda > 0\}$ bölgesinde analitik, kapalı üst düzlemde yani $\bar{\mathbb{C}}_+$ bölgesinde süreklidir. Ayrıca

$$e(x,\lambda) = e^{i\lambda x}[1 + o(1)], \qquad \lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+, \qquad x \to \infty$$

asimptotiğini sağlar (Marchenko 1986). $e(x,\lambda)$ çözümüne (1.1) başlangıç değer probleminin Jost çözümü, $e(\lambda) := e(0,\lambda)$ fonksiyonuna ise aynı problemin Jost fonksiyonu adı verilir.

Yarım eksende yapılan bu çalışmalar yıllar içinde genelleştirilerek tüm reel eksene taşınmış

$$L^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

Hilbert uzayındaki diferensiyel operatörlerin teorisi hem selfadjoint, hem de non-selfadjoint durumda incelenmiştir. Tüm eksende

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad -\infty < x < \infty \tag{1.5}$$

denkleminin sırasıyla

$$\lim_{x\to\infty} y(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = 1, \;\; \lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+$$

ve

$$\lim_{x\to-\infty} y(x,\lambda)e^{i\lambda x} = 1, \;\; \lambda \in \bar{\mathbb{C}}_+$$

şartlarını sağlayan $e^+(x,\lambda)$ ve $e^-(x,\lambda)$ çözümlerine (1.5) denkleminin Jost çözümleri denir (Marchenko 1986). Non-selfadjoint operatörlerin özdeğer ve spektral tekilliklerinin kümesi bu Jost çözümleri yardımı ile karakterize edilir, bu sayede özdeğer ve spektral tekilliklerin sınırlılığı, katı, sonluluğu belli şartlar altında incelenir.

Diferensiyel denklemler teorisinin bazı problemlerin çözümü için yetersiz kalması, fark denklemler teorisinin gelişmesine olanak tanımıştır (Atkinson 1964, Agarwal ve Wong 1997, Agarwal 2000, Bereketoğlu ve Kutay 2012). (1.5) diferensiyel denkleminin diskre analoğu olan

$$a_{n-1}y_{n-1} + a_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

fark denklemi ele alınıp, bu denklem ile uyumlu fark operatörünün

$$\ell^2(\mathbb{Z}) := \left\{ y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \|y\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |y_n|^2 < \infty \right\}$$

Hilbert uzayında spektral analizi yıllar içinde detaylı bir şekilde yapılmıştır (Guseinov 1976, Adıvar ve Bairamov 2001, Bairamov *vd.* 2001, Adıvar ve Bairamov 2003).

Diferensiyel denklemler ve fark denklemler teorisinin yanında fizik ve matematik alanları arasında geçiş yapılabilmesini sağlayan kuantum analizinin de popülerliği gün geçtikçe artmaktadır. Matematiksel fizikte, kombinatorikte, kontrol teorisinde, ortogonal polinomlarda ve kuantum teorisinin mekanik ve izafiyet teorisi gibi diğer alanlarında kuantum fark denklemleri çalışılmaktadır. Kac ve Cheung, klasik analizde yapılanlara paralel olarak, kuantum analizinde literatüre birçok yeni kavram ve sonuç kazandırmıştır (Kac ve Cheung 2002). Ayrıca Bohner ve Peterson özel durumda q-fark denklemlerini içeren zaman skalasında bazı önemli genelleştirmeler ve sonuçlar elde etmiştir (Bohner ve Peterson 2001, Bohner ve Peterson 2003). Bunun yanında q-fark denklemleri yardımı ile üretilen q-fark operatörlerinin spektral teorisi de birçok matematikçi tarafından çeşitli şekillerde ele alınmıştır (Adıvar ve Bohner 2006a, Adıvar ve Bohner 2006b, Huseynov ve Bairamov 2009, Aygar ve Bohner 2015, Aygar ve Bohner 2016, Aygar 2016).

Bu yüksek lisans tezinde ana kaynak olarak Adıvar ve Bohner'in 2006 yılında yayınladığı çalışma kullanılmıştır (Adıvar ve Bohner 2006a). Asıl amaç, tüm eksende q-fark denklemi yardımıyla üretilen q-fark operatörünün spektral analizi ile ilgili elde edilen sonuçları göstermektedir. Ana teoremleri ve sonuçları vermeden önce 2. bölümde fonksiyonel analize ve diferensiyel denklemler ile oluşturulan operatörlerin spektral teorisine ilişkin bazı önemli bilgiler verilecektir. 3. bölümde ise, non-selfadjoint q-fark operatörünün üstel tipten Jost çözümleri, sürekli spektrumu, rezolvent operatörü, özdeğerleri ve spektral tekillikleri incelenecektir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1 Boş olmayan X kümesi, bir K cismi üzerinde vektör adını taşıyan $x, y, \ldots$ elemanlarından oluşan ve üzerinde iki cebirsel işlem tanımlı bir uzay ise, X uzayına *vektör uzay* denir. Bu işlemlerden birincisi her $x, y, z \in X$ için

(i) $x + y \in X$ (Kapalılık özelliği)

(ii) $x + y = y + x$ (Değişme özelliği)

(iii) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (Birleşme özelliği)

(iv) "θ", sıfır vektörü olmak üzere, $x + \theta = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ (Birim eleman özelliği)

(v) $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde $-x \in X$ (Ters eleman özelliği)

özelliklerini gerçekleyen vektör toplamı, ikincisi ise her $x, y \in X$ ve her α, β skalerleri için

(i) $\alpha x \in X$ (Kapalılık özelliği)

(ii) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (Birleşme özelliği)

(iii) $\alpha(x + y) = \alpha x + \beta y$ (Dağılma özelliği)

(iv) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$ (Dağılma özelliği)

(v) $I.x = x$ olacak şekilde $I \in X$ (Birim eleman özelliği)

(vi) 0, sıfır skaleri olmak üzere $0.x = \theta$ (Yutan eleman özelliği)

özelliklerini gerçekleyen skaler çarpım işlemidir. X vektör uzayı $(X, +, .)$ şeklinde gösterilir. K skaler cismi $\mathbb{R}$ ise X uzayına *reel vektör uzayı,* $\mathbb{C}$ ise *kompleks vektör uzayı* denir (Kreyszig 1978).

Operatörler, vektör uzayları arasında tanımlanan özel dönüşümlerdir. Bu tezde, Hilbert uzayı üzerinde tanımlı lineer bir q-fark operatörü incelenecektir. O halde, bu kavramları tanıtalım.

Tanım 2.2 X ve Y iki vektör uzay, $D(L)$ ise $L: X \to Y$ operatörünün tanım kümesi olmak üzere, her $x, y \in D(L)$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha Lx + \beta Ly$$

eşitliği gerçekleniyorsa, L operatörüne *lineer operatör* denir (Naimark 1968).

Tanım 2.3 (Normlu Uzay) X reel veya kompleks bir vektör uzayı olmak üzere, her $x, y \in X$ ve α skaleri için

(i) $\|x\| \geq 0$

(ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlayan reel değerli

$$\|.\|: X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna X üzerinde bir norm, $(X, \|.\|)$ ikilisine ise bir *normlu uzay* denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.4 X reel veya kompleks bir vektör uzay olmak üzere, her $x, y, z \in X$ ve

(i) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

(ii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

(iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0 \;\; (\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

şartlarını sağlayan

$$\langle , \rangle : X\text{x}X \to K$$

fonksiyonuna X üzerinde bir iç çarpım, $(X, \langle , \rangle)$ uzayına ise bir *iç çarpım uzayı* denir. X uzayı üzerinde tanımlanan bir iç çarpım X üzerinde

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

ile verilen bir norm tanımlar (Kreyszig 1978).

Tanım 2.5 X metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına *tam uzay* denir. Bir norm tarafından tanımlanan metriğe göre tam olan uzaya, yani bir tam normlu uzaya *Banach uzayı*, üzerinde bir iç çarpım tanımlı metrik uzay ürettiği

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

normuna göre tam ise de bu iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.6 $(-\infty, \infty)$ aralığında p. mertebeden integrallenebilen fonksiyonların uzayı $L^p(-\infty, \infty)$ ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$L^p(-\infty, \infty) := \left\{ f : \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty \right\}, 0 < p < \infty$$

L^p uzayları $p \geq 1$ için Banach uzayı, $p = 2$ için ise Hilbert uzayıdır. Özel olarak

$$L^1(-\infty, \infty) \coloneqq \left\{ f: \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty \right\}$$

uzayı bir Banach uzayı olup, bu uzayda norm

$$\|f\|^1 \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \, , f \in L^1(-\infty, \infty)$$

şeklinde tanımlıdır. Diğer yandan,

$$L^2(-\infty, \infty) \coloneqq \left\{ f: \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

uzayı ise bir Hilbert uzayıdır ve bu uzayda norm ve iç çarpım sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\|f\|^2 \coloneqq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} , f \in L^2(-\infty, \infty),$$

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \, , f, g \in L^2(-\infty, \infty).$$

Tanım 2.7 $L: D(L) \subset \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ operatörü $\mathrm{X} \neq \theta$ kompleks normlu uzayında lineer olsun $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$R_\lambda(L) = (L — \lambda I)^{-1}$$

operatörüne L operatörünün *rezolvent operatörü* veya kısaca *rezolventi* denir (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.8 L operatörünün rezolvent operatörü $R_\lambda(L)$ mevcut, sınırlı ve tanım kümesi X uzayında yoğun ise λ kompleks sayısına L operatörünün bir *regüler değeri* denir. L operatörünün regüler değerlerinden oluşan kümeye ise, L operatörünün *rezolvent kümesi* denir (Lusternik ve Sobolev 1974).

Bu küme aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\rho(L) = \left\{ \lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \begin{matrix} R_\lambda(L) \text{ mevcut} \\ R_\lambda(L) \text{ sınırlı} \\ \overline{D(R_\lambda(L))} = X \end{matrix} \right\}.$$

Tanım 2.9 L operatörünün rezolvent kümesinin $\mathbb{C}$ kompleks düzlemindeki tümleyenine L operatörünün *spektrumu* denir. Spektrum kümesi

$$\sigma(L) \coloneqq \mathbb{C} \backslash \rho(L)$$

olarak yazılır. Spektrumun her bir $\mu \in \mathbb{C}$ elemanına da L operatörünün *spektral değeri* denir (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.10 $R_\lambda(L)$ mevcut olmayacak şekildeki λ kompleks sayılarının cümlesine L operatörünün *diskret spektrumu* ya da *nokta spektrumu* denir ve

$$\sigma_d(L) \coloneqq \{\lambda : \lambda \in \mathbb{C},\ R_\lambda(T) \text{ mevcut değil}\}$$

olarak tanımlanır (Lusternik ve Sobolev 1974).

$\sigma_d(L)$ kümesi, L operatörünün özdeğerler kümesi olarak da adlandırılır.

Tanım 2.11 $R_\lambda(L)$ mevcut ancak sınırsız, $R_\lambda(L)$ operatörünün tanım kümesi ise X uzayında yoğun olacak şekilde λ kompleks sayılarının oluşturduğu kümeye, L operatörünün *sürekli spektrumu* denir. Bu küme $\sigma_c(L)$ ile gösterilir ve

$$\sigma_c(L) \coloneqq \left\{ \lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \begin{matrix} R_\lambda(L) \text{ mevcut} \\ R_\lambda(L) \text{ sınırsız} \\ \overline{D(R_\lambda(L))} = X \end{matrix} \right\}$$

olarak tanımlanır (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.12 $R_\lambda(L)$ mevcut ve sınırlı ancak rezolvent operatörünün tanım kümesi X uzayında yoğun değilse, bu durumda λ kompleks sayılarının oluşturduğu kümeye L operatörünün *kalan spektrumu* (rezidü spektrum) denir. Bu küme $\sigma_r(L)$ ile gösterilir ve

$$\sigma_r(L) \coloneqq \left\{ \lambda : \lambda \in \mathbb{C}, \begin{matrix} R_\lambda(L) \text{ mevcut} \\ R_\lambda(L) \text{ sınırlı} \\ \overline{D(R_\lambda(L))} \neq X \end{matrix} \right\}$$

olarak tanımlanır (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.10, Tanım 2.11 ve Tanım 2.12 ile verilen kümeler ikişerli olarak ayrıktır ve birleşimleri spektrumu oluşturur, yani

$$\sigma(L) = \sigma_d(L) \cup \sigma_c(L) \cup \sigma_r(L)$$

yazılır.

Şimdi de bu yüksek lisans tezinde sıkça kullanacağımız özdeğer ve spektral tekillik kavramları tanımlansın.

