T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİS NORMLARI VE ARİTMETİK, GEOMETRİK, HARMONİK EŞİTSİZLİKLER

Mine AYTEKİN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
Konya 2007

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİS NORMLARI VE ARİTMETİK, GEOMETRİK, HARMONİK EŞİTSİZLİKLER

Mine AYTEKİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI

Bu tez 13/ 04 / 2007 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Eşref HATIR
(Üye)

Doç. Dr. Cengiz ÇINAR
(Üye)

Yard. Doç. Dr. Süleyman SOLAK
(Danışman)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MATRİS NORMLARI VE ARİTMETİK, GEOMETRİK, HARMONİK EŞİTSİZLİKLER

Mine AYTEKİN

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İlköğretim Anabilim Dalı
Matematik Öğretmenliği Programı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Süleyman SOLAK

2007, sayfa 36

Jüri:

Prof. Dr. Eşref HATIR
Doç. Dr. Cengiz ÇINAR
Yard. Doç.Dr. Süleyman SOLAK

Bu çalışmada elemanları aritmetik, geometrik ve harmonik ortalama şeklinde tanımladığımız matrislerin bazı normlarını inceledik.

Anahtar Kelimeler: Norm, aritmetik ortalama, geometrik ortalama, harmonik ortalama.

ABSTRACT

Ms Thesis

MATRIX NORMS AND ARITHMETIC, GEOMETRIC , HARMONIC MEAN INEQUALITIES

Mine AYTEKİN

Selçuk University
Graduate School of Natural Applied Sciences
Department of Elementary Education
Program of Mathematics Teacher

Supervisor: Asssit. Prof.Dr. Süleyman SOLAK

2007, pages 36

Jury:

Prof. Eşref HATIR
Assac. Prof. Dr. Cengiz ÇINAR
Asssit. Prof.Dr. Süleyman SOLAK

In this study, we have examined some norms of matrices which entries in arithmetic, geometric, harmonic mean form.

Key Words: Norm, arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Yard. Doç. Dr. Süleyman SOLAK tarafından yönetilerek Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur. Çalışma süresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli aileme ve değerli hocam Yard. Doç. Dr. Süleyman SOLAK'a en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Mine AYTEKİN
2007

İÇİNDEKİLER

ÖZET……....**iii**

ABSTRACT……**iv**

ÖNSÖZ……..**v**

1. GİRİŞ……**1**

2. TEMEL KAVRAMLAR……...……...**3**

3. ELEMANLARI ARİTMETİK, GEOMETRİK VE HARMONİK ORTALAMA ŞEKLİNDE TANIMLANAN MATRİSLERİN EUCLİDEAN NORMLARI……...…....**10**

4. ELEMANLARI ARİTMETİK, GEOMETRİK VE HARMONİK ORTALAMA ŞEKLİNDE TANIMLANAN MATRİSLERİN SPEKTRAL NORMU……**20**

5. NÜMERİK SONUÇLAR…….…...**31**

6. SONUÇ VE ÖNERİLER…….……..**35**

KAYNAKLAR……..…**36**

1.BÖLÜM

GİRİŞ

$a,b \in R^+$ olmak üzere bu sayıların aritmetik, geometrik ve harmonik ortalaması sırasıyla,

$$\frac{a+b}{2}\ ,\quad \sqrt{ab} \qquad \text{ve} \qquad 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^{-1}$$

şeklinde tanımlıdır. Aritmetik-geometrik-harmonik ortalama eşitliksizliği matematiğin değişik alanlarında karşımıza çıkmaktadır.

Bhatia (2006), çalışmasında Heinz ve Heron ortalamalarını dikkate alarak, aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğine benzer eşitsizlikler elde edilmiş ve bu eşitsizliklerin operatör versiyonunu bulmuştur. Bazı durumlarda ise bu eşitsizlikleri operatör anlamda genişletmenin mümkün olamayacağını basit örneklerle göstermiştir.

Mathias (1993), $x_i > 0$, $q \geq p \geq 0$ olmak üzere nxn

$$\left[\frac{\sqrt{x_i x_j}}{x_i + x_j}\right], \quad \left[\frac{x_i^{-1} + x_j^{-1}}{\sqrt{x_i x_j}}\right] \text{ ve } \quad \left[\frac{x_i^{\,p} + x_j^{\,p}}{x_i^{\,q} + x_i^{\,p}}\right]$$

matrislerini tanımlayarak aritmetik-geometrik-harmonik ortalamaların eşitsizliklerini incelemiştir.

Biz bu çalışmada ise elemanları satır ve sütun numaralarının aritmetik, geometrik ve harmonik ortalaması şeklinde tanımladığımız

$$A = \left(\frac{i+j}{2}\right)_{nxn},\ G = \left(\sqrt{i.j}\right)_{nxn},\ H = \left(\frac{2ij}{i+j}\right)_{nxn}$$

matrislerin Euclidean ve spektral normları ile ilgili bazı eşitsizlikler elde ettik.

Çalışmamız genel olarak Euclidean ve spektral normları üzerine kurulu olduğundan bu iki kavramın tanımı ve bunlarla ilgili temel bilgiler ikinci bölümde verilmiştir.

Üçüncü ve dördüncü bölüm çalışmamızın esas kısmını oluşturmaktadır.

Beşinci bölümde, üçüncü ve dördüncü bölümde verilen teoremler için nümerik örnekler yer almaktadır.

Son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. BÖLÜM

2.1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızda yer alan bazı kavramlara yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sayılarının aritmetik ortalaması, bu sayıların toplamının n ile bölümü olup

$$A.O.(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

şeklinde gösterilir.

Özel olarak $x_1 ve x_2$ gibi iki tane sayının aritmetik ortalaması,

$$A.O.(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

dir.

Tanım 2.1.2. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sayılarının hepsi pozitif olmak üzere bu sayıların geometrik ortalaması,

$$G.O.(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3...x_n}$$

şeklinde tanımlıdır.

Özel olarak $x_1 ve x_2$ gibi iki tane sayının geometrik ortalaması(orta orantısı),

$$G.O.(x_1, x_2) = \sqrt{x_1.x_2}$$

dir.

Tanım 2.1.3. $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sayılarının hepsi pozitif olmak üzere bu sayıların harmonik ortalaması da,

$$H.O.(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + ... + \frac{1}{x_n}}$$

şeklinde olup, eğer özel olarak $x_1 ve x_2$ gibi iki tane sayı alınırsa bu iki sayının harmonik ortalaması,

$$H.O.\ (x_1, x_2) = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{2(x_1.x_2)}{x_1 + x_2} \qquad \text{dir.}$$

Dolayısıyla

$$H.O. = \frac{(G.O.)^2}{A.O.} \qquad \text{dır.}$$

Bu çalışmada aritmetik ortalamayı *A.O.,* geometrik ortalamayı *G.O.* ve harmonik ortalamayı da *H.O.* ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.4. $M_n(F)$, elemanları F cisminden alınan $n \times n$ matrislerin kümesi olsun. $A, B \in M_n(F)$, $\alpha \in F$ olmak üzere,

N1) $\|A\| \geq 0$ ve $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

N2) $\|\alpha A\| = |\alpha|.\|A\| \quad (\alpha \in F)$

N3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

N4) $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$

aksiyomları sağlayan

$$\|.\| : M_n(F) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \qquad (2.1)$$

dönüşümüne *matris normu* denir. Bir A matrisinin normu genel anlamda $\|A\|$ ile gösterilir.

