T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Özel Matrislerin Matris ve Operatör Normları Arasındaki Eşitsizlikler

Ayşe SAKLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI
KONYA, 2007

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Özel Matrislerin Matris ve Operatör Normları Arasındaki Eşitsizlikler

Ayşe SAKLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ BİLİM DALI

Bu tez 30.01.2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Hasan ŞENAY
Jüri

Yard.Doç.Dr. Süleyman SOLAK
Danışman

Yard.Doç.Dr. Ramazan TÜRKMEN
Jüri

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Özel Matrislerin Matris ve Operatör Normları Arasındaki Eşitsizlikler

Ayşe SAKLAN

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İlköğretim Anabilim Dalı
Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı

Danışman: Yard.Doç.Dr. Süleyman SOLAK
2007, 34 sayfa

Jüri: Prof.Dr.Hasan ŞENAY
Yard.Doç.Dr. Süleyman SOLAK
Yard.Doç.Dr. Ramazan TÜRKMEN

Bu çalışmada $A=(i+j)_{n\times n}$ matrisi esas alınarak bu matrisin Hadamard inversi, Hadamard karekökü ve Hadamard inversinin Hadamard karekökü tanımlanıp; bu matrislerin bazı normlarını içeren sınırlar elde edilmiştir.

Ayrıca $A=\left(\frac{1}{i+j}\right)_{n\times n}$ ve $A=(i+j)_{n\times n}$ matrislerinin determinantları hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hadamard çarpımı, Hadamard invers, Hadamard karekök, norm, determinant, spektral yarıçap.

ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

The Inequalities Between Matrix and Operator

Norms of Special Matries

Ayşe SAKLAN

Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Primary Education

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Süleyman SOLAK
2007, 34 pages

Jüri: Prof.Dr.Hasan ŞENAY
Yard.Doç.Dr. Süleyman SOLAK
Yard.Doç.Dr. Ramazan TÜRKMEN

In this study, we have defined Hadamard inverse , Hadamard sequare root and Hadamard sequare root of Hadamard inverse of $A=(i+j)_{n\times n}$ matrix. Afterwords, we have obtained bounds related to some norms of these matrices.

In addition , we have computed determinants of $A=\left(\frac{1}{i+j}\right)_{n\times n}$ and $A=(i+j)_{n\times n}$ matrices.

Key Words: Hadamard product, Hadamard invers, Hadamard square root, norm, determinant, spectral radius.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yard. Doç. Dr. Süleyman SOLAK danışmanlığında yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmanın birinci bölümü Giriş olup, burada çalışmayla ilgili bazı tanımlar verilmiştir. İkinci bölümde çalışmamız için gerekli olan temel kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde ise matris normları arasındaki eşitsizliklerle ilgili bazı teorem ve ispatlar verilmiştir. Dördüncü bölüm çalışmanın esasını teşkil etmekte olup, $A=(i+j)_{n\times n}$ matrisinin Hadamard inversi, Hadamard karekökü ve Hadamard inversinin Hadamard karekökü tanımlanıp; bu matrislerin spektral ve Euclidean normu için sınırlar elde edilmiştir. Daha sonra $A=\left(\frac{1}{i+j}\right)_{n\times n}$ ve $A=(i+j)_{n\times n}$ matrislerinin determinantları hesaplanmıştır. Ayrıca çalışmayla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Bu çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yard. Doç. Dr. Süleyman SOLAK' a teşekkür ederim.

Ayşe SAKLAN

Konya, 2007

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
İÇİNDEKİLER iv
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 3
3. MATRİS NORMLARI İLE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLER 7
4. ÖZEL MATRİSLERİN MATRİS ve OPERATÖR NORMLARI İLE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLER 19
5. SONUÇ VE ÖNERİLER 33
6. KAYNAKLAR 34

1. GİRİŞ

Tanım 1.1. $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ matrisi verilsin. A matrisinin *Hadamard inversi* $A^{\circ^{-1}}=\left(\frac{1}{a_{ij}}\right)_{n\times n}$ ve *Hadamard karekökü* $A^{\circ 1/2}=\left(\sqrt{a_{ij}}\right)_{n\times n}$ ile tanımlıdır (Solak 2003).

Tanım 1.2. $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}, B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ matrisleri verilsin. Bu iki matrisin *Hadamard çarpımı*

$$C=A\circ B=\left(a_{ij}.b_{ij}\right)_{m\times n}$$

şeklinde tanımlıdır (Bozkurt ve ark. 2005).

Tanım 1.3. Herhangi bir A matrisinin maksimum satır normu $r_1(.)$ ve maksimum sütun normu $c_1(.)$ olmak üzere

$$r_1(A)=\max_i \sqrt{\sum_j \left|a_{ij}\right|^2}$$

ve

$$c_1(A)=\max_j \sqrt{\sum_i \left|a_{ij}\right|^2}$$

şeklinde tanımlıdır. $A=\left(a_{ij}\right)$ ve $B=\left(b_{ij}\right)$ $m\times n$ tipinde matrisler olmak üzere A ve B matrislerinin Hadamard çarpımı $A\circ B=\left(a_{ij}b_{ij}\right)_{m.n}$ dir. Eğer $A=B\circ C$ ise o zaman

$$\left\|A\right\|_2 \le r_1(B).c_1(C)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mathias 1990).

Tanım 1.4. *Psi (Digamma) fonksiyonu*

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}$$

olmak üzere

$$\Psi(x)=\frac{d}{dx}\left\{\ln\left[\Gamma(x)\right]\right\}$$

şeklinde tanımlanır ve Ψ ile gösterilir.

Psi fonksiyonunun *n*. türevleri *polygamma fonksiyonu* olarak tanımlıdır, yani

$$\Psi(n,x)=\frac{d}{dx^n}Psi(x)=\frac{d}{dx^n}\left(\frac{d}{dx}\ln\left[\Gamma(x)\right]\right).$$

Eğer $n=0$ ise $\Psi(0,x)=Psi(x)$ ve $a>0$, $n\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\Psi(a,n+b)=0$$

dır (Moenck 1977).

Tanım 1.5. Gamma fonksiyonu

$$\gamma(n)=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{\ln k^n}{k}-\frac{\ln m^{(n+1)}}{n+1}\right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Özel olarak $\gamma(0)=\gamma$ dır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1.Vektör Normları

Tanım 2.1.1. $\mathbb{C}$ kompleks ve $\mathbb{R}$ de reel sayılar kümesi olmak üzere

$$\|.\|: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

fonksiyonu

i) Her $x \in \mathbb{C}^n$ için $\|x\| \geq 0$ 'dır.

ii) Her $x, y \in \mathbb{C}^n$ için $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.(Üçgen eşitsizliği)

iii) Her $\alpha \in \mathbb{C}$ ve $x \in \mathbb{C}^n$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

şartlarını sağlıyorsa; negatif olmayan $\|x\|$ reel sayısına x vektörünün *vektör normu* denir.

