ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA CALDERON-ZYGMUND OPERATÖRLERİ TARAFINDAN "ÜRETİLEN ALTLİNEER OPERATÖRLER VE ONLARIN KOMÜTATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI"

Muhammed Emre ODABAŞI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ÇANKIRI
2023

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Muhammed Emre ODABAŞI tarafından hazırlanan "Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Calderon-Zygmund Operatörleri Tarafından Üretilen Altlineer Operatörler ve onların Komütatörlerinin Sınırlılığı" adlı tez çalışmasını 09/02/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği veya oy çokluğu ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA

Jüri Üyeleri **:**

Başkan **:** Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Ankara Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye **:** Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Üye **:** Doç. Dr. Gonca DURMAZ GÜNGÖR
Matematik Anabilim Dalı
Çankırı Karatekin Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Hamit ALYAR
Enstitü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum **"Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Calderon-Zygmund Operatörleri Tarafından Üretilen Altlineer Operatörler ve Onların Komütatörlerinin Sınırlılığı"** konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan "Bilimsel intihal Tespit Programı'yla tarandığını, "intihal içermediğini" beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim

(09/02./2023).

Muhammed Emre ODABAŞI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA CALDERON-ZYGMUND OPERATÖRLERİ TARAFINDAN ÜRETİLEN ALTLİNEER OPERATÖRLER VE ONLARIN KOMÜTATÖRLERİNİN SINIRLILIĞI

Muhammed Emre ODABAŞI

Çankırı Karatekin Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gülsüm ULUSOY ADA

Bu tez çalışmasında Genelleştirilmiş Morrey uzaylarında Calderon-Zygmund operatörleri tarafından üretilen altlineer operatörlerin ve onların komütatörlerinin sınırlılığı incelenmiştir. Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.
İkinci bölümde, çalışmamız ile ilgili olan temel kavramlar, uzaylar ve operatörler hakkında genel ve bazı özel tanımlara yer verilmiştir.
Üçüncü bolümde Guliyev tarafından tanımlanmış olan genelleştirilmiş Morrey uzayının tanımı verilmiştir. Ayrıca Calderon-Zygmund integral operatörü tarafından üretilen altlineer operatörler ve komütatörlerin Genelleştirilmiş Morrey uzayındaki sınırlılığı gösterilmiştir.
Dördüncü Bölümde Mizuhara tarafından tanımlanmış olan genelleştirilmiş Morrey uzayları tanımlanmış ve bu uzaylarda Calderon-Zygmund integral operatörleri tarafından üretilen kaba çekirdekli alt lineer operatörler ve komütatörlerinin sınırlılığı gösterilmiştir.
Son bolüm olan beşinci bölümde önceki bölümlerdeki sonuçlara dayanarak Psödodiferensiyel operatörleri, Littlewood-Paley operatörü, Marcinkiewiz operatörü ve Bochner-Riesz operatörünün genelleştirilmiş Morrey Uzaylarındaki sınırlılığı elde edilmiştir.

2023, 70 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Morrey uzayları, Genelleştirilmiş Morrey uzayları, Calderon-Zygmund operatörü, Singüler integral operatörü, Komütatör operatörü

ABSTRACT

Master of Science Thesis

BOUNDEDNESS OF SUBLİNEAR OPERATORS GENERATED BY CALDERON-ZYGMUND OPERATORS AND THEİR COMMUTATORS on GENERALİZED Morrey SPACES

Muhammed Emre ODABAŞI

Çankırı Karatekin University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics Sciences

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Gülsüm Ulusoy ADA

In this thesis, the boundedness of sublinear operators and their commutators produced by Calderon-Zygmund operators in Generalized Morrey spaces have been examined.
This thesis consists of the five parts. In the second part, information about the basic concepts, spaces and operators related to our work is given.
In the third chapter, the generalized Morrey Space defined by Guliyev is given, further the boundedness of the sublinear operators and commutators produced by the Calderon-Zygmund integral operator in the generalized Morrey space is shown.
In the four chapter, generalized Morrey spaces defined by Mizuhara are defi- ned and the boundedness of coarse-core sublinear operators and commutators produced by Calderoon-Zygmund integral operators in these spaces are shown.
In the fifth chapter, which is the last chapter, the limitations pseudodifferential operators, Littlewood-Paley operator, Marcinkiewicz operator and Bochner-Riesz operator in generalized Morrey Spaces are obtained based on the results of previous chapters.