Eğer bu aksiyomlardan N1, N2 ve N3 sağlanıyorsa norma *genelleştirilmiş matris normu* denir. O halde her matris normu, genelleştirilmiş matris normudur diyebiliriz. Aynı zamanda matris normları, vektör normlarının geliştirilmişidir.

Tanım 2.1.5. $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ve A^*, A'nın eşlenik transpozesi olmak üzere A^*A matrisinin öz değerlerinin karekökünе A'nın singüler değerleri denir ve

$$\sigma(A) = \{\sqrt{\lambda_i} : \lambda_i, A^*A \text{ nın öz değerleri}\} \qquad (2.2)$$

olarak gösterilir.

Şimdi yukarıdaki norm aksiyomlarını sağlayan bazı matris normlarını şu şekilde verebiliriz (Zielke 1988):

A, *m*×*n* tipinde bir matris olmak üzere;

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \text{sütun normu,}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{satır normu,}$$

$$\left.\begin{aligned} \|A\|_E &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)} \\ &= \sqrt{iz(A^*A)} = \sqrt{iz(AA^*)} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^{\,2}(A)} \qquad r : rank \end{aligned}\right\} \quad \text{Euclidean (veya Frobenius veya Schur) normu,}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)} = \sigma_{\max}(A) \qquad \text{spektral norm (veya 2 norm).}$$

Burada $\lambda_{\max}(A^*A)$, A^*A (veya AA^*) nın maksimum öz değeri ve $\sigma_{\max}(A)$ da *A* matrisinin maksimum singüler değeridir.

Tanım 2.1.6. *A*, *m*×*n* tipinde bir matris ve $p, q \in \{1, 2, E, \infty\}$ olsun. $\|A\|_p$ ve $\|A\|_q$ herhangi iki norm, $c_1(p,q)$ ve $c_2(p,q)$ pozitif sabitler olmak üzere

$$c_1\|A\|_p \le \|A\|_q \le c_2\|A\|_p \qquad (2.3)$$

eşitsizliği var ise bu iki matris normu *denktir* denir (Zielke 1988).

Bu tanımla birlikte matris normları arasındaki bağıntıları şu şekilde verebiliriz.

Bir $A = (a_{ij})_{m\times n}$ matrisi için rank(*A*)=*r* ve $\|.\|_1$, $\|.\|_\infty$, $\|.\|_E$, $\|.\|_2$ sembolleri sırayla *A* matrisinin sütun, satır, Frobenius (Euclidean) ve spektral normlarını göstermek üzere aşağıdaki bağıntılar geçerlidir. Bizim burada çalışmamız için esas teşkil eden $\|.\|_2$ (spektral norm) normunu içeren aralıkları vermemiz yeterli olacaktır (Zielke 1988, Sun 1996).

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n}\|A\|_1 \ ,$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\|A\|_\infty$$

ve rank(A)=r olmak üzere $r \le \min(m,n)$ olacağından,

$$\frac{1}{\sqrt{\min(m,n)}}\|A\|_E \le \frac{1}{\sqrt{r}}\|A\|_E \le \|A\|_2 \le \|A\|_E \qquad (2.4)$$

vardır. (2.4) eşitsizliği;

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\|A\|_E = \sqrt{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2} = \sqrt{\frac{1}{r}iz(A^*A)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2}$$

$$\le \sqrt{\frac{r\sigma_{\max}^2}{r}} = \sigma_{\max} = \|A\|_2$$

ve

$$\|A\|_2 \le \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2} = \|A\|_E$$

olduğundan

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\|A\|_E \le \|A\|_2 \le \|A\|_E$$

(2.5)

eşitsizliği kolayca görülebilir.

Tanım 2.1.7. $A=(a_{ij})_{m\times n}$ matrisinin ℓ_p normu,

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^p\right)^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty) \qquad (2.6)$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıdaki tanımda $p=1$ olması durumunda norm sütun normu, $p=2$ olması durumunda norm Euclidean (veya Frobenius veya Schur) normu ve $p=\infty$ olması durumunda da, norm satır normu olarak kabul edilir.

Tanım 2.1.8. GAMMA fonksiyonu,

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \tag{2.7}$$

olmak üzere

$$\Psi(x)=Psi(x)=\frac{d}{dx}\{\ln[\Gamma(x)]\} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona *psi* (veya *digamma*) *fonksiyonu* denir. Psi fonksiyonunun *n*. türevine de *polygamma fonksiyonu denir* ve

$$\Psi(n,x)=\frac{d}{dx^n}Psi(x)=\frac{d}{dx^n}\left[\frac{d}{dx}\ln[\Gamma(x)]\right] \tag{2.9}$$

şeklinde gösterilir. Burada $n\in\mathbb{Z}^+$ dır. Eğer *n*=0 ise

$$\Psi(0,x)=Psi(x)=\frac{d}{dx}\{n[\Gamma(x)]\} \tag{2.10}$$

olur. Ayrıca

$$\gamma(n)=\lim_{m\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{\ell nk^n}{k}-\frac{\ell nm^{n+1}}{n+1}\right] \tag{2.11}$$

eşitliği ile tanımlanan fonksiyon gamma fonksiyonu olup *n*=0 için

$$\gamma(0)\cong 0,5772$$

değeri Euler sabiti olarak bilinir.

Özellik 2.1.1. $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$ fark operatörü ve $\Delta^{-1}f(x)=\sum_{i=0}^{x-1}f(i)$ ters fark operatörü olmak üzere

$$\Psi(m,x)=\frac{d}{dx^m}\left(\ln[\Gamma(x+1)]\right) \qquad (m>0)$$

eşitsizliğinin her iki tarafına ileri fark operatörünü uygularsak,

$$\begin{aligned}\Delta\Psi(m,x) &= \frac{d}{dx^m}\Delta\left(\ln\left[\Gamma(x+1)\right]\right)\\ &= \frac{d}{dx^m}\ln\frac{\Gamma(x+2)}{\Gamma(x+1)}\\ &= \frac{d}{dx^m}\ln(x+1)\\ &= \frac{d}{dx^{m-1}}\left(\frac{1}{x+1}\right)\\ &= \frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(x+1)^m}\end{aligned}$$

olur. Şimdi de her iki yana ters fark operatörünü uygularsak,

$$\Psi(m,x) = \Delta^{-1}\left(\frac{(-1)^{m-1}(m-1)!}{(x+1)^m}\right) = (-1)^{m-1}(m-1)!\Delta^{-1}\left(\frac{1}{(x+1)^m}\right)$$

elde edilir. Buradan da

$$\Delta^{-1}\left(\frac{1}{(x+1)^m}\right) = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\Psi(m,x) \tag{2.12}$$

yazılır. Ters fark operatörü $\Delta^{-1}f(x) = \sum_{i=0}^{x-1} f(i)$ şeklinde tanımlı olduğu için (2.12) ifadesi bir asimptotik serinin polygamma fonksiyonu cinsinden değerini ifade eder (Moenck 1977).