Tanım 2.13 X bir vektör uzay ve $L: X \to X$ lineer bir operatör olsun. Eğer

$$Lx = \lambda x$$

denkleminin aşikâr olmayan bir $x \in X$ çözümü oluyorsa, λ sayısına L operatörünün bir *özdeğeri*, x çözümüne ise L operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen *özvektörü* ya da *özfonksiyonu* adı verilir (Naimark 1968).

Özdeğerler kümesi, Tanım 2.10'dan hatırlanacağı üzere $\sigma_d(L)$ ile gösterilmişti.

Tanım 2.14 Bir L operatörünün rezolvent operatörünün kutbu olan, sürekli spektrumda bulunan ancak L operatörünün özdeğeri olmayan noktalara L operatörünün *spektral tekillikleri* denir ve $\sigma_{ss}(L)$ ile gösterilir (Naimark 1968).

Teorem 2.1 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesinin içindeki sıfırları (eğer varsa) ayrıktır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.2 Özdeş olarak sıfırları olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesinin içindeki sıfırlarının limit noktaları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.3 Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, sonsuz katlı sıfırları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.4 (Privalov Teoremi) Açık üst düzlemde özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, reel eksendeki sıfırlarının Lebesgue ölçüsü sıfırdır (Dolzhenko 1979).

Teorem 2.5 (Wehyl Kompakt Heyecanlandırma Teoremi) A selfadjoint, B kompakt bir operatör olmak üzere, $T = A + B$ ise, bu durumda $\sigma_c(T) = \sigma(A)$ eşitliği sağlanır (Glazman 1965).

Tanım 2.15 Sonlu veya sonsuz $a < x < b$ aralığı üzerinde

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda\omega(x)]y(x) = 0, \qquad a < x < b$$

şeklinde tanımlanan 2. basamaktan lineer diferensiyel denkleme klasik Sturm-Liouville denklemi denir. Burada $p,\ q,\ \omega$ fonksiyonları (a, b) aralığında parçalı sürekli ve reel (kompleks) değerli fonksiyonlardır.

Tanım 2.16 $f_1: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları A kümesi üzerinde türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere, her $x \in A$ için f_1 ve f_2 fonksiyonlarının Wronskiyeni

$$W[f_1, f_2] = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f'_1(x) & f'_2(x) \end{vmatrix} = f_1(x)f'_2(x) - f_2(x)f'_1(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.17 Her $x \in [a, b]$ için $p(x) > 0$ olsun. Bu durumda f_1 ve f_2 fonksiyonları

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda\omega(x)]y(x) = 0, \qquad a < x < b$$

denkleminin lineer bağımsız bir çözümü ise, bu durumda $W[f_1, f_2]$ sıfırdan farklıdır. f_1 ve f_2 'nin lineer bağımlı olması durumunda ise Wronskiyen sıfıra özdeştir, yani $W[f_1, f_2] = 0$ olur.

3. KUANTUM FARK OPERATÖRLERİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

3.1 Kuantum Analizi ve İlgili Kuantum Fark Operatörü

Bu bölümde, ilk olarak kuantum analizi ile ilgili gerekli bilgiler verilecek, daha sonra ise bilinen Sturm-Liouville fark denkleminin kuantum fark analoğu elde edilip, bu denklem ile uyumlu kuantum fark operatörü incelenecektir.

$q > 1$ olmak üzere, reel ve sabit q sayısı ile aşağıdaki kümeler tanımlansın.

$$q^{\mathbb{N}} := \{q^n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$q^{-\mathbb{N}} := \{q^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$$

$$q^{\mathbb{Z}} := \{q^n : n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\overline{q^{\mathbb{Z}}} := q^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$$

Yukarıdaki kümelerden herhangi biri üzerinde tanımlanan ve q -türev içeren fonksiyonlardan oluşan denkleme *kuantum fark denklemi*, kısaca *q-fark denklemi* denir. Açıktır ki, üzerinde çalışacağımız q-fark denklemini anlamak için öncelikle q -türev tanımını iyi kavramak gereklidir. Özel durumda q-fark denklemlerini de içeren dinamik denklemlerin türevleri, zaman skalası denilen ve bilinmeyen fonksiyonun tanım kümesi olan keyfi bir $\mathbb{T}$ kümesi üzerinde verilir. Bu genel $\mathbb{T}$ kümesi üzerinde yapılan çalışmaların artması, sonuçların hem diferensiyel denklemler hem de fark denklemleri için ayrı ayrı elde edilme zahmetinden kurtarır. $\mathbb{T}$ zaman skalası reel sayılar kümesi seçildiğinde, ispat edilen genel sonuç diferensiyel denklemler teorisindeki sonuç ile çakışır, öte yandan zaman skalası tamsayılar kümesi seçildiğinde de genel sonuç fark denklemler teorisindeki sonuç ile çakışır. Benzer şekilde, keyfi $\mathbb{T}$ zaman skalasının $q^{\mathbb{Z}}$ kümesi seçilmesi, q-fark denklemindeki sonuca keyfi $\mathbb{T}$ zaman skalasındaki aynı genel sonuçtan ulaşmayı sağlar. Özetle, zaman skalasında yapılan çalışmalarda hedef, sonuçları

tekleştirmek ve genelleştirmektir. Gerçekten de, $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun delta türevi f^{Δ} ile gösterilirse, bu delta türev $\mathbb{T}$ kümesinin özel seçimleriyle aşağıdaki bilinen türevlere dönüşecektir.

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $f^{\Delta} = f'$ olur, burada f' adi türevdir.
(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise $f^{\Delta} = \Delta f$ olur, burada Δf ileri fark operatörüdür.

Diğer yandan reel sayılar ve tam sayılardan başka birçok zaman skalası olduğundan, birçok da türev tanımı olacaktır. Zaman skalası hakkındaki detaylı bilgilere Bohner ve Peterson'un kitaplarından ulaşılabilir (Bohner ve Peterson 2001, Bohner ve Peterson 2003).

$\mathbb{T} = q^{\mathbb{Z}}$ özel durumunda, kullanılacak q -türev ve q -integral aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.1 $f: q^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ olarak verilen fonksiyonun q -türevi

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(qt) - f(t)}{\mu(t)}, \qquad t \in q^{\mathbb{Z}}$$

şeklindedir. Burada $\mu(t) := (q-1)t$ fonksiyonuna *graininess fonksiyonu* denir. Bu uzaydan alınan herhangi iki f ve g fonksiyonları için çarpım kuralı

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(qt)g^{\Delta}(t) = f(t)g^{\Delta}(t) + f^{\Delta}(t)g(qt)$$

olarak verilir.

Tanım 3.2 $f: q^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$ olarak verilen fonksiyonun q -integrali

$$\int_a^b f(t)\Delta t := \begin{cases} \sum_{t\in[a,b)\cap q^{\mathbb{Z}}} \mu(t)f(t), & a<b \text{ ise} \\ 0, & a=b \text{ ise} \\ \sum_{t\in[b,a)\cap q^{\mathbb{Z}}} \mu(t)f(t), & a>b \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir.

Yukarıda verilen bu tanımların yanı sıra, klasik analizdeki diğer tanım ve teoremlerin q -analogları Kac ve Cheung tarafından verilmiştir (Kac ve Cheung 2002).

Bu bilgiler ışığında, tezin bu kısmında ileride spektral analizi yapılacak olan q -fark denklemi ve ilgili q -fark operatörü tanıtılacaktır.

$\ell^2(q^{\mathbb{Z}})$ ile

$$\langle f,g\rangle_q := \int_{q^{\mathbb{Z}}} f(t)\overline{g(t)}\,\Delta t, \qquad f,g: q^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$$

iç çarpımı ve

$$\|f\|_q := \left(\int_{q^{\mathbb{Z}}} |f(t)|^2 \Delta t\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad f: q^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}$$

normu ile verilen kompleks değerli fonksiyonların Hilbert uzayı gösterilsin. T ise

$$(\ell y)(t) := q\gamma(t)y(qt) + \beta(t)y(t) + \gamma\left(\frac{t}{q}\right)y\left(\frac{t}{q}\right), \qquad t\epsilon q^{\mathbb{Z}}$$

ikinci basamaktan q -fark ifadesi yardımıyla $\ell^2(q^{\mathbb{Z}})$ Hilbert uzayında üretilen q -fark operatörünü göstersin. Burada $\{\gamma(t)\}_{t\epsilon q^{\mathbb{Z}}}$ ve $\{\beta(t)\}_{t\epsilon q^{\mathbb{Z}}}$ kompleks diziler olup $\forall t \in q^{\mathbb{Z}}$ için $\gamma(t) \neq 0$ olmalıdır. y^{Δ}, y fonksiyonunun q -türevini göstermek üzere,

$$a(t) = \gamma(t)\mu^2(t) \text{ ve } b(t) = \beta(t) + q\gamma(t) + \gamma\left(\frac{t}{q}\right)$$

alınırsa yukarıda verilen q -fark denklemi

$$(\ell y)(t) = [ay^{\Delta}]^{\Delta}\left(\frac{t}{q}\right) + b(t)y(t), \qquad t \in q^{\mathbb{Z}}$$

Sturm-Liouville formunda yazılabilir.

Bu bölümde sırasıyla T operatörünün Jost çözümü ve Jost fonksiyonu, rezolventi ve spektrumu, özdeğer ve spektral tekillikleri incelenecektir. Ayrıca analitik fonksiyonların birebirlik teoremleri yardımıyla T operatörünün sonlu sayıda özdeğer ve spektral tekilliğe sahip olduğu ispatlanacaktır. Bu sayede Adıvar ve Bairamov'un 2001 yılında fark denklemleri için elde ettiği sonuçlar genelleşmiş olacaktır.

3.2 T Operatörünün Jost Çözümü ve Jost Fonksiyonu

λ bir spektral parametre ve $\forall t \in q^{\mathbb{Z}}$ için $\gamma(t) \neq 0$ olmak üzere,

$$q\gamma(t)y(qt) + \beta(t)y(t) + \gamma\left(\frac{t}{q}\right)y\left(\frac{t}{q}\right) = \lambda y(t), \ t \in q^{\mathbb{Z}} \tag{3.1}$$

q-fark denklemi göz önüne alınsın. Burada $\{\gamma(t)\}_{t\epsilon q^{\mathbb{Z}}}$ve $\{\beta(t)\}_{t\epsilon q^{\mathbb{Z}}}$ kompleks dizilerinin

$$\sum_{t\in q^{\mathbb{Z}}} \left|\frac{lnt}{lnq}\right| (|1-\gamma(t)| + |\beta(t)|) < \infty \tag{3.2}$$

koşulunu sağladığı kabul edilecektir. Ayrıca $\lambda = 2\sqrt{q}cosz$ olmak üzere, $e^{+}(t,z)$ ve $e^{-}(\mathrm{t},\mathrm{z})$ ile (3.1) denkleminin iki çözümü gösterilecektir. Bu iki çözüm,

$$qy(qt) + y\left(\frac{t}{q}\right) = \lambda y(t),\ t \in q^{\mathbb{Z}} \tag{3.3}$$

denkleminin iki çözümü olan

$$\tilde{e}^{+}(t,z) \coloneqq \frac{exp\left(i\frac{lnt}{lnq}z\right)}{\sqrt{\mu(t)}} \text{ ve } \tilde{e}^{-}(t,z) \coloneqq \frac{exp\left(-i\frac{lnt}{lnq}z\right)}{\sqrt{\mu(t)}}$$

çözümlerine asimptotik olarak eşittir.

