文章编号:1671-9352(2009)06-0063-06

有观测时滞线性系统的白噪声最优估计

张志钢[1],张承慧[1],崔鹏[1],焉杰[2]
(1. 山东大学控制科学与工程学院, 山东 济南 250061;
2. 山东科技大学信息与电气工程学院, 山东 青岛 266510)

摘要:采用卡尔曼滤波方法,针对带有观测时滞的线性离散系统,研究了输入白噪声最优估计器的设计. 通过对观测序列进行重新组织,使之成为无时滞的观测, 并进一步给出重组新息序列. 由 Hilbert 空间上的正交投影定理,通过求解与原系统同维的两个 Riccati 方程实现递推计算. 该方法能避免状态扩维,有效地减轻了计算负担. 最后通过仿真实例说明该方法的有效性.

关键词:白噪声估值器;新息重组;Riccati 方程;时滞系统;去卷
中图分类号:TP13 **文献标志码**:A

Optimal white noise estimatorsfor linear systems with delayed measurements

ZHANG Zhi-Gang[1], ZHANG Cheng-Hui[1], CUI Peng[1], YAN Jie[2]
(1. School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, Shandong, China;
2. College of Information and Electrical Engineering, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, Shandong, China)

Abstract: The optimal input white noise estimator for linear discrete-time systems with delayed measurements is studied by using Kalman filtering. The delayed measurements are re-organized as that without delay, then the re-organized innovation is given. Based on the projection theorem in Hilbert Spaces, the proposed approach is given in terms of two Riccati difference equations (RDEs) with the same order as that of the original system. The approach can improve the computational efficiency without resorting to system state augmentation. A numerical example is given and the simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Key words: white noise estimators; re-organized innovation; Riccati equation; time-delay systems; deconvolution

0 引言

线性系统的输入白噪声信号与测量白噪声估计问题,又称为反卷积问题[1],在石油勘探、通讯、状态估计以及故障诊断等工程领域有重要应用[2-5]。Mendel、Silvia 等以石油地震勘探为应用背景,基于 Kalman 滤波方法提出了输入白噪声估计器[6]。白噪声估计问题的研究,不仅有重要的工程应用背景,还有重要的理论研究价值。如 Chen 等采用频域法传输通道有参数扰动情形的最优去卷问题[7],邓自立等[3-5]采用现代时间序列分析的方法,提出了针对时变系统的统一和通用的最优白噪声估值器等。但这些研究是针对没有时滞的系统,而实际问题往往是带有测量时滞的,如通讯和混杂传感器系统等。针对时滞系统状态滤波与白噪声估计的

收稿日期:2009-02-21
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60774004, 60804034);山东省自然科学基金资助项目(Z2007G01, Y2007G34)
作者简介:张志钢(1972-),男,博士研究生,副教授,研究方向为最优滤波、故障诊断等. Email: leo_joh@126.com

研究,现已取得许多好的成果[8-10],例如,对连续时滞系统常用的方法有偏微分方程、线性矩阵不等式等;对离散时滞系统采用状态扩维的方法等。但是当系统维数很高、时滞很大时,仍采用以上方法会导致繁重的计算量。

本文通过引入新息重组理论,用卡尔曼滤波方法得到了时滞系统白噪声估计算法。本方法灵活简便,适于实时递推计算。因无须进行状态扩维,能有效减轻计算负担。

1 问题描述与预备知识

1.1 问题描述

考虑带观测时滞的线性离散系统:

$$\boldsymbol{x}(t+1)=\boldsymbol{\Phi x}(t)+\boldsymbol{\Gamma\omega}(t), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}_0(t)=\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{v}_0(t), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{y}_1(t)=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{x}(t-d)+\boldsymbol{v}_1(t),\ d>0。 \tag{3}$$

其中:$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为系统状态;$\boldsymbol{y}_0(t)\in\mathbf{R}^{q_0}$ 与 $\boldsymbol{y}_1(t)\in\mathbf{R}^{q_1}$ 分别是即时和延迟的测量输出;$\boldsymbol{\omega}(t)\in\mathbf{R}^p$ 为输入白噪声信号;$\boldsymbol{v}_0(t)\in\mathbf{R}^{q_0}$ 与 $\boldsymbol{v}_1(t)\in\mathbf{R}^{q_1}$ 是测量白噪声信号。且有下面三个假设成立:

假设 1 初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$是白噪声,其数学期望为 $E[\boldsymbol{x}(0)]=\boldsymbol{x}_0$,方差矩阵为 $E[\boldsymbol{x}(0)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(0)]=\boldsymbol{P}_0$,其中,T 表示矩阵的转置,$E$ 表示数学期望。

假设 2 $\boldsymbol{\omega}(t)$是零均值的白噪声,方差矩阵为 $E[\boldsymbol{\omega}(i)\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(j)]=\boldsymbol{Q}_\omega(j)\boldsymbol{\delta}_{ij}$;$\boldsymbol{v}_0(t)\in\mathbf{R}^{q_0}$ 与 $\boldsymbol{v}_1(t)\in\mathbf{R}^{q_1}$ 是零均值的不相关白噪声信号,其方差矩阵分别为 $E[\boldsymbol{v}_0(i)\boldsymbol{v}_0^{\mathrm{T}}(j)]=\boldsymbol{Q}_{v_0}(j)\boldsymbol{\delta}_{ij}$ 和 $E[\boldsymbol{v}_1(i)\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}(j)]=\boldsymbol{Q}_{v_1}(j)\boldsymbol{\delta}_{ij}$,其中 $\boldsymbol{\delta}_{ij}$是 Kronecker-δ 函数。

假设 3 $\boldsymbol{x}(0),\boldsymbol{\omega}(t),\boldsymbol{v}_0(t)$与 $\boldsymbol{v}_1(t)$之间互不相关。

观察式(3),$\boldsymbol{y}_1(t)$是状态 $\boldsymbol{x}(t-d)$在时刻 t 的观测值,包含有延迟 d,故系统(1)~(3)不是标准 Kalman 滤波形式。为了方便讨论,假设 $t\geqslant d$,且让 $\boldsymbol{y}_s(t)$表示系统(1)~(3)在 t 时刻的观测,这样就有

$$\boldsymbol{y}_s(t)=\begin{cases}\boldsymbol{y}_0(t), & 0\leqslant t<d;\\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_0(t)\\ \boldsymbol{y}_1(t)\end{bmatrix}, & t\geqslant d。\end{cases} \tag{4}$$

输入白噪声的最优估计问题,也就是基于测量输出序列$\{\{\boldsymbol{y}_s(i)\}_{i=0}^{t+N}\}$,寻求白噪声 $\boldsymbol{\omega}(t)$的最优估计器,标记为 $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+N)$,且极小化如下性能指标:

$$J=E\{[\boldsymbol{\omega}(t)-\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+N)]^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\omega}(t)-\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+N)]\}。 \tag{5}$$

当 $N<0$ 时,称为预测问题;当 $N=0$ 时,称为滤波问题;当 $N>0$ 时,称为平滑问题。

分析:

(1) 由于 $0\leqslant t<d$ 时,该问题就是无时滞系统的白噪声估计问题,可采用文献[5]的方法来处理。故本文中仅讨论当 $t\geqslant d$ 的情形。

(2) 易知,当 $N\leqslant 0$ 时,有 $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+N)=0$ 成立。故本文仅讨论当 $N>0$ 的情形,即针对输入白噪声设计出固定滞后平滑器。

(3) 基于状态扩维的估计方法[11]定义新的状态:

$$\boldsymbol{z}(t)=\mathrm{col}\{\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{x}(t-1),\cdots,\ \boldsymbol{x}(t-d)\},$$

则有如下的关系成立:

$$\boldsymbol{z}(t+1)=\boldsymbol{\Phi}_a\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{\Gamma}_a\boldsymbol{u}(t), \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_0(t)\\ \boldsymbol{y}_1(t)\end{bmatrix}=\boldsymbol{H}_a\boldsymbol{z}(t)+\boldsymbol{v}_a(t)。 \tag{7}$$

其中,$\boldsymbol{v}_a(t)=\mathrm{col}\{\boldsymbol{v}_0(t),\ \boldsymbol{v}_1(t)\}$,其方差阵为

$$E[\boldsymbol{v}_a(t)\boldsymbol{v}_a^{\mathrm{T}}(j)]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{v_0}(t) & 0\\ 0 & \boldsymbol{Q}_{v_1}(t)\end{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_{tj}。 \tag{8}$$