Özellik 2.1.2. $a \in \mathbb{Z}^+$, b herhangi bir sayı ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\Psi(a,n+b) = 0 \tag{2.13}$$

dir (Bozkurt 1998).

Tanım 2.1.8. $A = (a_{ij})_{mn}$ olsun. A nın Hadamard inversi

$$A^{o^{-1}} = \left(\frac{1}{a_{ij}}\right)_{mn} \tag{2.14}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Tanım 2.1.9. $A = (a_{ij})_{mxn}$ ve $B = (b_{ij})_{mxn}$ olsun.

$$A \circ B = (a_{ij}b_{ij})_{mxn} \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanan çarpıma A ve B matrislerinin *Hadamard çarpımı* denir.

Tanım 2.1.10. $A=(a_{ij})_{mxn}$ matrisi verilsin.

$$r_i(A)=\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2} \qquad i=1,2,3,...,m$$

ve

$$c_j(A)=\left(\sum_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2} \qquad j=1,2,3,...n$$

şeklinde tanımlanan normlara sırasıyla A matrisinin *Euclidean satır ve sütun normları* denir.(Horn, Johnson 1991)

Eğer

$$r_1(A)=\max_i\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2}$$

ve

$$c_1(A)=\max_j\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left|a_{ij}\right|^2}$$

şeklinde maksimum satır ve maksimum sütun normları alınırsa bu durumda, $A=B\circ C$ olmak üzere

$$\left\|A\right\|_2\le r_1(B).c_1(C) \tag{2.16}$$

dir.(Mathias,1990)

3. BÖLÜM

3.1. ELEMANLARI ARİTMETİK, GEOMETRİK VE HARMONİK ORTALAMA ŞEKLİNDE TANIMLANAN MATRİSLERİN EUCLİDEAN NORMLARI

Teorem 3.1.1. *A* matrisi elemanları satır ve sütun numaralarının aritmetik ortalaması olarak

$$A=\left(\frac{i+j}{2}\right)_{nxn} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan bir matris ise bu durumda

$$\|A\|_E = n\sqrt{\frac{7n^2+12n+5}{24}}.$$

İspat. $A=\left(\frac{i+j}{2}\right)_{nxn}$ matrisini açık olarak yazarsak,

$$A=\begin{pmatrix} \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots & \frac{n+1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots & \frac{n+2}{2} \\ \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \cdots & \frac{n+3}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{n+1}{2} & \frac{n+2}{2} & \frac{n+3}{2} & \cdots & \frac{2n}{2} \end{pmatrix}_{nxn}$$

olur. Euclidean normu tanımından

$$\|A\|_E^{\,2} = \left\{1\left(\frac{2}{2}\right)^2+2\left(\frac{3}{2}\right)^2+3\left(\frac{4}{2}\right)^2+\ldots+(n-1)\left(\frac{n}{2}\right)^2+n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right.$$

$$\left.+(n-1)\left(\frac{n+2}{2}\right)^2+(n-2)\left(\frac{n+3}{2}\right)^2+\ldots+1\left(\frac{2n}{2}\right)^2\right\}$$

yazılır.

Bu ifadeyi toplam olarak,

$$\|A\|_E^{\,2} = \sum_{s=1}^{n} s\left(\frac{s+1}{2}\right)^2 + \sum_{s=1}^{n-1}(n-s)\left(\frac{n+s+1}{2}\right)^2 \qquad (3.2)$$

yazabiliriz. Bu eşitlikte

$$\sum_{s=1}^{n} s\left(\frac{s+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}(n+1)^4 + \frac{1}{24}(n+1)^3 - \frac{1}{16}(n+1)^2 - \frac{1}{24}(n+1)$$

ve

$$\sum_{s=1}^{n-1}(n-s)\left(\frac{n+s+1}{2}\right)^2 = \frac{11}{48}n^4 + \frac{5}{24}n^3 - \frac{11}{48}n^2 - \frac{5}{24}$$

olup bu değerleri (3.2) de yerine yazarsak,

$$\|A\|_E^{\,2} = \frac{1}{16}(n+1)^4 + \frac{1}{24}(n+1)^3 - \frac{1}{16}(n+1)^2 + \frac{11}{48}n^4 + \frac{5}{2}n^3 - \frac{11}{48}n^2 - \frac{5}{24}$$

$$= \frac{1}{24}n^2\left(7n^2 + 12n + 5\right)$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki yanının karekökü alınırsa

$$\|A\|_E = n\sqrt{\frac{7n^2 + 12n + 5}{24}}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanır.

Teorem 3.1.2. *G* matrisi

$$G = \left(\sqrt{i.j}\right)_{nxn} \qquad (3.3)$$

şeklinde elemanları satır ve sütun numaralarının geometrik ortalaması olarak tanımlansın. O zaman,

$$\|G\|_E = \frac{n(n+1)}{2}$$

İspat. $G = \left(\sqrt{i.j}\right)_{nxn}$ matrisini oluşturalım:

$$G=\begin{pmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \cdots & \sqrt{n} \\ \sqrt{2} & \sqrt{4} & \sqrt{6} & \cdots & \sqrt{2n} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} & \sqrt{9} & \cdots & \sqrt{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{n} & \sqrt{2n} & \sqrt{3n} & \cdots & \sqrt{n^2} \end{pmatrix}_{nxn} .$$

Euclidean normu tanımından,

$$\|G\|_E^{\,2} = \sum_{s=1}^{n} (\sqrt{s})^{2} + \sum_{s=1}^{n} (\sqrt{2s})^{2} + \ldots + \sum_{s=1}^{n} (\sqrt{ns})^{2}$$

yazılır. Eşitliğin sağ tarafını düzenlersek

$$\|G\|_E^{\,2} = \sum_{s=1}^{n} s + \sum_{s=1}^{n} 2s + \sum_{s=1}^{n} 3s + \ldots + \sum_{s=1}^{n} ns$$

$$= 1\sum_{s=1}^{n} s + 2\sum_{s=1}^{n} s + 3\sum_{s=1}^{n} s + \ldots + n\sum_{s=1}^{n} s$$

$$= (1+2+3+\ldots+n)\sum_{s=1}^{n} s$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}.\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{2^2}$$

şeklinde yazabiliriz ve her iki tarafın karekökü alınırsa

$$\|G\|_E = \frac{n(n+1)}{2}$$

elde edilir ki teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.1.3. *H* matrisi elemanları satır ve sütun numaralarının harmonik ortalaması olarak

$$H = \left(\frac{2ij}{i+j} \right)_{nxn} \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu matrisin Euclidean normu için

