T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARALELKENAR VE HERON ÜÇGENLERİ

DURSUN GÜL KIZIL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA – 2007

T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARALELKENAR VE HERON ÜÇGENLERİ

Dursun Gül KIZIL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez ..../…./2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

……...	……...	……...
Yrd.Doç.Dr.	Prof.Dr.	Prof.Dr.
A.Selçuk KURBANLI	Hasan ŞENAY	Halil ARDAHAN
(DANIŞMAN)	(JÜRİ)	(JÜRİ)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PARALELKENAR VE HERON ÜÇGENLERİ

Dursun Gül KIZIL

Selçuk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr. A. Selçuk KURBANLI

2007, Sayfa 39

Jüri: Yrd.Doç.Dr. A. Selçuk KURBANLI

Prof.Dr. Hasan ŞENAY

Prof.Dr. Halil ARDAHAN

Bu çalışmada; ilk olarak, Heron üçgenleri tanıtılarak kısa bir tarihçeye yer verilmiştir.

İkinci ve üçüncü bölümde, temel tanım ve teoremlere yer verildi. Dördüncü bölümde, rasyonel kenarortaylı ve rasyonel kenarlı Heron üçgenlerinin varlığının tespiti ve Heron paralelkenarlarının elde edilişleri tartışılmıştır.

Son olarak, (n,m) paralelkenarından, $m+d$ köşegenli iki Heron üçgeninin nasıl elde edileceğini gösterdik. Hatta, (n,m) paralelkenarın $n+d$ köşegenli iki Heron üçgenlerinin nasıl elde edileceğini de ispatladık.

Ayrıca düzgün altıgen ve düzgün sekizgenin Heron çokgeni olup olmadığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Heron Üçgeni, Paralelkenar, Pisagor Üçgeni, Kongruent Sayılar, Çokgenler.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

PARALLELOGRAM AND HERONIAN TRIANGLES

Dursun Gül KIZIL

Selcuk University

Graduate School of Natural and Applied Science

Department of Mathematics

Supervisor: Asist.Prof.Dr. A. Selçuk KURBANLI

2007, Page 39

Jury: Asist.Prof.Dr. A. Selçuk KURBANLI

Prof.Dr. Hasan ŞENAY

Prof.Dr. Halil ARDAHAN

In this study; Heron triangles have been introduced at first and the history of Heron triangles have been mentioned shortly.

In the second and thirth sections; fundamental definitions and theorems are given. In the fourth section of our study; the existence of triangels with a rational median and rational sides and the parallelograms with a rational sides and dioganals have been discussed.

At last; we showed how to obtain two Heron triangels from the paralleologrames of side (n,m) and dioganols $m+d$. Also, we proved how to obtain two Heron triangels from the parallelogram of side (n,m) and diagonal $n+d$.

Also, it was showed whether the regular hexagon and regular octagon are Heron polygons or not.

Key Words: Heronian Triangels, Parallelogram, Pythageran Triangels, Congruent Numbers, Polygons.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, cebir ve sayılar teorisinde önemli olan "Paralelkenar ve Heron Üçgenleri" konusu üzerinde yapılmıştır. Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Öğretim Üyesi Yrd.Doç.Dr. A. Selçuk KURBANLI yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

"Paralelkenar ve Heron Üçgenleri" adlı tez konusunun tespitinde ve hazırlanması sırasında benden yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd.Doç.Dr. A. Selçuk KURBANLI ve Prof.Dr. Hasan ŞENAY hocama ayrıca eğitimimin her aşamasında maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan çok kıymetli aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Dursun Gül KIZIL

Şubat – 2007

KULLANILAN SEMBOLLER

(a, b, c); T: (a, b, c)	–	Kenar uzunlukları a, b ve c olan üçgen
s	–	Üçgenin çevre uzunluğunun yarısı
Δ; A	–	Üçgenin alanı
(a, b, c)	–	Kenar uzunlukları a, b ve c olan üçgen
(n, m)	–	Kenar uzunlukları n ve m olan paralelkenar
(m, n)	–	$(m, k, k+n)$ biçimindeki özel Heron üçgen ailesi
r	–	Üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı
Z^+	–	Pozitif tamsayılar cümlesi
F_n	–	Fibonacci sayıları
$(a, b) = 1$	–	a ve b pozitif tamsayıları aralarında asal
$[0; \sim \sim \sim, g]$	–	Tam kısmı 0 olan sonlu sürekli kesir

İÇİNDEKİLER

Özet ..... **i**

Abstract ..... **ii**

Önsöz ..... **iii**

Semboller ..... **iv**

İçindekiler ..... **v**

1. GİRİŞ 1

    1.1. Kaynak Araştırması 4

2. ÖN BİLGİLER 7

3. HERON ÜÇGENLERİNİN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ 10

4. RASYONEL KENARORTAYLI HERON ÜÇGENLERİ; HERON PARALELKENARI 23

5. HERON PARALELKENARLARININ ALANI VE ÇOKGENLER 26

6. ÖRNEKLER 32

7. SONUÇ 37

8. KAYNAKLAR 38

1. GİRİŞ

Alexandria Heron, Mısır'da Great Scholory şehrinde M.Ö. 100 – M.S. 250 yılları arasında yaşadığı bilinen bir Yunan matematikçisidir. Bazı kaynaklara göre M.S. 50 yıllarında İskenderiye'de doğduğu, bazılarına göre de M.Ö. 150 senelerinde Mısır'a bağlı Ptolemaic'de doğduğu belirtilmektedir. Bütün bu ifadeler bir çelişki oluşturmaktadır. Bundan dolayı Heron'un ilme kazandırdıklarını dikkate alacağız. Bununla ilgili olarak pek çok kaynak tarafından da verilen kitapları vardır. Heron, ilme 14 tane büyük eser bırakmıştır. Ayrıca Heron, buharla çalışan ilk motorların, itfaiye de kullanılan basınçlı su pompasının ve inşaatta kullanılan su terazisinin de yapıcısıdır.

Kenar uzunlukları verilen üçgenlerin ve dörtgenlerin alanını hesaplama formülü gibi geometriye çok önemli katkıları mevcuttur.

$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ olmak üzere üçgen alan formülü,

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

dir. Buna üçgeninin alanını hesaplama da Heron formülü denir. Kenar uzunlukları ile alanı aynı zamanda rasyonel olan üçgenlere Heron üçgeni adı verilir. Heron'un adını temsil eden ve onun sunduğu problem; kenarlarının uzunluğu ve alanı rasyonel sayılar olan üçgenleri tanımlamaktadır. M.Ö. 100'lü yıllarda Heron bu formülü "Metrica" isimli eserinde vermiş ve kanıtlamıştır. Fakat ne yazık ki eseri kaybolduğundan, 1894'te ufak bir parçasının, 1896'da da tamamının bulunmasına kadar kimse tarafından bilinmemiştir. Ünlü Türk bilgini Muhammed El Biruni yazılarında bu formülü Arşimed'e (M.Ö. 212) ithaf etmiştir.

Heron, Metrica I – II – III adlı kitapları ile de geometriye çok önemli katkılarda bulunmuştur. Ayrıca, Dioptra, Catoptrica ve Pneumatica adlı eserleri de bulunmaktadır. Bu eserlerinde;

– Dioptra – Ölçme (haritacılık) ve teodolitleri ele alır.

– Catoptrica – Aynalar ele alınır.

– Pneumatica – Bir itfaiye tulumbası gibi, çeşitli uzunluktaki borulardan oluşan ve bu boruların içinden basınçlı hava geçirmesiyle değişik tonlarda sesler çıkarabilen bir müzik aleti gibi tasarımlar verilir.

Özel Heron üçgenleri olarak bilinen bir dik açısı olan üçgenler, Heron'dan uzun zaman önce Pisagor tarafından belirlenmiştir. Lehmer ve Schubert özel Heron problemlerini çözmek ve onları genelleştirmek için Heron formülünü kullandı. Bundan başka Heron üçgenlerini tanımlamak için yarım açıların tanjantlarının rasyonelliğini kullandı.

Sastry (1975 – 1976) Heron üçgenlerini elde etmek için Lagrange özdeşliğini ve alansız yaklaşımı kullanmıştır. Sastry (2000) bir çalışmasında, kenar uzunlukları $(m,k,k+n)$ olan tamsayı üçlülerini kullanmıştır. Sastry (2001) de bir Heron üçgenini üretmek için Gergonne – Cevion ve kenarortay perspektifini ele alarak Heron üçgenlerinin λ – ailesini tanımlamıştır.

Dickson (1971) de; eserinin basım yılına kadar olan sayılar teorisi ile ilgili gelişmeleri, açık problemleri ve çalışmaları özetlemiştir.

Luca (2000) de; "kenarları, köşegenleri ve cisim köşegeni tamsayı olan bir dikdörtgenler prizmasının bulunması" probleminin, "kenarları tamsayıların karelerinden ve açıortayları da tamsayılardan oluşan bir üçgen bulunması" problemine eşdeğer olduğunu ortaya koymuştur.

Fleenor (1997) ise; en küçük Heron üçgeninin 6 birim kareli 3 – 4 – 5 üçgeni olduğunu ve özellikle 3 – 4 – 5 üçgeninin kenarlarının uzunluklarının ardışık tam sayılar olmasından hareketle kenarları ardışık tamsayılardan oluşan diğer Heron üçgenlerinin varlığını incelemiştir.

A.G. Schaake ve J.C. Turner (1992) çalışmalarında Primitif Pisagor üçlüsü için yeni bir gösterimini bulmuşlardır. Primitif Pisagor üçlüsü tam olarak,

$$x=(Q-R)/N\,, \qquad y=(P+S)/N\,, \qquad z=(Q+R)/N$$

şeklindedir. Burada P/Q,

$$[0;\, u_1,\, u_2,\, \ldots,\, u_i,\, v,\, 1,\, j,\, (v+1),\, u_i,\, \ldots,\, u_{2,}\, u_1]$$

şeklinde sürekli kesrin değeri ve R/S bu sürekli kesrin bir önceki yakınsayanına eşittir. Burada R/S, N elemanına bağlıdır. Fakat N, $(J+1)$ ya da $2(J+1)$ dir.

Rusen (1998) de eşit alanlı rasyonel üçgenlerin sonsuz sayıda olduğunu ve bu üçgenlerin verilen bir rasyonel üçgene bağlı olarak üretebileceğini göstermiştir.

Gurbanlıyev (2003) de, Heron üçgenleri ile Pisagor üçgenleri, Latisler, Kongruent Sayılar ve Sürekli Kesirlerle aralarındaki ilişkileri incelemiştir. Kenar uzunlukları birbirinden farklı Fibonacci sayılarından oluşan sadece Heron üçgenlerinin değil böyle hiçbir üçgenin mevcut olmadığını ve kenar uzunlukları tam sayı olan bir eşkenar üçgenin Heron üçgeni olmayacağını göstermiştir.

K.R.S. Sastry (2000), $(u_i, v_i) = 1$ ve $u = u_i, v = v_i, i = 1, 2$ için

$$(a,b,c) = (2k(eu^2 - v^2),\ e(k-d)u^2 + (k+d)v^2,\ e(k+d)u^2 + (k-d)v^2)$$

üçgeni $T_i = (a_i, b_i, c_i)$ yi sağlasın. $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ ise bu durumda T_1 ve T_2 lerin farklı Heron üçgenleri olduğunu göstermiştir.