Bir vektör normu bir vektörün uzunluğunun veya büyüklüğünün bir ölçüsüdür. Skaler uzunluğu ölçmek için birçok birim olduğu gibi (feet,metre) bir vektör büyüklüğünü ölçmek için de değişik normlar vardır.

$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ için bazı vektör normları

- Euclidean (Frobenius, ℓ_2) normu : $\|x\|_2 = \sqrt{(x, x)}$
- ℓ_1 normu : $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$
- ℓ_∞ normu : $\|x\|_\infty = \max\left(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right)$
- ℓ_p normu $(p > 1)$: $\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

şeklinde tanımlanır (Bronson 1999).

Euclidean normu ve ℓ_1 normu ise sırasıyla $p = 2$ ve $p = 1$ olduğunda ℓ_p normunun özel durumlarıdır. Son olarak $p \to \infty$ limit durumunda, ℓ_p normu ℓ_∞ normunu verir.

Tanım 2.1.2. n boyutlu kompleks uzayında herhangi iki vektör $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ ve $y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]$ olmak üzere

$$f = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

$$(x, y) \to f(x, y) = \langle x, y \rangle = x\overline{y}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme iki vektörün *iç çarpımı* denir.

Yukarıdaki $\langle x, y \rangle$ ifadesi ;

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y}_1 + x_2 \overline{y}_2 + \ldots + x_n \overline{y}_n$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer x ve y vektörlerinin bileşenleri reel sayılar cisminden alınmış ise bu takdirde; bu iki vektörün iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.3. ℓ_p normlarının klasik bir sonucu olarak, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q$$

ile tanımlanan eşitsizliğe *Hölder veya Schwarz eşitsizliği* denir.

2.2. Matris Normları

Vektör normlarında olduğu gibi bir A matrisinin normu $\|A\|$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.1. $\mathbb{C}$ kompleks ve $\mathbb{R}$ de reel sayılar kümesi olmak üzere

$$\|\,.\,\| : \mathbb{C}^{m \times n} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa; $\|A\|$ sayısına $A = (a_{ij})_{m \times n}$ matrisinin *matris normu* denir.

i) $\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

ii) c herhangi bir kompleks sayı olmak üzere $\|cA\| = |c| \|A\|$

iii) A ve B aynı mertebeden matrisler olmak üzere $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (Üçgen eşitsizliği)

iv) A ve B çarpılabilir matrisler olmak üzere $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ 'dir.

(i),(ii) ve (iii) ile verilen aksiyomlar bir matris normu için gerekli olan aksiyomlardır. (i),(ii) ve (iii) aksiyomlarını sağlayan reel değerli bir fonksiyon, *genelleştirilmiş matris normu* olarak tanımlanır. Böylece bir matris normu daima genelleştirilmiş matris normudur. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Tanım 2.2.2. Eğer A $n \times n$ matrisi ve n-boyutlu y vektörü için

$$\|Ay\| \le \|A\|\|y\|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, matris normu ile vektör normu *uyumludur* denir. Bu eşitsizliğin bir eşitlik olduğu en az bir *y* vektörü her zaman vardır (Bronson 1999).

$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ matrisinin bazı normları:

- ℓ_1 normu (sütun) : $\|A\|_1 = \max\limits_{j=1,2,\ldots,n}\left[\sum\limits_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|\right]$
- ℓ_∞ normu (satır) : $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1,2,\ldots,m}\left[\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|\right]$
- Frobenius (Euclidean) normu : $\|A\|_E = \left[\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$
- Spektral norm : $\|A\|_2 = \max\left(\sqrt{\lambda} : \lambda, \overline{A}^T A \text{'nın bir özdeğeridir.}\right)$
- ℓ_p normu : $|A|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
- ℓ_p operatör normu : $\|A\|_p = \max\left\{|Ax|_p : x\in\mathbb{C}^n, |x|_p = 1\right\}$
- ℓ_{pq} normu : $|A|_{pq} = \left\{\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right\}^{\frac{1}{q}}$

şeklinde tanımlanır (Bronson 1999), (Taşçı 1994,i).

Bu durumda *A* matrisinin normları arasında;

1) $\|A\|_2 \le \|A\|_E \le \sqrt{n}\,\|A\|_2$

2) $\|A\|_\Delta \le \|A\|_2 \le \sqrt{mn}\,\|A\|_\Delta$, $\left(\|A\|_\Delta = \max\left|a_{ij}\right|\right)$

3) $\|A\|_2 \le \sqrt{\|A\|_1\,\|A\|_\infty}$

4) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\,\|A\|_\infty$

5) $\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\,\|A\|_1$

bağıntıları mevcuttur (Bozkurt ve ark. 2005).

Tanım 2.2.3. A n- kare matris olsun. A matrisinin mutlak değerce en büyük öz değerine A' nın *spektral yarıçapı* denir

$$\rho(A) = \max_i \{|\lambda_i| : \lambda_i, A \text{ matrisinin öz değeri}\}$$

şeklinde gösterilir. O halde A matrisinin herhangi bir λ_i öz değeri için $|\lambda_i| \le \rho(A)$ olacaktır. Bununla birlikte $|\lambda_i| = \rho(A)$ olacak şekilde en az bir $1 \le i \le n$ vardır.

Ayrıca $A = (a_{ij})$ $n \times n$ kompleks matrisinin nümerikal yarıçapı da

$$r(A) = \max \{|x^* Ax| : x \in \mathbb{C}^n, xx^* = 1\}$$

ile tanımlanır (burada * eşlenik transpozu gösterir.) (Horn, Johnson 1996).

3. MATRİS NORMLARI İLE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLER

3.1. Matrislerin ℓ_p Normları Arasındaki İlişkiler

Lemma 3.1.1. $1 \le p, q \le \infty$ olsun. O zaman bütün $x \in \mathbb{C}^n$ için

$$\lambda_{pq}(n) = \begin{cases} 1 & , \quad p \ge q \\ n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} & , \quad p \le q \end{cases}$$

olmak üzere

$$|x|_p \le \lambda_{pq}(n)|x|_q \ ,$$

(Taşçı 1994,i).

Teorem 3.1.1. A $n \times n$ tipinde herhangi bir kompleks matris ve x, $|x|_q = 1$ şartını sağlayan n elemanlı vektör olsun. O zaman $1 \le p, q \le \infty$ için

$$\xi_{pq}(n) = \begin{cases} n^{\frac{1}{p}} & , \quad p \ge q \\ n^{\frac{2}{p}-\frac{1}{q}} & , \quad p \le q \end{cases}$$

olmak üzere

$$|A|_p \le \xi_{pq}(n)\|A\|_q \ ,$$

(Taşçı 1994,i).