Teorem 3.1 $\lambda = 2\sqrt{q}cosz$ ve $z \in \bar{\mathbb{C}}_{+}$ olmak üzere (3.2) koşulu altında $e^{+}(t,z)$ ve $e^{-}(t,z)$ çözümleri sırasıyla

$$e^{+}(t,z) = \alpha^{+}(t)\frac{exp\left(i\frac{lnt}{lnq}z\right)}{\sqrt{\mu(t)}}\left(1 + \int_{q^{\mathbb{N}}} A^{+}(t,r)\frac{exp\left(i\frac{lnr}{lnq}z\right)}{\mu(r)}\Delta r\right) \tag{3.4}$$

$$e^{-}(t,z) = \alpha^{-}(t)\frac{exp\left(-i\frac{lnt}{lnq}z\right)}{\sqrt{\mu(t)}}\left(1 + \int_{q^{-\mathbb{N}}} A^{-}(t,r)\frac{exp\left(-i\frac{lnr}{lnq}z\right)}{\mu(r)}\Delta r\right) \tag{3.5}$$

gösterimlerine sahiptir. Burada, $\alpha^{\pm}(t)$ ve $A^{\pm}(t,r)$ dizileri $\{\gamma(t)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ ve $\{\beta(t)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ dizileri cinsinden aşağıdaki şekilde tek türlü ifade edilir:

- $r \in q^{\mathbb{N}}$ ve $t \in q^{\mathbb{Z}}$ için

$$\alpha^{+}(t) = \left(\prod_{s\in[t,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \gamma(s)\right)^{-1},$$

$$A^+(t,q) = -\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \beta(s),$$

$$A^+(t,q^2) = \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \left\{ 1-\gamma^2(s) + \frac{1}{q}\beta(s) \sum_{p\in[qs,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \beta(p) \right\},$$

$$A^+(t,q^2r) = A^+(qt,r) + \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \left\{ \left(1-\gamma^2(s)\right)A^+(qs,r) - \frac{\beta(s)}{\sqrt{q}} A^+(s,qr) \right\}.$$

- $r \in q^{-\mathbb{N}}$ ve $t \in q^{\mathbb{Z}}$ için

$$\alpha^-(t) = \left(\prod_{s\in\left(0,\frac{t}{q}\right]\cap q^{\mathbb{Z}}} \gamma(s) \right)^{-1},$$

$$A^-\left(t,\frac{1}{q}\right) = -\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s\in\left(0,\frac{t}{q}\right]\cap q^{\mathbb{Z}}} \beta(s),$$

$$A^-\left(t,\frac{1}{q^2}\right) = \sum_{s\in\left(0,\frac{t}{q}\right]\cap q^{\mathbb{Z}}} \left\{ 1-\gamma^2\left(\frac{s}{q}\right) + \frac{1}{q}\beta(s) \sum_{s\in\left(0,\frac{t}{q}\right]\cap q^{\mathbb{Z}}} \beta(p) \right\},$$

$$A^-\left(t,\frac{r}{q^2}\right) = A^-\left(\frac{t}{q},r\right) + \sum_{s\in\left(0,\frac{t}{q}\right]\cap q^{\mathbb{Z}}} \left\{ \left(1-\gamma^2\left(\frac{s}{q}\right)\right)A^-\left(\frac{s}{q},r\right) - \frac{\beta(s)}{\sqrt{q}} A^-\left(s,\frac{r}{q}\right) \right\}.$$

İspat Öncelikle (3.4) eşitliği için katsayıları tek türlü elde etmeye çalışalım. Bunun için $e^+(t,z)$ çözümü (3.1) denkleminde yazıldığında,

$$q\gamma(t)e^+(qt,z) + \beta(t)e^+(t,z) + \gamma\left(\frac{t}{q}\right)e^+\left(\frac{t}{q},z\right) = 2\sqrt{q}cosze^+(t,z)$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan

$$q\gamma(t)\alpha^{+}(qt)\frac{exp\left(i\frac{lnqt}{lnq}z\right)}{\sqrt{\mu(qt)}}\left(1+\int_{q^{\mathbb{N}}}A^{+}(qt,r)\frac{exp\left(i\frac{lnr}{lnq}z\right)}{\mu(r)}\Delta r\right)$$

$$+\beta(t)\alpha^{+}(t)\frac{exp\left(i\frac{lnt}{lnq}z\right)}{\sqrt{\mu(t)}}\left(1+\int_{q^{\mathbb{N}}}A^{+}(t,r)\frac{exp\left(i\frac{lnr}{lnq}z\right)}{\mu(r)}\Delta r\right)$$

$$+\gamma\left(\frac{t}{q}\right)\alpha^{+}\left(\frac{t}{q}\right)\frac{exp\left(i\frac{ln\frac{t}{q}}{lnq}z\right)}{\sqrt{\mu\left(\frac{t}{q}\right)}}\left(1+\int_{q^{\mathbb{N}}}A^{+}\left(\frac{t}{q},r\right)\frac{exp\left(i\frac{lnr}{lnq}z\right)}{\mu(r)}\Delta r\right)$$

$$=2\sqrt{q}cosz\left\{\alpha^{+}(t)\frac{exp\left(i\frac{lnt}{lnq}z\right)}{\sqrt{\mu(t)}}\left(1+\int_{q^{\mathbb{N}}}A^{+}(t,r)\frac{exp\left(i\frac{lnr}{lnq}z\right)}{\mu(r)}\Delta r\right)\right\}$$

eşitliği elde edilir. Tanım 3.2 kullanılarak son eşitlik düzenlendiğinde,

$$q\gamma(t)\alpha^{+}(qt)\frac{exp\left(i\left(\frac{lnt}{lnq}+1\right)z\right)}{\sqrt{(q-1)qt}}$$

$$+q\gamma(t)\alpha^{+}(qt)\ \frac{exp\left(i\left(\frac{lnt}{lnq}+1\right)z\right)}{\sqrt{(q-1)qt}}\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}A^{+}(qt,r)exp\left(i\frac{lnr}{lnq}z\right)$$

$$+\beta(t)\alpha^{+}(t)\frac{exp\left(i\frac{lnt}{lnq}z\right)}{\sqrt{(q-1)t}}+\beta(t)\alpha^{+}(t)\frac{exp\left(i\frac{lnt}{lnq}z\right)}{\sqrt{(q-1)t}}\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}A^{+}(t,r)\,exp\left(i\frac{lnr}{lnq}z\right)$$

$$+\gamma\left(\frac{t}{q}\right)\alpha^{+}\left(\frac{t}{q}\right)\frac{exp\left(i\left(\frac{lnt}{lnq}-1\right)z\right)}{\sqrt{(q-1)\frac{t}{q}}}$$

$$+\gamma\left(\frac{t}{q}\right)\alpha^{+}\left(\frac{t}{q}\right)\frac{exp\left(i\left(\frac{lnt}{lnq}-1\right)z\right)}{\sqrt{(q-1)\frac{t}{q}}}\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}A^{+}\left(\frac{t}{q},r\right)exp\left(i\frac{lnr}{lnq}z\right)$$

$$=\sqrt{q}\alpha^{+}(t)\frac{exp\left(iz\left(\frac{lnt}{lnq}+1\right)\right)}{\sqrt{(q-1)t}}+\sqrt{q}\alpha^{+}(t)\frac{exp\left(iz\left(\frac{lnt}{lnq}-1\right)\right)}{\sqrt{(q-1)t}}$$

$$+\sqrt{q}\alpha^{+}(t)\frac{exp\left(iz\left(\frac{lnt}{lnq}+1\right)\right)}{\sqrt{(q-1)t}}\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}A^{+}(t,r)exp\left(i\frac{lnr}{lnq}z\right)$$

$$+\sqrt{q}\alpha^{+}(t)\frac{exp\left(iz\left(\frac{lnt}{lnq}-1\right)\right)}{\sqrt{(q-1)t}}\sum_{r\in q^{\mathbb{N}}}A^{+}(t,r)exp\left(i\frac{lnr}{lnq}z\right) \tag{3.6}$$

bulunur. En son eşitlikte üstel terimlerin katsayıları karşılaştırıldığında, $exp\left(i\left(\frac{lnt}{lnq}-1\right)z\right)$ ifadeli terimlerin katsayıları eşitlenerek

$$\gamma\left(\frac{t}{q}\right)\alpha^{+}\left(\frac{t}{q}\right).\frac{1}{\sqrt{(q-1)\frac{t}{q}}}=\frac{\sqrt{q}\alpha^{+}(t)}{\sqrt{(q-1)t}}$$

bulunur. O halde

$$\gamma\left(\frac{t}{q}\right)\alpha^{+}\left(\frac{t}{q}\right)=\alpha^{+}(t),\ t\in q^{\mathbb{Z}} \tag{3.7}$$

elde edilir ve iterasyonlar yardımı ile aşağıdaki eşitliklere ulaşılır:

$$\alpha^+(t) = \gamma\left(\frac{t}{q}\right)\alpha^+\left(\frac{t}{q}\right),$$

$$\alpha^+(qt) = \gamma(t)\alpha^+(t),$$

$$\alpha^+(q^2t) = \gamma(qt)\alpha^+(qt),$$

$$\alpha^+(q^3t) = \gamma(q^2t)\alpha^+(q^2t),$$

...

Bu durumda

$$\alpha^+(t) = \{\ldots\gamma(t).\gamma(qt).\gamma(q^2t).\ldots\}^{-1}$$

$$= \left(\prod_{s\in[t,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \gamma(s)\right)^{-1}$$

eşitliğine ulaşılır. Diğer yandan $exp\left(i\frac{lnt}{lnq}z\right)$ ifadesinin olduğu terimlerin katsayıları karşılaştırıldığında,

$$\beta(t)\alpha^+(t) + \gamma\left(\frac{t}{q}\right)\alpha^+\left(\frac{t}{q}\right)\sqrt{q}A^+\left(\frac{t}{q},q\right) = \sqrt{q}\alpha^+(t)A^+(t,q)$$

olup,

$$\frac{\beta(t)}{\sqrt{q}}+\frac{\gamma\left(\frac{t}{q}\right)\alpha^{+}\left(\frac{t}{q}\right)}{\alpha^{+}(t)}A^{+}\left(\frac{t}{q},q\right)=A^{+}(t,q)$$

eşitliği bulunur. (3.7) eşitliğinden son eşitlik

$$A^{+}(t,q)-A^{+}\left(\frac{t}{q},q\right)=\frac{1}{\sqrt{q}}\beta(t) \tag{3.8}$$

olarak yazılır. (3.7) eşitliğine benzer iterasyonlar uygulanırsa

$$A^{+}(qt,q)-A^{+}(t,q)=\frac{1}{\sqrt{q}}\beta(qt),$$
$$A^{+}(q^{2}t,q)-A^{+}(qt,q)=\frac{1}{\sqrt{q}}\beta(q^{2}t),$$
$$A^{+}(q^{3}t,q)-A^{+}(q^{2}t,q)=\frac{1}{\sqrt{q}}\beta(q^{3}t),$$

...

ifadeleri elde edilir. Bu şekilde

$$A^{+}(t,q)=-\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}}\beta(s)$$

yazılabilir, o halde aranan eşitlik elde edilir. Benzer şekilde $exp\left(i\left(\frac{lnt}{lnq}+1\right)z\right)$ ifadesinin olduğu terimlerin katsayıları eşitlendiğinde

$$\sqrt{q}\gamma(t)\alpha^{+}(qt)+\beta(t)\alpha^{+}(t)A^{+}(t,q)+\gamma\left(\frac{t}{q}\right)\alpha^{+}\left(\frac{t}{q}\right)\sqrt{q}A^{+}\left(\frac{t}{q},q^{2}\right)$$

$$= \sqrt{q}\alpha^{+}(t) + \sqrt{q}\alpha^{+}(t)A^{+}(t,q^2)$$

bulunur ve buradan

$$\frac{\gamma(t)\alpha^{+}(qt)}{\alpha^{+}(t)} + \frac{\beta(t)A^{+}(t,q)}{\sqrt{q}} + \frac{\gamma\left(\frac{t}{q}\right)\alpha^{+}\left(\frac{t}{q}\right)}{\alpha^{+}(t)}A^{+}\left(\frac{t}{q},q^2\right) = 1 + A^{+}(t,q^2)$$

eşitliğine varılır. (3.7) eşitliği yardımı ile son eşitlik

$$A^{+}(t,q^2) - A^{+}\left(\frac{t}{q},q^2\right) = \gamma^2(t) + \beta(t)A^{+}(t,q)\frac{1}{\sqrt{q}} - 1$$

olarak yazılır. Son eşitliğe de gerekli iterasyonlar uygulanarak

$$A^{+}(t,q^2) = -\sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}}\left\{\gamma^2(s) - 1 + \frac{1}{\sqrt{q}}\beta(s)A^{+}(s,q)\right\}$$

$$= \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}}\left\{1 - \gamma^2(s) + \frac{1}{\sqrt{q}}\beta(s)\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_{p\in[qs,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}}\beta(p)\right\}$$

$$= \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}}\left\{1 - \gamma^2(s) + \frac{1}{q}\beta(s)\sum_{p\in[qs,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}}\beta(p)\right\}$$

bulunur, bu ise aranan eşitliktir. Son olarak (3.7) eşitliğinden $r \in q^{\mathbb{N}}$ için

$$exp\left(\frac{lnt}{lnq} + 1 + \frac{lnr}{lnq}\right)$$

ifadesinin bulunduğu terimlerin katsayıları karşılaştırıldığında

$$\sqrt{q}\gamma(t)\alpha^+(qt)A^+(qt,r)+\beta(t)\alpha^+(t)A^+(t,qr)+\sqrt{q}\gamma\left(\frac{t}{q}\right)\alpha^+\left(\frac{t}{q}\right)A^+\left(\frac{t}{q},q^2r\right)$$

$$=\sqrt{q}\alpha^+(t)A^+(t,r)+\sqrt{q}\alpha^+(t)A^+(t,q^2r) \qquad (3.9)$$

eşitliği bulunur. (3.9) eşitliğinin her iki tarafı da $\alpha^+(t)$ ile bölündükten sonra (3.7) eşitliği yardımı ile (3.9) eşitliğinin sol tarafındaki terimler aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\frac{\sqrt{q}\gamma(t)\alpha^+(qt)A^+(qt,r)}{\alpha^+(t)}=\sqrt{q}\gamma^2(t)A^+(qt,r),$$

$$\frac{\beta(t)\alpha^+(t)A^+(t,qr)}{\alpha^+(t)}=\beta(t)A^+(t,qr),$$

$$\frac{\sqrt{q}\gamma\left(\frac{t}{q}\right)\alpha^+\left(\frac{t}{q}\right)A^+\left(\frac{t}{q},q^2r\right)}{\alpha^+(t)}=\sqrt{q}A^+\left(\frac{t}{q},q^2r\right).$$