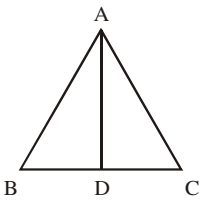
Sastry'nın özel Heron üçgenlerini elde edişinden yola çıkarak, herhangi bir (n,m) paralelkenarından bazı şartlar altında Heron üçgen ailesinin üretildiğini gösterdik.

Kenar uzunlukları (n,m) ve köşegeni $(m+d)$ olan paralelkenarın Heron üçgenlerinin elde edilebileceğini indüksiyon metoduyla ispatladık.

Tezin son bölümünde ise yaptığımız bu çalışmalarla ilgili örnekler verdik.

1.1. Kaynak Araştırması

Bir Rasyonel Kenarortay ve Rasyonel Kenarlı Üçgenler – Rasyonel Kenarlı ve Köşegenli Paralelkenarlar



C.G. Bachet'in dördüncü problemi, Diophantus VI, 18 üzerine yorumu ilave ettiği, bir rasyonel kenarortaylı rasyonel bir üçgenin nasıl bulunduğudur. İlk olarak, AD kenarortayının çizildiği A açısı dar olsun. BC kenarının orta noktası D olarak gösterilsin. 2^2+3^2 olan iki karenin toplamı 13 olacak şekilde herhangi bir sayı olsun. $DC = 2$, $AD = 3$ dür. İki karenin toplamının iki katı, iki karenin toplamıdır. $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2DC^2 = 2.13 = 5^2 + 1^2$ dir. Fakat 5 ve 1, AB ve AC'nin değerleri değildir. Buradan, Diophantus II, 10 dan $5^2 + 1^2$ i diğer iki karenin toplamına böleriz yani, $(5 - N)^2 + (1 + 2N)^2$ dir ki $N = 6 / 5$, $AB = 3^{4/5}$; $AC = 3^{2/5}$ dir. Tamamını 5 ile çarparsak, $AB = 19$, $AC = 17$, $BC = 20$, $AD = 15$ elde ederiz.

A açısı geniş açı olursa, $DC = 3$, $AD = 2$ alınır. $BC = 30$, $AD = 10$ olduğunda önceki gibi AB ve AC'nin aynı değerleri alınır.

T.F. de Lagny, herhangi paralelkenarın, iki köşegenin toplamı dört kenarın kareleri toplamına eşit olduğunu ispatladı ve $9^2 + 13^2 = 2(5^2 + 10^2)$, $17^2 + 31^2 = 2(15^2 + 20^2)$ örneklerini verdi. Tamsayılarda $x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2)$ yi çözmek için, $a = b$ iken $y = 2a - xb / c$ alınabilir. Buradan da $x = 4abc / (b^2 + c^2)$ bulunur. Sonra,

$$x^2 + y^2 = 2\{a^2 + (a + b)^2\}$$

denkleminin özel çözümü, $x = b$, $y = b + 2a$ olarak verilir. Genel çözümü bulmak için, $c = 2a + b$, $x = c \pm z$, $y = b \pm zd / e$ yi yerine koyarak, $z = (\pm 2bde \pm 2ce^2) / (d^2 + e^2)$ olur.

B.A. Gould, a, b rasyonel kenarlı ve x, y köşegenleri olan, $x2 + y^2 = 2(a^2 + b^2)$ şartını sağlayan bir parelelkenar buldu. Bu denklemde, $a + b = s$, $a - b = t$ alınırsa, $x^2 + y^2 = (t^2 + s^2)$ olur. Eğer $f^2 = d^2 + e^2$ ise, çözüm $fx = sd + te$, $fy = se - td$ dir.

Wm. Lenhart, kenarları $a \pm a^1$ ve köşegenleri $2b$, $2b^1$ olarak aldığında,

$a^2 - b^2 = b^{1^2} - a^{1^2}$ olur ki, bu denklem,

$$a, b = nn^1 \pm mm^1;\ b^1, a^1 = nm^1 \pm mn^1$$

sağlanır.

J. Mourin ise Gould'un çözümünü verdi.

E. Heret, $u > v$, $p > 1$ olacak şekilde, $x = pv + u, y = pu - v, \ z = u + v + p(u - v)$ kenarları olan üçgeni inceledi. m_z kenarortayı rasyoneldir: $2m_z = p(u + v) - u + v$ dir. Eğer;

$$u : v = (\mu - 2)(4p - \mu) : (\mu - 4)(2p + \mu), \ 4 < \mu < 3 + p$$

ise m_y de rasyoneldir.

M.A. Gruber, a rasyonel olacak şekilde, $b=a+p$, $c = 2a + q$ alınarak, $2(a^2 + b^2) = c^2 + d^2$ olarak çözdü. W.F. King, Gould'un yaptığı gibi devam etti.

H. Schubert, *a, b, c* rasyonel kenarlı ve bir veya daha fazla rasyonel kenarortaylı üçgenleri araştırdı. t_a, a kenarına karşılık gelen kenarortayı göstersin.

$(2t_a)^2 - (b - c)^2 = (b + c)^2 - a^2 = 4s(s - a)$, $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ den,

$$\pm t_a - \frac{1}{2}(b - c) = sx \quad \pm t_a + \frac{1}{2}(b - c) = (s - a) / x$$

t_a'nın rasyonelliği, x'i içerir.

Çıkartır ve sx'i $(s - a)x + (s - b)x + (s - c)x$ de ve $c - b$'yi $s - b - (s - c)$ de tekrar yerine yazalım. Böylece,

$$\frac{s-a}{x} + \frac{s-b}{x+1} + \frac{s-c}{x-1} = 0$$

olur. $s - a$, vs. den, $-1 < x < 1$ pozitif olabilir. Benzer şekilde,

$$\frac{s-b}{y} + \frac{s-c}{y+1} + \frac{s-a}{y-1} = 0, \qquad -1 < y < 1$$

olan, t_b'nin rasyonelliği, rasyonel bir y değerinin varlığına bağlıdır.

Bu iki denklem, $s - a$, … oranlarını belirtir.

$s - a = (x + 2y + 1)x(1 - y) = A, \quad s - b = (2x + y - 1)(1 + x)y = B,$

$s - c = (x - y + 1)(1 - x)(1 + y) = C$

olarak alabiliriz.

Ek olarak, $s = 3xy + x - y + 1$ dir. Buradan herhangi uygun *x, y* kesirleri için, *a, b, c* nin ve

$\pm 2t_a = sx + (s-a)/x \qquad \pm 2t_b = sy + (s-b)/y$

nin rasyonel değerleri vardır.

$x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$ için, $a = 17$, $b = 27$, $c = 16$, $2t_a = 41$, $2t_b = 19$

bulabiliriz.

t_c nin de rasyonel olması için,

$$\frac{s-c}{z} + \frac{s-a}{z+1} + \frac{s-b}{z-1} = 0, \qquad -1 < z < 1$$

olacak şekilde, rasyonel bir z çözümü olmak zorundadır.

$s - a$, $s - b$, $s - c$ yerine A, B, C değerlerini alırsak, her birinde ikinci dereceden, x, y, z arasında bir R bağıntısını elde ederiz. Şimdi denklem çifti,

$$\frac{3yx(1-y)}{1+z} - \frac{B}{1-z} = 0, \quad \frac{(x-y+1)x(1-y)}{1+z} + \frac{C}{z} = 0$$

olan R'nin toplamıdır ve z'yi yok ettiğimizde,

$$y = (7 - 4x - 2x^2) / (10x - 5)$$

i verir.

Schubert, R toplamıyla 8'den daha fazla denklem çiftini verdi. z'nin yok edilmesiyle x veya y de bir lineer denklemi oluştu. Üç rasyonel kenarortay problemi için, bu yöntem, Euler'in sade ve genelliğinden eksiktir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, çalışmamızda yararlanılan temel tanımlar ile teoremleri ispatsız vereceğiz.

Tanım 2.1. Kenar uzunlukları ile alanı rasyonel olan üçgenlere Heron üçgeni denir.

Tanım 2.2. x, y ve z pozitif tamsayılar olmak üzere, $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlayan x ve y kenarlı, z hipotenüslü dik üçgene Pisagor üçgeni ve (x, y, z) üçlüsüne de Pisagor üçlüsü denir (Sierpinski, 1962).

Teorem 2.1. k herhangi bir pozitif tamsayı olsun. $(k, m, m + d)$ tamsayı üçlüsünün de bir üçgen oluşturduğunu kabul edelim. Bu üçlüden üretilen Heron üçgen ailesi m den bağımsızdır ve m'nin özelleştirilmesi gerekmez (K.R.S. Sastry, 2000).

Teorem 2.2. Heron üçgenlerinin (m, n) ailesi $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ Pisagor üçgenini üretir (K.R.S. Sastry, 2000).

Teorem 2.3. Bir eşkenar üçgen $(2(u^2 - v^2), u^2 + v^2, u^2 + v^2)$ ikizkenar Heron üçgenini üretir (K.R.S. Sastry, 2000).

Teorem 2.4. Üçgen temsil eden (k, k, d) ve $(k, k, 2k - d)$ üçlüleri, Heron üçgenlerinin benzer ailesini üretir (K.R.S. Sastry, 2000).

Teorem 2.5. Heron üçgen ailesi ile üretilen her bir üçgen tektir (K.R.S. Sastry, 2000).

Teorem 2.6. $(a, b, c) = (2k(eu^2 - v^2), e(k - d)u^2 + (k + d)v^2, e(k + d)u^2 + (k - d)v^2)$ denklemi Heron üçgenlerinin tam kümesini tanımlar (K.R.S. Sastry, 2000).

Teorem 2.7. (k, d) Heron üçgen ailesi, eğer (a, b, c) ilkel üçgeni $c - b = d$ oluyor ise bu durumda $a = k$ dır (K.R.S. Sastry, 2000).

Teorem 2.8. Heron üçgenlerinin $(d + 1, d)$ ailesi, herhangi b değeri için $(d + 1, b, b + d)$ Heron üçgenini içermez (K.R.S. Sastry, 2000).

Tanım 2.3. Düzlemde koordinatları tamsayı olan noktalar cümlesine bir latis denir.

Tanım 2.4. Farklı bazlara sahip olmalarına karşın, aynı noktaları belirten iki latise denk latisler denir.

Teorem 2.9. Her Heron üçgeni bir latis üçgenidir.

Tanım 2.5. Kenar uzunlukları a, b, c olan Heron üçgeni için $(a, b, c) = 1$ oluyorsa, üçgene primitif Heron üçgeni denir (Kramer&Luca, 2001).

Tanım 2.6. Eğer z hipotenüslü bir dik üçgenin x, y dik kenarları $x > y$, $x + y \equiv 1 (\text{mod } 2)$ ve x ile y aralarında asal olma şartını sağlıyorsa o zaman bu dik üçgene primitif Pisagor üçgeni, (x, y, z) üçlüsüne de primitif Pisagor üçlüsü denir (Sierpinski, 1962).

Teorem 2.10. Bir n doğal sayısının Pisagor olması için gerek ve yeter şart n'nin $ab = cd = n$ ve $a + b = c - d$ olacak şekilde en az dört farklı pozitif çarpanının bulunmasıdır (S. Mohanty and S.P. Mohanty, 1990).

Teorem 2.11. Eğer r, s ve t bir aritmetik dizide ortak farkları m olacak şekilde, r, s, t ve m dört pozitif tamsayı ise, o zaman $n = rstm$ bir Pisagor sayısıdır. Eğer s ve m aralarında asal zıt ikililer (biri tek diğer çift) ise o zaman n bir primitif Pisagor sayısıdır (S. Mohanty and S.P. Mohanty, 1990).