İspat. A matrisinin sütunlarını $a_1, a_2, ..., a_n$ ile gösterelim. O zaman ℓ_p matris normu tanımından;

$$|A|_p = \left|\left(|a_1|_p, |a_2|_p, ..., |a_n|_p\right)\right|_p$$

yazılır. Diğer taraftan, Lemma 3.1.1'den ve $a_j = Ae_j \quad j = 1, 2, ..., n$'den (burada e_j, $\mathbb{C}^n$'nin standart bazının bir elemanıdır.)

$$\begin{aligned} |A|_p &\le \left|\left(\lambda_{pq}(n)|a_1|_q, \lambda_{pq}(n)|a_2|_q, ..., \lambda_{pq}(n)|a_n|_q\right)\right|_p \\ &= \lambda_{pq}(n)\left|\left(|a_1|_q, |a_2|_q, ..., |a_n|_q\right)\right|_p \\ &= \lambda_{pq}(n)\left|\left(|Ae_1|_{q,}, |Ae_2|_q, ..., |Ae_n|_q\right)\right|_p \end{aligned}$$

$$\leq \lambda_{pq}(n) \max_{1\leq j\leq n} \left|Ae_j\right|_q \left|(1,1,...,1)\right|_p$$
$$= \lambda_{pq}(n) n^{\frac{1}{p}} \max_{1\leq j\leq n} \left|Ae_j\right|_q$$
$$\leq \lambda_{pq}(n) n^{\frac{1}{p}} \max_{|x|_q=1} \left|Ax\right|_q$$
$$= \lambda_{pq}(n) n^{\frac{1}{p}} \left\|A\right\|_q .$$

Halbuki; Lemma 3.1.1'deki $\lambda_{pq}(n)$'nin tanımından $p \geq q$ için, $\lambda_{pq}(n) = 1$ iken $\lambda_{pq}(n) n^{\frac{1}{p}}$ ifadesi , $n^{\frac{1}{p}}$'ye eşittir. Benzer şekilde $p \leq q$ için $\lambda_{pq}(n) = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ iken , $\lambda_{pq}(n) n^{\frac{1}{p}}$ ifadesi , $n^{\frac{2}{p}-\frac{1}{q}}$'ye eşittir.

Teorem 3.1.2. *A* $n\times n$ tipinde herhangi bir kompleks matris ise $1 \leq p \leq q \leq \infty$ için

$$\left\|A\right\|_p \leq n^{\frac{q-p}{pq}} \left\|A\right\|_q \quad ,$$

(Taşçı 1994,i).

İspat. z ; $\left|z\right|_p = 1$, $\left|Az\right|_p = \left\|A\right\|_p$ şartını sağlayan *n*-boyutlu vektör olsun. $s = \frac{z}{\left|z\right|_q}$ seçersek $\left|s\right|_q = 1$ olur. Böylece Lemma 3.1.1.'den ;

$$\left\|A\right\|_p = \left|Az\right|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left|Az\right|_q$$
$$= n^{\frac{q-p}{pq}} \left|As\right|_q \left|z\right|_q$$
$$\leq n^{\frac{q-p}{pq}} \left|As\right|_q \left|z\right|_p$$
$$= n^{\frac{q-p}{pq}} \left|As\right|_q$$
$$\leq n^{\frac{q-p}{pq}} \max_{|s|_q=1} \left|As\right|_q$$
$$= n^{\frac{q-p}{pq}} \left\|A\right\|_q .$$

Teorem 3.1.3. A herhangi bir $n\times n$ tipinde kompleks matris olmak üzere $1\le q\le p\le\infty$ için

$$\|A\|_p \le \|A\|_q \ ,$$

(Taşçı 1994,i).

İspat. Lemma 3.1.1.'den, $1\le q\le p\le\infty$ için

$$|Az|_p \le |Az|_q$$

olur, bu yüzden ispat açıktır.

Teorem 3.1.4. A herhangi bir $n\times n$ tipinde kompleks matris olsun. O zaman $1\le p,q\le\infty$ için

$$|A|_p \le n^{\frac{1}{p}} |A|_{qp} \ ,$$

(Taşçı 1994,i).

İspat. E $n\times n$ tipinde birim matris olmak üzere B=AE olsun. Böylece matrislerin çarpımından

$$B=(b_{ij})=\left(\sum_{k=1}^{n} e_{ik}a_{kj}\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olduğunda Hölder eşitsizliğinden;

$$|b_{ij}|=\left|\sum_{k=1}^{n} e_{ik}a_{kj}\right| \le \left\{\sum_{k=1}^{n}|e_{ik}|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\sum_{k=1}^{n}|a_{kj}|^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. Böylece

$$|b_{ij}|^p=\left|\sum_{k=1}^{n} e_{ik}a_{kj}\right|^p \le \left(\sum_{k=1}^{n}|e_{ik}|^p\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{kj}|^q\right)^{\frac{p}{q}}$$

elde edilir. Bu nedenle;

$$\begin{aligned}|B|_p^p=\sum_{i,j=1}^{n}|b_{ij}|^p &\le \sum_{i,j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|e_{ik}|^p\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{kj}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\\ &=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|e_{ik}|^p\right)\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{kj}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\\ &=n.|A|_{qp}^p \ .\end{aligned}$$

Halbuki $\left|B\right|_p = \left|A\right|_p$ olduğundan,

$$\left|A\right|_p \le n^{\frac{1}{p}} \left|A\right|_{qp}$$

elde edilir ki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.5. $A = \left(a_{ij}\right)$ $n \times n$ tipinde kompleks matris olsun. O zaman $p \ge 1$, $A=B+iC$ ve $k = 0,1,...,p$ iken,

$$\left|A\right|_p^p \le \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left|b_{ij}\right|^{p-k} \left|c_{ij}\right|^k \quad ,$$

(Taşçı 1994,i).

İspat. Her A kompleks matrisi aşağıdaki formda yazılabilir:

$$A = B + iC \text{ yada } \forall\ 1 \le i, j \le n \text{ için, } a_{ij} = b_{ij} + ic_{ij} .$$

Diğer taraftan,

$$\left|a_{ij}\right| \le \left|b_{ij}\right| + \left|c_{ij}\right|$$

den $p \ge 1$ için

$$\left|a_{ij}\right|^p \le \left(\left|b_{ij}\right| + \left|c_{ij}\right|\right)^p .$$

Binom açılımından;

$$\left(\left|b_{ij}\right| + \left|c_{ij}\right|\right)^p = \binom{p}{0} \left|b_{ij}\right|^p + \binom{p}{1} \left|b_{ij}\right|^{p-1} \left|c_{ij}\right| + ... + \binom{p}{p} \left|c_{ij}\right|^p$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left|b_{ij}\right|^{p-k} \left|c_{ij}\right|^k$$

yazılır. Böylece

$$\left|A\right|_p^p = \sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^p \le \sum_{i,j=1}^{n} \left(\left|b_{ij}\right| + \left|c_{ij}\right|\right)^p$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left|b_{ij}\right|^{p-k} \left|c_{ij}\right|^k$$

elde edilir.

3.2. ℓ_p Matris Normları ve Nümerikal Yarıçaplar

Teorem 3.2.1. $A=(a_{ij})$ herhangi bir $n\times n$ tipinde kompleks matris olsun. O zaman $1\le p\le\infty$ için

$$|A|_p \le n^{\frac{2}{p}} r(A) \ ,$$

(Taşçı 1993).