系数矩阵:

$$\boldsymbol{\Phi}_a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \boldsymbol{I}_n & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_n & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{I}_n & 0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Gamma}_a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \boldsymbol{H}_1\end{bmatrix}。$$

这样,就将有观测时滞的系统(1)~(3)转化为标称的无时滞系统(6)和(7),用文献[5]中提供的方法对白噪声进行估计。可以看到,若对状态进行维数扩充,状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_a$ 的维数是 $(d+1)n\times(d+1)n$,对于时滞 d 或维数 n 较大的系统,无疑会极大地增加计算负担。因此,本文采用了基于新息重组的方法进行处理,从而能避免对状态进行扩维。

将观测序列 $\{\{\boldsymbol{y}_s(i)\}_{i=0}^{t}\}$ 所张成的线性空间标记为 $\ell\{\{\boldsymbol{y}_s(i)\}_{i=0}^{t}\}$。实际上,该线性空间等价于

$$\ell\{\boldsymbol{Y}_1(0),\cdots,\ \boldsymbol{Y}_1(t_d);\ \boldsymbol{Y}_0(t_d+1),\cdots,\ \boldsymbol{Y}_0(t)\},\tag{9}$$

其中,$\boldsymbol{t}_d\triangleq t-d$。

定义与重组观测序列对应的重组新息序列为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1(\tau)\triangleq\boldsymbol{Y}_1(\tau)-\hat{\boldsymbol{Y}}_1(\tau,\ 1),\tag{10}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0(\tau)\triangleq\boldsymbol{Y}_0(\tau)-\hat{\boldsymbol{Y}}_0(\tau,\ 0)。\tag{11}$$

其中,$\hat{\boldsymbol{Y}}_1(0,\ 1)=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{x}_0$。$\hat{\boldsymbol{Y}}_1(\tau,\ 1)$是 $\boldsymbol{Y}_1(\tau)$在线性空间

$$\ell\{\boldsymbol{Y}_1(0),\cdots,\ \boldsymbol{Y}_1(\tau-1)\}\tag{12}$$

上的正交投影,$\hat{\boldsymbol{Y}}_0(\tau,\ 0)$是 $\boldsymbol{Y}_0(\tau)$在线性空间

$$\ell\{\boldsymbol{Y}_1(0),\cdots,\ \boldsymbol{Y}_1(t_d);\ \boldsymbol{Y}_0(t_d+1),\cdots,\ \boldsymbol{Y}_0(\tau-1)\}\tag{13}$$

上的正交投影。

引理 1　$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1(0),\cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_1(t_d);\ \boldsymbol{\varepsilon}_0(t_d+1),\cdots,\ \boldsymbol{\varepsilon}_0(t)\}$是重组新息序列,所张成的线性空间等价于线性空间(9),也等价于线性空间 $\ell\{\{\boldsymbol{y}_s(i)\}_{i=0}^{t}\}$[11]。

重组新息序列方差阵可如下计算:

$$\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_1}(\tau)\triangleq E[\boldsymbol{\varepsilon}_1(\tau)\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}}(\tau)]=\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{P}_1(\tau)\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}_{V_1}(\tau),\tag{14}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_0}(\tau)\triangleq E[\boldsymbol{\varepsilon}_0(\tau)\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\mathrm{T}}(\tau)]=\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{P}_0(\tau)\boldsymbol{H}_0^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}_{V_0}(\tau)。\tag{15}$$

1.2　状态一步预报器设计

为了求解本文的最优白噪声估计器,需要先由下面的引理计算出状态 $\boldsymbol{x}(\tau)$的一步预测 $\hat{\boldsymbol{x}}(\tau,\ 1)$,$\tau=1,2,\cdots,\ t_d$ 和$\hat{\boldsymbol{x}}(\tau,\ 0)$,$\tau=t_d+1,t_d+2,\cdots,\ t-1$。