Elde edilen bu üç terim (3.9) eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\gamma^2(t)A^+(qt,r)+\frac{\beta(t)}{\sqrt{q}}A^+(t,qr)+A^+\left(\frac{t}{q},q^2r\right)=A^+(t,r)+A^+(t,q^2r)$$

bulunur ve buradan

$$A^+(t,q^2r)-A^+\left(\frac{t}{q},q^2r\right)=\gamma^2(t)A^+(qt,r)-A^+(t,r)+\frac{\beta(t)}{\sqrt{q}}A^+(t,qr)$$

sonucuna ulaşılır. Daha önceki ispatlara benzer şekilde gerekli iterasyonlar uygulanıp düzenlendiğinde ise, $r\in q^{\mathbb{N}}$ ve $t\in q^{\mathbb{Z}}$ için aranan

$$A^{+}(t,q^{2}r)=A^{+}(qt,r)+\sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}}\left\{\left(1-\gamma^{2}(s)\right)A^{+}(qs,r)-\frac{\beta(s)}{\sqrt{q}}A^{+}(s,qr)\right\}$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan $e^{+}(t,z)$ ile benzer olarak (3.1) eşitliğinde $e^{-}(t,z)$ çözümü yazıldığında, $r\in q^{-\mathbb{N}}$ ve $t\in q^{\mathbb{Z}}$ için

$$\alpha^{-}(t)=\gamma(t)\alpha^{-}(qt),$$

$$A^{-}\left(qt,\frac{1}{q}\right)-A^{-}\left(t,\frac{1}{q}\right)=-\frac{\beta(t)}{\sqrt{q}},$$

$$A^{-}\left(qt,\frac{1}{q^{2}}\right)-A^{-}\left(t,\frac{1}{q^{2}}\right)=1-\gamma^{2}\left(\frac{t}{q}\right)-\frac{1}{\sqrt{q}}\beta(t)A^{-}\left(t,\frac{1}{q}\right),$$

$$A^{-}\left(qt,\frac{r}{q^{2}}\right)-A^{-}\left(t,\frac{r}{q^{2}}\right)=A^{-}(t,r)-\gamma^{2}\left(\frac{t}{q}\right)A^{-}\left(\frac{t}{q},r\right)-\frac{\beta(t)}{\sqrt{q}}A^{-}\left(t,\frac{r}{q}\right)$$

ifadeleri elde edilir. Bu eşitliklere gerekli iterasyonlar uygulandığında $r\in q^{-\mathbb{N}}$ ve $t\in q^{\mathbb{Z}}$ için aranan $\alpha^{-}(t),\ A^{-}\left(t,\frac{1}{q}\right),\ A^{-}\left(t,\frac{1}{q^{2}}\right)\ ve\ A^{-}\left(t,\frac{r}{q^{2}}\right)$ katsayıları teoremde ifade edildiği şekilde bulunur, bu şekilde ispat tamamlanır.

Lemma 3.1 $\{\gamma(t)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ ve $\{\beta(t)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ kompleks dizilerinin sağladığı (3.2) yakınsaklık şartı altında Teorem 3.1' de elde edilen $\alpha^{\pm}(t)$ sonsuz çarpımı ve $A^{\pm}(t,r),\ r\in q^{\pm\mathbb{N}}$ serileri yakınsaktır.

İspat İlk olarak

$$\alpha^{+}(\mathrm{t})=\left(\prod_{\mathrm{s}\in[\mathrm{t},\infty)\cap\mathrm{q}^{\mathbb{Z}}}\gamma(\mathrm{s})\right)^{-1}$$

sonsuz çarpımının yakınsaklığını gösterelim.

$$\prod_{s\in[t,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \gamma(s)$$

çarpımının yakınsaklığını göstermek için

$$\sum_{s\in[t,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} [\gamma(s)-1] \tag{3.9}$$

serisinin yakınsaklığını göstermek yeterlidir. Bunun için ise ilk önce

$$\sum_{s\in[t,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} |\gamma(s)-1|$$

serisinin yakınsaklığını inceleyelim. Gerçekten de bu seri (3.2) koşulu altında yakınsaktır. O halde (3.9) serisi mutlak yakınsaktır. $\ell^2(q^{\mathbb{Z}})$ uzayı tam olduğundan (3.9) serisi yakınsaktır. Bu ise $\alpha^+(t)$ sonsuz çarpımının yakınsaklığını ispatlar.

Diğer yandan, $\forall r \in q^{\mathbb{N}}$ için $A^+(t,r)$ serilerinin de yakınsaklığını göstermeliyiz. $r=q$ için $A^+(t,q)$ serisinin yakınsaklığı ispatlanırsa, $A^+(t,q^2)$ ve $r \in q^{\mathbb{N}}$ için $A^+(t,q^2r)$ serilerinin yakınsaklıkları da benzer şekilde ispatlanabilir.

$$|A^+(t,q)| = \left| -\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \beta(s) \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} |\beta(s)|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s \in q^{\mathbb{Z}}} |\beta(s)|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s \in q^{\mathbb{Z}}} \{|1-\gamma(s)| + |\beta(s)|\}$$

eşitsizliği gerçeklendiğinden, yine (3.2) koşulu gereğince $A^{+}(t,q)$ serisi mutlak yakınsak olur. $\ell^2(q^{\mathbb{Z}})$ uzayında mutlak yakınsak her seri yakınsak olduğundan $A^{+}(t,q)$ serisi de yakınsaktır.

Yukarıdaki ispatlara benzer şekilde $\alpha^{-}(t)$ sonsuz çarpımının ve $\forall\, r \in q^{-\mathbb{N}}$ için $A^{-}(t,r)$ serisinin yakınsaklığı da kolayca ispatlanabilir.

Lemma 3.2 $c > 0$ bir sabit ve $\left[\frac{lnr}{2lnq}\right]$ ifadesi $\frac{lnr}{2lnq}$ sayısının tam kısmını göstermek üzere, $A^{\pm}(t,r)$ serileri (3.2) koşulu altında aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

$$|A^{+}(t,r)| \leq c \sum_{s \in \left[tq^{\left[\frac{lnr}{2lnq}\right]}, \infty\right) \cap q^{\mathbb{Z}}} \{|1-\gamma(s)| + |\beta(s)|\}, r \in q^{\mathbb{N}} \; ve \; t \in q^{\mathbb{Z}} \qquad (3.10)$$

$$|A^{-}(t,r)| \leq c \sum_{s \in \left(0, tq^{\left[\frac{lnr}{2lnq}\right]+1}, \infty\right) \cap q^{\mathbb{Z}}} \{|1-\gamma(s)| + |\beta(s)|\}, r \in q^{-\mathbb{N}} \; ve \; t \in q^{\mathbb{Z}} \qquad (3.11)$$

İspat Bu lemmayı ispatlayabilmek için tümevarım yöntemi kullanılacaktır. İspata ilk olarak $A^{+}(t,r)$ serisinin sağladığı eşitsizlik gösterilerek başlanacaktır. Bu sebeple, ilk yapılması gereken $r = q$ için

$$A^{+}(t,q) \leq c \sum_{s \in [t,\infty) \cap q^{\mathbb{Z}}} \{|1-\gamma(s)| + |\beta(s)|\}$$

eşitsizliğini ispat etmektir. Teorem 3.1 den

$$A^{+}(t,q) = -\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \beta(s)$$

eşitliği bilindiğinden, bu eşitlikte mutlak değer alınıp daha sonra üçgen eşitsizliği uygulanırsa,

$$|A^{+}(t,q)| \leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} |\beta(s)|$$

eşitsizliği yazılır. Hatta

$$|A^{+}(t,q)| \leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s\in[t,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} |\beta(s)|$$

yazılarak eşitsizliğin sağ tarafı daha da büyütülebilir. Son olarak eşitsizliğin sağ tarafına pozitif bir terim olan $|1-\gamma(s)|$ ifadesi eklenerek

$$|A^{+}(t,q)| \leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s\in[t,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \{|1-\gamma(s)| + |\beta(s)|\}$$

eşitsizliği elde edilir ki, bu aranan eşitliktir. Şimdi de $r = q^{k-1}$ için

$$|A^{+}(t,q^{k-1})| \leq c \sum_{s\in\left[tq^{\left[\frac{k-1}{2}\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} \{|1-\gamma(s)| + |\beta(s)|\} \qquad (3.12)$$

eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. İspatlamamız gereken, tümevarım gereğince $r = q^{k}$ için

$$|A^+(t,q^k)| \le c \sum_{s\in\left[tq^{\left[\frac{k}{2}\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} \{|1-\gamma(s)|+|\beta(s)|\}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiğidir. Teorem 3.1 den

$$A^+(t,q^2r) = A^+(qt,r) + \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \left\{\left(1-\gamma^2(s)\right)A^+(qs,r) - \frac{\beta(s)}{\sqrt{q}}A^+(s,qr)\right\}$$

eşitliği bilindiğinden $r = q^{k-2}$ alınırsa

$$A^+(t,q^k) = A^+(qt,q^{k-2})$$

$$+ \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \left\{\left(1-\gamma^2(s)\right)A^+(qs,q^{k-2}) - \frac{\beta(s)}{\sqrt{q}}A^+(s,q^{k-1})\right\}$$

yazılır. Eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alındığında

$$|A^+(t,q^k)| \le |A^+(qt,q^{k-2})|$$

$$+ \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \left\{|1-\gamma^2(s)||A^+(qs,q^{k-2})| + \frac{|\beta(s)|}{\sqrt{q}}|A^+(s,q^{k-1})|\right\}$$

$$= |A^+(qt,q^{k-2})| + \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} |1-\gamma^2(s)||A^+(qs,q^{k-2})|$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} |\beta(s)||A^+(s,q^{k-1})|$$

elde edilir. (3.12) ifadesinden son eşitsizlik aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$|A^+(t,q^k)| \le |A^+(qt,q^{k-2})|$$

$$+c_1 \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} |1-\gamma^2(s)| \sum_{p\in\left[sq^{\left[\frac{k-2}{2}\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} \{|1-\gamma(p)|+|\beta(p)|\}$$

$$+\frac{c_2}{\sqrt{q}} \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} |\beta(s)| \sum_{p\in\left[sq^{\left[\frac{k-1}{2}\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} \{|1-\gamma(p)|+|\beta(p)|\}.$$

Burada terimlerdeki ikinci serilerin indisleri yeniden düzenlenir ve

$$M(p) \coloneqq |1-\gamma(p)|+|\beta(p)|$$

yazılırsa

$$|A^+(t,q^k)| \le |A^+(qt,q^{k-2})| + c_1 \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} |1-\gamma^2(s)| \sum_{p\in\left[sq^{\left[\frac{k-1}{2}\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(p)$$

$$+\frac{c_2}{\sqrt{q}} \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} |\beta(s)| \sum_{s\in\left[sq^{\left[\frac{k-1}{2}\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(p)$$

eşitliği bulunur.