İspat. e_i ve e_j $\mathbb{C}^n$'nin *i*. ve *j*. Standart bazları olsun. O zaman

$$e_i A e_j^* = a_{ij} \qquad (i,j=1,2,...,n) \tag{3.1}$$

olur. Böylece matrislerin ℓ_p normu tanımından

$$\begin{aligned}
|A|_p &= \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^{n} |e_i A e_j^*|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(n^2 \max_{1\le i,j\le n} |e_i A e_j^*|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= n^{\frac{2}{p}} \max_{1\le i,j\le n} |e_i A e_j^*| \\
&\le n^{\frac{2}{p}} \max_{x^*x=1} |xAx^*| \\
&= n^{\frac{2}{p}} r(A)
\end{aligned}$$

teorem ispatlanır.

Teorem 3.2.2. $A=(a_{ij})\in \mathbb{C}_{n\times n}$, $B=(b_{ij})\in \mathbb{C}_{n\times n}$ ve $1\le p,q\le\infty$ için $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olsun. O zaman

$$|AB|_p \le n^{\frac{3}{p}+\frac{1}{q}} r(A) r(B) \ ,$$

(Taşçı 1993).

İspat. $C=AB$ kümesinde $C=(c_{ij})$ dir. $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ ile Hölder eşitsizliğinden

$$|c_{ij}| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. (3.1) den ;

$$
\begin{aligned}
\left|AB\right|_p^p &= \sum_{i,j=1}^{n} \left|c_{ij}\right|^p \\
&\le \sum_{i,j=1}^{n} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \left|a_{ik}\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left|b_{kj}\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right]^p \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \left|a_{ik}\right|^p \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \left|b_{kj}\right|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} \left|e_i A e_k^*\right|^p \right) \left(\sum_{k=1}^{n} \left|e_k B e_j^*\right|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \left|e_i A e_k^*\right|^p \right) \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \left|e_k B e_j^*\right|^q \right)^{\frac{p}{q}} \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \left(n \max_{1\le k\le n} \left|e_i A e_k^*\right|^p \right) \sum_{j=1}^{n} \left(n \max_{1\le k\le n} \left|e_k B e_j^*\right|^q \right)^{\frac{p}{q}} \\
&= \left(n^2 \max_{1\le i,k\le n} \left|e_i A e_k^*\right|^p \right) \left(n^{1+\frac{p}{q}} \max_{1\le k,j\le n} \left|e_k B e_j^*\right|^p \right) \\
&\le \left(n^2 \max_{x^*x=1} \left|xAx^*\right|^p \right) \left(n^{1+\frac{p}{q}} \max_{x^*x=1} \left|xBx^*\right|^p \right) \\
&= n^{3+\frac{p}{q}} \left[r(A) \right]^p \left[r(B) \right]^p
\end{aligned}
$$

elde edilir ve sağ ile sol tarafın p. dereceden kökü alınırsa;

$$\left|AB\right|_p \le n^{\frac{3}{p}+\frac{1}{q}} r(A).r(B).$$

Şimdi bir matrisin nümerik yarıçapı ve ℓ_p operatör normuyla ilgili aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.3. $A=\left(a_{ij}\right)$ herhangi bir $n\times n$ kompleks matris ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $1\le p,q\le\infty$ olsun. O zaman $\forall x\in\mathbb{C}^n$ için

$$r(A)\le \lambda_{qp}(n)\left\|A\right\|_p \ ,$$

(Taşçı 1993).

İspat. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ile Hölder eşitsizliğinden ve Lemma 3.1.1 'den

$$\begin{aligned} r(A) &= \max_{x^*x=1} \left| x^* A x \right| \\ &\le \max_{x^*x=1} \left| Ax \right|_p \left| x \right|_q \\ &\le \max_{x^*x=1} \left| Ax \right|_p \lambda_{qp}(n) \left| x \right|_p \\ &= \lambda_{qp}(n) \max_{|x|_p=1} \left| Ax \right|_p \\ &= \lambda_{qp}(n) \left\| A \right\|_p . \end{aligned}$$

Teorem 3.2.4. $A=(a_{ij})$ herhangi bir $n\times n$ kompleks matris olsun. Bu durumda $1\le p,q\le\infty$ için

$$\left| A \right|_{pq} \le n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} r(A) \ ,$$

(Taşçı 1993).

İspat : (3.1) ifadesi ve karma ℓ_{pq} norm tanımından;

$$\begin{aligned} \left| A \right|_{pq} &= \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij} \right|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| e_i A e_j^* \right|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\le \left[\sum_{j=1}^{n} \left(n \max_{1\le i\le n} \left| e_i A e_j^* \right|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} n^{\frac{q}{p}} \max_{1\le i\le n} \left| e_i A e_j^* \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(n^{1+\frac{q}{p}} \max_{1\le i,j\le n} \left| e_i A e_j^* \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \max_{1\le i,j\le n} \left| e_i A e_j^* \right| \\ &\le n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \max_{x^*x=1} \left| x A x^* \right| \\ &= n^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} r(A) \end{aligned}$$

olur ki; böylece ispat tamamlanır.

3.3. Determinantlar ve Normlar Arasındaki İlişkiler

Teorem 3.3.1. $A=\left(a_{ij}\right)$ herhangi bir $n\times n$ kompleks matris olsun. Bu durumda

$$\det\left(A^{*}A\right)\le\frac{\left\|A\right\|_{E}^{2n}}{n^{n}}$$

dir ve burada A^{*} , A'nın eşlenik transpozunu gösterir (Taşçı 1994,ii).

İspat. (Taşçı 1994,ii) 'den

$$\det A\le\left(\frac{trA}{n}\right)^{n} \tag{3.2}$$

olduğunu biliyoruz. Bu nedenle

$$\det\left(A^{*}A\right)\le\left(\frac{tr\left(A^{*}A\right)}{n}\right)^{n}.$$

Diğer taraftan

$$tr\left(A^{*}A\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^{2}=\left\|A\right\|_{E}^{2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\left(\det\left(A^{*}A\right)\right)^{\frac{1}{n}}&\le\frac{tr\left(A^{*}A\right)}{n}\\&=\frac{\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^{2}}{n}\\&=\frac{\left\|A\right\|_{E}^{2}}{n}\end{aligned}$$

yazılır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.1. $adj\left(A\right)$, A matrisinin ek matrisi olsun. O zaman

$$\left\|adj\left(A\right).A\right\|_{p}=\left|\det A\right|\quad,\quad\left(1\le p\le\infty\right)\quad,$$

(Taşçı 1994,ii).