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|H\|_E \le \sqrt{\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. H matrisi

$$H=\begin{pmatrix} \frac{2}{2} & \frac{4}{3} & \frac{6}{4} & \cdots & \frac{2n}{n+1} \\ \frac{4}{3} & \frac{8}{4} & \frac{12}{5} & \cdots & \frac{4n}{n+2} \\ \frac{6}{4} & \frac{12}{5} & \frac{18}{6} & \cdots & \frac{6n}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2n}{n+1} & \frac{4n}{n+2} & \frac{6n}{n+3} & \cdots & \frac{2n^2}{2n} \end{pmatrix}_{nxn}$$

olmak üzere Euclidean normu

$$\|\mathrm{H}\|_E{}^2 = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{2s}{s+1}\right)^2 + \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{4s}{s+2}\right)^2 + \ldots + \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{2ns}{n+s}\right)^2 . \qquad (3.5)$$

(3.5) eşitliğinin sağ tarafındaki her toplamı sıra ile,

$$X_1 = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{2s}{s+1}\right)^2$$

$$X_2 = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{4s}{s+2}\right)^2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$X_n = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{2ns}{n+s}\right)^2$$

olarak adlandırırsak,

$$\|H\|_E{}^2 = X_1 + X_2 + X_3 \ldots + X_n$$

olur. Buradaki her X_i (i=1,2,3,…n) nin değeri

$$X_1 = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{2s}{s+1}\right)^2 = 4\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{s}{s+1}\right)^2 = 4\left[n+1-\psi(1,n+2)-2\psi(n+2)+\frac{1}{6}\pi^2-2\gamma\right],$$

$$X_2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4s}{s+2}\right)^2 = 16\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{s}{s+2}\right)^2 = 16\left[n+1-4\psi(1,n+3)\text{-}4\psi(n+3)+\frac{2}{3}\pi^2-4\gamma\right],$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$X_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2ns}{n+s}\right)^2 = 4n^2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{s}{n+s}\right)^2 = 4n^2\Big[n-n^2\psi(1,2n+1)\text{-}2n\psi(2n+1)$$

$$+n^2\psi(1,n+1)+2n\psi(n+1)\Big]$$

dir. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_1}{n} = 4$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_2}{n} = 16$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{n} \to \infty$$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\|H\|_E^{\,2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(X_1+X_2+\ldots+X_n\right)$$

$$= 4+16+....+4n^2+...$$

$$= 4(1+4+9+...+n^2+...)$$

$$= 4\sum_{s=1}^{\infty}s^2$$

olur, ancak bu serinin kısmi toplamı

$$S_n = \sum_{s=1}^{n} s^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

olup

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \|H\|_E^{\,2} \to \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1)$$

elde edilir. Dolayısı ile,

$$\frac{1}{n} \|H\|_E^{\,2} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \|H\|_E^{\,2}$$

olduğundan,

$$\frac{1}{n} \|H\|_E^{\,2} \le \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1)$$

olur ki, her iki tarafında karekökü alınırsa,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|H\|_E \le \sqrt{\frac{2}{3} n(n+1)(2n+1)}\,.$$

Teorem 3.1.4. (3.1) ile tanımlı A matrisinin Hadamard inversinin Euclidean normu

$$\left\|A^{o^{-1}}\right\|_E = 2\sqrt{2\Psi(n+2) + 2(n+1)\Psi(1,n+2) - \Psi(2n+1) - (2n+1)\Psi(1,2n+1) + \gamma - \frac{1}{6}\pi^2}$$

olur.

İspat. $A^{o^{-1}} = \left(\frac{2}{i+j}\right)_{nxn}$ olmak üzere bu matrisi oluşturalım:

$$A^{o^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \cdots & \frac{2}{n+1} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots & \frac{2}{n+2} \\ \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \cdots & \frac{2}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2}{n+1} & \frac{2}{n+2} & \frac{2}{n+3} & \cdots & \frac{2}{2n} \end{pmatrix}_{nxn}.$$

$A^{o^{-1}}$ matrisinin Euclidean normu

$$\left\|A^{o^{-1}}\right\|_E^{\ 2}=\left(\frac{2}{2}\right)^2+2.\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+(n-1).\left(\frac{2}{n}\right)^2+n.\left(\frac{2}{n+1}\right)^2+(n-1).\left(\frac{2}{n+2}\right)^2+(n-2).\left(\frac{2}{n+3}\right)^2+\ldots+1.\left(\frac{2}{2n}\right)^2$$

olup sağ taraf toplam olarak,

$$\left\|A^{o^{-1}}\right\|_E^{\ 2}=\sum_{s=1}^{n}s.\left(\frac{2}{s+1}\right)^2+\sum_{s=1}^{n-1}(n-s).\left(\frac{2}{n+s+1}\right)^2$$

şeklinde yazılır. Eşitliğin sağ tarafındaki toplamlar Gamma ve Polygamma fonksiyonlarına bağlı olarak ifade edilirse

$$\left\|A^{o^{-1}}\right\|_E^{\ 2}=8\Psi(n+2)+8(n+1)\Psi(1,n+2)-4\Psi(2n+1)-(8n+4)\Psi(1,2n+1)+4\gamma-\frac{2}{3}\pi^2$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının karekökü alınırsa,

$$\left\|A^{o^{-1}}\right\|_E=2\sqrt{2\Psi(n+2)+2(n+1)\Psi(1,n+2)-\Psi(2n+1)-(2n+1)\Psi(1,2n+1)+\gamma-\frac{1}{6}\pi^2}$$

elde edilir ki, bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.5. (3.3) ile tanımlı G matrisinin Hadamard inversi $G^{o^{-1}}=\frac{1}{\sqrt{i.j}}$ olmak üzere,

$$\left\|G^{o^{-1}}\right\|_E=\Psi(n+1)+\gamma$$

dır. Burada γ Euler sabitidir.

İspat. Önce $G^{o^{-1}}$ matrisini açık olarak yazarsak

$$G^{0^{-1}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2n}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{9}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{3n}}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2n}} & \frac{1}{\sqrt{3n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n^2}}\end{pmatrix}_{nxn}$$

olur. Euclidean normu tanımından

$$\left\|G^{o^{-1}}\right\|_E^{\,2} = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)^2 + \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2s}}\right)^2 + \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{3s}}\right)^2 + \ldots + \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{ns}}\right)^2$$

$$= \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s} + \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{2s} + \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{3s} + \ldots + \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{ns}$$

$$= 1\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s} + \frac{1}{3}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s} + \ldots + \frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\right)\left(\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\right)$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}\right)^2$$

$$\left\|G^{o^{-1}}\right\|_E^{\,2} = (\Psi(n+1) + \gamma)^2$$

elde edilir ve bu eşitliğin her iki tarafının karekökü alınırsa;

$$\left\|G^{o^{-1}}\right\|_E = \Psi(n+1) + \gamma$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.6. (3.4) ile tanımlı H matrisinin $H^{o^{-1}}$ Hadamard inversi için

$$\left\|H^{o^{-1}}\right\|_E = \sqrt{\Psi(1, n+1)\left(-\frac{n}{2}\right) + \frac{n\pi^2}{12} + \frac{1}{2}\left[\Psi(n+1) + \gamma\right]^2}$$

olur.