Sonuç 2.1. n, $(n + 1)$, $(n + 2)$ biçiminde verilen üç ardışık tamsayının çarpımı bir Pisagor sayısıdır. Eğer n tek ise bu Pisagor sayısı primitif Pisagor sayısıdır (S. Mohanty and S.P. Mohanty, 1990).

Tanım 2.7. Eğer her bir x ve y $(y \neq 0)$ tamsayıları için $x^2 + ny^2$ ve $x^2 - ny^2$ sayıları bir tam kare oluyorsa, o zaman n pozitif tamsayısına Kongruent sayı denir.

Teorem 2.12. $6\sum_{k=1}^{n} k^2$ Kongruent sayıları Heron üçgenlerinin alanını temsil eder (Gurbanlıyev, 2003).

Teorem 2.13. Her kongruent sayı birçok rasyonel dik üçgenin alanıdır (W.S. Anglin, 1995).

Tanım 2.8. Bir Pisagor üçgenin alanına bir Pisagor sayısı ve bir primitif Pisagor üçgeninin alanına primitif Pisagor sayısı denir.

Teorem 2.14. p asalı, $p \equiv 1 (\text{mod } 4)$ biçiminde bir asal ise iki karenin toplamı biçiminde yazılabilir [26].

Teorem 2.15. $8k + 3$ biçimindeki asallar kongruent değildir (W.S. Anglin, 1995).

Teorem 2.16. Bir (a, b, c) üçgeni için $a = b$ ve c'nin de çift sayı olması durumunda üçgen bir ikizkenar üçgen, h_c de bir tam sayı olur ve (a, h_c, c / 2) bir Pisagor üçlüsü oluşturur (Luca, 2003).

Teorem 2.17. Herhangi bir $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgeni için, alanı A, yarı çevresi s ve iç teğet çemberinin yarıçapı da r olsun. O zaman $\frac{A}{s} = r$ dir (Gustafson&Frisk, 1991).

Tanım 2.9. İlk terimleri $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olan ve birden büyük her n pozitif tamsayısı için genel terimi;

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

rekurans formülü ile verilen diziye Fibonacci dizisi denir ve $(F_n)_{n\geq 0}$ biçiminde ifade edilir. Ayrıca F_n sayısına da n inci Fibonacci sayısı denir (Kramer & Luca, 2001).

Tanım 2.10. Herhangi $m \geq 0$ sayısı için $F_m = 2^{2^m} + 1$ sayısına, standart Fermat sayısı denir. Asal olan Fermat sayısına, Fermat asalı denir (Luca, 2003).

Sonuç 2.2. F_n, n. Fibonacci sayısı olmak üzere, (F_{2n} . F_{2n+2} . F_{2n+4}) bir Pisagor sayısıdır (S. Mohanty and S.P. Mohanty, 1990).

Sonuç 2.3. Üç ardışık Fibonacci sayısı F_{2n}, F_{2n+1} ve F_{2n+2} nin çarpımı bir Pisagor sayısıdır. Bu sayının primitif olması için gerek ve yeter şart F_{2n+1} in çift olmasıdır (S. Mohanty and S.P. Mohanty, 1990).

Teorem 2.18. İki ardışık tamsayının çarpımı şeklinde olan sonsuz sayıda Pisagor sayısı vardır (S. Mohanty and S.P. Mohanty, 1990).

Teorem 2.19. İki ardışık tamsayının çarpımı şeklinde olan sonsuz sayıda primitif Pisagor sayısı vardır (S. Mohanty and S.P. Mohanty, 1990).

Teorem 2.20. Tüm benzer Pisagor üçgenleri arasında bir en küçüğü vardır ki, bu en küçük (x, y, z) Pisagor üçgeninin x, y, z kenarları aralarında asaldır (S. Mohanty and S.P. Mohanty, 1990).

Teorem 2.21. Her Pisagor sayısı 6 ile bölünür (S. Mohanty and S.P. Mohanty, 1990).

Teorem 2.22. (Aritmetiğin Temel Teoremi). $n > 1$ tam sayısının standart biçimi tektir. Yani çarpanların sıra değişikliği dışında n sayısı asalların çarpımı olarak tek türlü yazılabilir [26].

3. HERON ÜÇGENLERİNİN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Heron üçgenlerine ait bulduğumuz yeni özellikleri teorem olarak vereceğiz.

Tanım 3.1. Kenar uzunlukları ve alanı rasyonel olan üçgenlere Heron üçgeni denir.

Heron üçgenlerini elde etmek için birçok farklı yol mevcuttur ama yeni yollar ile onları tanımlamak da mümkündür.

Pisagor üçgenleri ile ilgili çözülmüş ve çözülecek birçok problem var. Ama onların popülerliği hiçbir zaman yok olmadı.

Teorem 3.1. Kenar uzunlukları a, b, c ve alanı A olan bir üçgenin yarı çevre uzunluğu $u = \dfrac{a+b+c}{2}$ olup,

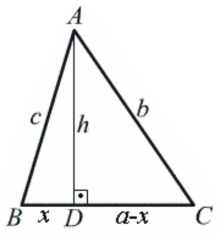
$$S = \sqrt{u(u-a)(u-b)(u-c)}$$

dir.

İspat. Heron formülünün ispatını üç durumda inceleyelim.

I. Durum: Cebirsel İspat

Herhangi bir $\overset{\Delta}{ABC}$ üçgenini ele alalım. A köşesinden BC'ye bir yükseklik indirelim. Uzunluğunu şekildeki ADB ve ADC üçgenlerinde Pisagor Teoremi'ni kullanarak bulursak,



$$(a-x)^2 + h^2 = b^2 \qquad (1)$$

$$x^2 + h^2 = c^2 \qquad (2)$$

$$(a-x)^2 - x^2 = b^2 - c^2$$

$$a^2 - 2ax = b^2 - c^2$$

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

dır. Bulduğumuz bu x değerini, (2) denkleminde yerine koyup, h değerini bulalım.

$$\left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right) + h^2 = c^2$$

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \right)$$

$$4a^2h^2 = 4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$$

$$4a^2h^2 = (2ac + a^2 - b^2 + c^2)(2ac - a^2 + b^2 - c^2)$$

$$4a^2h^2 = [(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2]$$

$$4a^2h^2 = (a + b + c)(a + c - b)(b - a + c)(b + a - c)$$

$$4a^2h^2 = 2u(2u - 2b)(2u - 2a)(2u - 2c)$$

$$4a^2h^2 = 16u(u - a)(u - b)(u - c)$$

$$\frac{a^2h^2}{4} = u(u-a)(u-b)(u-c)$$

$$\left(\frac{ah}{2}\right)^2 = Alan^2(ABC) = S^2 = u(u-a)(u-b)(u-c)$$

$$S = \sqrt{u.(u-a).(u-b).(u-c)}\,.$$

II. Durum: Trigonometrik İspat

Kosinüs Teoremi'nden $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ olduğunu biliyoruz. Buradan sin *A* değerini bulalım.

$$\sin A = \frac{\sqrt{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}}{2bc}$$

olduğundan; bulduğumuz bu değeri $Alan(ABC) = \frac{1}{2}.b.c.\sin A$ formülünde yerine yazalım. Yukarıdakilere benzer işlem yaptıktan sonra,

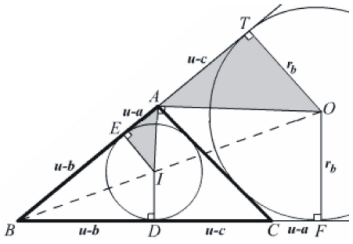
$$Alan^2(ABC) = u.(u-a).(u-b).(u-c)$$

elde edilir.

Bu kanıtı daha sentetik kanıt olarak yapacak olursak, *ABC* üçgeninin iç çember merkezi *I, b* kenarına teğet dış çember merkezi *O* olsun. Aşağıdaki şekilde

IDB ile *OFB* üçgenlerinin benzer olmasından

$$\frac{r}{r_b} = \frac{u-b}{u}$$



bulunur. Aynı zamanda *IEA* ile *ATO* üçgenlerinin benzer olmasından,

$$r.r_b = (u-a).(u-c)$$

bulunur. Her iki eşitlikten r_b'ler çekilir ve kalanlar eşitlenirse,

$$u.r^2 = (u-a).(u-b).(u-c)$$

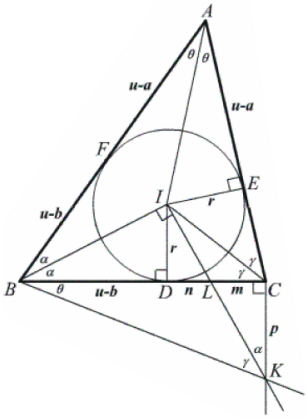
bulunur. Şimdi de eşitliğin her iki tarafı *u* ile çarpılırsa,

$$u^2.r^2 = u.(u-a).(u-b).(u-c)$$

elde edilir ki, $u.r = Alan(ABC)$ yerine yazılırsa,

$$Alan^2(ABC) = u.(u-a).(u-b).(u-c)$$

formülü elde edilip, kanıt tamamlanmış olur.



III. Durum: Geometrik İspat

Bir *ABC* üçgeni ve beraberinde iç çemberini çizelim. Merkeze her zamanki gibi *I* diyelim. *AI*, *BI*, ve *CI* iç açıortaylarını çizelim. *C*'den geçen ve *BC*'ye dik bir doğru ile *I*'dan geçen *BI*'ya dik bir doğru, *K* noktasında kesişsinler. *BICK* dörtgeninin bir kiriş dörtgeni olduğunu görerek gerekli açılar yerlerine yazılacak olursa, *AEI* ile *BCK* üçgenlerinin benzer olduğunu görürüz. Eşlemeyi kurarsak,

$$\frac{r}{p} = \frac{u-a}{a}$$

çıkar. Diğer yandan $|AF| = |AE| = u - a$, $|BF| = |BD| = u - b$ ve $|CE| = |CD| = u - c$ olduğunu biliyoruz. İç çember yarıçapı *r*, $|DL| = n$, $|LC| = m$ ve $|CK| = p$ olsun. *IDL* ile *KCL* üçgenlerinin benzerliğinden,

$$\frac{r}{p} = \frac{n}{m}$$

buluruz. O halde $\frac{n}{m}=\frac{u-a}{a}$'dır. Bu eşitliği $\frac{n}{u-a}=\frac{m}{a}$ şekline getirebiliriz. Birbirine eşit iki oranın paylarının ve paydalarının toplanması ile elde edilen yeni oranın eski orana eşit olduğunu biliyoruz. O halde $\frac{n}{u-a}=\frac{n+m}{u}=\frac{u-c}{u}$ olur. Düzenlenirse $u.n=(u-a).(u-c)$ bulunur. *BIL* dik üçgeninde Öklid teoremi'nden $r^2=(u-b).n$ bulunur ki buradan *n* çekilir. Bir önce bulunan eşitlikte yerine yazılırsa

$$u.r^2=(u-a).(u-b).(u-c)$$

bulunur. Buradan da r değeri çekilip $Alan(ABC)=u.r$ formülünde yerine yazılırsa

$$Alan^2(ABC)=u.(u-a).(u-b).(u-c)$$

formülü elde edilip, kanıt tamamlanmış olur.

Teorem 3.2. (*a*, *b*, *c*) herhangi bir üçgen olsun. Üçgen olma özelliğini bozmamak şartıyla bir kenar uzunluğunu sabit tutarak diğer kenarlarına $x\in Z^+$ tamsayısını ekleyerek elde ettiğimiz

$$(a,b+x,c+x)=\left(a\left(v^2-qtu^2\right),\ \ (b-d)v^2+(f-1)qtu^2,\ \ (c-d)v^2+(f-1)qtu^2\right)$$

üçgeni, Heron üçgenidir (Gurbanlıyev, 2003).