İspat. A matrisi için E birim matris olmak üzere ;

$$adj(A).A = (\det A).E \tag{3.3}$$

olup (3.3) ve matrisler için ℓ_p operatör norm tanımdan

$$\begin{aligned}\left\|adj(A).A\right\|_p &= \max_{x\neq 0}\frac{\left|adj(A).Ax\right|_p}{\left|x\right|_p} = \max_{x\neq 0}\frac{\left|(\det A)Ex\right|_p}{\left|x\right|_p}\\ &= \max_{x\neq 0}\frac{\left|(\det A)x\right|_p}{\left|x\right|_p} = \max_{x\neq 0}\frac{\left|\det A\right|\left|x\right|_p}{\left|x\right|_p}\\ &= \left|\det A\right|\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.2. $adj(A)$, A matrisinin ek matrisi olsun. $1 \le p < \infty$ için

$$\left|adj(A).A\right|_p = n^{\frac{1}{p}}\left|\det A\right| \ ,$$

(Taşçı 1994,ii).

İspat. (3.3) ve ℓ_p matris normu tanımından

$$\begin{aligned}\left|adj(A).A\right|_p &= \left|(\det A)E\right|_p\\ &= \left[\sum_{i,j=1}^{n}\left|(\det A)e_{ij}\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\\ &= \left|\det A\right|\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|e_{ij}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

ve

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|e_{ij}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Lemma 3.3.1. $A = (a_{ij})$ herhangi bir $n\times n$ tipinde matris olsun. O zaman

$$\frac{tr\left|A\right|}{\sqrt{n}} \le \left\|diag(A)\right\|_E \ , \tag{3.4}$$

(Taşçı 1994,ii).

Burada $diag(A)$, A matrisinin esas köşegeninin elemanlarını gösterir.

İspat. Cauchy-Schwarz eşitsizliğini göz önüne aldığımızda;

$$tr|A| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|.1 \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \|diag(A)\|_E .\sqrt{n}$$

elde edilir ki; buda ispatı tamamlar.

Teorem 3.3.2. A herhangi bir $n \times n$ tipinde matris olsun. O zaman

$$\det A \le \frac{1}{n^{\frac{n}{2}}} \|diag(A)\|_E^n \quad ,$$

(Taşçı 1994,ii).

İspat: (3.2) ve (3.4) den

$$\frac{n(\det A)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}} \le \frac{tr|A|}{\sqrt{n}} \le \|diag(A)\|_E$$

yazılır. Bu durumda

$$(\det A)^{\frac{1}{n}} \le \frac{\sqrt{n}}{n} \|diag(A)\|_E$$

elde edilir.

Lemma 3.3.2. A herhangi bir $n \times n$ tipinde matris olsun.O zaman $1 \le p, q < \infty$ için

$$tr|A| \le n^{\frac{1}{q}} |diag(A)|_p \quad , \qquad (3.5)$$

(Taşçı 1994,ii).

İspat. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ile Hölder eşitsizliğinden

$$tr|A| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|.1 \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} 1^q \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= n^{\frac{1}{q}} |diag(A)|_p$$

bulunur. Böylece lemma ispatlanır.

Teorem 3.3.3. A herhangi bir $n\times n$ tipinde matris olsun.O zaman $1\le p,q<\infty$ için

$$\det A\le \frac{1}{n^{\frac{n}{p}}}\left|diag\left(A\right)\right|_p^n \ ,$$

(Taşçı 1994,ii).

İspat. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ alınsın. O zaman (3.2) ve (3.5) den

$$\left(\det A\right)^{\frac{1}{n}}\le \frac{tr\left|A\right|}{n}\le \frac{n^{\frac{1}{q}}\left|diag\left(A\right)\right|_p}{n}$$

yazılır. Bu nedenle

$$\left(\det A\right)^{\frac{1}{n}}\le n^{\frac{1}{q}-1}\left|diag\left(A\right)\right|_p$$

elde edilir.

Halbuki $\frac{1}{q}-1=-\frac{1}{p}$ olduğundan

$$\left(\det A\right)^{\frac{1}{n}}\le n^{-\frac{1}{p}}\left|diag\left(A\right)\right|_p$$

elde edilir ki; teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.3.4. A $n\times n$ tipinde herhangi bir reel yada kompleks matris olsun. Bu durumda

$$\left\|A\right\|_2=\max\left\{\left|\lambda\right|:\lambda \ A \text{ matrisinin öz değeridir.}\right\} \ ,$$

(Taşçı 1994).

İspat. λ A 'nın bir özdeğeri olsun ve x' de bu özdeğere karşılık gelen özvektör yani $Ax=\lambda x$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\left\|A\right\|_2^2&=\max_{\left\|x\right\|_2=1}\left\|Ax\right\|_2^2\\&=\max_{\left\|x\right\|_2=1}\left(Ax,Ax\right)\\&=\max_{\left\|x\right\|_2=1}\left(\lambda x,\lambda x\right)\end{aligned}$$

olur. Burada iki durum söz konusudur:

Durum1: Eğer λ reel ise o zaman;

$$\|A\|_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} \lambda^2 (x,x) = \max \lambda^2$$

olur ve mutlak değer fonksiyonunun tanımından;

$$\sqrt{\lambda^2} = |\lambda| = \begin{cases} \lambda & , \lambda > 0 \\ -\lambda & , \lambda < 0 \end{cases}$$

elde edilir ki bu durumda teoremin iddiası doğrudur.

Durum 2: Eğer λ kompleks ise o zaman;

$$\|A\|_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} \lambda\bar{\lambda} (x,x) = \max |\lambda|^2$$

olur ki yine iddia doğrudur.

4. ÖZEL MATRİSLERİN MATRİS ve OPERATÖR NORMLARI İLE İLGİLİ EŞİTSİZLİKLER

Teorem 4.1. $A=\left(\frac{1}{i+j}\right)_{n\times n}$ şeklinde tanımlı A matrisinin spektral normu için;

$$\|A\|_2 \le \sqrt{n^2-\frac{3n}{4}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. A matrisini ;

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n} \end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n} \end{pmatrix}}_{B} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 1 & 1 & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{C}$$

olacak şekilde iki matrisin Hadamard çarpımı olarak yazabiliriz. Bu durumda

$$\|A\|_2 \le r_1(B).c_1(C)$$

olduğundan

$$r_1(B)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(n-1).1^2}=\sqrt{n-\frac{3}{4}}$$

ve

$$c_1(C) = \sqrt{n.1^2} = \sqrt{n}$$

olup

$$\|A\|_2 \le \sqrt{n - \frac{3}{4}}.\sqrt{n}$$

$$\le \sqrt{n^2 - \frac{3n}{4}}$$

elde edilir.

Teorem 4.2. $A = (i+j)_{n\times n}$ şeklinde tanımlı A matrisinin spektral normu için ;

$$\|A\|_2 \le \frac{\sqrt{n.(7n+1).(2n+1).(14n^3 - 15n^2 + n + 6)}}{6}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada tanımlanan A matrisi Teorem 4.1. ile verilen A matrisinin Hadamard inversidir.