2023, 70 pages

Keywords: Morrey space, Generalized Morrey space, Calderon-Zygmund operatör, Singüler integral operatör, Commutator operatör

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Calderon-Zygmund Operatörleri Tarafından Üretilen Alt lineer Operatörler ve Onların Komütatörlerinin Sınırlılığı adlı yüksek lisans tezimin hazırlanmasında zamanını, fikirlerini, bilgilerini benimle paylaşan ve ilgiyle her türlü desteği ve emeğini esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Gülsüm Ulusoy ADA'ya ve daima yanımda olan değerli hocam Prof. Dr. Ayhan ŞERBETCİ'ye teşekkür ederim. Ayrıca yüksek lisans eğitimim süresince hep yanımda olan anneme, babama ve kardeşlerime teşekkürlerimi sunarım.

Muhammed Emre ODABAŞI
Çankırı, Şubat 2023

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **i**

ABSTRACT ..... **ii**

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR ..... **iii**

İÇİNDEKİLER ..... **iv**

SİMGELER DİZİNİ ..... **vi**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR **4**

2.1. Temel Bilgiler **4**

2.2. $Lp(\mathbb{R}n)$ Lebesgue Uzayı **6**

2.3. Lp,λ Morrey Uzayı **13**

2.4. Lp,κ Ağırlıklı Morrey Uzayı **16**

2.5. Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü, Singüler İntegral Operatörü ve Komütatör Operatörü **17**

3. Mp,φ GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA CALDERÓN - ZYGMUND İNTEGRAL OPERATÖRLERİ TARAFINDAN ÜRETİLEN ALTLİNEER OPERATÖRLER VE KOMÜTATÖRLERİ **25**

3.1. Mp,φ Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Calderón-Zygmund İntegral Operatörleri Tarafından Üretilen Altlineer Operatörlerin Sınırlılığı **25**

3.2. Mp,φ Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Calderón-Zygmund İntegral Operatörleri Tarafından Üretilen Altlineer Operatörlerin Komütatörlerinin Sınırlılığı **32**

4. Mp,φGENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA CALDERÓN-ZYGMUND İNTEGRAL OPERATÖRLERİ TARAFINDAN ÜRETİLEN KABA ÇEKİRDEKLİ ALTLİ NEER OPERATÖRLER VE KOMÜTATÖRLERİ 37

4.1. $Mp,\varphi(\mathbb{R}n)$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayları Üzerinde Calderón-Zygmund İntegral Operatörleri Tarafından Üretilen Kaba Çekirdekli Altlineer Operatörlerinin Sınırlılığı **37**

4.2. $Mp,\varphi(\mathbb{R}n)$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayları Üzerinde Calderón-Zygmund İntegral Operatörleri Tarafından Üretilen Kaba Çekirdekli Altlineer Operatörlerin Komütatörlerinin Sınırlılığı **42**

5. BAZI UYGULAMALAR 49

5.1. Psödodiferensiyel Operatörler **49**

5.2. Littlewood-Paley Operatörü **50**
5.3. Marcinkiewiz Operatörü **52**
5.4. Bochner-Riesz Operatörü **54**
KAYNAKLAR 57
ÖZGEÇMİŞ 61

SİMGELER DİZİNİ

$BMO(\mathbb{R}^n)$	BMO uzayı
$[b,T]$	Komütatör operatörü
$\mathrm{B(x,r)}$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
K	Singüler integral operatörü
$L_p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Morrey uzayı
$L_{p,\kappa}(\mathrm{w})$	Ağırlıklı Morrey uzayı
$L^{loc}(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilen fonksiyonların sınıfı
M	Hardy-Littlewood maksimal operatörü
$M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$Q(x,r)$	x merkezli kenar uzunluğu r olan küp
S^{n-1}	$\mathbb{R}^n$ de birim küre
$suppf$	f fonksiyonun desteği
w	Ağırlık fonksiyonu