İspat. (*a*, *b*, *c*) üçgeni verilmiş olsun. Bu üçgenin bir kenar uzunluğunu sabit tutarak diğer iki kenar uzunluğuna üçgen olma şartlarını bozmayacak şekilde bir $x\in Z^+$ tamsayısını ekleyelim. O zaman üçgenimiz (*a*, *b* + *x*, *c* + *x*) biçiminde olur. Bu üçgenin çevre uzunluğunun yarısını bulalım. $s=\frac{a+b+c}{2}+x$ olur. Bu üçgenin alanı

$$\Delta^2=(d+x)(f+x)qt \qquad (1)$$

olup, burada

$$d=\frac{a+b+c}{2},\qquad f=\frac{b+c-a}{2},\qquad q=\frac{a+c-b}{2}\ \text{ ve }\qquad t=\frac{a+b-c}{2}$$

olur. Şimdi Δ^2 nin bir Heron üçgeninin alanını temsil etmesi için eşitliğin sağ tarafı bir rasyonel kare olmalıdır. Onun için

$$d+x=(f+x)qtz^2 \qquad (2)$$

olduğunu varsayalım. Bu değeri (1) de yazarsak,

$$\Delta^2 = (f+x)^2 q^2 t^2 z^2 \Rightarrow \Delta = (f+x)qtz \qquad (3)$$

dir. (2) den

$$x = \frac{fqtz^2 - d}{1 - qtz^2}$$

olur. z'yi $(u,v)=1$ olmak üzere $z = \frac{u}{v}$ şeklinde alalım. O zaman

$$x = \frac{fqtu^2 - dv^2}{v^2 - qtu^2}$$

olur. x'in ve z'nin değerlerini

$$\Delta = (f+x)qtz^2$$

de yerine yazarsak,

$$\Delta = \left(f + \frac{fqtu^2 - dv^2}{v^2 - qtu^2} \right) qt \frac{u}{v} = \frac{(f-d)qtuv}{v^2 - qtu^2}$$

olur. $v^2 - qtu^2 > 0$ olması gerekir. Buradan $v > \sqrt{qtu}$ dir. (a, $b + x$, $c + x$) üçlüsünde x in değerini yazarsak,

$$\left(a, b + \frac{fqtu^2 - dv^2}{v^2 - qtu^2}, c + \frac{fqtu^2 - dv^2}{v^2 - qtu^2} \right)$$

olur. $v^2 - qtu^2 \in Z^+$ olduğundan

$$\left(a(v^2 - qtu^2),\ (b-d)v^2 + (f-1)qtu^2,\ (c-d)v^2 + (f-1)qtu^2 \right)$$

Heron üçgen ailesini elde etmiş oluruz. Bu da teoremi ispatlar.

Örneğin, bir üçgen oluşturan (7, 9, 10) üçlüsünü göz önüne alalım. Şimdi yukarıdaki teoreme göre bir x sayısını alalım ve 7, $9 + x$, $10 + x$ kenarlarını oluşturalım. Bu üçgene Heron üçgen alan formülünü uygularsak,

$$\Delta^2 = (13+x)(6+x)(12)$$

olduğunu görürüz. Biz başta

$$\Delta^2 = (13+x)(6+x)(12)$$

denkleminde $6 + x$' i $13 + x$' e bağlı değerlendirelim. Şimdi p^2 rasyonel kare olmak üzere,

$$6+x=(13+x)3p^2$$

şeklinde alalım. Burada 3 çarpanı, $12 = 3(2)^2$ olacak şekilde bağımsız kare çarpanıdır.

O zaman,

$$\Delta^2=(13+x)^2(12)3p^2$$

olup, $\Delta=(13+x)6p$ olur. Biz

$$6+x=(13+x)3p^2$$

denklemini x'e göre çözelim

$$6+x-(13+x)3p^2=0$$

olur. Buradan,

$$6+x-\left(13.3p^2+3xp^2\right)=0$$

$$x\left(1-3p^2\right)+\left(6-39p^2\right)=0$$

$$x\left(3p^2-1\right)+\left(39p^2-6\right)=0$$

$$x=\frac{6-39p^2}{3p^2-1}$$

elde edilir.

$u,v\in Z^+$ ve $(u,v)=1$ olmak üzere, $p=\frac{u}{v}$ yazarsak, x'in yukarıdaki ifadesinden,

$$x=\frac{6-39\frac{u^2}{v^2}}{3\frac{u^2}{v^2}-1}=\frac{6v^2-39u^2}{3u^2-v^2}$$

bulunur. $\Delta=(13+x)6p$ de x ve p'nin yerine yukarıdaki değerlerini yazarsak,

$$\Delta=(13+x)6p$$

$$\Rightarrow \Delta=\left(13+\frac{6v^2-39u^2}{3u^2-v^2}\right)6\frac{u}{v}=6\frac{u}{v}\frac{\left(-7v^2\right)}{\left(3u^2-v^2\right)}=\frac{42uv}{v^2-3u^2}$$

bulunur. Buradan $\Delta > 0$ olması için gerek ve yeter şart $v^2-3u^2>0\Rightarrow v>\sqrt{3}u$ dur. Başta $a=7,b=9+x,c=10+x$ olarak almıştık. x'in değerini yerine yazarsak,

$$(a,b,c)=\left(7\left(v^2-3u^2\right),\ 3\left(4u^2+v^2\right),\ 9u^2+4v^2\right)$$

şeklinde Heron üçgenlerinin ailesini elde ederiz. Burada $s=7v^2$ olur ve

$$\Delta=\sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}=42uv\left(v^2-3u^2\right)$$

olup bu bir Heron üçgenidir.

Sonuç 3.1. Herhangi bir (a, b, c) üçgeni verildiğinde, bu üçgenden Heron üçgen ailesini elde etmek için (a, $b + x$, $c + x$) üçlüsünden $s=(f+x)qp^2$ veya işaret farkı ile $(f+x)=sqp^2$ almak yeterlidir (Gurbanlıyev, 2003).

Burada $d=\dfrac{a+b+c}{2}$, $f=\dfrac{b+c-a}{2}$ ve $qp^2=\dfrac{a+c-b}{2}\ .\ \dfrac{a+b-c}{2}$ dir.

İspat. Teorem 3.2'de $f+x=sqtz^2$ almakla hemen elde edilir.

Sonuç 3.2. Kenar uzunlukları

$$(a,b,c)=\left(7\left(3u^2-v^2\right),\ \ 9u^2+4v^2,\ \ 3\left(4u^2+v^2\right)\right)$$

ile verilen Heron üçgeninin bir kenar uzunluğunu sabit tutarak, d pozitif tamsayı almak üzere diğer iki kenarını d ve $2d$ kadar arttırmakla elde edilen Heron üçgeni değildir (Gurbanlıyev, 2003).

İspat. $a=7\left(3u^2-v^2\right)$,

$b=a+d=7\left(3u^2-v^2\right)+d$

$c=a+2d=7\left(3u^2-v^2\right)+2d$

$b=9u^2+4v^2$ olduğundan, $9u^2+4v^2=7\left(3u^2-v^2\right)+d$ olur. Buradan,

$d=11v^2-12u^2$ dir. $c=3\left(4u^2+v^2\right)=12u^2+3v^2$ dir. Buradan

$$12u^2+3v^2=21u^2-7v^2+2d\Rightarrow d=\frac{10v^2-9u^2}{2}$$

dir. Ancak d'lerin farklı oluşunu kaldırmak, u ve v'nin seçimine bağlıdır.

$$11v^2-12u^2=\frac{10v^2-9u^2}{2}$$

diyelim. O zaman $u^2 = \frac{4}{5}v^2$ olur. Şimdi bu değeri *a*, *b*, *c* de yerlerine yazarsak sırasıyla $\frac{49v^2}{5}, \frac{56v^2}{5}, \frac{63v^2}{5}$ olur. Kenar uzunlukları $\left(\frac{49v^2}{5}, \frac{56v^2}{5}, \frac{63v^2}{5}\right)$ olan üçgenin alanını hesaplayalım.

$$p = \frac{168v^2}{10} \qquad \text{ve}$$

$$\Delta^2 = \frac{27659520v^8}{100^2} = \frac{2^8.3^2.7^4.5.v^8}{100^2} \Rightarrow \Delta = \frac{2^4.3.7^2}{100}\sqrt{5}$$

olur.Bu da Heron üçgen tanımına aykırı olur ki, ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.2. $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlayan *x* ve *y* kenarlı, *z* hipotenüslü dik üçgene Pisagor üçgeni denir. $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlayan *x*, *y* ve *z* doğal sayılarının oluşturduğu (*x*, *y*, *z*) üçlüsüne Pisagor üçlüsü denir.

Tanım 3.3. $(m, n)_{ebob} = 1$ ve *y* çift olmak üzere, (*x*, *y*, *z*) primitif Pisagor üçgeninin kenar uzunlukları,

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$$

biçiminde verilir (Sierpinski, 1962).

Burada *m* ve *n* aralarında asal olduğundan, her ikisinin de çift olamayacağı açıktır. Eğer her ikisi de tek ise o zaman $x = m^2 - n^2$ çift olacağından bu da imkânsızdır. Yani *m* ile *n*'nin her ikisi de tek olamaz. Bundan dolayı *m* ve *n*'nin biri tek iken diğeri çift olmalıdır. Buna göre, $y = 2mn$ olduğundan *y*, 4 ile bölünür. Buradan şu sonuçlar elde edilebilir:

Sonuç 3.2. Her primitif Pisagor üçgeninin ve dolayısıyla her Pisagor üçgeninin kenarlarından en az biri 4 ile bölünebilirdir (Sierpinski, 1962).

Sonuç 3.3. Kenarlarının hepsi asal olan hiçbir Pisagor üçgeni yoktur, fakat hipotenüsü ve bir dik kenarı asal olan Pisagor üçgenleri vardır (Sierpinski, 1962).

(3, 4, 5) üçgeni hem primitif Pisagor üçgeni olup hem de aritmetik olan yegane üçgendir. Bunun yanı sıra kenar uzunlukları ardışık tam sayı olan bir Heron üçgenidir. Ayrıca tam sayı kenarlı Heron üçgenlerine Brahmagupta üçgenleri de denmektedir.

Ardışık tam sayı kenarlı Heron üçgenleri üzerine bazı çalışmalar yapılmış ve bu özelliğe sahip ilk on altı Heron üçgeni aşağıdaki tabloda belirtilmiştir.

n	$b-1$	B	$b+1$	A
1	3	4	5	6
2	13	14	15	84
3	51	52	53	1170
4	193	194	195	16296
5	723	724	725	226974
6	2701	2702	2703	3161340
7	10083	10084	10085	44031786
8	37633	37634	37635	613283664
9	140451	140452	140453	8541939510
10	524173	524174	524175	118973869476
11	1956243	1956244	1956245	1657092233154
12	7300801	7300802	7300803	23080317394680
13	27246963	27246964	27246965	321467351292366
14	101687053	101687054	101687055	4477462600658444
15	379501251	379501252	379501253	62363039058465850
16	1416317953	1416317954	1416317955	868604664218103456

Tablo 3. 1. Ardışık kenarlı Heron üçgenleri ve alanları

Bunların yanı sıra kenar uzunluklarına göre üçgenlerin, üçgen belirtip belirtmediğini veya bir üçgen belirtiyorsa Heron üçgeni olup olmadığını inceleyelim.