İspat . A matrisi ;

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & \cdots & n+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 1 & \cdots & 1 \\ 4 & 5 & 6 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \end{pmatrix}}_{B} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 1 & 1 & 5 & \cdots & n+2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{C}$$

şeklinde yazılır ve

$$\|A\|_2 \le r_1(B).c_1(C)$$

olduğundan

$$r_1(B)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(i+n)^2}=\sqrt{\frac{n.(7n+1).(2n+1)}{6}}$$

ve

$$c_1(C)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}(i+n)^2+1^2}=\sqrt{\frac{n.(14n^2-15n+1)}{6}+1}$$

olup

$$\|A\|_2\le\sqrt{\frac{n.(7n+1).(2n+1)}{6}}.\sqrt{\frac{n.(14n^2-15n+1)}{6}+1}$$

$$\le\frac{\sqrt{n.(7n+1).(2n+1).(14n^3-15n^2+n+6)}}{6}$$

elde edilir.

Teorem 4.3. $A=\left(\frac{1}{\sqrt{i+j}}\right)_{n\times n}$ şeklinde tanımlı A matrisinin spektral normu için ;

$$\|A\|_2\le\sqrt{n^2-\frac{n}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada tanımlı A matrisi Teorem 4.1. ile verilen A matrisinin Hadamard kareköküdür.

İspat . Hadamard çarpım tanımından A matrisi ;

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{4}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n+1}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n+2}}\\ \frac{1}{\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n+3}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{\sqrt{n+1}} & \frac{1}{\sqrt{n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n+3}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2n}}\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{4}} & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n+1}} & \frac{1}{\sqrt{n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n+3}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2n}} \end{pmatrix}}_{B} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{4}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ 1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n+2}} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n+3}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{C}$$

şeklinde yazarız. Bu durumda

$$\|A\|_2 \le r_1(B).c_1(C)$$

olduğundan

$$r_1(B) = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (n-1).1^2} = \sqrt{n-\frac{1}{2}}$$

ve

$$c_1(C) = \sqrt{n.1^2} = \sqrt{n}$$

olup

$$\|A\|_2 \le \sqrt{n-\frac{1}{2}}.\sqrt{n}$$

$$\le \sqrt{n^2-\frac{n}{2}}$$

elde edilir.

Teorem 4.4. $A = \left(\sqrt{i+j}\right)_{n\times n}$ şeklinde tanımlı A matrisinin spektral normu için;

$$\|A\|_2 \le \frac{\sqrt{(3n^2+n).(3n^2-3n+2)}}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada tanımlanan A matrisi Teorem 4.1. ile verilen A matrisinin Hadamard inversinin, Hadamard kareköküdür.

İspat. Hadamard çarpım tanımından A matrisini;

$$A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{4} & \cdots & \sqrt{n+1} \\ \sqrt{3} & \sqrt{4} & \sqrt{5} & \cdots & \sqrt{n+2} \\ \sqrt{4} & \sqrt{5} & \sqrt{6} & \cdots & \sqrt{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{n+1} & \sqrt{n+2} & \sqrt{n+3} & \cdots & \sqrt{2n} \end{pmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{4} & 1 & \cdots & 1 \\ \sqrt{4} & \sqrt{5} & \sqrt{6} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{n+1} & \sqrt{n+2} & \sqrt{n+3} & \cdots & \sqrt{2n} \end{pmatrix}}_{B} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{4} & \cdots & \sqrt{n+1} \\ 1 & 1 & \sqrt{5} & \cdots & \sqrt{n+2} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \sqrt{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{C}$$

şeklinde yazarsak ve

$$\|A\|_2 \le r_1(B).c_1(C)$$

eşitsizliğini dikkate alarak

$$r_1(B)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(i+n)}=\sqrt{\frac{3n^2+n}{2}}$$

ve

$$c_1(C)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1}(i+n)+1^2}=\sqrt{\frac{3n^2-3n}{2}+1}$$

olup

$$\|A\|_2 \le \sqrt{\frac{3n^2+n}{2}}.\sqrt{\frac{3n^2-3n}{2}+1}$$

$$\le \frac{\sqrt{(3n^2+n).(3n^2-3n+2)}}{2}$$

elde edilir.

Teorem 4.5. $A=(i+j)_{n\times n}$ şeklinde tanımlanan A matrisinin Euclidean normu için ;

$$\|A\|_E = \sqrt{\frac{7n^4+12n^3+5n^2}{6}}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat . A matrisi için

$$\|A\|_E^2 = \sum_{s=1}^{n}\left(s(s+1)^2\right)+\sum_{s=1}^{n-1}\left((n-s)(n+1+s)^2\right)$$

$$=\frac{1}{4}(n+1)^4+\frac{1}{6}(n+1)^3-\frac{1}{4}(n+1)^2-\frac{1}{6}n-\frac{1}{6}+\frac{11}{12}n^4+\frac{5}{6}n^3-\frac{11}{12}n^2-\frac{5}{6}n$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\|A\|_E^2 = \frac{7n^4+12n^3+5n^2}{6}$$

olur ki, her iki tarafın karekökü alındığında istenilen elde edilir.

Teorem 4.6. $A=\left(\sqrt{i+j}\right)_{n\times n}$ şeklinde verilen A matrisinin Euclidean normu için ;

$$\|A\|_E = \sqrt{n^3+n^2}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat . Euclidean normu tanımından;

$$\|A\|_E^2 = \sum_{s=1}^{n}\left(s(s+1)\right)+\sum_{s=1}^{n-1}\left((n-s)(n+1+s)\right)$$

$$=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{3}n-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}n^3-\frac{2}{3}n$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\|A\|_E^2 = n^3+n^2$$

eşitliği elde edilir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.7. $A=\left(\frac{1}{\sqrt{i+j}}\right)_{n\times n}$ şeklinde tanımlanan A matrisinin Euclidean normu ;

$$\|A\|_E = \sqrt{(2n+1)\Psi(2n+1)-(2n+2)\Psi(n+2)+2-\gamma}\,.$$

Burada γ , Gamma fonksiyonu olup değeri $\gamma = 0,577$ dir.

İspat . Matrisler için Euclidean normu tanımından;

$$\|A\|_E^2 = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{s}{(s+1)}\right)+\sum_{s=1}^{n-1}\left(\frac{(n-s)}{(n+1+s)}\right)$$

$$= n+1-\Psi(n+2)-\gamma-n+(2n+1)\Psi(2n+1)+1-(2n+1)\Psi(n+2)$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\|A\|_E^2 = (2n+1)\Psi(2n+1)-(2n+2)\Psi(n+2)+2-\gamma$$

bağıntısı bulunur. Her iki tarafın karekökü alınırsa istenen elde edilir.