引理 2　状态一步预测 $\hat{\boldsymbol{x}}(\tau,\ 1)$和 $\hat{\boldsymbol{x}}(\tau,\ 0)$可由如下公式进行递推计算[11]:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(\tau+1,\ 1)=\boldsymbol{\Phi}\hat{\boldsymbol{x}}(\tau,\ 1)+\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{P}_1(\tau)\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Q}_{\varepsilon_1}^{-1}(\tau)\boldsymbol{\varepsilon}_1(\tau),\tag{16}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}(\tau+1,\ 0)=\boldsymbol{\Phi}\hat{\boldsymbol{x}}(\tau,\ 0)+\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{P}_0(\tau)\boldsymbol{H}_0^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Q}_{\varepsilon_0}^{-1}(\tau)\boldsymbol{\varepsilon}_0(\tau)。\tag{17}$$

其中,$\hat{\boldsymbol{x}}(0,\ 1)=\boldsymbol{x}_0$,$\hat{\boldsymbol{x}}(t_d+1,\ 0)=\hat{\boldsymbol{x}}(t_d+1,\ 1)$。$\boldsymbol{\varepsilon}_1(\tau)$和 $\boldsymbol{\varepsilon}_0(\tau)$则由式(10)和式(11)给出;$\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_1}(\tau)$和 $\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_0}(\tau)$由式(14)和式(15)给出;状态一步预报误差的方差阵 $\boldsymbol{P}_1(\tau)$和 $\boldsymbol{P}_0(\tau)$分别由下面 Riccati 方程计算:

$$\boldsymbol{P}_1(\tau+1)=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{P}_1(\tau)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_w(\tau)\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{K}_1(\tau)\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_1}(\tau)\boldsymbol{K}_1^{\mathrm{T}}(\tau),\tag{18}$$

$$\boldsymbol{P}_0(\tau+1)=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{P}_0(\tau)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}_w(\tau)\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{K}_0(\tau)\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_0}(\tau)\boldsymbol{K}_0^{\mathrm{T}}(\tau)。\tag{19}$$

其中,$\boldsymbol{K}_1(\tau)=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{P}_1(\tau)\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Q}_{\varepsilon_1}^{-1}(\tau)$,$\boldsymbol{K}_0(\tau)=\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{P}_0(\tau)\boldsymbol{H}_0^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{Q}_{\varepsilon_0}^{-1}(\tau)$,以及 $\boldsymbol{P}_1(0)=\boldsymbol{P}_0$,$\boldsymbol{P}_0(t_d+1)=\boldsymbol{P}_1(t_d+1)$。

2　输入白噪声的最优固定滞后平滑器

2.1　白噪声的最优固定滞后平滑器设计

输入白噪声的最优固定滞后平滑器由下面定理给出。

定理 1 考虑系统(1)~(3),最优白噪声固定滞后平滑器 $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+N)$可递推计算如下:

(1) 当 $N\leqslant d$ 时,

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+N)=\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{M}_0(t\mid t+j)\boldsymbol{\varepsilon}_0(t+j)。\tag{20}$$

与之对应的估计误差方差阵为

$$\boldsymbol{P}_{\omega}(t\mid t+N)=\boldsymbol{Q}_{\omega}(t)-\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{M}_0(t\mid t+j)\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_0}(t+j)\boldsymbol{M}_0^{\mathrm{T}}(t\mid t+j)。\tag{21}$$

(2) 当 $N>d$ 时,

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+N)=\sum_{j=N-d+1}^{N}\boldsymbol{M}_0(t\mid t+j)\boldsymbol{\varepsilon}_0(t+j)+\sum_{j=1}^{N-d}\boldsymbol{M}_1(t\mid t+j)\boldsymbol{\varepsilon}_1(t+j)。\tag{22}$$

与之对应的估计误差方差阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{\omega}(t\mid t+N)=\boldsymbol{Q}_{\omega}(t)-&\sum_{j=N-d+1}^{N}\boldsymbol{M}_0(t\mid t+j)\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_0}(t+j)\boldsymbol{M}_0^{\mathrm{T}}(t\mid t+j)-\\&\sum_{j=1}^{N-d}\boldsymbol{M}_1(t\mid t+j)\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_1}(t+j)\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}(t\mid t+j)。\end{aligned}\tag{23}$$

其中,平滑增益阵为

$$\boldsymbol{M}_0(t\mid t+j)=E[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\mathrm{T}}(t+j)]\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_0}^{-1}(t+j),\tag{24}$$

$$\boldsymbol{M}_1(t\mid t+j)=E[\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}}(t+j)]\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_1}^{-1}(t+j)。\tag{25}$$