Teorem 3.4. Kenar uzunlukları tam sayı olan eşkenar üçgenler Heron üçgenleri değildir (Gurbanlıyev, 2003).

İspat. Üçgenimiz eşkenar üçgen olduğundan $a = b = c$ alınır. Bu durumda; Heron üçgeninin yarı çevre ve alan formüllerinden;

$$s = \frac{1}{2}.(a+b+c) = \frac{1}{2}(a+a+a) = \frac{1}{2}.3a = \frac{3a}{2}$$

ve

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{s(s-a)^3}$$

elde edilir.

O zaman *s*'nin değerini yerine yazarsak

$$A=\sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{3a}{2}-a\right)^3}=\sqrt{\frac{3a}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^3}=\sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\frac{a^3}{2^3}}=\sqrt{\frac{3a^4}{2^4}}=\frac{a^2}{2^2}\sqrt{3}$$

olur ki, $\sqrt{3}$ ün irrasyonel bir sayı olmasından, Heron üçgeninin tamamı gereği eşkenar üçgen bir Heron üçgeni olamaz.

Teorem 3.5. Kenar uzunluğu birbirinden farklı Fibonacci sayılar olan hiçbir üçgen yoktur (Gurbanlıyev, 2003).

İspat. İspata başlamadan önce Fibonacci sayılarını ve üçgen olma şartlarını hatırlayalım.

Fibonacci sayıları, $F_0=0, F_1=1, F_2=1, F_3=2, F_4=3,..., F_n=F_{n-2}+F_{n-1}$

şeklindedir.

Ayrıca verilen *a*, *b*, *c* uzunlukları için,

$$|a-b|<c<a+b$$

eşitsizliğinin sağlanması durumunda *a*, *b*, *c* uzunluklarının bir üçgen oluşturduğu biliniyor. Buna göre ilk olarak kenarları ardışık F_n, F_{n+1}, F_{n+2} Fibonacci sayıları olan üçlüyü göz önüne alalım.

Bunların üçgen oluşturması için $F_n+F_{n+1}>F_{n+2}$ olmalıdır. Ancak tanım gereği $F_n+F_{n+1}=F_{n+2}$ olur ki bunlar üçgen oluşturmaz. Şimdi Fibonacci sayılarını değişik şekilde alalım. Yani *n*, *k* pozitif tam sayılar ve $n > k$ olmak üzere $F_n, F_{n+(k-1)}, F_{n+k}$ şeklindeki Fibonacci sayılarını göz önüne alalım. O zaman açık olarak

$F_{n+k}=F_{n+k-1}+F_{n+k-2}$ ve $F_{n+k-1}>F_{n+k-2}>F_n$ olup, buradan

$F_{n+k}=F_{n+k-1}+F_{n+k-2}>F_{n+k-1}+F_n$ bulunur ki bu da üçgen olma şartları ile çelişir.

Şimdi genel olarak kenarları F_n, F_{n+k-s}, F_{n+k} olan bir üçgen bulunup bulunmadığını araştıralım.

$$
\begin{aligned}
F_{n+k} &= F_{n+k-1} + F_{n+k-2} \\
&= 2F_{n+k-2} + F_{n+k-3} \\
&= 3F_{n+k-3} + 2F_{n+k-4} \\
&= 5F_{n+k-4} + 3F_{n+k-5} \\
&= 8F_{n+k-5} + 5F_{n+k-6} \\
&= 13F_{n+k-6} + 8F_{n+k-7} \\
&\quad . \qquad . \\
&\quad . \qquad . \\
&\quad . \qquad . \\
&= F_{s+1}F_{n+k-s} + F_s F_{n+k-s-1};
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan $F_1 = 1, F_n < F_{n+1}$ ve Fibonacci sayısı tanımı gereği

$$F_{n+k} = F_{s+1}F_{n+k-s} + F_s F_{n+k-s-1} > F_{n+k-s} + F_n$$

olur.

Bu ispata göre; "Kenar uzunluğu birbirinden farklı Fibonacci sayıları olan hiçbir Heron üçgeni yoktur." sonucunu elde ederiz.

Teorem 3.6: (*m*, *n*) Heron üçgen ailesi olsun. O zaman (*m*, *n*) Heron üçgen ailesinden üretilen $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ Pisagor üçlüsü $w > 1, n \geq 0$ olmak üzere, $w, u_1, u_2, ..., u_n$ dizisinden elde edilir ve bu üçlüler $[0; u_n, u_{n-1}, ..., u_1, w]$ sürekli kesrine karşılık gelir (Gurbanlıyev, 2003).

İspat. (*m*, *n*) Heron üçgen ailesi osun. Heron üçgenlerin özel bir sınıfı olan, Pisagor üçgenlerinin nasıl elde edileceğini biliyoruz. O zaman Teorem 2.2'ye göre $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ olur. Aynı şekilde tersi de doğrudur. Yani herhangi bir primitif Pisagor üçlüsü verildiğinde Heron üçgeni ailesi şeklinde yazılabilir. Şimdi teoremin ikinci kısmına geçelim. Sürekli kesirler ile Primitif Pisagor üçgenlerinin arasındaki ilişkiyi biliyoruz. Teoremi elde ettiğimiz Pisagor üçgeni için uygulayalım. Onun için $2mn = X, m^2 - n^2 = Y, m^2 + n^2 = Z$ diyelim. Biliyoruz ki her Pisagor üçlüsü, primitif Pisagor üçlüsü değilse, $(X, Y) = d, \quad d \in Z^+$ olmak üzere $\left(\frac{X}{d}, \frac{Y}{d}, \frac{Z}{d}\right) = (X^1, Y^1, Z^1)$ üçlüsü primitif Pisagor üçlüsüdür. O zaman ispat tamamlanır.

Teorem 3.7: $n \geq 1$ pozitif tamsayı olsun.

$$A = F_n.F_{n+1}.F_{n+2}.F_{n+3}.F_{n+4}.F_{n+5}$$

biçiminde olan, kongruent olmayan bir Heron üçgen çifti vardır. (Kramer&Luca, 2001)

İspat. u ve v iki pozitif tamsayı ve $u \geq 2$ olsun,

Bu durumda $T(u, v)$ üçgeninin kenarlarının,

$$a = u^2 + v^2$$
$$b = (uv)^2 + 1$$
$$c = (uv)^2 + u^2 - v^2 - 1$$

biçiminde alanının da,

$$A = uv(u^2 - 1)(v^2 + 1)$$

olduğuna dikkat edelim. Bu alan formülü, çok iyi bilinen

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

formülünden hemen elde edilir.

İspatı bitirmek için; karşılık gelecek $T(u, v)$ üçgenlerinin kongruent olmayan, fakat A alanları $F_n.F_{n+1}.F_{n+2}.F_{n+3}.F_{n+4}.F_{n+5}$ olacak şekilde (u, v) sıralı ikililerinin iki farklı şekilde seçilebileceğini göstermek kalır. (u, v) çiftlerini

$$(u,v) \in \begin{cases} \{(F_{n+1}, F_{n+4}),\ (F_{n+1}, F_{n+4})\} & n \text{ çift ise} \\ \{(F_{n+4}, F_{n+1}),\ (F_{n+1}, F_{n+4})\} & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olacak şekilde seçebiliriz. Sadece n'nin çift olması durumu için ispatı yapacağız. Çünkü n'in tek olması durumunda da benzer durumlar geçerlidir. Her pozitif n tamsayısı için; çok iyi bilinen

$$F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} = F_n F_{n+2}$$

ve

$$F_{n+2}^2 + (-1)^{n+1} = F_n F_{n+4}$$

formülleri kullanılarak, n çift olmak üzere $(u, v) = (F_{n+2}, F_{n+3})$ parametreli T_2 üçgeninin alanını,

$$A = F_{n+2}F_{n+3}(F_{n+2}^2 - 1)(F_{n+3}^2 + 1) = F_{n+2}F_{n+3}(F_nF_{n+4})(F_{n+1}F_{n+5}) = F_nF_{n+1}...F_{n+5}$$

alarak; $(u,v)=(F_{n+1},F_{n+4})$ parametreli T_1 üçgeninin alanı da,

$$A=F_{n+1}F_{n+4}\left(F_{n+1}^2-1\right)\left(F_{n+4}^2+1\right)=F_{n+1}F_{n+4}\left(F_nF_{n+2}\right)\left(F_{n+3}F_{n+5}\right)=F_nF_{n+1}...F_{n+5}$$

olarak buluruz. T_1 ile T_2 nin kongruent olmadığını göstermek için verilen *a*'nın üçgenin en kısa kenarı olduğuna işaret etmek yeterlidir. Yani;

$$F_{n+1}^2+F_{n+4}^2\neq F_{n+2}^2+F_{n+3}^2$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. Şimdi bu denklemin sol tarafının sağ tarafından daha büyük olduğunu gösterelim. Bu,

$$F_{n+4}^2-F_{n+3}^2>F_{n+2}^2-F_{n+1}^2$$

ifadesine veya

$$\left(F_{n+4}-F_{n+3}\right)\left(F_{n+4}+F_{n+3}\right)>\left(F_{n+2}-F_{n+1}\right)\left(F_{n+2}+F_{n+1}\right)$$

ifadesine veya

$$F_{n+2}.F_{n+5}>F_nF_{n+3}$$

ifadesine denktir. Bu son eşitsizlik daima geçerlidir. Çünkü her *n* pozitif tamsayısı için $F_{n+2}>F_n$ dir.

4 – RASYONEL KENAR ORTAYLI HERON ÜÇGENLERİ; HERON PARALELKENARI

H. Schubert, kenarlarından, köşegenlerinden biri ve alanı rasyonel olan bir Heron paralelkenarını tanımladı.

a, *b* kenarlarını içeren bir köşegen tarafından oluşan açılara α, β diyelim ve ϑ açısı köşegenler arasında ve *b* ye karşıdır. Köşegenlerin her bir kenar üzerindeki eşit alanlardan, ikincisi aşağıdadır.

$$a:b=\sin(\vartheta+\beta):\sin(\vartheta-\alpha),\ a\sin\alpha=b\sin\beta$$

Buradan,

$$2\cot\vartheta=\cot\alpha-\cot\beta$$

dır. Rasyonel olan alanı, m,n aralarında asal tamsayı olan,

$$\tan\frac{1}{2}a=\frac{n}{m},\ \tan\frac{1}{2}\beta=\frac{q}{p},\ \tan\frac{1}{2}\vartheta=\frac{y}{x}$$

alabiliriz. Buradan,

$$2\frac{x^2-y^2}{2xy}=\frac{m^2-n^2}{2mn}-\frac{p^2-q^2}{2pq},$$

$$2(x^2-y^2)mnpq=xy(mp+nq)(mq-np)$$

dir. Bu yanlışlıkla sonuçlandırılmıştır ki, sadece tam sayı olan çözüm,
$(x,y)=(mq,np)$ veya (mp,nq) dir.

Buradan, hiçbir Heron üçgeninin, bir ve daha fazla rasyonel kenarortaylı olmadığı sonucu şüpheli kalır.