Teorem 4.8. $A=\left(\frac{1}{i+j}\right)_{n\times n}$ şeklinde tanımlı A matrisinin Euclidean normu için ;

$$\|A\|_E = \sqrt{2.\Psi(n+2)+(2n+2)\Psi(1,n+2)-\Psi(2n+1)-(2n+1)\Psi(1,2n+1)+\gamma-\frac{1}{6}\pi^2}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat . Euclidean normu tanımından;

$$\|A\|_E^2 = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{s}{(s+1)^2}\right)+\sum_{s=1}^{n-1}\left(\frac{(n-s)}{(n+1+s)^2}\right)$$

$$= \Psi(n+2)+\Psi(1,n+2)+\gamma-\frac{1}{6}\pi^2-\Psi(2n+1)$$
$$-(2n+1)\Psi(1,2n+1)+\Psi(n+2)+(2n+1)\Psi(1,n+2)$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\|A\|_E^2 = 2.\Psi(n+2)+(2n+2)\Psi(1,n+2)-\Psi(2n+1)-(2n+1)\Psi(1,2n+1)+\gamma-\frac{1}{6}\pi^2$$

bağıntısı elde edilir. Ve teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.9. $A,\ A=\left(\frac{1}{i+j}\right)_{n\times n}$ şeklinde bir matris olmak üzere determinantı ;

$$|A|=\frac{(1!2!3!...(n-1)!)^4(n!)^2}{1!2!3!...(2n)!}$$

dir.

İspat . A matrisinin determinantı açık olarak yazılırsa

$$|A|=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \cdots & \frac{1}{n+4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \frac{1}{n+4} & \cdots & \frac{1}{2n} \end{vmatrix}$$

olur. Determinantta birinci satırın uygun katlarını diğer satırlara eklersek determinant,

$$|A|=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} & \cdots & \frac{(n-1)}{3(n+1)(n+2)} \\ 0 & \frac{1}{30} & \frac{1}{24} & \frac{3}{70} & \cdots & \frac{(n-1)}{2(n+1)(n+3)} \\ 0 & \frac{1}{30} & \frac{3}{70} & \frac{9}{200} & \cdots & \frac{3(n-1)}{5(n+1)(n+4)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{(n-1)}{3(n+1)(n+2)} & \frac{(n-1)}{2(n+1)(n+3)} & \frac{3(n-1)}{5(n+1)(n+4)} & \cdots & \frac{(n-1)^2}{2n(n+1)^2} \end{vmatrix}$$

şekline dönüşür. Aynı şekilde ikinci satırın uygun katlarını diğer satırlara eklersek determinant,

$$|A|=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{30} & \cdots & \frac{(n-1)}{3(n+1)(n+2)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{600} & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{10(n+1)(n+2)(n+3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{(n-1)(n-2)}{10(n+1)(n+2)(n+3)} & \cdots & \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{2n(n+1)^2(n+2)^2} \end{vmatrix}$$

olur. Benzer şekilde determinantta üçüncü satırın uygun katlarını diğer satırlara eklersek determinant ,

$$|A|=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{36} & \frac{1}{30} & \cdots & \frac{(n-1)}{3(n+1)(n+2)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{600} & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{10(n+1)(n+2)(n+3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2}{2n(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2} \end{vmatrix}$$

olur. Bu şekilde elemanter satır işlemlerine devam edilirse determinantın elemanları

$$a_{ij}=\begin{cases} \dfrac{(i-1)!.(j-1)!.i!.j!}{(j-i)!.(2i-1)!.(i+j)!} & j\geq i \\ 0 & j<i \end{cases}$$

olacak şekilde yazılabilir. Böylece determinant,

$$|A|=\begin{vmatrix} \frac{0!.0!.1!.1!}{0!.1!.2!} & \frac{1!.0!.1!.2!}{1!.1!.3!} & \frac{2!.0!.1!.3!}{2!.1!.4!} & \cdots & \frac{(n-1)!.0!.1!.n!}{(n-1)!.1!.(n+1)!} \\ 0 & \frac{1!.1!.2!.2!}{0!.3!.4!} & \frac{2!.1!.2!.3!}{1!.3!.5!} & \cdots & \frac{(n-1)!.1!.2!.n!}{(n-2)!.3!.(n+2)!} \\ 0 & 0 & \frac{2!.2!.3!.3!}{0!.5!.6!} & \cdots & \frac{(n-1)!.2!.3!.n!}{(n-3)!.5!.(n+3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(n-1)!(n-1)!.n!.n!}{0!.(2n-1)!(2n)!} \end{vmatrix}$$

şeklinde yazılır. Ve determinantın değeri köşegen elemanlarının çarpımı olduğundan

$$|A| = \left(\frac{0!.0!.1!.1!}{0!.1!.2!}\right).\left(\frac{1!.1!.2!.2!}{0!.3!.4!}\right).\left(\frac{2!.2!.3!.3!}{0!.5!.6!}\right).....\left(\frac{(n-1)!.(n-1)!.n!.n!}{0!.(2n-1)!.(2n)!}\right)$$

$$= \frac{(1!.2!.3!.....(n-1)!)^4.(n!)^2}{1!.2!.3!.....(2n)!}$$

elde edilir.

Teorem 4.10. $A = (i+j)_{n\times n}$ tipinde bir matris olmak üzere $n > 2$ için;

$$|A| = 0\,.$$

İspat. A matrisinin determinantı açık olarak yazılırsa ,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots & n+3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots & n+4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & n+4 & \cdots & 2n \end{vmatrix}$$

olur. Determinantta birinci satırın uygun katlarını diğer satırlara eklersek determinant,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \cdots & -\frac{(n-1)}{2} \\ 0 & -1 & -2 & \cdots & (n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\frac{(n-1)}{2} & (n-1) & \cdots & -\frac{(n-1)(n-1)}{2} \end{vmatrix}$$

olur. Aynı şekilde ikinci satırın uygun katlarını diğer satırlara eklersek determinant,

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \cdots & -\frac{(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

şeklinde elde edilir ki , $n > 2$ için determinant

$$|A| = 0$$

olarak bulunur.

Sonuç 4.1. $A = (i + j)_{n\times n}$ matrisi için

$$\sqrt{\frac{7n^2 + 12n + 5}{6}} \le r(A)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat . Teorem 3.2.1 deki $|A|_p \le n^{\frac{2}{p}}.r(A)$ eşitsizliğinde $p = 2$ alındığında

$$\|A\|_E \le n.r(A)$$

ve

$$\|A\|_E = \sqrt{\frac{7n^4 + 12n^3 + 5n^2}{6}}$$

olduğundan ;

$$\sqrt{\frac{7n^2 + 12n + 5}{6}} \le r(A)$$

elde edilir.

Sonuç 4.2. $A = \left(\sqrt{i + j}\right)_{n\times n}$ matrisi için

$$\sqrt{n+1} \le r(A)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat . Teorem 3.2.1 deki $|A|_p \le n^{\frac{2}{p}}.r(A)$ eşitsizliğinde $p = 2$ alındığında

$$\|A\|_E \le n.r(A)$$

ve

$$\|A\|_E = \sqrt{n^3 + n^2}$$

olup, gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\sqrt{n+1} \le r(A)$$

elde edilir.