İspat. $H^{o^{-1}}$ matrisini açık olarak

$$H^{o^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2} & \frac{3}{4} & \frac{4}{6} & \cdots & \frac{n+1}{2n} \\ \frac{3}{4} & \frac{4}{8} & \frac{5}{12} & \cdots & \frac{n+2}{4n} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{12} & \frac{6}{18} & \cdots & \frac{n+3}{6n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{n+1}{2n} & \frac{n+2}{4n} & \frac{n+3}{6n} & \cdots & \frac{2n}{2n^2} \end{pmatrix}_{nxn}$$

şeklinde yazarız. $H^{o^{-1}}$ matrisinin Euclidean normu,

$$\left\| H^{o^{-1}} \right\|_E^{\ 2} = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{s+1}{2s} \right)^2 + \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{s+2}{4s} \right)^2 + \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{s+3}{6s} \right)^2 + \ldots + \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{n+s}{2ns} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{s+1}{s} \right)^2 + \frac{1}{16} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{s+2}{s} \right)^2 + \frac{1}{36} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{s+3}{s} \right)^2 + \ldots + \frac{1}{4n^2} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{n+s}{s} \right)^2 .$$

Bu eşitliğin sağ tarafını

$$X_1 = \frac{1}{4} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{s+1}{s} \right)^2 ,$$

$$X_2 = \frac{1}{16} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{s+2}{s} \right)^2 ,$$

$$X_3 = \frac{1}{36} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{s+3}{s} \right)^2 ,$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \ \vdots$$

$$X_n = \frac{1}{4n^2} \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{n+s}{s} \right)^2$$

olmak üzere

$$\left\| H^{o^{-1}} \right\|_E^{\ 2} = \left(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n \right)$$

şeklinde yazalım. Buradaki her bir X_i'nin değeri,

$$X_1 = \frac{1}{4}\left(n - \Psi(1,n+1) + 2\Psi(n+1) + \frac{1}{6}\pi^2 + 2\gamma \right),$$

$$X_2 = \frac{1}{16}\left(n - 4\Psi(1,n+1) + 4\Psi(n+1) + \frac{2}{3}\pi^2 + 4\gamma \right),$$

$$X_3 = \frac{1}{36}\left(n - 9\Psi(1,n+1) + 6\Psi(n+1) + \frac{3}{2}\pi^2 + 6\gamma \right),$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$X_n = \frac{1}{4n^2}\left(n - n^2\Psi(1,n+1) + 2n\Psi(n+1) + \frac{1}{6}n^2\pi^2 + 2n\gamma \right)$$

dir. Dolayısıyla

$$\left\| H^{o^{-1}} \right\|_E = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(2s)^2}\left[n - s^2\Psi(1,n+1) + 2s\Psi(n+1) + \frac{s^2\pi^2}{6} + 2s\gamma \right]$$

$$= \Psi(1,n+1)\left(-\frac{n}{2} \right) + \frac{n\pi^2}{12} + \frac{1}{2}\left[\Psi(n+1) + \gamma \right]^2$$

olur. Eşitliğin her iki tarafın da karekökü alınırsa

$$\left\| H^{o^{-1}} \right\|_E = \sqrt{\Psi(1,n+1)\left(-\frac{n}{2} \right) + \frac{n\pi^2}{12} + \frac{1}{2}\left[\Psi(n+1) + \gamma \right]^2}$$

elde edilir.

4.BÖLÜM

4.1. ELEMANLARI ARİTMETİK, GEOMETRİK VE HARMONİK ORTALAMA ŞEKLİNDE TANIMLANAN MATRİSLERİN SPEKTRAL NORMU

Teorem 4.1.1. (3.1) de tanımlanan A matrisinin spektral normu için

$$\|A\|_2 \le \frac{1}{24}\sqrt{n^2\left(2n+1\right)^2(7n+1)^2+24n(2n+1)(7n+1)(1-n^2)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $A=\left(\frac{i+j}{2}\right)_{nxn}$ matrisi açık olarak

$$A=\begin{pmatrix} \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots & \frac{n+1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots & \frac{n+2}{2} \\ \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \cdots & \frac{n+3}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{n+1}{2} & \frac{n+2}{2} & \frac{n+3}{2} & \cdots & \frac{2n}{2} \end{pmatrix}_{nxn}$$

şeklindedir. Hadamard çarpımı tanımından $A=B\circ C$ olacak şekilde B ve C matrislerini aşağıdaki gibi belirleyelim. Buna göre,

$$A=\begin{pmatrix} \frac{2}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \frac{6}{2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{n+1}{2} & \frac{n+2}{2} & \frac{n+3}{2} & \cdots & \frac{2n}{2} \end{pmatrix}_{nxn} \circ \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots & \frac{n+1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{5}{2} & \cdots & \frac{n+2}{2} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{n+3}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{nxn}$$

olsun. Maksimum satır normu tanımından B matrisinin maksimum satır normu,

$$r_1^2(B)=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+\left(\frac{n+2}{2}\right)^2+\left(\frac{n+3}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2n}{2}\right)^2$$

$$= \frac{7}{12}n^3 + \frac{3}{8}n^2 + \frac{1}{24}n$$

$$= \frac{1}{24}n(2n+1)(7n+1)$$

olur. Son eşitliğin her iki yanının karekökü alınırsa

$$r_1(B) = \sqrt{\frac{1}{24}n(2n+1)(7n+1)} \quad . \tag{4.1}$$

Maksimum sütun normu tanımından ,

$$c_1{}^2(C) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n+2}{2}\right)^2 + \left(\frac{n+3}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 + 1^2$$

$$= \frac{7}{12}n^3 - \frac{5}{8}n^2 + \frac{1}{24}n + 1$$

$$= \frac{1}{24}\left[n(2n+1)(7n+1) + 24(1-n^2)\right]$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafının karekökü alınırsa

$$c_1(C) = \sqrt{\frac{1}{24}\left[n(2n+1)(7n+1) + 24(1-n^2)\right]} \ . \tag{4.2}$$

Buna göre,

$$\|A\|_2 \le r_1(B).c_1(C)$$

olacağından

$$\|A\|_2 \le \sqrt{\frac{1}{24}n(2n+1)(7n+1)}.\sqrt{\frac{1}{24}\left[n(2n+1)(7n+1) + 24(1-n^2)\right]}$$

$$= \frac{1}{24}\sqrt{n^2(2n+1)^2(7n+1)^2 + 24n(2n+1)(7n+1)(1-n^2)}$$

elde edilir ki teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.1.1. (3.1) ile tanımlanan A matrisinin spektral normu için,

$$\sqrt{\frac{1}{24}\left(7n^3 + 12n^2 + 5n\right)} \le \|A\|_2 \le \frac{1}{24}\sqrt{n^2(2n+1)^2(7n+1)^2 + 24n(2n+1)(7n+1)(1-n^2)}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 4.1.2. (3.2) de tanımlanan G matrisinin spektral normu için

$$\|G\|_2 \le \frac{n}{2}\sqrt{n^4 - n^2 + 2n + 2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $G = (\sqrt{i.j})_{nxn}$ matrisi açık olarak

$$G = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \cdots & \sqrt{n} \\ \sqrt{2} & \sqrt{4} & \sqrt{6} & \cdots & \sqrt{2n} \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} & \sqrt{9} & \cdots & \sqrt{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{n} & \sqrt{2n} & \sqrt{3n} & \cdots & \sqrt{n^2} \end{pmatrix}_{nxn} .$$