证明 先讨论 $N\leqslant d$ 的情形。由射影定理可知,最优白噪声估计器 $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+N)$是白噪声 $\boldsymbol{\omega}(t)$在由已知观测序列所导出的新息序列上的正交投影,即

$$\begin{aligned}&\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+N)=\mathrm{Proj}\{\boldsymbol{\omega}(t)\mid\boldsymbol{\varepsilon}_1(0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_1(t_d+N);\\&\boldsymbol{\varepsilon}_0(t_d+N+1),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_0(t+N)\}=\mathrm{Proj}\{\boldsymbol{\omega}(t)\mid\boldsymbol{\varepsilon}_1(0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_1(t_d+N);\\&\boldsymbol{\varepsilon}_0(t_d+N+1),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_0(t+N-1)\}+E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\mathrm{T}}(t+N)]\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_0}^{-1}(t+N)\boldsymbol{\varepsilon}_0(t+N)=\cdots=\\&\mathrm{Proj}\{\boldsymbol{\omega}(t)\mid\boldsymbol{\varepsilon}_1(0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_1(t_d+N);\boldsymbol{\varepsilon}_0(t_d+N+1),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_0(t)\}+\sum_{j=1}^{N}E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\mathrm{T}}(t+j)]\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_0}^{-1}(t+j)\boldsymbol{\varepsilon}_0(t+j)。\end{aligned}$$

考虑到

$$\mathrm{Proj}\{\boldsymbol{\omega}(t)\mid\boldsymbol{\varepsilon}_1(0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_1(t_d+N);\boldsymbol{\varepsilon}_0(t_d+N+1),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_0(t)\}=\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t)=0,$$

故有式(20)成立。采用类似的方法可证明式(22)成立,此处证明从略。

2.2 计算平滑估计增益阵

平滑增益阵 $\boldsymbol{M}_0(t\mid t+j)$和 $\boldsymbol{M}_1(t\mid t+j)$中,$\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_1}(t)$和 $\boldsymbol{Q}_{\varepsilon_0}(t)$分别由式(14)和式(15)计算。下面讨论 $E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\mathrm{T}}(t+j)]$的计算方法。当 $j\geqslant 1$ 时,有

$$\begin{aligned}E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\mathrm{T}}(t+j)]&=E[\boldsymbol{\omega}(t)(\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{e}_0(t+j)+\boldsymbol{V}_0(t+j))^{\mathrm{T}}]=\\&E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}(t+j)]\boldsymbol{H}_0^{\mathrm{T}}。\end{aligned}\tag{26}$$

下面分两种情形来讨论 $E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}(t+j)]$的计算方法。

(1) 当 $j=1$ 时,考虑到 $E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}(t)]=0$ 和 $E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\mathrm{T}}(t)]=0$,有

$$E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}(t+1)]=E[\boldsymbol{\omega}(t)(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{e}_0(t)+\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\omega}(t)-\boldsymbol{K}_0(t)\boldsymbol{\varepsilon}_0(t))^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{Q}_{\omega}(t)\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}。\tag{27}$$

(2) 当 $j>1$ 时,有

$$\begin{aligned}E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}(t+j)]&=E\{\boldsymbol{\omega}(t)[\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{e}_0(t+j-1)+\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\omega}(t+j-1)-\boldsymbol{K}_0(t+j-1)\boldsymbol{\varepsilon}_0(t+j-1)]^{\mathrm{T}}\}=\\&E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}(t+j-1)]\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}-E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\mathrm{T}}(t+j-1)]\boldsymbol{K}_0^{\mathrm{T}}(t+j-1)=\\&E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}(t+j-1)][\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{H}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_0^{\mathrm{T}}(t+j-1)]。\end{aligned}$$

由上式逐项递推,并考虑式(26),有下面的关系成立:

$$\begin{aligned}E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}(t+j)]&=E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}(t+1)]\prod_{k=1}^{j-1}[\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{H}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_0^{\mathrm{T}}(t+k)]=\\&\boldsymbol{Q}_{\omega}(t)\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\prod_{k=1}^{j-1}[\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{H}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_0^{\mathrm{T}}(t+k)]。\end{aligned}\tag{28}$$