Açıklama : Benzer sonuçlar $A=(i+j)$ ve $A=\left(\sqrt{i+j}\right)$ matrislerinin Hadamard inversleri içinde verilebilir.

Sonuç 4.3. $A=(i+j)_{n\times n}$ matrisi için

$$\left|A^{*}.A\right| \le \left(\frac{7n^{3}+12n^{2}+5n}{6}\right)^{n}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat . Teorem 3.3.1 den

$$\det\left(A^{*}.A\right) \le \frac{\left\|A\right\|_{E}^{2n}}{n^{n}}$$

ve

$$\left\|A\right\|_{E}=\sqrt{\frac{7n^{4}+12n^{3}+5n^{2}}{6}}$$

olduğundan

$$\left|A^{*}.A\right| \le \left(\frac{7n^{3}+12n^{2}+5n}{6}\right)^{n}.$$

Sonuç 4.4. $A=\left(\sqrt{i+j}\right)_{n\times n}$ matrisi için

$$\left|A^{*}.A\right| \le \left(n^{2}+n\right)^{n}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat . Teorem 3.3.1 den

$$\det\left(A^{*}.A\right) \le \frac{\left\|A\right\|_{E}^{2n}}{n^{n}}$$

ve

$$\left\|A\right\|_{E}=\sqrt{n^{3}+n^{2}}$$

olduğundan

$$\left|A^{*}.A\right| \leq \left(n^{2}+n\right)^{n}.$$

Sonuç 4.5. $A=\left(\frac{1}{i+j}\right)_{n\times n}$ matrisi için

$$\left\|adj\left(A\right).A\right\|_{p}=\left|\frac{(1!2!3!...(n-1)!)^{4}(n!)^{2}}{1!2!3!...(2n)!}\right|,\ \left(1\leq p\leq\infty\right)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat . Sonuç 3.3.1 den

$$\left\|adj\left(A\right).A\right\|_{p}=\left|\det A\right|$$

ve

$$\left|A\right|=\frac{(1!2!3!...(n-1)!)^{4}(n!)^{2}}{1!2!3!...(2n)!}$$

olduğundan

$$\left\|adj\left(A\right).A\right\|_{p}=\left|\frac{(1!2!3!...(n-1)!)^{4}(n!)^{2}}{1!2!3!...(2n)!}\right|$$

elde edilir.

Sonuç 4.6. $A=\left(\frac{1}{i+j}\right)_{n\times n}$ matrisi için $p\geq 3$ olmak üzere

$$\left|A\right|_{p}^{p}\leq\begin{cases}\zeta\left(p-1\right)-1 & ;\ p \text{ çift}\\ 1,082-\zeta\left(p\right) & ;\ p \text{ tek}\end{cases}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat . A matrisinin ℓ_{p} normu

$$\left|A\right|_{p}^{p}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{s}{\left(s+1\right)^{p}}\right)+\sum_{s=1}^{n-1}\left(\frac{n-s}{\left(n+s+1\right)^{p}}\right)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu eşitlikteki birinci toplamın değeri $a,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{s}{(s+1)^{p}}=\begin{cases}\frac{1}{(p-1)!}\Psi(p-1,n+2)+\frac{1}{(p-2)!}\Psi(p-2,n+2)-\frac{\pi^{p}}{a}+\zeta(p-1) & ;p \text{ çift}\\ -\frac{1}{(p-1)!}\Psi(p-1,n+2)-\frac{1}{(p-2)!}\Psi(p-2,n+2)+\frac{\pi^{p-1}}{b}-\zeta(p) & ;p \text{ tek}\end{cases}$$

şeklinde olup p çift iken $\frac{\pi^{p}}{a}$ değeri sürekli negatif olduğundan , $\frac{\pi^{p}}{a}$ nın alabileceği minimum değer olan "1" ; benzer şekilde p tek iken $\frac{\pi^{p-1}}{b}$ nin işareti pozitif olduğundan $\frac{\pi^{p-1}}{b}$ yerine alabileceği maksimum değeri olan 1,082 alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\frac{s}{(s+1)^{p}}\to\begin{cases}\zeta(p-1)-1 & ;p \text{ çift}\\ 1,082-\zeta(p) & ;p \text{ tek}\end{cases}$$

elde edilecektir.

Ayrıca diğer toplam,

$$\sum_{s=1}^{n-1}\frac{n-s}{(n+s+1)^{p}}=(-1)^{p-1}.\frac{1}{(p-1)!}(2n+1)\Psi(p-1,2n+1)+(-1)^{p-1}\frac{1}{(p-2)!}\Psi(p-2,2n+1)$$

$$+(-1)^{p}\frac{1}{(p-1)!}(2n+1)\Psi(p-1,n+2)+(-1)^{p}\frac{1}{(p-2)!}\Psi(p-2,n+2)$$

olup limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}\frac{n-s}{(n+s+1)^{p}}\to 0$$

olur. Buradan

$$|A|_{p}^{p}\le\begin{cases}\zeta(p-1)-1 & ;p \text{ çift}\\ 1,082-\zeta(p) & ;p \text{ tek}\end{cases}$$

elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada esas itibarı ile elemanları $i+j$ şeklinde olan özel matrislerin normları için sınırlar bulunmuş, determinantları hesaplanmıştır.

Bulunan bu sınırlar, farklı metotlar ile elde edilebilecek sınırlar ile karşılaştırılabilir. Ayrıca determinant için bulunan formül, elemanları h_{i+j} şeklinde tanımlanan $H=\left(h_{i+j}\right)_{n.n}$ Hankel matrisi için genelleştirilebilir mi? sorusuna cevap aranabilir.

6. KAYNAKLAR

Bronson, R., 1999, Matris İşlemleri , Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Bozkurt, D., Türen, B., Solak, S., 2005, Lineer Cebir, Konya.

Horn, R.A., Johnson, C.R., 1996 , Matrix Analysis, Combrigde University Press.

Mathias, R., 1990, "The Spectral Norm of A Nonnegative Matrix", Linear Algebra Appl., 131: 269 – 284.

Moenck, R., 1977, "On Computing Closed Forms for Summations", in: Proreedings of The MACSYMA User's Conference, pp. 225 – 236.

Solak, S., Türkmen, R., Bozkurt, D., 2003, "On GCD, LCM and Hilbert Matrices and Their Applications", Applied Math. And Comp. , 146: 595 – 600.

Taşçı, D., 1993, "ℓ_p Matrix Norms and Numerical Radii", Jour. Inst. Math. Comp. Sci. (Math.Ser.)6-3: 237 - 240.

Taşçı, D., 1994(i), "On The Relations Between ℓ_p Norms For Matrices", Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A, 13: 43 - 47.

Taşçı, D., 1994(ii), "Relations Between Norms and Determinants", S.Ü.Fen-Edebiyat Fak. Fen Dergisi 12: 109 - 115.

Taşçı, D., 1994, "The ℓ_p Operator Norms of Some Special Matrices", S.Ü.Fen-Edebiyat Fak. Fen Dergisi 12: 116 - 122.