Hadamard çarpımından $G = B \circ C$ olacak şekilde B ve C matrisleri

$$G = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{4} & 1 & \cdots & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{6} & \sqrt{9} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sqrt{n} & \sqrt{2n} & \sqrt{3n} & \cdots & \sqrt{n^2} \end{pmatrix}_{nxn} \circ \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \cdots & \sqrt{n} \\ 1 & 1 & \sqrt{6} & \cdots & \sqrt{2n} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \sqrt{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{nxn}$$

olarak belirleyelim. Maksimum satır normu tanımından,

$$r_1^2(B) = (\sqrt{n})^2 + (\sqrt{2n})^2 + ... + (\sqrt{n^2})^2$$

yazılır. Eşitliğin sağ tarafını düzenlersek,

$$\begin{aligned} r_1^2(B) &= n + 2n + 3n + ... + n^2 \\ &= \sum_{s=1}^{n} sn \\ &= \frac{1}{2} n^2 (n+1) \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz ve eşitliğin her iki tarafında karekökü alınırsa

$$r_1(B) = \sqrt{\frac{1}{2}n^2(n+1)} \tag{4.3}$$

elde edilir. Maksimum sütun normu tanımından,

$$c_1{}^2(C) = (\sqrt{n})^2 + (\sqrt{2n})^2 + (\sqrt{3n})^2 + ... + \left(\sqrt{n(n-1)}\right)^2 + 1^2$$

$$= n + 2n + 3n + ... + n(n-1) + 1$$

$$= \sum_{s=1}^{n-1} sn + 1$$

$$= \frac{1}{2}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + 1$$

$$= \frac{1}{2}(n^2(n-1) + 2)$$

şeklinde yazabiliriz. Eşitliğin her iki tarafının da karekökünü alırsak,

$$c_1(C) = \sqrt{\frac{1}{2}(n^2(n-1) + 2)} \tag{4.4}$$

elde edilir. Buradan da

$$\|G\|_2 \le r_1(B).c_1(C)$$

şeklinde yazılacağından

$$\|G\|_2 \le \frac{1}{2}\sqrt{n^2(n+1)(n^2(n-1)-2)}$$

$$= \frac{n}{2}\sqrt{n^4 - n^2 + 2n + 2}$$

elde edilir ki teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 4.1.2. G matrisinin spektral normu için,

$$\frac{1}{2}\sqrt{n^3 + 2n^2 + n} \le \|G\|_2 \le \frac{1}{2}\sqrt{n^4(n^2-1) + 2n^2(n+1)}$$

şeklinde alt ve üst sınır vardır.

Teorem 4.1.3. (3.3) te tanımlanan H matrisinin spektral normu için,

$$\|H\|_2 \le 4n^2\sqrt{n-n^2-2n\Psi(2n+1)+n^2\Psi(1,n+1)+2n\Psi(n+1)}$$
$$\mathrm{X}\sqrt{n-n^2\Psi(1,2n)-2n\Psi(2n)-1+n^2\Psi(1,n+1)+2n\Psi(n+1)+\frac{1}{4n^2}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. (3.3) te ki H matrisi açık olarak

$$H=\begin{pmatrix} \frac{2}{2} & \frac{4}{3} & \frac{6}{4} & \cdots & \frac{2n}{n+1} \\ \frac{4}{3} & \frac{8}{4} & \frac{12}{5} & \cdots & \frac{4n}{n+2} \\ \frac{6}{4} & \frac{12}{5} & \frac{18}{6} & \cdots & \frac{6n}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2n}{n+1} & \frac{4n}{n+2} & \frac{6n}{n+3} & \cdots & \frac{2n^2}{2n} \end{pmatrix}_{nxn}$$

olduğuna göre $H = B \circ C$ olacak şekilde B ve C matrislerini aşağıdaki gibi belirleyelim.

$$H=\begin{pmatrix} \frac{2}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{4}{3} & \frac{8}{4} & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{6}{4} & \frac{12}{5} & \frac{18}{6} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2n}{n+1} & \frac{4n}{n+2} & \frac{6n}{n+3} & \cdots & \frac{2n^2}{2n} \end{pmatrix}_{nxn} \circ \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{6}{4} & \cdots & \frac{2n}{n+1} \\ 1 & 1 & \frac{12}{5} & \cdots & \frac{4n}{n+2} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{6n}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{nxn}$$

Öyleyse B matrisinin maksimum satır normu

$$r_1^2(B)=\left(\frac{2n}{n+1}\right)^2+\left(\frac{4n}{n+2}\right)^2+\left(\frac{6n}{n+3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2n^2}{2n}\right)^2$$

olur. Eşitliğin sağ tarafını düzenlersek,

$$r_1^{\,2}(B) = 4\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + 16\left(\frac{n}{n+2}\right)^2 + 36\left(\frac{n}{n+3}\right)^2 + \cdots + n^2$$

$$= 4\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{ns}{n+s}\right)^2$$

$$= 4\left[n^2(n+1) - n^4\Psi(1,2n+1) - 2n^3\Psi(2n+1) - n^2 + n^4\Psi(1,n+1) + 2n^3\Psi(n+1)\right]$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının da karekökünü alacak olursak

$$r_1(B) = 2n\sqrt{n - n^2\Psi(1,2n+1) - 2n\Psi(2n+1) + n^2\Psi(1,n+1) + 2n\Psi(n+1)}\,. \qquad (4.5)$$

C matrisinin maksimum sütun normu ise,

$$c_1^{\,2}(C) = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{4n}{n+2}\right)^2 + \left(\frac{6n}{n+3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2n(n-1)}{2n-1}\right)^2 + 1^2$$

$$= 4\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + 16\left(\frac{n}{n+2}\right)^2 + 36\left(\frac{n}{n+3}\right)^2 + \cdots + 4\left(\frac{n(n-1)}{2n-1}\right)^2 + 1$$

$$= 4\sum_{s=1}^{n-1}\left(\frac{ns}{n+s}\right)^2 + 1$$

$$= 4\left[n^3 - n^4\Psi(1,2n) - 2n^3\Psi(2n) - n^2 + n^4\Psi(1,n+1) + 2n^3\Psi(n+1)\right] + 1$$

olur. Son eşitliğin her iki tarafının da karekökünü alacak olursak

$$c_1(C) = 2n\sqrt{n - n^2\Psi(1,2n) - 2n\Psi(2n) - 1 + n^2\Psi(1,n+1) + 2n\Psi(n+1) + \frac{1}{4n^2}}\,. \qquad (4.5)$$

Dolayısıyla

$$\|H\|_2 \le r_1(B).c_1(C)$$

olduğundan

$$\|H\|_2 \le 4n^2\sqrt{n - n^2 - 2n\Psi(2n+1) + n^2\Psi(1,n+1) + 2n\Psi(n+1)}$$
$$\mathrm{X}\sqrt{n - n^2\Psi(1,2n) - 2n\Psi(2n) - 1 + n^2\Psi(1,n+1) + 2n\Psi(n+1) + \frac{1}{4n^2}}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.4. A matrisinin Hadamard inversinin spektral normu için

$$\left\|A^{o^{-1}}\right\|_2 \le n$$

dir

İspat.