1. GİRİŞ

$M_{p,\lambda}$ Morrey uzayı tanımlanmıştır (Morrey 1938). Morrey uzayları için Hardy-Littlewood maksimal operatörü ve singüler integral operatörü için sınırlılık şartları elde etmişlerdir (Chiarenza and Frasca 1987). Morrey uzaylarının genişlemesi olan $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarını tanımlamış ve bu uzaylarda singüler integral operatörünün sınırlılığını araştırmıştır (Mizuhara 1991). Harmonik analizin klasik operatörlerinin $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığını göstermiştir (Nakai 1994). $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayının normalleştirilmiş normunu tanımlamıştır (Guliyev 2009). $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayında harmonik analizin integral operatörlerinin sınırlılığını Mizuhara ve Nakai'ye göre daha genel şartlar altında araştırmıştır (Komori and Shirai 2009). $M_{p,\kappa}(w)$ ağırlıklı Morrey uzaylarını tanımlamışlar ve harmonik analizin klasik operatörlerinin sınırlılıklarını burada ispat etmişlerdir (Komori and Shirai 2009).

Harmonik analizde singüler integral operatörlerinin ve bunların komütatörlerinin norm eşitsizliklerini çalışmak önemli bir yere sahiptir. Bu operatörlerinin ikinci dereceden eliptik, parabolik ve ultraparabolik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin düzgünlüklerinin araştırılması çalışmalarında önemli rol oynarlar ve bu operatörlerin sınırlılıkları belirli fonksiyon uzaylarını karakterize etmek için kullanılırlar.

Bu çalışmada Calderón-Zygmund operatörleri tarafından üretilen altlineer operatörlerin ve onların komütatörlerini $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarındaki sınırlılığını inceleyeceğiz. Şöyle ki:

T lineer yada bir altlineer operatör olmak üzere $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ kompaktt destekli fonksiyonu ve $x \notin suppf$ için

$$|Tf(x)| \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy \qquad (1.1)$$

eşitsizliği sağlansın, burada c_0, x ve f den bağımsızdır.

(1.1) koşulu Soria ve Weiss (Soria and Weiss 1994) tarafından ilk defa tanıtılmıştır. Bu koşul Calderón-Zygmund operatörleri, C. Feffermanın singüler çarpanları, R. Feffermanın singüler integralleri, Ricci-Steinnin singüler salınım integralleri ve Bochner-Riesz ortalamaları gibi harmonik analizdeki bir çok ilginç operatör tarafından karşılanmaktadır (Soria and Weiss. 1994).

Bir b fonksiyonu için, T_b komütatör operatörünün lineer yada altlineer olduğunu varsayalım ve bir kompaktt destekli $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonu ve $x \notin suppf$ için

$$|T_b f(x)| \leq c_0 \int_{\mathbb{R}^n} |b(x) - b(y)||x - y|^{-n} |f(y)| dy \qquad (1.2)$$

sağlansın, burada c_0, x ve f den bağımsızdır.

Çalışmamızın 3. bölümünde Guliyev (2009) tarafından tanımlanmış olan genelleştirilmiş Morrey uzaylarında T ve T_b, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, operatörlerinin M_{p,φ_1} den M_{p,φ_2} ye sınırlı olduğu gösterilmiştir. T ve T_b operatörlerinin sınırlılığını sağlayan (φ_1, φ_2) ikilisi üzerinde yeterli koşulları bulunmuştur.

T_Ω bir lineer veya altlineer operatör olmak üzere bir $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ kompaktt destekli fonksiyonu ve $x \notin suppf$ için

$$|T_\Omega f(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^n} |f(y)| dy \qquad (1.3)$$

sağlansın, burada $C > 0$ bir mutlak sabittir, Ω sıfırıncı dereceden homojen ve bir

$q \in [1, \infty]$ için $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ dir.