将式(28)代入(26),有

$$E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\mathrm{T}}(t+j)] = \boldsymbol{Q}_{\omega}(t)\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\{\prod_{k=1}^{j-1}(\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{H}_0^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{K}_0^{\mathrm{T}}(t+k))\}\ \boldsymbol{H}_0^{\mathrm{T}}。\tag{29}$$

用类似的方法,可得到下面的关系:

(1) 当 $j=1$ 时,有

$$E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(t+1)] = \boldsymbol{Q}_{\omega}(t)\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}},\tag{30}$$

$$E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}}(t+1)] = \boldsymbol{Q}_{\omega}(t)\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}。\tag{31}$$

(2) 当 $j>1$ 时,有

$$E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}(t+j)] = \boldsymbol{Q}_{\omega}(t)\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\prod_{k=1}^{j-1}[\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{K}_1^{\mathrm{T}}(t+k)],\tag{32}$$

$$E[\boldsymbol{\omega}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}}(t+j)] = \boldsymbol{Q}_{\omega}(t)\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\{\prod_{k=1}^{j-1}[\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}\ \boldsymbol{K}_1^{\mathrm{T}}(t+k)]\}\ \boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}。\tag{33}$$

3　仿真实例

系统(1)~(3)的各系数矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H}_0 = [1\quad 2],\ \boldsymbol{H}_1 = [1\quad 1]。$$

仿真中取时滞 $d=4$,白噪声的方差阵 $\boldsymbol{Q}_{\omega}(t) = \boldsymbol{Q}_{v_0}(t) = \boldsymbol{Q}_{v_1}(t) = 1$,取状态的真实初值 $\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}$,取状态预测误差方差阵初值 $\boldsymbol{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。

考虑到 Bernoulli-Gaussian 白噪声在石油地震勘探领域的重要实用价值,用本文提出的方法对 Bernoulli 白噪声进行估计。

直观上看,Bernoulli-Gaussian 白噪声就是取非零值稀疏化的 Gaussian 白噪声,其定义为

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{b}(t)\boldsymbol{g}(t)。\tag{34}$$

其中,$\boldsymbol{g}(t)$是带零均值,方差为 $\boldsymbol{\sigma}_g^2$的独立于$\boldsymbol{b}(t)$的 Gaussian 白噪声;$\boldsymbol{b}(t)$是取值 1 或 0 的 Bernoulli 白噪声,取值概率为

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}(t)=1) = \lambda,\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{b}(t)=0) = 1-\lambda。\tag{35}$$

显然,$\boldsymbol{\omega}(t)$是零均值,其方差为 $\boldsymbol{\sigma}_{\omega}^2 = \lambda\boldsymbol{\sigma}_g^2$。这里取 $\lambda = 0.3$。

仿真结果如图 1 至图 3 所示,其中实线端点纵坐标代表真实值 $\boldsymbol{\omega}(t)$,虚线代表估计值 $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+1)$、$\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+3)$、$\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+6)$。由仿真曲线可看出,平滑器 $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+3)$比 $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+1)$的精度要高,$\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+6)$比 $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+3)$的精度也要高,这与理论分析结论相符。

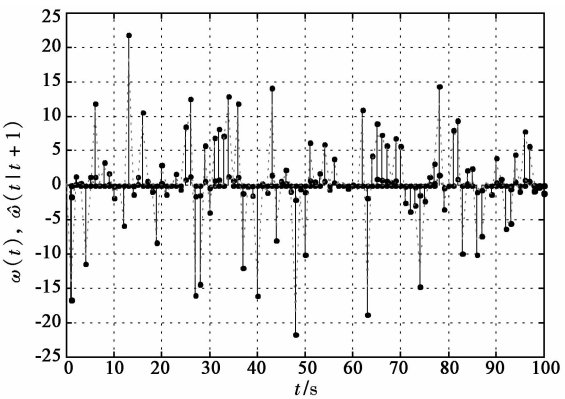


图 1　Bernoulli-Gaussian 白噪声 $\boldsymbol{\omega}(t)$及其最优平滑器 $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+1)$

Fig.1　Bernoulli-Gaussian input white noise $\boldsymbol{\omega}(t)$ and optimal smoother $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+1)$