R. Güntsche, kenarları *a*, *b*, *c,* alanı *I* ve *CF* kenarortayı rasyonel olan *ABC* üçgenini inceledi. Eğer *s,* yarı çevre uzunluğu ve dairenin içine çizilen yarıçap *p* ise,

$$\cot\frac{1}{2}A=s(s-a)/I,\quad sp=I,$$

dır ki, $\frac{1}{2}A,\ \frac{1}{2}B,\ \frac{1}{2}C$ nin α, β, γ kotanjantları, rasyonel olmak zorundadır. Böylece, $\alpha+\beta+\gamma=\alpha\beta\gamma$ dir. $p=(\alpha\beta-1)/(\alpha\beta)$ alınırsa,

$$s=\alpha+\beta,\ a=\beta+\frac{1}{\beta},\ b=\alpha+\frac{1}{\alpha},\ c=s-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=I$$

dır. *F, AB*'nin merkezi ve $v = \cot\frac{1}{2}(CFB)$ olsun.

CAF ve *CFB* üçgenlerinden, *c* / 2'nin iki değerini elde ederiz:

$$\alpha - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{v} - v = v - \frac{1}{v} + \beta - \frac{1}{\beta} \qquad (1)$$

Simetriyi elde etmek için, $\beta' = 1/\beta$ alınır. v, α, β' her birinden ikinci dereceden;

$$2v^2\beta'\alpha - v\left(\beta'^2\alpha + \beta'\alpha^2 - \beta' - \alpha\right) - 2\beta\alpha = 0 \qquad (2)$$

denklemini elde ederiz. α bir parametre olarak alınırsa, Euler'in Ch. XXII yönteminde v, β' de ki denklemi ele alabiliriz.

Fakat, β' ye bağlı v'nin ikinci değeri, $-1/v$' dir ki, karşısındaki açı π tarafından büyütülebilir. Yeni bir çözümü elde etmek için, Euler'in yöntemine başvurmadan önce, v'nin yerine $\xi = v\beta'$ değişkeni getirilir. Benzer bir düşünce, Kummer tarafından ele alınan bu durumu içeren,

$$Px^2y + qxy^2 + rxy + hqx + hpy = 0 \qquad (3)$$

daha genel denklem yer alır. Euler' in yöntemini sadeleştirmek için,

$$\vartheta(\xi) = \frac{q\xi + ph}{p\xi + qh},\ X_i = \frac{h}{x_i},\ Y_i = \frac{h}{y_i},$$

olarak alınır. Birinci çift $x = x_0,\ y = y_0$ dan,

$$x_1 = y_0\vartheta_1,\ y_1 = X_0\vartheta_1,\ \vartheta_1 \equiv \vartheta(x_0y_0);\ x_2 = y_1\vartheta_2,\ y_2 = X_1\vartheta_2,\ \vartheta_2 \equiv \vartheta(x_1y_1);\ldots$$

dır. x_i, y_i (3) denkleminin yeni bir çift çözümüdür. Benzer şekilde, x_0, Y_0 ile başlayalım. (2) denklemi için,

$$h = -1,\ p = 2\alpha,\ q = -\alpha,\ r = 1 - \alpha^2,\ \vartheta(\xi) = -(\xi + 2)/(2\xi + 1)$$

dir. Buradan, birinci çifti $v_0,\ \beta_0'$ dan, $v_1 = \beta_0'\vartheta(v_0\beta_0'),\ \beta_1' = -v_0^{-1}\vartheta(v_0\beta_0')$ alırız. $\alpha = p$, $v_0 = 1,\ \beta_0' = 1/p$ çözümden,

$$\alpha = p,\ v_1 = \frac{-(2p+1)}{p(p+2)},\ \beta_1' = \frac{2p+1}{p+2}$$

alınır. Buradan, yeni bir dizi elde ederiz. (1) değiştirilmemiş olduğundan, –1 / *v* yerine *v* yazabiliriz.

$$\alpha = p,\ v = \frac{p(p+2)}{2p+1},\ \ \beta = \frac{p+1}{2p+1},\ \ a = b\left\{(p+2)^2 + (2p+1)^2\right\}$$

$$b = (p+2)(2p+1)(p^2+1),\ \ c = 2(p^2-1)(p^2+p+1)$$

$$CF = p^2(p+2)^2 + (2p+1)^2,\ \ I = \frac{1}{2}p(p^2-1)(p+2)(2p+1)(p^2+p+1)$$

olan çözümü elde ederiz.

E. Haentzchel, α, β tamsayılı (1) denklemli Güntsche'nin sonucunu tekrarladı. Simetri için, yeni α, karşıtıyla yer değiştirilir. Buradan,

$$\frac{\alpha^2-1}{2\alpha} + \frac{\beta^2-1}{2\beta} = \frac{v^2-1}{v}$$

olur. Eğer,

$$\left\{\beta^2\alpha + \beta(\alpha^2-1) - \alpha\right\}^2 + (4\beta\alpha)^2 = 0$$

ise, *v* için çözümü tarafından elde edilen değer rasyonel olacaktır.

β'nın bu kuartiği, Weierstrass'ın eliptik $\wp$ – fonksiyonunun kullanımıyla ele alınır. Heron paralelkenarın değişik özel çeşitlerinin değişik sonucu vardır.

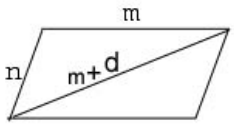
5 – HERON PARALELKENARLARININ ALANI VE ÇOKGENLER

Bu bölümde, kenarları ve köşegenleri tam sayı olan paralelkenarların Heron paralelkenarı ve çokgenlerin Heron çokgeni olduğu üzerinde çalışacağız.

Şimdi bununla ilgili teoremimizi verelim.

Teorem 5.1. n,m,d pozitif tam sayılar olmak üzere, köşegeni $m+d$ olan (n,m) paralelkenarının bir üçgeni oluşturan $(n,m,m+d)$ tam sayı üçlüsü bir Heron üçgenidir ve bundan dolayı da (n,m) paralelkenarı bir Heron paralelkenarıdır.

İspat.



Teorem 3.2.'den yararlanarak bu ispatı çözelim, $(n,m,m+d)$ üçgeninin bir kenar uzunluğunu sabit tutarak, iki kenar uzunluğuna üçgen olma şartlarını bozmayacak şekilde bir $x\in Z^+$ tam sayısı ekleyelim. O zaman üçgenimiz $(n,m+x,m+d+x)$ biçiminde olur. Bu üçgene Heron üçgen alan formülünü uygulayalım. İlk olarak üçgenin çevre uzunluğunun yarısını bulalım.

$$s=\frac{n+m+x+m+d+x}{2}=\frac{n+2m+d}{2}+x$$

dur. Böylece alanın,

$$\Delta^2=\frac{1}{6}(n+2m+2x+d)(2m+2x+d-n)(n^2-d^2)$$

olduğunu görürüz.

Δ^2'nin bir Heron üçgeninin alanı temsil etmesi için eşitliğin sağ tarafı bir rasyonel kare olmalıdır. Onun için,

$$(n+2m+2x+d)=(2m+2x+d-n)(ef^2) \qquad (1)$$

şeklinde alalım. Buradaki e çarpanı $n^2-d^2=ef^2$ olacak şekilde bağımsız kare çarpanıdır. (1) denkleminde $u,v\in Z^+$ ve $(u,v)=1$ olmak üzere, $f=\frac{u}{v}$ yazar ve x'i çekersek, $(n+2m+2x+d)=(2m+2x+d-n)e\frac{u^2}{v^2}$

$$x = \frac{eu^2(n-2m-d)+v^2(n+2m+d)}{2(eu^2-v^2)}$$

bulunur. $eu^2 - v^2 > 0$ olması gerekir. Buradan $u > v/\sqrt{e}$'dir. $(n, m+x, m+d+x)$ üçlüsünde *x* değerini yerine yazarsak,

$$\left(2n(eu^2-v^2),\ e(n-d)u^2+v^2(n+d),\ e(n+d)u^2+v^2(n-d)\right)$$

Heron üçgen ailesini elde etmiş oluruz. Bu üçgenin yarı çevre uzunluğu ise

$$s = 2neu$$

olarak bulunur. Alanı ise;

$$\Delta = 2nefuv(eu^2 - v^2)$$

bulunur. O halde, $(n, m, m+d)$ üçgeninin alanı, $\Delta = n.2efuv(eu^2 - v^2)$'dir. (n, m) paralelkenarının alanı da $\Delta = n.4efuv(eu^2 - v^2)$ olarak bulunur.

Böylece $(n, m, m+d)$ üçgeni bir Heron üçgeni olduğuna göre (n, m) paralelkenarı da bir Heron paralelkenarıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.1. İspatını verdiğimiz teoremimizin genel ifadesini aşağıdaki tabloda verelim.

Paralelkenar	**Üçgen**	**Üçgenin alanı**	**Paralelkenarın alanı**
$(1, a)$	$(1, a, a+d)$	$\Delta = 1.2efuv(eu^2 - v^2)$	$\Delta = 1.4efuv(eu^2 - v^2)$
$(2, b)$	$(2, b, b+d)$	$\Delta = 2.2efuv(eu^2 - v^2)$	$\Delta = 2.4efuv(eu^2 - v^2)$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
(n, m)	$(n, m, m+d)$	$\Delta = n.2efuv(eu^2 - v^2)$	$\Delta = n.4efuv(eu^2 - v^2)$

Tablo 5.1.

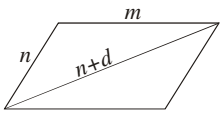
a, *b*, …, *m* pozitif tam sayılar olmak üzere, verilen üçgen ve paralelkenarın alanlarında özel olarak bu tam sayılara gerek yoktur.

Teorem 5.1.de (n, m) paralelkenarının köşegenini *m* kenarına bağlı bir değer olarak aldık. Şimdi aşağıda vereceğimiz teoremde köşegeni *n* kenarına bağlı olarak alalım. Böylece bu (n, m) paralelkenarının Heron paralelkenar olduğu ve alan formülünde hiçbir değişiklik olmadığını ispatladık.

Şimdi bununla ilgili teoremimizi verelim.

Teorem 5.2. *n*, *m*, *d* pozitif tam sayılar olmak üzere, köşegen $n + d$ olan (n,m) paralelkenarının bir üçgeni oluşturan, $(n,m,n+d)$ tam sayı üçlüsü bir Heron üçgenidir ve bundan dolayı da (n,m) paralelkenarı bir Heron paralelkenarıdır.

İspat.



Teorem 5.1'deki ispatın aynısını uygulayacağız. Bu ispatta Heron üçgen alan formülünü kullanalım. $(n,m,n+d)$ üçgenini bir kenar uzunluğunu sabit tutarak, iki kenar uzunluğuna üçgen olma şartlarını bozmayacak şekilde bir $x \in Z^+$ tam sayısı ekleyelim. O zaman üçgenimiz $(n,m+x,n+d+x)$ biçiminde olur.