Bir lineer T operatörü ve bir b fonksiyonu için $[b,T]$ komütatörü $[b,T]f(x) = b(x)Tf(x) - T(bf)(x)$ ile tanımlanır, burada f ölçülebilir bir fonksiyondur. Komütatör operatörleri ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin düzenliliği araştırılmasında kullanılmaktadır. (1.3) eşitsizliğini sağlayan T_Ω operatörü ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$[b,T_\Omega](f)(x) = p.v.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}[b(x)-b(y)]f(y)dy \qquad (1.4)$$

komütatör operatörünü göz önüne alalım. Çalışmamızın 4. bölümünde Mizuhara tarafından tanımlanmış genelleştirilmiş Morrey uzaylarında $[b,T_\Omega]$ nın $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \times BMO(\mathbb{R}^n)$ den $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı olduğu gösterilmiştir (Mizuhara 1991).

Bu teoremlerin koşulları, analizde bir çok önemli operatörler özellikle pseudodiferential operatörleri, Littlewood-Paley operatörleri, Bochner-Riesz ve Marcinkiewicz operatörü operatörü tarafından sağlanır. Dolayısıyla Pseudodiferential operatörler, Littlewood-Paley operatör, Marcinkiewicz operatör ve Bochner-Riesz operatörleri gibi bir kaç belirli operatörlere bu sonuçlar uygulanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Bilgiler

Tanım 2.1.1 A kümesi verilsin ve $\mathcal{A}$ aşağıdaki (i), (ii) ve (iii) özelliklerini sağlayan A'nın alt kümelerinin bir sınıfı olsun. O zaman $\mathcal{A}$ sınıfına A kümesi üzerinde bir $\boldsymbol{\sigma}$ **−cebir** denir:

(i) $S \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall C \in \mathcal{A},\ {}^{c}C = X - C \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall n = 1,2,3,\ldots$ için $C_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{A}$,

burada $(A, \mathcal{A})$ ikilisine **ölçülebilir uzay** denir ve $\mathcal{A}$'nın elemanlarına **ölçülebilir küme** denir.

Tanım 2.1.2 Eğer (A, U) bir ölçülebilir uzay ve $\mu: \mathrm{U} \longrightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu da aşağıdaki (i), (ii) ve (iii) özelliklerini sağlıyorsa bu μ fonksiyonuna U üzerinde bir **ölçü fonksiyonu** veya **ölçü** denir ve (A, U, μ) ye **ölçü uzayı** adı verilir:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall K \in \mathrm{U}$ için $\mu(K) \geq 0$

(iii) (U_n) dizileri ayrık olsun. O zaman $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n)$.

Her $K \in \mathrm{U}$ için $\mu(K) < \infty$ ise bu μ ye ise **sonlu ölçü** denir.

Tanım 2.1.3 (A, U) ikilisi bir ölçülebilir uzay olsun ve $f: A \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ verilsin.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\{a \in A: f(a) > \lambda\} \in \mathcal{A}$ sağlanıyorsa f fonksiyonuna **ölçülebilirdir** denir ve ölçülebilir fonksiyonların ailesi $M(A, \mathrm{U})$ sembolüyle temsil edilir.

$\mathbb{R}^n$ de $dx = dx_1, dx_2 \dots dx_n$ ifadesi ile Lebesgue ölçüsünü gösteririz. $\mathbb{R}^n$ de bir f fonksiyonunun **Lebesgue integralini** aşağıdaki gibi göstereceğiz.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$B = B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n: |x - y| < r\}$ ifadesi ise merkezi x ve yarıçapı r olan bir açık yuvarı göstersin. ${}^cB(x,r)$ ise bu yuvarın tümleyenini gösterir. $|B(x,r)|$ ise bu $B(x,r)$ açık yuvarının Lebesgue ölçüsü ve $\nu = |B(0,1)|$ olsun.

$$|B(x,r)| = \nu r^n = \frac{2\pi^{n/2} r^n}{n\Gamma(n/2)} = \frac{1}{n}|S^{n-1}|r^n$$

dir. Burada

$$|S^{n-1}| = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$$

ifadesi ise $\mathbb{R}^n$ üzerinde $n \leq 1$ ve yarıçapı 1 olan $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| = 1\}$ küresinin yüzey alanıdır. Bir z kompleks sayısı ve $\Gamma(z)$ gamma fonksiyonu için $Rez > 0$ olsun. Burada $\Gamma(z)$ gamma fonksiyonu $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$ şeklinde tanımlanır.