Son eşitsizlikte ise $c_3 \coloneqq maks\left\{c_1,\frac{c_2}{\sqrt{q}}\right\}$ olmak üzere

$$|A^+(t,q^k)| \le |A^+(qt,q^{k-2})| + c_3 \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(s) \sum_{p\in\left[sq^{\left[\frac{k-1}{2}\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(p) \qquad (3.13)$$

elde edilir. (3.13) eşitsizliğini daha açık görebilmek için

$$\sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(s) \sum_{p\in\left[sq^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(p)$$

ifadesini daha açık yazalım.

$$\sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(s) \sum_{p\in\left[sq^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(p) = M(qt) \sum_{p\in\left[tq^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil+1},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(p)$$

$$+M(q^2t) \sum_{p\in\left[tq^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil+2},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(p)$$

$$+M(q^3t) \sum_{p\in\left[tq^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil+3},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(p)$$

$$+\ldots$$

$$\leq M(qt) \sum_{p\in\left[tq^{\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(p)$$

$$+M(q^2t) \sum_{p\in\left[tq^{\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(p)$$

$$+M(q^3t) \sum_{p\in\left[tq^{\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(p)$$

$$+\ldots$$

Bu durumda (3.13) eşitsizliği

$$|A^+(t,q^k)| \le |A^+(qt,q^{k-2})| + c_3 \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(s) \sum_{p\in\left[tq^{\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(p)$$

halini alır.

$$\sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(s)$$

serisi sınırlı olduğundan

$$c_4 \coloneqq c_3 \sum_{s\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(s)$$

olmak üzere son eşitsizlik

$$|A^+(t,q^k)| \le |A^+(qt,q^{k-2})| + c_4 \sum_{p\in\left[tq^{\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(p)$$

şeklinde yazılır. Eşitsizliğin sağındaki ilk terim için (3.12) kabulü kullanılırsa

$$|A^+(t,q^k)| \le c_5 \sum_{s\in\left[qtq^{\left[\frac{k-2}{2}\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(s) + c_4 \sum_{p\in\left[tq^{\left[\frac{k+1}{2}\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(p)$$

$$= c_5 \sum_{s\in\left[tq^{\left[\frac{k}{2}\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(s) + c_4 \sum_{p\in\left[tq^{\left[\frac{k+1}{2}\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(p)$$

$$\le c_5 \sum_{s\in\left[qtq^{\left[\frac{k}{2}\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(s) + c_4 \sum_{p\in\left[tq^{\left[\frac{k}{2}\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(p)$$

yazılır. $C \coloneqq maks\{c_4, c_5\}$ olmak üzere,

$$|A^+(t,q^k)| \le C \sum_{s\in\left[tq^{\left[\frac{k}{2}\right]},\infty\right)\cap q^{\mathbb{Z}}} M(s)$$

bulunur ki, bu ise aranan eşitsizlik olup (3.10) eşitsizliğini ispatlar.(3.11) eşitsizliğinin ispatı da tümevarım yöntemi ile benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç olarak Lemma 3.2, (3.1) denkleminin $e^+(t,z)$ ve $e^-(t,z)$ çözümlerinin $\bar{\mathbb{C}}_+$ bölgesinde sürekli ve z değişkenine göre $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitik olduğunu söyler.

Lemma 3.3 (3.1) denkleminin $e^+(t,z)$ ve $e^-(t,z)$ çözümleri (3.2) koşulu altında aşağıdaki asimptotik eşitlikleri gerçekler:

$$\begin{cases} e^+(t,z) = \dfrac{exp\left(i\frac{\ln t}{\ln q}z\right)}{\sqrt{\mu(t)}}\big(1+o(1)\big), & t\to\infty, \quad z\in\bar{\mathbb{C}}_+ \\ e^-(t,z) = exp\left(-i\dfrac{\ln t}{\ln q}z\right)\big(1+o(1)\big), & t\to 0, \quad z\in\bar{\mathbb{C}}_+ \end{cases} \tag{3.14}$$

ve

$$e^{\pm}(t,z) = \alpha^{\pm}(t)exp\left(\pm i\frac{\ln t}{\ln q}z\right)\big(1+o(1)\big), \qquad t \in q^{\mathbb{Z}}, \qquad Imz \to \infty \qquad (3.15)$$

Tanım 3.3 Sturm-Liouville denklemine benzer şekilde $e^{+}(z) \coloneqq \{e^{+}(t,z)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ ve $e^{-}(z) \coloneqq \{e^{-}(t,z)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ çözümlerine (3.1) denkleminin Jost *çözümleri* denir.

Tanım 3.4 Herhangi bir q-fark denkleminin $y = \{y(t,\lambda)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ ve $u = \{u(t,\lambda)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ çözümlerinin Wronskiyeni

$$W[y,u](t) = \mu(t)\gamma(t)\{y(t,\lambda)u(qt,\lambda) - y(qt,\lambda)u(t,\lambda)\} \qquad (3.16)$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 3.4 (3.16) eşitliği ile verilen Wronskiyen t değişkeninden bağımsızdır.

İspat $y = \{y(t,z)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ ve $u = \{u(t,z)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ (3.1) q-fark denkleminin herhangi iki çözümü olsun. Δ, q -türev olmak üzere, Tanım 3.1 yardımıyla, her $t \in q^{\mathbb{Z}}$ için

$$[W[y,u](t)]^{\Delta} = \frac{W[y,u](qt) - W[y,u](t)}{\mu(t)}$$

$$= \frac{\mu(qt)\gamma(qt)\{y(qt,z)u(q^2t,z) - y(q^2t,z)u(qt,z)\}}{\mu(t)}$$

$$- \frac{\mu(t)\gamma(t)\{y(t,z)u(qt,z) - y(qt,z)u(t,z)\}}{\mu(t)}$$

elde edilir. Son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılarak

$$[W[y,u](t)]^{\Delta} = y(qt,z)\{q\gamma(qt)u(q^2t,z) + \gamma(t)u(t,z)\}$$

$$-u(qt,z)\{q\gamma(qt)y(q^2t,z) + \gamma(t)y(t,z)\} \qquad (3.17)$$

bulunur. (3.1) denkleminden elde edilen

$$q\gamma(qt)u(q^2t,z) + \gamma(t)u(t,z) = \big(\lambda - \beta(qt)\big)u(qt,z)$$

ve

$$q\gamma(qt)y(q^2t,z) + \gamma(t)y(t,z) = \big(\lambda - \beta(qt)\big)y(qt,z)$$

eşitlikleri (3.17) denkleminde yerine yazılırsa

$$[W[y,u](t)]^{\Delta} = y(qt,z)\big(\lambda - \beta(qt)\big)u(qt,z) - u(qt,z)\big(\lambda - \beta(qt)\big)y(qt,z) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$W[y,u](qt) = W[y,u](t)$$

bulunur. Bu ise $y = \{y(t,z)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ ve $u = \{u(t,z)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ çözümlerinin Wronskiyeninin t değişkeninden bağımsız olduğunu ispatlar.

Sonuç 3.1 (3.1) q -fark denkleminin $y = \{y(t,z)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ ve $u = \{u(t,z)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ çözümlerinin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart $W[y,u] \neq 0$ olmasıdır.

ξ bir reel parametre olmak üzere, $\lambda = 2\sqrt{q}cos\xi$ için $e^{+}(-\xi)$ ve $e^{-}(-\xi)$ ifadelerinin de (3.1) q-fark denkleminin çözümleri olduğu açıktır.

Lemma 3.5 (3.1) q-fark denkleminin $e^{+}(\xi)$, $e^{+}(-\xi), e^{-}(\xi)$ ve $e^{-}(-\xi)$ çözümleri

$$W[e^{\pm}(\xi), e^{\pm}(-\xi)] = \mp \frac{2i}{\sqrt{q}} sin\xi$$

eşitliklerini gerçekler.

İspat Wronskiyeninin t değişkeninden bağımsızlığı ve (3.14) eşitliği kullanılarak

$$W[e^{+}(\xi), e^{+}(-\xi)] = \mu(t)\gamma(t)\{e^{+}(t,\xi)e^{+}(qt,-\xi) - e^{+}(qt,\xi)e^{+}(t,-\xi)\}$$

$$= \mu(t)\left\{\frac{exp\left(i\frac{lnt}{lnq}\xi\right)}{\sqrt{\mu(t)}}.\frac{exp\left(i\frac{lnqt}{lnq}(-\xi)\right)}{\sqrt{\mu(qt)}} - \frac{exp\left(i\frac{lnqt}{lnq}\xi\right)}{\sqrt{\mu(qt)}}.\frac{exp\left(i\frac{lnt}{lnq}(-\xi)\right)}{\sqrt{\mu(t)}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q}}.\left(e^{-i\xi} - e^{i\xi}\right)$$

$$= \frac{-2i}{\sqrt{q}} sin\xi$$

bulunur.

$$W[e^{-}(\xi), e^{-}(-\xi)] = \frac{2i}{\sqrt{q}} sin\xi$$

eşitliği de benzer şekilde elde edilir.

Lemma 3.5 ve Sonuç 3.1'den açıktır ki $\lambda = 2\sqrt{q}cos\xi$ ve $\xi \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ için $e^{+}(\xi)$, $e^{+}(-\xi)$ ve $e^{-}(\xi)$, $e^{-}(-\xi)$ çözüm çiftleri (3.1) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturur.

Teorem 3.2 $\xi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ve $t \in q^{\mathbb{Z}}$ için

$$\varphi(\xi) = \sqrt{q}\frac{W[e^{+}(\xi), e^{-}(-\xi)]}{2isin\xi}$$
$$\eta(\xi) = \sqrt{q}\frac{W[e^{-}(\xi), e^{+}(\xi)]}{2isin\xi} \tag{3.18}$$

olmak üzere

$$e^{+}(t,\xi) = \varphi(\xi)e^{-}(t,\xi) + \eta(\xi)e^{-}(t,-\xi) \tag{3.19}$$

eşitliği gerçeklenir. Ayrıca η fonksiyonu $\mathbb{C}_{+}$ yarı düzlemine analitik devama sahiptir.

İspat $\xi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ve $\lambda = 2\sqrt{q}cos\xi$ için $e^{-}(\xi) = \{e^{-}(t,\xi)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ ve $e^{-}(-\xi) = \{e^{-}(t,-\xi)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ (3.1) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturduğundan

$$\begin{cases} e^{+}(t,\xi) = c_1 e^{-}(t,\xi) + c_2 e^{-}(t,-\xi) \\ e^{+}(qt,\xi) = c_1 e^{-}(qt,\xi) + c_2 e^{-}(qt,-\xi) \end{cases}$$

denklem sistemi çözülerek, c_1 ve c_2 katsayıları

$$c_1 = \sqrt{q}\frac{W[e^{+}(\xi), e^{-}(-\xi)]}{2isin\xi},\ c_2 = \sqrt{q}\frac{W[e^{-}(\xi), e^{+}(\xi)]}{2isin\xi}$$

şeklinde bulunur. $\xi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ için (3.10) ve (3.11) eşitsizliklerinden η fonksiyonu $\mathbb{C}_{+}$ yarı düzlemine analitik devama sahiptir.

3.3 T Operatörünün Rezolventi ve Spektrumu

Bu kısımda T quantum fark operatörünün rezolvent operatörü ve spektrumu elde edilecektir. η fonksiyonu reel eksenden $\mathbb{C}_+$ yarı düzlemine analitik devama sahip olduğundan

$$f(z) = \frac{2i\eta(z)}{\sqrt{q}} sinz, \qquad z \in \bar{\mathbb{C}}_+$$

gösterimine sahip bir f fonksiyonu tanımlanabilir. Bu durumda (3.18) eşitliğinden

$$f(z) = W[e^-(z), e^+(z)], \qquad z \in \bar{\mathbb{C}}_+ \tag{3.20}$$

bulunur. Böylece f, $\bar{\mathbb{C}}_+$ bölgesinde sürekli, z değişkenine göre $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitiktir. Ayrıca

$$f(z) = f(z + 2\pi)$$

eşitliği gerçeklenir. f fonksiyonu 2π periyotlu bir fonksiyon olduğundan sıfırlarını üst yarı düzlemde incelemek yerine 2π uzunluklu herhangi bir şeritte incelemek yeterlidir. Bu nedenle

$$P_0 := \left\{z: z \in \mathbb{C}_+, -\frac{\pi}{2} \leq Rez \leq \frac{3\pi}{2}\right\}$$

ve

$$P = P_0 \cup \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right]$$

yarı şeritleri tanımlansın.

Teorem 3.3 T q-fark operatörünün rezolvent operatörü her $z \in P$ ve $f(z) \neq 0$ için

$$G_{t,r}(z) := \begin{cases} \dfrac{e^{+}(t,z)e^{-}(r,z)}{qf(z)}, & r = \dfrac{t}{q^k}, k \in \mathbb{N} \\ \dfrac{e^{+}(r,z)e^{-}(t,z)}{qf(z)}, & r = tq^k, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases} \tag{3.21}$$

Green fonksiyonu olmak üzere

$$R_\lambda(T)\phi(t) = \int_{q^{\mathbb{Z}}} G_{t,r}(z)\phi(r)\Delta r\,, \phi \in \ell^2(q^{\mathbb{Z}}) \tag{3.22}$$

şeklinde verilir.