İlk olarak üçgenin çevre uzunluğunun yarısını bulalım.

$$s = \frac{n+\ m+x+\ n+d+x}{2} = \frac{2n+m+d}{2} + x$$

olur. Üçgenin alanı ise;

$$\Delta^2 = \frac{1}{16}(2n+2x+m+d)(2x+m+d)(2n-m+d)(m-d)$$

olarak bulunur. Δ^2'nin bir Heron üçgeni alanı temsil etmesi için eşitliğin sağ tarafı bir rasyonel kare olmalıdır.

$$(2n+2x+m+d) = (2x+m+d)ef^2 \qquad (2)$$

şeklinde alalım. Buradaki *e* çarpanı, $(2n-m+d)(m-d) = ef^2$ olacak şekilde bağımsız kare çarpanıdır. (2) denkleminde $u,v \in Z^+$ ve $(u,v)=1$ olmak üzere $f = \frac{u}{v}$ yazar ve *x*'i çekersek,

$$(2n+2x+m+d) = (2x+m+d)e\frac{u^2}{v^2}$$

$$x = \frac{eu^2(-m-d)+v^2(2n+m+d)}{2(eu^2-v^2)}$$

olarak bulunur. $eu^2 - v^2 > 0$ olması gerekir. Buradan $u > v/\sqrt{e}$ dir. $(n,m+x,n+d+x)$ üçlüsünde *x* değerini yerine yazarsak,

$$\left(2n\left(eu^2-v^2\right),\ e(m-d)u^2+v^2(2n-m+d),\ e(2n-m+d)u^2+v^2(m-d)\right)$$

Heron üçgeni ailesini elde etmiş oluruz. Bu üçgenin yarı çevre uzunluğu ise;

$$s=2neu^2$$

olarak bulunur. Alanı ise;

$$\Delta=2nefuv\left(eu^2-v^2\right)$$

olur. O halde, $(n,m,n+d)$ üçgeninin alanı, $\Delta=n.2efuv\left(eu^2-v^2\right)$dir. (n,m) paralelkenarının alanı da, $\Delta=n.4efuv\left(eu^2-v^2\right)$ olarak bulunur.

Böylece $(n,m,n+d)$ üçgeni bir Heron üçgeni olduğuna göre (n,m) parelkenarı da bir Heron paralelkenarıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.2. Teoremimizi daha açık olarak Tablo 5.2'de verebiliriz.

Paralelkenar	**Üçgen**	**Üçgenin alanı**	**Paralelkenarın alanı**
$(1,a)$	$(1,a,1+d)$	$\Delta=1.2efuv\left(eu^2-v^2\right)$	$\Delta=1.4efuv\left(eu^2-v^2\right)$
$(2,b)$	$(2,b,2+d)$	$\Delta=2.2efuv\left(eu^2-v^2\right)$	$\Delta=2.4efuv\left(eu^2-v^2\right)$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
(n,m)	$(n,m,n+d)$	$\Delta=n.2efuv\left(eu^2-v^2\right)$	$\Delta=n.4efuv\left(eu^2-v^2\right)$

Tablo 5.2.

Sonuç 5.3. Tablo 5.1 ve Tablo 5.2'nin aynı olduğunu görebiliriz. (n,m) paralelkenarının köşegenini *n*'ye veya *m*'ye bağlı olması alan formülü ve Heron paralelkenarı olup olmadığını etkilemiyor.

Sonuç 5.4. Teorem 5.1 ve Teorem 5.2'nin ispatları indüksiyon yöntemiyle de yapılabilir.

İspat. Teorem 5.2'nin ispatını indüksiyon yöntemi ile yapalım. (n,m) paralelkenarının $(n,m,n+d)$ üçgeni olduğuna göre,

$n=1$ için $(n,m,n+d)$ üçgeninin alanı, $\Delta=1.2efuv\left(eu^2-v^2\right)$ doğru.

$n=2$ için alan $\Delta=2.2efuv\left(eu^2-v^2\right)$ doğru.

$n=k$ için $(n,m,n+d)$ üçgeninin alanını, $\Delta=k.2efuv\left(eu^2-v^2\right)$ olarak kabul edelim. Bunu kabul ettiğimizde $n=k+1$ içinde doğru olacağını gösterelim.

$(n+d)$ köşegeni olan (n,m) paralelkenarının, $(n,m,n+d)$ üçgeninin alanı,

$$\Delta = (k+1).2efuv\left(eu^2 - v^2\right)$$

olur.

$$\Delta = (k+1).2efuv\left(eu^2 - v^2\right)$$
$$= k.2efuv\left(eu^2 - v^2\right) + 1.2efuv\left(eu^2 - v^2\right)$$

dir. İlk başta bu denklemin sağ tarafındaki birinci ve ikinci kısmı, $n = k$ ve $n = 1$ için doğru kabul ettiğimizden, $n = k+1$ içinde doğru olduğunu göstermiş olduk.

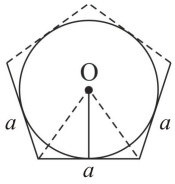
Benzer şekilde (n, m) paralelkenarının alanını da $\Delta = n.4efuv\left(eu^2 - v^2\right)$ şeklindeki ispatı indüksiyon yöntemiyle de ispatlanabilir.

Tanım 5.1. Doğrusal olmayan üç veya daha fazla noktanın ikişer ikişer birleştirilmesiyle elde edilen kapalı düzlemsel şekillere "çokgen" denir.

Tanım 5.2. Kenar uzunlukları eşit ve açıları eş olan çokgenlere "düzgün çokgen" denir.

Teorem 5.3. Düzgün altıgenden oluşan üçgenler Heron üçgeni değildir ve düzgün altıgen bir Heron çokgeni olamaz.

İspat. n kenarlı düzgün çokgenin bir kenarı a ve iç teğet yarıçapı r ise alanının,

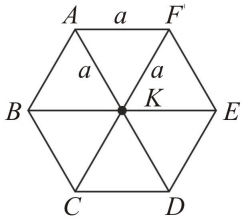


$$A = \frac{n.a.r}{2}$$

olduğunu biliyoruz. n kenarlı bir düzgün çokgende bir kenarı gören merkez açı (bu açı aynı zamanda dış açıdır.) $\frac{360}{n}$ ve çevrel çemberin yarıçapı R ise çokgenin alanı,

$$A = n.\frac{R^2 \sin a}{2}$$

dır. Düzgün altıgen altı tane eşkenar üçgenden oluşur. Bir kenarına a dersek,



$$A(ABCDEF) = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

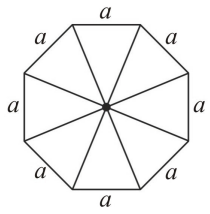
yukarıda verilen formülden bulunur.

Düzgün altıgen altı tane eşkenardan oluştuğundan, her bir eşkenar üçgenler Heron üçgenlerini oluşturmaz. Çünkü eşkenar üçgenin alanı $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ olup, bir irrasyonel sayıyı içerir. Bundan dolayı da düzgün altıgenin alanı da bir Heron çokgeni olamaz.

Teorem 5.4. Düzgün sekizgenden oluşan üçgenler Heron üçgeni olur ve bundan dolayı da düzgün sekizgen bir Heron çokgenidir.

İspat. Karşılıklı köşeler birleştirildiğinde sekizgenin alanı sekiz eş ikizkenar üçgene bölünür. Bir kenarına *a* diyelim.

İkizkenar üçgen bir Heron üçgenini oluşturduğunu Teorem 2.4 (K.R.S. Sastry, 2000) den olduğunu biliyoruz. Ayrıca bir üçgenin kenar uzunlukları rasyonel sayı ile çarpılırsa elde edilen üçgenin de kenar uzunluklarının toplamı ve alanı yine rasyonel sayıdır.

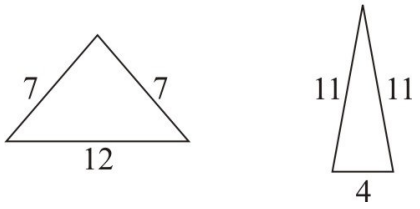


Yani Heron üçgen olma özelliği korunmaktadır. Bu da bize düzgün sekizgenin bir Heron çokgeni olduğunu gösterir.

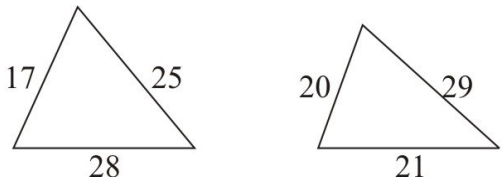
6 – ÖRNEKLER

Eşit alana sahip Heron üçgenleri:

İnsanoğlu, "alanları eşit olan iki farklı Heron üçgeni bulunabilir mi?" sorusunun cevabını bulduktan sonra, "alanları eşitken, çevreleri de eşit olan var mı?" sorusunun cevabını abartıp ve hatta çevreleri de eşit 6 farklı Heron üçgeni bile bulmuş. Eşit alana ve çevreye sahip iki farklı üçgen için en küçük durum aşağıda verilen,

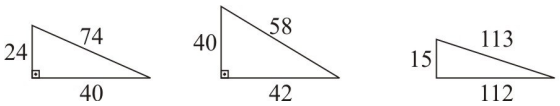


(7, 7, 12) ve (4, 11, 11) üçgenleridir. Her ikisinin de çevresi 26 olup, alanı $6\sqrt{13}$ tür. Fakat alanları rasyonel olmadığından üçgenler Heron üçgeni değildir.



Her ikisinin çevresi ve alanı tam sayı olup da tüm kenarları da tam sayı olan en küçük iki üçgene örnekte gördüğümüz (17, 25, 28) ve (20, 21, 29) üçgenleridir.

Bu da bulunduktan sonra alanları eşit ikiden fazla Heron üçgenleri araştırılmış. 1945'te C.L. Shedd üç farklı Pisagor üçgeni için en küçük durumu bulmuş:



Yukarıdaki üç dik üçgen farklı üçgenler olmasına karşın hepsinin de alanları *840*.

Beiler 1966'da bunun bir genellemesini vermiş:

$m_1 = r^2 + rs + s^2$ ve $n_1 = r^2 - s^2$

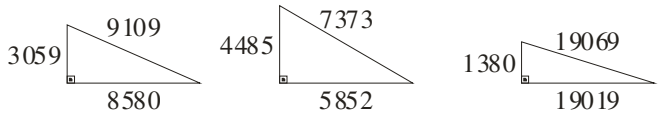
$m_2 = r^2 + rs + s^2$ ve $n_2 = 2rs + s^2$

$m_3 = r^2 + 2rs$ ve $n_3 = r^2 + rs + s^2$ ise $\left(r > s \text{ ve } r, s \in Z^+\right)$

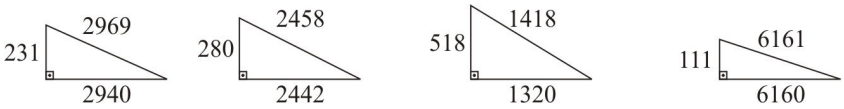
$\left(m_i^2 - n_i^2, 2m_i n_i, m_i^2 + n_i^2\right)$ Pisagor üçlüleri,

$$S = r.s(r+s)(r-s)(2r+s)(s+2r)\left(r^2+rs+s^2\right)$$

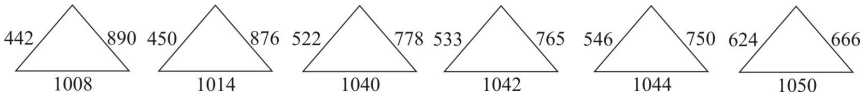
ortak alanına sahiptir. Şimdi de bu kuralı sağlayan en küçük ilkel Pisagor üçgenlerini verelim.



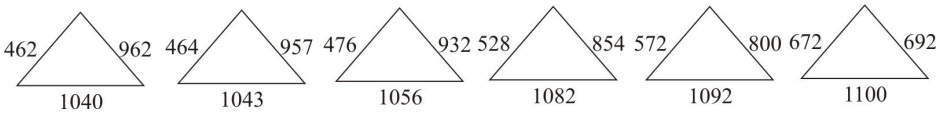
Yukarıdaki üç dik üçgenin üçü de farklı ilkel ama üçünün de alanı 13123110.



Bu dört dik üçgenin de alanı 341880.



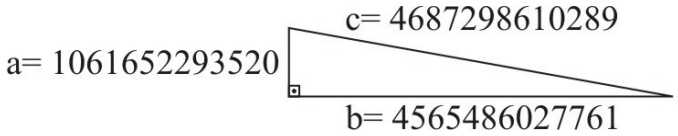
Bu altı üçgenin de çevresi 2340 ve alanı 196560.