Bu tez çalışmasında $Q = Q(x,r)$ gösterimi ile merkezi x ve r kenar uzunluğuna sahip olan bir küpü göstereceğiz. $\lambda > 0$ ve bir Q küpü için λQ gösterimi ile kenar uzunluğu λ katı olan ve Q nun merkezine sahip bir küpü göstereceğiz.

2.2. $L_p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue Uzayı

Tanım 2.2.1 f ölçülebilir bir fonksiyon ve $0 < p \leq \infty$ için Lebesgue uzayının tanımı aşağıdaki gibidir.

$$L_p(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \| f \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

Eğer p ler $0 < p < \infty$ aralığında olursa

$$\| f \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Eğer $p = \infty$ olursa

$$\| f \|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = ess \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.2 $1 \leq p < \infty$ için zayıf L_p uzayı $WL_p(\mathbb{R}^n)$ şeklinde gösterilir ve tanımı

$$\| f \|_{WL_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{r>0} r |\{ z \in \mathbb{R}^n : |f(z)| > r \}|^{1/p} < \infty$$

İle verilir. Ayrıca $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı $WL_p(\mathbb{R}^n)$ uzayının alt kümesidir. Yani $L_p(\mathbb{R}^n) \subset WL_p(\mathbb{R}^n)$

$L_p^{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \forall K \subset \mathbb{R}^n \; kompakt \; ve \; 1 \leq p \leq \infty \; için \; \int_K |f|^p dx < \infty \right\}$ dir. Bu uzay

$p = 1$ için $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n) = L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilen **Lokal integrallenebilir** fonksiyonların

sınıfını göstermektedir.

Örnekler 2.2.3

(1) $f(x) = |x|^k \in L_p(\mathbb{R}^n)$

(2) $f(x) = |x|^k \mathcal{X}_{B(0,1)}(x) \in L_p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow x > -\frac{n}{p}$

(3) $f(x) = |x|^k \mathcal{X}_{c_{B(0,1)}}(k) \in L_p(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow k < -\frac{n}{p}$

(4) $f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \notin L_p(\mathbb{R}^n)\ fakat\ f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \in WL_p(\mathbb{R}^n)$

Teorem 2.2.4 $1 \leq p \leq \infty$ için L_p uzayı Banach uzayı olur.

Tanım 2.2.5 (Hölder eşitsizliği) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ şartları sağlansın. $f \in L_p(X)$ ve $g \in L_q(X)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizliğe **Hölder eşitsizliği** denir:

$$\| fg \|_{L_1(X)} \leq \| f \|_{L_p(X)} \| f \|_{L_q(X)}.$$

Tanım 2.2.6 (Minkowski eşitsizliği) $p \geq 1$ ve $f, g \in L_p(X)$ olsun. Bu durumda Minkowski eşitsizliği

$$\| f + g|_{L_p(X)} \leq \| f \|_{L_p(X)} + \| g \|_{L_p(X)}$$

ile verilir.

Teorem 2.2.7 $1 \leq p \leq \infty$ ve $0 < p < q < \infty$ için

$$L_q(\mathbb{R}^n) \subseteq L_q^{loc}(\mathbb{R}^n) \subseteq L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$$

sağlanır.

Teorem 2.2.8 (Lebesgue Diferensiyelleme Teoremi) Hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için Lebesgue Diferensiyelleme teoremini aşağıdaki gibi tanımlarız:

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)dy.$$

Tanım 2.2.9 Bir f fonksiyonunun desteği bu fonksiyonun sıfırdan farklı olduğu kümenin kapanışı olarak tanımlanır. Yani

$$suppf = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

dir. Ayrıca $suppf$ kümesi sınırlı olduğunda f'ye **kompaktt desteklidir** denir.

Tanım 2.2.10 T, $L_p(X,\mu)$ den $L_q(Y,\nu)$ ya bir operatör olsun. Her f, g fonksiyonları ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$T(f+g) = T(f) + T(g) \text{ ve } T(\lambda f) = \lambda T(f)$$

oluyorsa T'ye **lineer operatör** adı verilir. Şayet,

$$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)| \text{ ve } T(\lambda f) \leq |\lambda||T(f)|$$

şartları sağlanıyorsa bu T operatörüne **altlineer operatör** denir. Eğer bir $C > 0$ sabiti için,

$$|T(f+g)| \leq C(|T(f)| + |T(g)|) \text{ ve } T(\lambda f) \leq |\lambda||T(f)|$$

şartlarını sağlıyorsa bu T operatörüne ise **quasilineer operatör** denir. Altlineerlik, quasilineerliğin $C = 1$ durumudur.