İspat T operatörünün rezolventini bulmak için $\phi \in \ell^2(q^{\mathbb{Z}})$ olmak üzere $t \in q^{\mathbb{Z}}$ için

$$q\gamma(t)y(qt,z) + \beta(t)y(t,z) + \gamma\left(\frac{t}{q}\right)y\left(\frac{t}{q},z\right) - \lambda y(t,z) = \phi(t,z) \tag{3.23}$$

homogen olmayan q-fark denklemi çözülmelidir. (3.23) denkleminin homogen kısmının lineer bağımsız çözümleri olan $e^{+}(t,z)$ ve $e^{-}(t,z)$ yardımıyla (3.23) denkleminin genel çözümü $|c_1| + |c_2| \neq 0$ olmak üzere

$$y(t,z) = c_1(t)e^{+}(t,z) + c_2(t)e^{-}(t,z)$$

şeklindedir. Buradan

$$y(qt,z) = c_1(qt)e^{+}(qt,z) + c_2(qt)e^{-}(qt,z)$$

olarak bulunur. Bu eşitliğin her iki yanına $c_1(t)e^{+}(qt,z)$ ve $c_2(t)e^{-}(qt,z)$ ifadeleri eklenip çıkarılırsa

$$y(qt,z) = c_1(qt)e^+(qt,z) - c_1(t)e^+(qt,z) + c_1(t)e^+(qt,z)$$

$$+c_2(qt)e^-(qt,z) - c_2(t)e^-(qt,z) + c_2(t)e^-(qt,z)$$

$$= e^+(qt,z)[c_1(qt) - c_1(t)] + e^-(qt,z)[c_2(qt) - c_2(t)]$$

$$+c_1(t)e^+(qt,z) + c_2(t)e^-(qt,z)$$

elde edilir. Parametrelerin değişimi yönteminden

$$e^+(qt,z)[c_1(qt) - c_1(t)] + e^-(qt,z)[c_2(qt) - c_2(t)] = 0 \qquad (3.24)$$

olduğu kabul edilirse, üstteki $y(qt,z)$ eşitliği

$$y(qt,z) = c_1(t)e^+(qt,z) + c_2(t)e^-(qt,z)$$

şekline dönüşür. Ayrıca

$$y\left(\frac{t}{q},z\right) = c_1\left(\frac{t}{q}\right)e^+\left(\frac{t}{q},z\right) + c_2\left(\frac{t}{q}\right)e^-\left(\frac{t}{q},z\right)$$

olup elde edilen eşitlikler (3.23) homogen olmayan denkleminde yerine yazılırsa

$$\phi(t,z) = q\gamma(t)[c_1(t)e^+(qt,z) + c_2(t)e^-(qt,z)]$$

$$+\beta(t)[c_1(t)e^+(t,z) + c_2(t)e^-(t,z)]$$

$$+\gamma\left(\frac{t}{q}\right)\left[c_1\left(\frac{t}{q}\right)e^+\left(\frac{t}{q},z\right) + c_2\left(\frac{t}{q}\right)e^-\left(\frac{t}{q},z\right)\right]$$

$$-\lambda[c_1(t)e^+(t,z)+c_2(t)e^-(t,z)]$$

$$=c_1(t)[q\gamma(t)e^+(qt,z)+\beta(t)e^+(t,z)-\lambda e^+(t,z)]$$

$$+c_2(t)[q\gamma(t)e^-(qt,z)+\beta(t)e^-(t,z)-\lambda e^-(t,z)]$$

$$+\gamma\left(\frac{t}{q}\right)\left[c_1\left(\frac{t}{q}\right)e^+\left(\frac{t}{q},z\right)+c_2\left(\frac{t}{q}\right)e^-\left(\frac{t}{q},z\right)\right]$$

bulunur. Son kısımda

$$\begin{cases} q\gamma(t)e^+(qt,z)+\beta(t)e^+(t,z)-\lambda e^+(t,z)=-\gamma\left(\frac{t}{q}\right)e^+\left(\frac{t}{q},z\right) \\ q\gamma(t)e^-(qt,z)+\beta(t)e^-(t,z)-\lambda e^-(t,z)=-\gamma\left(\frac{t}{q}\right)e^-\left(\frac{t}{q},z\right) \end{cases}$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$\phi(t,z)=\gamma\left(\frac{t}{q}\right)e^+\left(\frac{t}{q},z\right)\left[c_1\left(\frac{t}{q}\right)-c_1(t)\right]+\gamma\left(\frac{t}{q}\right)e^-\left(\frac{t}{q},z\right)\left[c_2\left(\frac{t}{q}\right)-c_2(t)\right]$$

olup buradan

$$e^+\left(\frac{t}{q},z\right)\left[c_1(t)-c_1\left(\frac{t}{q}\right)\right]+e^-\left(\frac{t}{q},z\right)\left[c_2(t)-c_2\left(\frac{t}{q}\right)\right]=-\frac{\phi(t,z)}{\gamma\left(\frac{t}{q}\right)} \qquad (3.25)$$

elde edilir. Diğer yandan (3.24) eşitliği $\frac{t}{q}$ kadar ötelenirse

$$e^+(t,z)\left[c_1(t)-c_1\left(\frac{t}{q}\right)\right]+e^-(t,z)\left[c_2(t)-c_2\left(\frac{t}{q}\right)\right]=0 \qquad (3.26)$$

bulunur. (3.25) ve (3.26) eşitliklerinden elde edilen

$$\begin{cases} e^{+}(t,z)\left[c_1(t)-c_1\left(\frac{t}{q}\right)\right]+e^{-}(t,z)\left[c_2(t)-c_2\left(\frac{t}{q}\right)\right]=0 \\ e^{+}\left(\frac{t}{q},z\right)\left[c_1(t)-c_1\left(\frac{t}{q}\right)\right]+e^{-}\left(\frac{t}{q},z\right)\left[c_2(t)-c_2\left(\frac{t}{q}\right)\right]=-\frac{\phi(t,z)}{\gamma\left(\frac{t}{q}\right)} \end{cases}$$

denklem sistemi çözülerek

$$c_1(t)-c_1\left(\frac{t}{q}\right)=\frac{\phi(t,z)e^{-}(t,z)}{\gamma\left(\frac{t}{q}\right)\left[e^{+}(t,z)e^{-}\left(\frac{t}{q},z\right)-e^{-}(t,z)e^{+}\left(\frac{t}{q},z\right)\right]}$$

ve

$$c_2(t)-c_2\left(\frac{t}{q}\right)=-\frac{\phi(t,z)e^{+}(t,z)}{\gamma\left(\frac{t}{q}\right)\left[e^{+}(t,z)e^{-}\left(\frac{t}{q},z\right)-e^{-}(t,z)e^{+}\left(\frac{t}{q},z\right)\right]}$$

ifadelerine ulaşılır.

$$W[e^{-}(t,z),e^{+}(t,z)]=\mu(t)\gamma(t)\{e^{-}(t,z)e^{+}(qt,z)-e^{-}(qt,z)e^{+}(t,z)\}$$

$$=\mu\left(\frac{t}{q}\right)\gamma\left(\frac{t}{q}\right)\left\{e^{+}(t,z)e^{-}\left(\frac{t}{q},z\right)-e^{+}\left(\frac{t}{q},z\right)e^{-}(t,z)\right\}$$

olduğundan son iki eşitlik

$$c_1(t)-c_1\left(\frac{t}{q}\right)=\frac{\mu\left(\frac{t}{q}\right)\phi(t,z)e^{-}(t,z)}{f(z)} \tag{3.27}$$

ve

$$c_2(t) - c_2\left(\frac{t}{q}\right) = -\frac{\mu(t)\phi(t,z)e^{+}(t,z)}{qf(z)} \tag{3.28}$$

şeklinde yeniden yazılır. (3.27) eşitliğinden

$$c_1(t) - c_1\left(\frac{t}{q}\right) = \frac{\mu(t)\phi(t,z)e^{-}(t,z)}{qf(z)},$$

$$c_1\left(\frac{t}{q}\right) - c_1\left(\frac{t}{q^2}\right) = \frac{\mu\left(\frac{t}{q}\right)\phi\left(\frac{t}{q},z\right)e^{-}\left(\frac{t}{q},z\right)}{qf(z)},$$

$$c_1\left(\frac{t}{q^2}\right) - c_1\left(\frac{t}{q^3}\right) = \frac{\mu\left(\frac{t}{q^2}\right)\phi\left(\frac{t}{q^2},z\right)e^{-}\left(\frac{t}{q^2},z\right)}{qf(z)},$$

. . .

olup bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$c_1(t) = \sum_{r\in\left\{\frac{t}{q^k}\right\}} \frac{\mu(r)\phi(r,z)e^{-}(r,z)}{qf(z)}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.28) eşitliğinden

$$c_2(qt) - c_2(t) = -\frac{\mu(qt)\phi(qt,z)e^{+}(qt,z)}{qf(z)},$$

$$c_2(q^2t) - c_2(qt) = -\frac{\mu(q^2t)\phi(q^2t,z)e^{+}(q^2t,z)}{qf(z)},$$

. . .

$$c_2(q^n t) - c_2(q^{n-1}t) = -\frac{\mu(q^n t)\phi(q^n t, z)e^+(q^n t, z)}{qf(z)}$$

olup bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$c_2(q^n t) - c_2(t) = -\sum_{r\in[q^n t,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}}^{r\in[q^n t,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \frac{\mu(r)\phi(r,z)e^+(r,z)}{qf(z)}$$

elde edilir. Burada

$$\sum_{r\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \frac{\mu(r)\phi(r,z)e^+(r,z)}{qf(z)} < \infty$$

olduğundan son eşitlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} c_2(q^n) = p$ olacak şekilde sonlu bir p sayısı mevcuttur. Böylece

$$c_2(t) = p + \sum_{r\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \frac{\mu(r)\phi(r,z)e^+(r,z)}{qf(z)}$$

bulunur. $c_1(t)$ ve $c_2(t)$ katsayıları $y(t,z)$ çözümünde yerine yazılırsa

$$y(t,z) = c_1(t)e^+(t,z) + c_2(t)e^-(t,z)$$

$$= \left\{ \sum_{r\in\left\{\frac{t}{q^k}\right\}} \frac{\mu(r)\phi(r,z)e^-(r,z)}{qf(z)} \right\} e^+(t,z)$$

$$+ \left\{ p + \sum_{r\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \frac{\mu(r)\phi(r,z)e^+(r,z)}{qf(z)} \right\} e^-(t,z)$$

$$= \sum_{r\in\left\{\frac{t}{q^k}\right\}} \frac{\mu(r)\phi(r,z)e^{-}(r,z)e^{+}(t,z)}{qf(z)} + pe^{-}(t,z)$$

$$+ \sum_{r\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \frac{\mu(r)\phi(r,z)e^{+}(r,z)e^{-}(t,z)}{qf(z)}$$

elde edilir. Burada $y(t,z) \in \ell^2(q^{\mathbb{Z}})$ olup $e^{-}(t,z) \notin \ell^2(q^{\mathbb{Z}})$ olduğundan $p = 0$ olmalıdır. Böylece

$$y(t,z) = \sum_{r\in\left\{\frac{t}{q^k}\right\}} \frac{\mu(r)\phi(r,z)e^{-}(r,z)e^{+}(t,z)}{qf(z)} + \sum_{r\in[qt,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \frac{\mu(r)\phi(r,z)e^{+}(r,z)e^{-}(t,z)}{qf(z)}$$

olarak bulunur. O halde T quantum fark operatörünün Green fonksiyonu $t \in q^{\mathbb{Z}}$ için

$$G_{t,r}(z) := \begin{cases} \dfrac{e^{+}(t,z)e^{-}(r,z)}{qf(z)}, & r = \dfrac{t}{q^k}, k \in \mathbb{N} \\ \dfrac{e^{+}(r,z)e^{-}(t,z)}{qf(z)}, & r = tq^k, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

olup rezolvent operatörü ise

$$(R\phi)(t) := \int_{q^{\mathbb{Z}}} G_{t,r}(z)\phi(r,z)\Delta r, \quad \phi \in \ell^2(q^{\mathbb{Z}})$$

şeklindedir. q-integral tanımı kullanılarak T operatörünün rezolventi (3.22) ifadesine eşit bulunarak ispat tamamlanır.