Bu altı üçgenin de çevresi 2464 ve alanı 221760.

Bilgisayarın ne kadar çok geliştiği ve günlük hayatımıza ne kadar çok girdiği düşünülürse bu keşifler o kadar da önemli değil. 1643 yılında Fermat, dönemin ünlü matematikçilerinden Mersenne'ye bir soru ile meydan okumuş: "Öyle bir Pisagor üçlüsü bul ki; dik kenarların toplamı da hipotenüs de birer tam kare olsun!"

Mersenne'in bu soruya bir yanıt bulup bulamadığı bilinmiyor ama Fermat bulmuş.

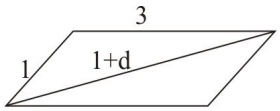


İşte bu yukarıdaki üçgen,

$c = 4687298610289 = 2165017^2$

$a + b = 1061652293520 + 4565486027761 = 2372159^2$ dır.

Örnek 6.1. Köşegen uzunluğu $(1+d)$ olan, $(1,3)$ paralelkenarın $(1,3,1+d)$ üçgenini alalım.



İki kenar uzunluğuna üçgen olma şartlarını bozmayacak şekilde bir $x \in Z^+$ tam sayısı ekleyelim. Üçgenimiz $(1,3+x,1+d+x)$ biçiminde olur.

Bu üçgenin yarı çevre uzunluğunu bulalım.

$$s = \frac{1+3+x+1+d+x}{2} = \frac{5+d}{2} + x$$

Alanı ise,

$$\Delta^2 = \frac{1}{16}(5+d+2x)(3+d+2x)(d-1)(3-d)$$

bulunur. Δ^2'nin bir Heron üçgenin alanını temsil etmesi için eşitliğin sağ tarafı bir rasyonel kare olmalıdır. $(5+d+2x) = (3+d+2x)ef^2$ şeklinde alalım. Buradaki e çarpanı $(d-1)(3-d) = ef^2$ olacak şekilde bağımsız kare çarpanıdır. Bu denklemde $u, v \in Z^+, (u,v) = 1$ olmak üzere, $f = \frac{u}{v}$ yazar ve *x*'i çekersek,

$$(5+d+2x) = (3+d+2x)e\frac{u^2}{v^2}$$

$$x = \frac{eu^2(-d-3) + v^2(d+5)}{2(eu^2 - v^2)}$$

bulunur. $eu^2 - v^2 > 0$ olması gerekir. Buradan $u > \frac{v}{\sqrt{e}}$ dir.

$(1,3+x,1+d+x)$ üçlüsünde *x* değerini yerine yazarsak,

$$\left(2(eu^2 - v^2),\ \ e(3-d)u^2 + v^2(d-1),\ \ e(d-1)u^2 + v^2(3-d)\right)$$

olarak bulunur. Bu elde edilen değerin yarı çevre uzunluğu ise

$$s = 2eu^2$$

dir. Alanı ise,

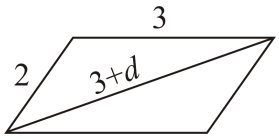
$$\Delta = 2efuv(eu^2 - v^2) = 1.2efuv(eu^2 - v^2)$$

olarak bulunur. O halde bu üçgen bir Heron üçgenidir.

(1, 3) paralelkenarının alanı ise $\Delta = 1.4efuv\left(eu^2 - v^2\right)$ dir. Bu da Heron paralelkenarıdır.

Örnek 6.2. Aynı şekilde (2, 3) paralelkenarının alanın rasyonel olduğunu görebiliriz.

Örnek 6.1.deki işlemleri uygularsak,



$x \in Z^+$ tam sayısı ekleyelim. O halde üçgenimiz $(2,3+x,3+d+x)$ olur. Yarı çevre uzunluğu ise,

$$s = \frac{2+3+x+3+d+x}{2} = \frac{8+d}{2} + x$$

olarak bulunur. Alanı ise;

$$\Delta^2 = \frac{1}{16}(8+2x+d)(4+2x+d)\left(2^2 - d^2\right)$$

bağıntısını elde ederiz.

$2^2 - d^2 = ef^2$ olacak şekilde, e bağımsız kare çarpanıdır. $u, v \in Z^+$ ve $(u, v) = 1$ olmak üzere, $f = \frac{u}{v}$ yazar ve x'i çekersek,

$$(8+2x+d) = (4+2x+d)ef^2$$

$$= (4+2x+d)e.\frac{u^2}{v^2}$$

$$x = \frac{eu^2(-d-4) + v^2(d+8)}{2\left(eu^2 - v^2\right)}$$

bulunur.

$eu^2 - v^2 > 0 \Rightarrow u > \frac{v}{\sqrt{e}}$ dir. $(2,3+x,3+d+x)$ üçlüsünde bulduğumuz x değerini yerine yazarsak,

$$\left(4\left(eu^2 - v^2\right),\ e(2-d)u^2 + v^2(2+d),\ e(2+d)u^2 + v^2(2-d)\right)$$

elde edilir. Bu değerin yarı çevre uzunluğu,

$$s = 4eu^2$$

dir. Alanı ise;

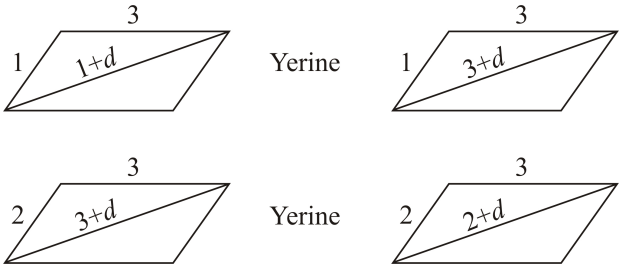
$$\Delta = 4efuv\left(eu^2 - v^2\right)$$
$$= 2.2efuv\left(eu^2 - v^2\right)$$

olarak bulunur. Bu üçgen de bir Heron üçgenidir.

$(2,3)$ paralelkenarının alanı ise, $\Delta = 2.4efuv\left(eu^2 - v^2\right)$ olup, bir Heron paralelkenarıdır.

Sonuç 6.1. Bu yaptığımız örneklerde, paralelkenarların köşegenini, *1+d* ve *3+d* olarak aldık. Bu köşegenleri *3+d* ve *2+d* olarak alırsak, bu parelelkenarların alanlarının rasyonel olduğunu görürüz.

Yani;



aldığımızda, alanların rasyonel olduğu ve birbirine eşit olup, Heron paralelkenarını bozmadığını bulabiliriz.

7. SONUÇ

Biz bu tezimizde, paralelkenarların Heron paralelkenarı, düzgün altıgen ve düzgün sekizgenin de Heron çokgenleri olup olmadığını araştırdık. Paralelkenarların Heron paralelkenarları, düzgün sekizgeninde Heron sekizgeni olduğunu gösterdik. Bunlardan yola çıkılarak düzgün çokgenler için genelleştirilebileceğini düşünüyoruz.

8. KAYNAKLAR

[1] **Aposton T.M.,** Introduction to Analytic Number Theory, Springer – Verlag, New York, 1976.

[2] **Altındiş H.,** Sayılar Teorisi ve Uygulamaları, Erciyes Üniv. Yayınları, Kayseri, 1999.

[3] **Anglin W.S.,** The Queen of Mathematics, Kluwer Acamedic, Dordrecht – Bostan – Londan, 1995.

[4] **Andrew A. And Jhon E.C.,** The Theory of Number, Jones and Bartlett, Bostan – Londan – Singapore, 1995.

[5] **Arnold İ.V.,** Teoriya Çisel, Gosudarstvennoye Uçebno – Pedegogiçeskaya İzdatelstva Narkomprosa RSFSR, Moskva, 1939.

[6] **Brisse Edward,** "Perspective Poristic Triangles", Forum Geometricorum, Vol 1, pp 9 – 16, 2001.

[7] **Beauregard R.A. and Suryanarayana E.R.,** "Arithmetic Triangles", Mathematics Magazine, Vol 70, pp 105 – 115, 1997.

[8] **Buhştab A.A.,** Teoriya Çisel, Ministerstba Prosveşeniye RSFSR, Moskva, 1960.

[9] **Bier Sabrina,** "Equilateral Triangles Intercepted by Oriented Parallelians", Forum Geometricorum, Vol 1, pp 25 – 32, 2001.

[10] **Chandrasekharan K.,** Introduction to Analytic Number Theory, Springer – Verlag – Berlin – Heidelberg – New York, 1968.

[11] **Darıyeri Mehmet,** "Heron Üçgenlerinin Bazı Özellikleri Üzerine Bir Araştırma", (Yüksek Lisans Tezi), Konya, 2005.

[12] **Dickson Leonard Eugene,** History of the Theory of Numbers, Vol II, Diaphantine Analysis, New York, 1971.

[13] **Gelfond A.O.,** Denklemlerin Tam Sayılarla Çözülmesi, (Çev. Orhan İÇEN) Türk Matematik Derneği Yayınları, İstanbul, 1962.

[14] **Gurbanlıyev Allagulı,** "Heron Üçgenleri Üzerine", (Doktora Tezi), Konya, 2003.

[15] **Hojoo Lee,** "Another Proof of the Erdòs – Mordell Theorem, Forum Geometricorum, Vol 1, pp 7 – 8, 2001.

[16] **Kolmagorov A.H., Semenoviç A.F. we Çerkasov R.S.,** Geometriya, Magarif, Aşgabat, 1980.

[17] **Koyunlu Gökhan,** www.ilimfaziletvakfi.org.tr/kolejogretmen.htm.

[18] **Kramer A.V., Luca F.,** Same Remarks on Heron Triangles, Acta, Acad, Paed, Agriensis, Secto Mahematicae 27, pp 25 – 38, 2001.

[19] **Lin Tan,** "The Group of Rational Points on the Unit Circle", Mathematics Magazine, Vol 69, No 3, June 1996.

[20] **Luca, F.,** Fermat Primes and Heron Triangles with Prime Power Sides, American Mathematics Monthly, Vol 110.1, pp 46 – 49, 2003.

[21] **Mohanty S. and Mohanty S.P.,** "Pythagorean Numbers", Fibonacci Quarterly, Vol 28, No 1, pp 31 – 42, Feb. 1990.

[22] **Mustafa Yağcı,** www.mustafayagci.com.

[23] **Raumond A. Beauregard and Suryanaryan E.R.,** "Integral Triangles", Mathematics Magazine, Vol 72, No 4, October 1999.

[24] **Sastry K.R.S.,** "Heron Triangles: A Gergonne Cevian and Median Perspective", Forum Geometricorum, Vol 1, pp 17 – 24, 2001.

[25] **Sierpinski W.,** Pythagorean Triangles, Graduate School of Science, New York, 1962.

[26] **Şenay H.,** Sayılar Teorisine Giriş, S.Ü. Yayınları, Konya, 1989.

[27] **Şenay H.,** "Sayılar Geometrisi ve Sayılar Teorisi İle İlişkisi Üzerine", (Doçentlik Çalışması), Konya Devlet Mühendislik ve Mimarlık Akademisi Temel Bilimler Bölümü, Konya, 1979.

[28] **Vajda S.,** Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section, Ellis Horwood Limited, New York, 1989.

[29] **Vinogradov A.H.,** Osnovi Teori Çisel, Nauka, 1972.

[30] **William C. Waterhouse,** "Continued Fractions and Pythagorean Triples", The Mathematical Monthly, pp 144 – 147, May, 1992.