Tanım 2.2.11 ((p,q) Tipinden Operatörler) $1 \leq p, q \leq \infty$ için T, $L_p(X, \mu)$ den $L_q(Y, \nu)$ ya bir operatör olsun. Eğer $\forall f \in L_p(X, \nu)$ ve $\lambda > 0$ sabiti için

$$\| Tf \|_q \leq \lambda \| f \|_p$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu T operatörüne kuvvetli (p, q) tipinden (sınırlı operatör) adı verilir.

Eğer $q < \infty$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\nu(\{u \in Y : |Tf(u)| > \lambda\}) \leq \left(\frac{C \| f \|_q}{\lambda}\right)^q$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu T operatörüne zayıf (p, q) tipinden adı verilir. Ayrıca

$q = \infty$ iken $L_p(X, \mu)$ den $L_\infty(Y, \nu)$ ye sınırlı olduğunda zayıf (p, ∞) tipindedir denir.

Eğer burada $q = \infty$ olursa hem kuvvetli hem zayıf tip olup birbirleriyle çakışmaktadır. Eğer T operatörü kuvvetli (p, q) tipli olursa eğer zayıf (p, q) tipli olur. $E_\lambda = \{u \in Y : |Tf(u)| > \lambda\}$ olsun, o zaman

$$\nu(E_\lambda) = \int_{E_\lambda} d\nu \leq \int_{E_\lambda} \left|\frac{Tf(x)}{\lambda}\right|^q d\nu \leq \frac{\| f \|_q^p}{\lambda^q} \leq \left(\frac{C \| f \|_p}{\lambda}\right)^q$$

olur. Eğer T özdeşlik operatörü ve $(X, \mu) = (Y, \nu)$ olduğunda zayıf (p, p) tipli olan klasik **Chebyshev** eşitsizliği bulunur.

Tanım 2.2.12 (Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi) (X,μ) ve (Y,ν) iki ölçü uzayları olsun. $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$ için T altlineer operatörü tanım kümesi $L_{p_0}(X,\mu) + L_{(p_1)}(X,\mu)$ den görüntü kümesi Y üzerindeki ölçülebilir fonksiyonlara giden zayıf (p_0,p_0) ve zayıf (p_1,p_1) tipli olsun. Bu şartlar sağlandığında T operatörü $p_0 < p < p_1$ için kuvvetli (p,p) tiplidir (Duoandikoetxea 2001).

Tanım 2.2.13 (A_p Muckenhoupt Sınıfı) w, $\mathbb{R}^n$ üzerinde negatif olmayan ve hemen her yerde $(0,\infty)$ da değerler alan lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Burada $1 \le p < \infty$ için herhangi bir $B = B(x,r)$ yuvarı için aşağıdaki ifade sağlanırsa w ağırlık fonksiyonuna A_p **Muckenhoupt** sınıfındadır denir.

$$[w]_{A_p} = \sup_B [w]_{A_p(B)} = \sup_B \left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B w(x)^{1-q}dx\right)^{p-1} < \infty$$

burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir ve alınan supremum ise bütün B yuvarları üzerinden alınmaktadır.

Tanım 2.2.14 B herhangi bir yuvar ve w ağırlık fonksiyonu olsun. Burada

$$w(2B) \le \lambda w(B)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\lambda > 0$ bulunabiliyorsa w ya **doubling koşulunu** sağlıyor denir ve $w \in \Delta_2$ ile gösterilir.

Lemma 2.2.15 $w \in \Delta_2$ olsun bu durumda

$$w(2Q) \ge \lambda w(Q)$$

eşitsizliği sağlamak şartıyla $\lambda > 1$ sabiti vardır (Komori and Shirai 2009).