$$A^{o^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \cdots & \frac{2}{n+1} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots & \frac{2}{n+2} \\ \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \cdots & \frac{2}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2}{n+1} & \frac{2}{n+2} & \frac{2}{n+3} & \cdots & \frac{2}{2n} \end{pmatrix}_{nxn}$$

Hadamard çarpımı tanımından $A^{o^{-1}} = B \circ C$ olacak şekilde B ve C matrisleri

$$A^{o^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{2}{n+1} & \frac{2}{n+2} & \frac{2}{n+3} & \cdots & \frac{2}{2n} \end{pmatrix}_{nxn} \circ \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \cdots & \frac{2}{n+1} \\ 1 & 1 & \frac{2}{5} & \cdots & \frac{2}{n+2} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{2}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{nxn}$$

olsun. Buna göre B matrisinin maksimum satır normu

$$\begin{aligned} r_1^2(B) &= \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 \\ &= n.1 \\ &= n \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının da karekökü alınırsa

$$r_1(B) = \sqrt{n} \quad . \tag{4.7}$$

C matrisinin maksimum sütun normunu alırsak,

$$\begin{aligned} c_1^2(C) &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 \\ &= n.1 \\ &= n \end{aligned}$$

olup eşitliğin her iki tarafının karekökü alınırsa

$$c_1(C) = \sqrt{n}$$

(4.8)

elde edilir. Buna göre,

$$\left\| A^{o^{-1}} \right\|_2 \le r_1(B).c_1(C)$$

olduğundan

$$\left\| A^{o^{-1}} \right\|_2 \le \sqrt{n}\sqrt{n} = n = n$$

olur, bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.3. (3.1) de tanımlanan A matrisinin Hadamard inversi olan $A^{o^{-1}}$ matrisinin spektral normu için alt ve üst sınır

$$2\sqrt{\frac{1}{n}\left[2\Psi(n+2) + 2(n+1)\Psi(1,n+2) - \Psi(2n+1) - (2n+1)\Psi(1,2n+1) + \gamma - \frac{1}{6}\pi^2 \right]} \le \left\| A^{o^{-1}} \right\|_2 \le n$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.5. (3.3) ile tanımlı G matrisinin Hadamard inversi olan $G^{o^{-1}}$ matrisinin spektral normu için

$$\left\| G^{o^{-1}} \right\|_2 \le n$$

dir.

İspat. $G^{o^{-1}}$ matrisi,

$$G^{0^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{4}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2n}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{9}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{3n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2n}} & \frac{1}{\sqrt{3n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n^2}} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

olduğundan $G^{o^{-1}} = B \circ C$ olacak şekilde B ve C matrisleri aşağıdaki gibi belirleyelim.

$$G^{o^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1}} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{4}} & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{9}} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2n}} & \frac{1}{\sqrt{3n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n^2}} \end{pmatrix}_{nxn} \circ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2n}} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{3n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{nxn}$$

Maksimum satır normu tanımından,

$$\begin{aligned} r_1^{\,2}(B) &= \left(\frac{1}{\sqrt{1}}\right)^2 + 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 \\ &= n.1 \\ &= n \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının da karekökünü alırsak

$$r_1(B) = \sqrt{n} \tag{4.9}$$

olur. Maksimum sütun normu tanımından,

$$\begin{aligned} c_1^{\,2}(C) &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 \\ &= n.1 \\ &= n \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının da karekökünü alırsak

$$c_1(C) = \sqrt{n} \tag{4.10}$$

elde edilir. Buradan

$$\left\| G^{o^{-1}} \right\|_2 \le r_1(B).c_1(C)$$

den

$$\left\| G^{o^{-1}} \right\|_2 \le \sqrt{n}\sqrt{n}$$

$$\leq \sqrt{n.n}$$
$$\leq \sqrt{n^2}$$
$$\leq n$$

olur.

Sonuç 4.1.5. (3.3) de tanımlanan G matrisinin Hadamard inversi olan $G^{o^{-1}}$ matrisinin spektral normu,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\Psi(n+1)+\gamma\right) \leq \left\| G^{o^{-1}} \right\|_2 \leq n$$

eşitsizliğine sahiptir.

Teorem 4.1.6. (3.3) de tanımlanan H matrisinin Hadamard inversi olan $H^{o^{-1}}$ matrisinin spektral normu için,

$$\left\| H^{o^{-1}} \right\|_2 \leq n$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $H^{o^{-1}}$ matrisi,

$$H^{o^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2} & \frac{3}{4} & \frac{4}{6} & \cdots & \frac{n+1}{2n} \\ \frac{3}{4} & \frac{4}{8} & \frac{5}{12} & \cdots & \frac{n+2}{4n} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{12} & \frac{6}{18} & \cdots & \frac{n+3}{6n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{n+1}{2n} & \frac{n+2}{4n} & \frac{n+3}{6n} & \cdots & \frac{2n}{2n^2} \end{pmatrix}_{nxn}$$

olduğundan $H^{o^{-1}} = B \circ C$ olacak şekilde B ve C matrislerini aşağıdaki gibi belirleyelim.

$$H^{o^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{4}{8} & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{12} & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{n+1}{2n} & \frac{n+2}{4n} & \frac{n+3}{6n} & \cdots & \frac{2n}{2n^2} \end{pmatrix}_{nxn} \circ \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{4}{6} & \cdots & \frac{n+1}{2n} \\ 1 & 1 & \frac{5}{12} & \cdots & \frac{n+2}{4n} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \frac{n+3}{6n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{nxn}$$

Maksimum satır normu tanımından B matrisinin maksimum satır normu,

$$\begin{aligned} r_1^{\,2}(B) &= \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 \\ &= n.1 \\ &= n \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafının da karekökünü alırsak

$$r_1(B) = \sqrt{n}\ . \tag{4.11}$$

Maksimum sütun normu tanımından,

$$\begin{aligned} c_1^{\,2}(C) &= 1^2 + 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 \\ &= n.1 \\ &= n \end{aligned}$$

bulunur.

Dolayısıyla

$$\left\| H^{o^{-1}} \right\|_2 \le r_1(B).c_1(C)$$

eşitsizliğinden

$$\left\| H^{o^{-1}} \right\|_2 \le \sqrt{n}\sqrt{n} = n$$

elde edilir ki bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1.5. (3.3) de tanımlanan H matrisinin Hadamard inversi olan $H^{o^{-1}}$ matrisinin spektral normu için alt ve üst sınır,

$$\sqrt{\frac{1}{n}\left[\Psi(1,n+1)\left(-\frac{n}{2}\right) + \frac{n\pi^2}{12} + \frac{1}{2}\left[\Psi(n+1)+\gamma\right]^2\right]} \le \left\| H^{o^{-1}} \right\| \le n$$

şeklindedir.

5.BÖLÜM

5.1. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde, önceki bölümlerde verdiğimiz bazı teoremlerdeki matrislerin normları ile bu normlar için bulduğumuz sınırların aldığı nümerik değerler tablolar halinde verildi.

Örnek 5.1.1.