Şimdi T operatörünün sürekli spektrumunu inceleyebilmek için T_1 ve T_2 operatörleri tanımlanarak $\ell^2(q^{\mathbb{Z}})$ uzayında bu operatörlerin bazı özellikleri incelenecektir. İlk olarak

$$(\ell_1 y)(t) \coloneqq qy(qt) + y\left(\frac{t}{q}\right), \qquad t \in q^{\mathbb{Z}} \tag{3.29}$$

q-fark ifadesi tarafından üretilen T_1 operatörü göz önüne alınsın. T_1 operatörü $\ell^2(q^{\mathbb{Z}})$ Hilbert uzayında sınırlı olup ayrıca

$$\langle \ell_1 y, u\rangle_q = \sum_{t\in q^{\mathbb{Z}}} \mu(t)\left[qy(qt) + y\left(\frac{t}{q}\right)\right]\overline{u(t)}$$

$$= \sum_{t\in q^{\mathbb{Z}}} \mu(t)\, y(t)\,\overline{\left[qu(qt) + u\left(\frac{t}{q}\right)\right]}$$

$$= \langle y, \ell_1 u\rangle_q$$

eşitliği gerçeklendiğinden selfadjointtir. $\lambda = 2\sqrt{q}cosz$ ve $z \in \bar{\mathbb{C}}_+$ için

$$\tilde{e}^{+}(t,z) = \frac{exp\left(i\frac{\ln t}{\ln q}z\right)}{\sqrt{\mu(t)}}$$

ve

$$\tilde{e}^{-}(t,z) = \frac{exp\left(-i\frac{\ln t}{\ln q}z\right)}{\sqrt{\mu(t)}}$$

çözümleri $(\ell_1 y)(t) = \lambda y(t)$ denkleminin çözümleri olup bu iki çözüm

$$W\left[\{\tilde{e}^{+}(t,z)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}, \{\tilde{e}^{-}(t,z)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}\right] = \frac{-1}{\sqrt{q}}2isinz$$

eşitliğini gerçekler.

Teorem 3.4 T_1 operatörünün rezolvent operatörü her $z \in \bar{\mathbb{C}}_+ \backslash \{k\pi : k\epsilon\mathbb{Z}\}$ ve $t \in q^{\mathbb{Z}}$ için

$$G_{t,r}(z)=\frac{1}{2i\sqrt{q}sinz}\begin{cases}\tilde{e}^{+}(t,z)\tilde{e}^{-}(r,z), & r=\dfrac{t}{q^{k}},k\in\mathbb{N}\\ \tilde{e}^{+}(r,z)\tilde{e}^{-}(t,z), & r=tq^{k},k\in\mathbb{N}_{0}\end{cases} \tag{3.30}$$

Green fonksiyonu olmak üzere

$$R_{\lambda}(T_{1})\psi(t):=\int_{q^{\mathbb{Z}}}G_{t,r}(z)\psi(r)\Delta r,\quad \psi\in\ell^{2}(q^{\mathbb{Z}}) \tag{3.31}$$

şeklindedir.

Lemma 3.6 Her $\delta>0,\ z\in\mathbb{C}_{+}$ ve $|Imz|<\delta$ için

$$\|R_{\lambda}(T_{1})\|_{q}\geq\frac{c_{\delta}}{|sinz|\sqrt{1-exp(-2Imz)}} \tag{3.32}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir c_{δ} sayısı vardır.

İspat $g(r,z):=\begin{cases}\dfrac{exp\left(-i\frac{lnr}{lnq}z\right)}{\sqrt{\mu(r)}}, & r=\frac{t}{q^{k}},k\in\mathbb{N}\\ 0, & r=tq^{k},k\in\mathbb{N}_{0}\end{cases}$

fonksiyonu göz önüne alınsın.

$$\|g(.,z)\|_{q}^{2}=\int_{q^{\mathbb{Z}}}|g(r,z)|^{2}\Delta r=\sum_{r\in\left(0,\frac{1}{q}\right]\cap q^{\mathbb{Z}}}\left|exp\left(-i\frac{lnr}{lnq}z\right)\right|^{2}<\infty$$

olduğundan g $(.,z)\in\ell^{2}(q^{\mathbb{Z}})$ bulunur. (3.30) ve (3.31) ifadeleri kullanılarak $g(.,z)\in\ell^{2}(q^{\mathbb{Z}})$ için

$$R_\lambda(T_1)\big(\mathrm{g}(.,z)\big) = \int_{q^{\mathbb{Z}}} \frac{\tilde{e}^{+}(t,z)\tilde{e}^{-}(r,z)}{2i\sqrt{q}sinz} \frac{exp\left(-i\frac{lnr}{lnq}z\right)}{\sqrt{\mu(r)}} \Delta r = \frac{\tilde{e}^{+}(t,z)}{2i\sqrt{q}sinz} \int_{q^{\mathbb{Z}}} \big(\tilde{e}^{-}(r,z)\big)^2 \Delta r$$

$$= \frac{exp\left(i\frac{lnt}{lnq}z\right)}{2i\sqrt{q}sinz\sqrt{\mu(t)}} . \|g(.,z)\|_q^2 \qquad (3.33)$$

elde edilir. (3.33) ve

$$\left|exp\left(i\frac{lnt}{lnq}z\right)\right| > \frac{1}{2}exp\left(-\frac{\ln t}{\ln q}Imz\right)$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\left\|R_\lambda(T_1)\big(\mathrm{g}(.,z)\big)\right\|_q^2 = \frac{\|\mathrm{g}(.,z)\|_q^4}{4q|sinz|^2} \int_{q^{\mathbb{Z}}} \frac{1}{\mu(t)} \left|exp\left(i\frac{lnt}{lnq}z\right)\right|^2 \Delta t$$

$$= \frac{\|\mathrm{g}(.,z)\|_q^4}{4q|sinz|^2} \sum_{t\in q^{\mathbb{Z}}} \left|exp\left(i\frac{lnt}{lnq}z\right)\right|^2$$

$$\geq \frac{\|\mathrm{g}(.,z)\|_q^4}{16q|sinz|^2} \sum_{t\in q^{\mathbb{Z}}} \big(exp(-2Imz)\big)^{\frac{\ln t}{\ln q}}$$

$$\geq \frac{\|\mathrm{g}(.,z)\|_q^4}{16q|sinz|^2} \sum_{t\in [q,\infty)\cap q^{\mathbb{Z}}} \big(exp(-2Imz)\big)^{\frac{\ln t}{\ln q}}$$

$$= \frac{\|\mathrm{g}(.,z)\|_q^4}{16q|sinz|^2} \frac{exp(-2Imz)}{1-exp(-2Imz)}$$

bulunur. Son eşitlikte her iki tarafın karekökü alınıp

$$c_\delta = \frac{\|g(.,z)\|_q^2}{4\sqrt{q}\, exp(Imz)}$$

seçilirse istenilen eşitlik elde edilir.

Teorem 3.5 T_1 operatörünün spektrumu ve sürekli spektrumu için

$$\sigma(T_1) = \sigma_c(T_1) = \left[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}\right]$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat T_1 selfadjoint operatörünün hiçbir özdeğeri mevcut olmadığından spektrumu sadece sürekli spektrumdan oluşur. Eğer $\lambda_0 = 2\sqrt{q}cosz_0 \in \sigma_c(T_1)$ ise $\left\|R_{\lambda_0}(T_1)\right\|_q \to \infty$ olmalıdır. Bu durumda (3.30) ve (3.31) ifadelerinden $|sinz_0| \to 0$ ve $Imz_0 \to 0$ bulunur. Eğer $Imz_0 \to 0$ ise bu durumda $\lambda_0 = 2\sqrt{q}cosz_0 \in \left[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}\right]$ elde edilir.

Diğer taraftan, $\lambda = 2\sqrt{q}cosz \in \left[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}\right]$ için (3.32) eşitsizliğinden $\|R_\lambda(T_1)\|_q \to \infty$ bulunur. Son olarak, Sürekli spektrum tanımı gereğince $T_1 - \lambda I$ operatörünün $R(T_1 - \lambda I)$ değer uzayının $\ell^2(q^{\mathbb{Z}})$ uzayında yoğun olduğu gösterilmelidir. $R(T_1 - \lambda I)$ uzayının ortagonal tümleyeni $y \in \ell^2(q^{\mathbb{Z}})$ olmak üzere $\ell_1^* y = \lambda y$ denkleminin çözümleri uzayı ile çakışır. T_1 özdeğeri olmayan bir selfadjoint operatör olduğundan $R(T_1 - \lambda I)$ uzayının ortagonal tümleyeni sadece sıfır elemanından oluşur ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.6 $\{\gamma(t)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ ve $\{\beta(t)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ kompleks dizilerinin sağladığı (3.2) yakınsaklık şartı altında T operatörünün sürekli spektrumu için

$$\sigma_c(T) = \left[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}\right]$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat $\ell^2(q^{\mathbb{Z}})$ uzayında $t \in q^{\mathbb{Z}}$ $için$

$$(\ell_2)y(t) \coloneqq q(\gamma(t)-1)y(qt) + \beta(t)y(t) + \left(\gamma\left(\frac{t}{q}\right)-1\right)y\left(\frac{t}{q}\right)$$

q-fark ifadesi tarafından üretilen operatör T_2 olsun. Bu durumda $T = T_1 + T_2$ ve $T_1^* = T_1$ olduğu açıktır. (3.2) koşulundan T_2 operatörünün $\ell^2(q^{\mathbb{Z}})$ uzayında bir kompakt operatör olduğu söylenir. Teorem 3.3 ve Weyl kompakt heyecanlandırma teoremi yardımı ile

$$\sigma_c(T) = \sigma(T_1) = \sigma_c(T_1) = \left[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}\right]$$

bulunur.

3.4 T Operatötünün Özdeğer ve Spektral Tekillikleri

Bu kısımda T operatörünün özdeğer ve spektral tekillikler kümeleri tanımlanarak bunlarla ilgili bazı özellikler elde edilecektir.

(3.21) ve (3.22) ifadeleri ve bu kümelerin tanımları kullanılarak T operatörünün özdeğerler ve spektral tekillikler kümeleri sırasıyla

$$\sigma_d(T) = \left\{\lambda : \lambda = 2\sqrt{q}cosz, z \in P_0, f(z) = 0\right\} \tag{3.34}$$

$$\sigma_{ss}(T) = \left\{\lambda : \lambda = 2\sqrt{q}cosz, z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}, f(z) = 0\right\} \tag{3.35}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 3.7 $z \in P_0$ ve Imz $\to \infty$ için

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{q}} \left(\prod_{r \in q^{\mathbb{Z}}} \gamma(r) \right)^{-1} e^{-iz}\big(1 + o(1)\big) \tag{3.36}$$

asimptotik eşitliği gerçeklenir.

İspat (3.4), (3.5) çözümleri ve (3.20) eşitliğinden

$$f(z) = W[e^-(z), e^+(z)]$$

$$= \mu(t)\gamma(t) \left\{ \alpha^-(t) \frac{exp\left(-i\frac{lnt}{lnq}z\right)}{\sqrt{\mu(t)}} \left(1 + \sum_{r \epsilon q^{-\mathbb{N}}} A^-(t,r)\, exp\left(-i\frac{lnr}{lnq}z\right) \right) \right.$$

$$\alpha^+(qt) \frac{exp\left(i\frac{lnqt}{lnq}z\right)}{\sqrt{\mu(qt)}} \left(1 + \sum_{r \epsilon q^{\mathbb{N}}} A^+(qt,r)\, exp\left(i\frac{lnr}{lnq}z\right) \right)$$

$$-\alpha^-(qt) \frac{exp\left(-i\frac{lnqt}{lnq}z\right)}{\sqrt{\mu(qt)}} \left(1 + \sum_{r \epsilon q^{-\mathbb{N}}} A^-(qt,r)\, exp\left(-i\frac{lnr}{lnq}z\right) \right)$$

$$\left. \alpha^+(t) \frac{exp\left(i\frac{lnt}{lnq}z\right)}{\sqrt{\mu(t)}} \left(1 + \sum_{r \epsilon q^{\mathbb{N}}} A^+(t,r)\, exp\left(i\frac{lnr}{lnq}z\right) \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{q}} \gamma(1) \left\{ \alpha^-(1) \left(1 + \sum_{r \epsilon q^{-\mathbb{N}}} A^-(1,r)\, exp\left(-i\frac{lnr}{lnq}z\right) \right) \right.$$

$$\alpha^{+}(q)e^{iz}\left(1+\sum_{r\epsilon q^{\mathbb{N}}}A^{+}(q,r)\,exp\left(i\frac{lnr}{lnq}z\right)\right)$$

$$-\alpha^{-}(q)e^{-iz}\left(1+\sum_{r\epsilon q^{-\mathbb{N}}}A^{-}(q,r)\,exp\left(-i\frac{lnr}{lnq}z\right)\right)$$

$$\alpha^{+}(1)\left(1+\sum_{r\epsilon q^{\mathbb{N}}}A^{+}(1,r)\,exp\left(i\frac{lnr}{lnq}z\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{q}}\left(\prod_{r\in q^{\mathbb{Z}}}\gamma(r)\right)^{-1}\left\{\gamma^{2}(1)e^{iz}\left(1+\sum_{r\epsilon q^{-\mathbb{N}}}A^{-}(1,r)\,exp\left(-i\frac{lnr}{lnq}z\right)\right)\right.$$

$$\left(1+\sum_{r\epsilon q^{\mathbb{N}}}A^{+}(q,r)\,exp\left(i\frac{lnr}{lnq}z\right)\right)$$

$$\left.-e^{-iz}\left(1+\sum_{r\epsilon q^{-\mathbb{N}}}A^{-}(q,r)\,exp\left(-i\frac{lnr}{lnq}z\right)\right)\left(1+\sum_{r\epsilon q^{\mathbb{N}}}A^{+}(1,r)\,exp\left(i\frac{lnr}{lnq}z\right)\right)\right\}$$

elde edilir. (3.10) ve (3.11) koşulları kullanılarak

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{q}}\left(\prod_{r\in q^{\mathbb{Z}}}\gamma(r)\right)^{-1}e^{-iz}\big(1+o(1)\big),\qquad z\in P_{0},\qquad Imz\to\infty$$

bulunur.