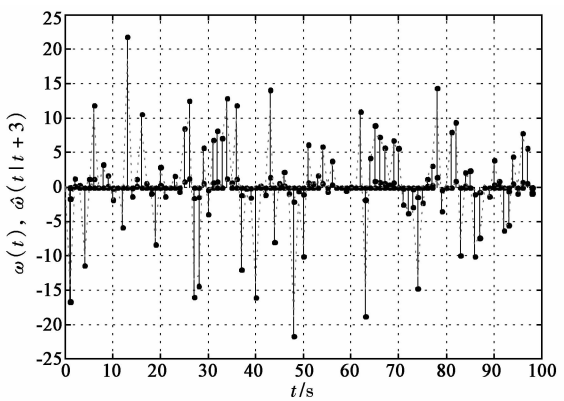


图 2　Bernoulli-Gaussian 白噪声 $\boldsymbol{\omega}(t)$及其最优平滑器 $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+3)$

Fig.2　Bernoulli-Gaussian input white noise $\boldsymbol{\omega}(t)$ and smoother $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t\mid t+3)$

4 结论

针对观测中带有时滞的线性离散系统,研究了在不增加系统维数的前提下,最优白噪声估计器的设计问题。解决该问题用到的一项关键技术是重组新息序列,该新息序列与常规 Kalman 滤波的新息序列是完全不同的。基于新息重组和投影公式,将最优白噪声估计器的计算归结为计算两个与原系统有相同维数的 Riccati 方程。该方法无需状态扩维,计算简单实用。需要指出的是,经适当推广,本文的方法能解决带多组观测时滞系统的白噪声估计以及测量白噪声的估计等问题。

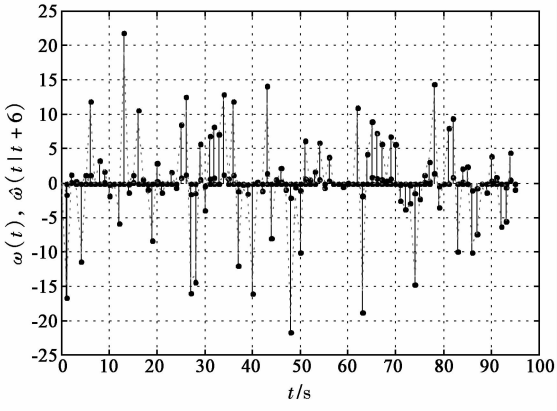


图 3 Bernoulli-Gaussian 白噪声 $\boldsymbol{\omega}(t)$及其最优平滑器 $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t|t+6)$

Fig.3 Bernoulli-Gaussian input white noise $\boldsymbol{\omega}(t)$ and smoother $\hat{\boldsymbol{\omega}}(t|t+6)$

参考文献:

[1] AHLEN A, STERNAD M. Optimal deconvolution based on polynomial method[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989, 37(2):217-226.

[2] SILVIA M T, ROBINSON E A. Deconvolution of geophysical time series in the exploration for oil and natural gas[M]. New York: Elsevier, 1979.

[3] DENG Z L, ZHANG H S, LIU S J, et al. Optimal and self-tuning white noise estimators with applications to deconvolution and filtering problems[J]. Automatica, 1996, 32(2):199-216

[4] DENG Z L. Time-domain approaches to multichannel optimal deconvolution[J]. International Journal of Systems Science, 2000, 31(6): 787-796.

[5] DENG Z L, XU Y. White noise estimation theory based on Kalman filtering[J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(1):23-31.

[6] MENDEL J M. White-noise estimators for seismic data processing in oil exploration[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, 22(5):694-706.

[7] CHEN B S, LIN C W. Optimal deconvolution filter design under parameters perturbation in transmission channels[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 1996, 15(2):213-231.

[8] ZHOU H, XIE L H, ZHANG C S. A direct approach to H_2 optimal deconvolution of periodic digital channels[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(7):1685-1698.

[9] FRIDMAN E, SHAKED U. A new H_∞ design linear time-delay system[J] . IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(11): 2839-2843.

[10] KWAKERNAAK H. Optimal filtering in linear systems with time delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1967, 12(2): 169-173.

[11] ZHANG H S, XIE L H, ZHANG D, et al. A reorganized innovation approach to linear estimation[J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 2004, 49(10):1810-1814.

(编辑:许力琴)