$\alpha = \sqrt{\frac{1}{24}\left(7n^3 + 12n^2 + 15n\right)}$ ve $\beta = \frac{1}{24}\sqrt{n^2\left(2n+1\right)^2(7n+1)^2 + 24n(2n+1)(7n+1)(1-n^2)}$

olmak üzere, n=1,2,3,4,5,10,20,…,100 için Sonuç 4.1.1'ün sayısal değerlerinin tablosu:

n	α	$\|A\|_2$	β
1	1	1	1
2	2,18	3,08	4,51
3	3,61	6,24	14,72
4	5,24	10,48	35,21
5	7,06	15,79	69,47
10	18,55	58,52	569,60
20	50,40	224,79	4613,69
30	81,23	498,79	15632,79
40	139,65	880,53	37126,89
50	194,24	1370,00	72595,00
60	254,45	1967,21	125540,10
70	320,04	2672,15	199459,21
80	390,76	3484,83	297853,32
90	465,35	4405,25	424222,42
100	544,69	5433,39	582066,53

Örnek 5.1.2. n=1,2,3,4,5,10,20,…,100 için Sonuç 4.1.2.' nin sayısal değerlerinin tablosu:

n	$\frac{1}{2}\sqrt{n^3+2n^2+n}$	$\|G\|_2$	$\frac{1}{2}\sqrt{n^4\left(n^2-1\right)+2n^2(n+1)}$
1	1	1	1
2	2,13	3	4,24
3	3,47	6	13,42
4	5	10	31,62
5	6,70	15	61,85
10	17,41	55	498,05
20	46,98	210	3995,52
30	84,85	465	13493,01
40	129,75	820	31990,51
50	180,34	1275	62483,01
60	236,13	1830	107985,51
70	296,89	2485	171483,01
80	362,42	3240	255980,51
90	431,51	4095	364478,00
100	505	5050	499975,50

Örnek 5.1.3.

$$\alpha = 4n^2\sqrt{\left(n-n^2\Psi(1,2n+1)-2n\Psi(2n+1)+n^2\Psi(1,n+1)+2n\Psi(n+1)\right)}$$

$$\mathrm{X}\sqrt{\left(n-n^2\Psi(1,2n)-2n\Psi(2n)-1+n^2\Psi(1,n+1)+2n\Psi(n+1)+\frac{1}{4n^2}\right)}$$

olmak üzere, n=1,2,3,4,5,10,20,…,100 için Teorem 4.1.3'ün sayısal değerlerinin tablosu:

n	$\|H\|_2$	α
1	1	1
2	2,92	4,01
3	5,79	12,38
4	9,61	28,97
5	14,37	56,50
10	52,49	453,46
20	200,18	3635,27
30	443,15	12274,99
40	781,41	29101,50
50	1214,95	56843,75
60	1743,77	98230,69
70	2367,88	155991,24
80	3087,26	232854,36
90	3901,94	331548,91
100	4811,89	454803,91

Örnek 5.1.4.

$$\alpha = 2\sqrt{\frac{1}{n}\left[2\Psi(n+2) + 2(n+1)\Psi(1,n+2) - \Psi(2n+1) - (2n+1)\Psi(1,2n+1) + \gamma - \frac{1}{6}\pi^2 \right]}$$

olmak üzere, n=1,2,3,4,5,10,20,…,100 için, Sonuç 4.1.3'ün sayısal değerlerinin tablosu:

n	α	$\left\|A^{o^{-1}}\right\|_2$	n
1	1	1	1
2	1,04	1,46	2
3	1,02	1,75	3
4	0,98	1,96	4
5	0,95	2,11	5
10	0,83	2,58	10
20	0,68	2,99	20
30	0,60	3,21	30
40	0,54	3,35	40
50	0,50	3,46	50
60	0,47	3,54	60
70	0,45	3,61	70
80	0,43	3,67	80
90	0,41	3,72	90
100	0,39	3,76	100

Örnek 5.1.5. n=1,2,3,4,5,10,20,…,100 için Sonuç 4.1.4'ün sayısal değerlerinin tablosu:

n	$\frac{1}{\sqrt{n}}(\Psi(n+1)+\gamma)$	$\left\|G^{o^{-1}}\right\|_2$	n
1	1	1	1
2	1,060	1,500	2
3	1,058	1,833	3
4	1,040	2,083	4
5	1,018	2,283	5
10	0,927	2,928	10
20	0,805	3,598	20
30	0,728	3,995	30
40	0,677	4,279	40
50	0,636	4,499	50
60	0,604	4,680	60
70	0,577	4,832	70
80	0,556	4,965	80
90	0,535	5,082	90
100	0,519	5,197	100

Örnek 5.1.6.

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{n}\left[\Psi(1,n+1)\left(-\frac{n}{2}\right)+\frac{n\pi^2}{12}+\frac{1}{2}\left[\Psi(n+1)+\gamma\right]^2\right]}$$

olmak üzere, n=1,2,3,4,5,10,20,…,100 için Sonuç 4.1.5' ın sayısal değerlerinin tablosu:

n	α	$\left\|H^{o^{-1}}\right\|_2$	n
1	1	1	1
2	1,089	1,54	2
3	1,113	1,93	3
4	1,119	2,23	4
5	1,119	2,50	5
10	1,097	3,43	10
20	1,059	4,62	20
30	1,035	5,47	30
40	1,019	6,16	40
50	1,007	6,76	50
60	0,998	7,28	60
70	0,991	7,76	70
80	0,985	8,20	80
90	0,980	8,61	90
100	0,975	8,99	100

6. BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Çalışmamızda elemanları satır ve sütun numaralarının aritmetik, geometrik ve harmonik ortalaması şeklinde tanımlanan matrislerin Euclidean ve spektral normlarını içeren eşitsizlikler bulunmuştur.

Bu matrislerin determinantları ve inversleri inceleneceği gibi, herhangi bir dizinin elemanlarının ortalaması şeklinde tanımlanan matrislerin bazı özellikleri de incelenebilir. Ayrıca bu çalışma diğer bazı ortalamalar cinsinden ele alınabilir. (Örneğin Heinz, Heron gibi)

KAYNAKLAR

Bozkurt, D., On the ℓ_p norms of Cauchy-Toeplitz matrices. *Linear and multilinear algebra.* 44:341-346, 1998.

Bhatia, R., Interpoling the aritmetic-geometric mean inequality and its operator version. 413,(2-3) p:355-363, 2006

Horn, R.A., Johnson, C.R., *Topics in matrix analysis*, Cambridge Univ.Press. 1991.

Mathias, R., The Spectral Norm of a Nonnegative Matrix. Lineer Alg. And Its Appl., 131,269-284, 1990.

Mathias, R., An Aritmetic-Geometric-Harmonic Mean Inequality Involving Hadamard Products. Lineer Alg. And Its Appl. 184:71-781, 1993.

Moenck , R., On computing closed forms for summations, in: Proceedings of the Macsyma Users Conference, pp.225-236, 1977.

Sun, J., On the variation of the spectrum of a normal matrix. *Linear algebra and its applications* 246:215-223, 1996.

Zielke, G., Some remarks on matix norms, condition numbers and error estimates for linear equations. *Linear algebra and its applications* 110:29-41, 1988.