Teorem 3.7 $\{\gamma(t)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ve $\{\beta(t)\}_{t\in q^{\mathbb{Z}}}$ kompleks dizilerinin sağladığı (3.2) yakınsaklık şartı altında

(i) T q-fark operatörünün özdeğerler kümesi $\sigma_d(T)$ sınırlıdır, sayılabilirdir ve bu kümeniin limit noktaları varsa $\left[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}\right]$ aralığındadır.

(ii) T q-fark operatörünün spektral tekillikler kümesi $\sigma_{ss}(T)$ için

$$\sigma_{ss}(T) \subset \left[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}\right], \qquad \sigma_{ss}(T) = \overline{\sigma_{ss}(T)}$$

özellikleri gerçeklenir. Ayrıca bu kümenin Lebesgue ölçüsü sıfırdır.

İspat

(i) Lemma 3.7 ile verilen asimptotik eşitlikten Imz yeterince büyük seçildiğinde $f(z) \neq 0$ elde edilir. Bu ise f fonksiyonunun $\sigma_d(T)$ ve $\sigma_{ss}(T)$ kümelerinin sınırlı olduğunu söyler. f fonksiyonu $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitik, reel eksende sürekli, 2π periyodik bir fonksiyon olduğundan Teorem 2.1 gereğince f fonksiyonunun $\mathbb{C}_+$ bölgesindeki sıfırlarının kümesi ayrıktır. Bu durumda $\sigma_d(T)$ kümesi en çok sayılabilir sayıda elemana sahiptir. Ayrıca Teorem 2.2 gereğince $\sigma_d(T)$ kümesinin limit noktaları $\left[-2\sqrt{q}, 2\sqrt{q}\right]$ aralığının içindedir.

(ii) $\sigma_{ss}(T)$ kümesi sınırlı olup kapalılığı için $h_0 \in \overline{\sigma_{ss}(T)}$ alınsın. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $h_n \in \sigma_{ss}(T)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} h_n = h_0$$

olacak şekilde bir (h_n) dizisi vardır. $f, \bar{\mathbb{C}}_+$ bölgesinde sürekli olduğundan

$$f(h_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} h_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(h_n) = 0$$

bulunur, bu ise $h_0 \in \sigma_{ss}(T)$ olduğunu söyler. Böylece $\sigma_{ss}(T)$ kümesi kapalıdır. Diğer taraftan f, $\mathbb{C}_+$ bölgesinde analitik ve $f \neq 0$ olduğundan Privalov teoremi gereğince $\sigma_{ss}(T)$ kümesinin Lebesgue ölçüsü sıfırdır.

Teorem 3.8 $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$\sup_{t \in q^z} \left\{exp\left(\varepsilon \left|\frac{lnt}{lnq}\right|\right)(|1-\gamma(t)| + |\beta(t)|)\right\} < \infty \tag{3.37}$$

koşulu altında T operatörünün sonlu sayıda özdeğer ve spektral tekillikleri vardır ve bunların katı da sonludur.

İspat (3.37) koşulundan

$$\begin{cases} |A^{+}(t,r)| \leq cexp\left(-\frac{\varepsilon}{4}\left|\frac{lnr}{lnq}\right|\right), \ \ t \in \{1,q\}, \ \ r = q^{k}, \ \ k \in \mathbb{N} \\ |A^{-}(t,r)| \leq cexp\left(-\frac{\varepsilon}{4}\left|\frac{lnr}{lnq}\right|\right), \ \ t \in \{1,q\}, \ \ r = \frac{1}{q^{k}}, \ \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece $Imz > -\frac{\varepsilon}{4}$ için f fonksiyonu analitik olacağından reel eksen analitiklik bölgesi içinde kalır. Bu nedenle f fonksiyonunun P şeridindeki sıfırlarının limit noktaları $\left[-\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ aralığı üzerinde olamaz. Teorem 3.7 gereğince $\sigma_d(T)$ ve $\sigma_{ss}(T)$ kümelerinin sınırlı olduğu bilindiğinden ve $f \neq 0$ olup bu kümeler analitiklik bölgesi içinde olduğundan sonludurlar. Ayrıca f fonksiyonu $Imz > -\frac{\varepsilon}{4}$ bölgesinde analitik olduğundan Teorem 2.3 gereğince f fonksiyonunun bölgesindeki sıfırlarının katının sonlu olduğu elde edilir. Dolayısıyla $\sigma_d(T)$ ve $\sigma_{ss}(T)$ sonlu sayıda elemana sahip olup bunların katı da sonludur.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Uygulamalı matematik ve fonksiyonel analizin bir alt dalı olan spektral teoride birçok problemin modellenip çözülmesinde genellikle diferensiyel denklemler ya da fark denklemleri kullanılmıştır. Dolayısıyla, diferensiyel operatörler ya da fark operatörleri ile ilgili literatürde çokça çalışma bulunmaktadır. Son yıllarda ise, matematik ve fizik bilimleri arasında bir köprü görevi gören kuantum analizine ilgi artmış ve birçok yayında q-fark denklemlerinin bazı problemleri de alınmıştır. Spektral teoride de birçok tanım ve teoremin q-analoglarının verilmesiyle q-fark operatörlerinin analizi detaylı bir biçimde incelenmeye başlanmıştır.

Adıvar ve Bohner'in 2006 yılında yayınlanan çalışmasının esas alındığı bu yüksek lisans tezinde,

$$q\gamma(t)y(qt) + \beta(t)y(t) + \gamma\left(\frac{t}{q}\right)y\left(\frac{t}{q}\right) = 2\sqrt{q}coszy(t), \qquad t \in q^{\mathbb{Z}}$$

q-fark denkleminin spektral teorisi çalışılmıştır, makalede elde edilen sonuçlar, detaylı şekilde incelenmiştir. Burada asıl amaç Adıvar ve Bairamov'un 2001 yılında fark denklemleri için elde ettiği sonuçları, q-fark denklemine genellemektir.

Bu tezin devamı olarak, ileride yarım eksende kurulan q-fark operatörünün spektral teorisini ya da impalsif durumda verilen q-fark operatörünün spektral teorisini incelemek mümkündür.

KAYNAKLAR

Adıvar, M. and Bairamov, E. 2001. Spectral properties of non-selfadjoint difference operators. J. Math. Anal. Appl., 261(2): 461-478.

Adıvar, M. and Bairamov, E. 2003. Difference equations of second order with spectral singularities. J. Math. Anal. Appl., 277: 714-721.

Adıvar, M. and Bohner, M. 2006a. Spectral analysis of q-difference equations with spectral singularities. Math. Comput. Modelling 43, no.7-8: 695-703.

Adıvar, M. and Bohner, M. 2006b. Spectrum and principal vektors of second order q-difference equations. J. Indian Math., 48(1): 17-33.

Agarwal, M. And Wong, P. J. Y. 1997. Advanced topics in difference equations, Mathematics and its Applications. 404, Kluwer, Dordrecht.

Agarwal, R. P. 2000. Difference equations and inequalities. Theory, methods and applications. Monographs and Testbooks in Pure and Applies Mathematics, 228, Marcel Dekker, Inc., New York.

Atkinson, F. V. 1964. Discrete and Continuous Boundary Problems. Academic Press, 569, New York.

Aygar, Y. 2016. Investigation of spectral analysis of matrix quantum difference equations with spectral singularities. Hacet. J. Math. Stat. 45, no. 4: 999-1005.

Aygar, Y. and Bohner, M. 2015. J. On the Spectrum of eigenparameter dependent quantum difference equations. Appl. Math. Inf. Sci. 9, no. 4: 1725-1729.

Aygar, Y. and Bohner, M. 2016. A polynomial-type Jost solution and spectral properties of a self-adjoint quantum-difference operator. Complex Anal. Oper. Theory 10, no. 6: 1171-1180.

Bairamov, E., Çakar, O. and Krall, A. M. 2001. Non-selfadjoint difference operators and Jakobi matrices with spectrsal singularities. Math. Nacr., 229, 5-14.

Bereketoğlu, H., Kutay, V. 2012. Fark Denklemleri. Gazi Kitabevi, 300, Ankara.

Bohner, M. and Peterson, A. 2001. Dynamic equations on time scales, Birkhäuser Boston Inc., 358, Boston, MA.

Bohner, M. and Peterson, A. 2003. Advances in dynamic equations on time scales. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA.

Dolzhenko, E. P. 1979. Boundary value uniqueness theorems for analytic functions Math. Notes 26 (6): 437-442.

Guseinov, G. S. 1976. The inverse problem of scattering theory for a second order difference equation on the whole axis, Sov. Math. Dokl. 17: 1684-1688.

Glazman, I. M. 1965. Direct methods of qualittive spectral analysis of singular differential operators. Israel Program for scientific translations, 234, Jeruselam.

Huseynov, A. and Bairamov, E. 2009. An eigenvalue problem for quadratic pencils of q-difference equations and its applications Applied Mathematics Letters Elsevier, 22(4): 521-527.

Kac, V. and Cheung, P.2002. Quantum Calculus, Universitext Springer-Verlong, 112, New York.

Kreyszig, E. 1978. Introductory functional analysis with applications. Wiley&Sons. Inc, 688, New York.

Liouville, J. 1836. Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinüs et de cosins. Journ. Math. Pures Appl., 1: 14-32.

Lusternik, L. A. and Sobolev, V. J. 1974. Elements of functional analysis. Halsted Press, New York.

Lyance, V. E. 1967. A differential operator with spectral singularities. I, II. AMS Translations, 2(60): 185-225, 227-283.

Marchenko, V. A. 1963. Expansion in eigenfunctions of non-selfadjoint singular second order differential operators. AMS Translations, 25(2): 77- 130.

Marchenko, V. A. 1986. Sturm-Liouville operators and applications. Birkhauser Verlag, 367, Basel.

Nagy, B. 1986. Operators with spectral singularities. J. Oper. Theory, 15, 2: 307-325.

Naimark, M. A. 1960. Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunction of a non-selfadjoint operator of second order on a semi-axis. AMS. Transl. 2(16): 103-193.

Naimark, M. A. 1968. Linear Differential Operators. I, II, Ungar. New York.

Pavlov, B. S. 1967. The non-selfadjoint shrödinger operator. Topics in Mathematics and Physics, 1: 87-114.

Schwartz, J. T. 1960. Some non-selfadjoint operators. Comm.Pure Appl Math., 13: 609-639.

Sturm, C. 1836. Mémoire sur les Équations différentielles linéaires du second ordre. Journ. Math. Pures Appl., 1: 106-186.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Nuray ORHAN

Eğitim

Yüksek Lisans	Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı	2020-
Lisans	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2006-2010

İş Deneyimi

Yıl	**Kurum**	**Görev**
2013-Halen	Meb	Öğretmen

Akademik Aktiviteler

1. Şerifenur CEBESOY ERDAL, Nuray ORHAN "Some Spectral Properties of Operators Generated by Quantum Difference Equations", 3rd International Conference on Mathematics and its Applications in Science and Engineering (ICMASE 2022), Bucharest, Romania, 4-7 Temmuz 2022.