Tanım 2.2.16 (BMO Uzayı) $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olduğunu varsayalım ve,

$$\| f \|_* = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}| dy < \infty$$

olsun, burada

$$f_{B(x,r)} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy$$

dir. $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayını

$$BMO(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n) : \| f \|_* < \infty\}$$

ile tanımlarız. Eğer farkı sabit olan iki fonksiyon eşdeğer olarak dikkate alınırsa o zaman

$BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı $\|.\|_*$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

BMO uzayı $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayından farklıdır ancak $L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ dir:

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}| dy$$

$$\leq \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy + \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f_{B(x,r)}| dy$$

$$= \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy + |f_{B(x,r)}|$$

$$\leq 2 \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

$$\leq 2 \| f \|_\infty$$

elde edilir. Bu ispatta da görüldüğü gibi

$$\| f \|_* \leq 2 \| f \|_\infty$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\| f \|_* \leq 2 \| f \|_\infty$ olduğundan $L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ sağlanır. Ayrıca her sınırlı (ölçülebilir) fonksiyonlar BMO uzayındadır. Fakat sınırlı olmayan BMO fonksiyonları da vardır. $\log|x| \in BMO(\mathbb{R}^n)$ fakat $\log|x| \notin L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dir.

Aşağıdaki örnekte BMO uzayına ait olmayan bir fonksiyon verilmiştir.

Örnek 2.2.17 $s(x) = sgn(x)\log\frac{1}{|x|}$ foksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon $BMO([-1,1])$ uzayına ait değildir.

Gerçekten de $0 < k < 1$ ve $I \equiv [-k, k]$ aralığında olsun. $s_1 = 0$ için

$$\frac{1}{|I|}\int_I |s(y) - s_1| ds = \frac{1}{2h}\int_{-k}^{k} \left|\log\frac{1}{|x|}\right| dx = \frac{1}{k}\log\frac{1}{x} dx$$

$$k \longrightarrow 0 \text{ iken } 1 + \log\frac{1}{k} \longrightarrow \infty$$

olur. Dolayısıyla görüldüğü gibi bir fonksiyonun mutlak değeri BMO uzayına ait iken kendisi BMO ya ait olmayabilir.

Tanım 2.2.18 (John-Nirenberg eşitsizliği) Her $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda > 0$,

$$|\{y \in B : |f(y) - f_B| > \lambda\}| \leq \lambda_1 |B| e^{-\lambda_2 \lambda / \| f \|_*}, \qquad \forall B \subset \mathbb{R}^n$$

eşitsizliğini sağlayan λ_1 ve λ_2 sayıları mevcuttur.

Uyarı 2.2.19 Bu eşitsizlikde $1 < p < \infty$ olduğunda

$$\| f \|_* \approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f_{B(x,r)}|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

olduğu bilinmektedir.

Uyarı 2.2.20 $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $0 < 2t_1 < t$ olduğunda

$$|f_{B(x,t_1)} - f_{B(x,t)}| \leq \lambda \| f \|_* \ln \frac{t}{t_1}$$

eşitsizliğini sağlayan f, x, t_1 ve t fonksiyonlarından bağımsız bir λ sayısı vardır.

Uyarı 2.2.21

(i) $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $g \in \mathbb{R}^n$ olduğunda $f(.-g) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\| f(.-g) \|_{BMO} = \| f \|_{BMO}$ sağlanır.

(ii) $c > 0$, $g \in \mathbb{R}^n$ ve $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olduğunda $f(cx) \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\| f(c.) \|_{BMO} = \| f \|_{BMO}$ sağlanır.

(iii) $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olduğunda $\| f \|_{BMO} \approx \sup_Q \inf_{\lambda\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - \lambda| dx$ sağlanır (Lu *et al.* 2007).

2.3. $L_{p,\lambda}$ Morrey Uzayı

Morrey ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin lokal

davranışlarını araştırırken ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken Morrey uzayını tanımlamıştır (Morrey 1938).

Tanım 2.3.1 $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$, $0 \le \lambda \le n$ ve $1 \le p < \infty$ için $L_{p,\lambda} \equiv L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile tanımlanan Morrey uzayı

$$L_{p,\lambda} := \left\{ f : \| f \|_{L_{p,\lambda}} < \infty \right\}$$

ile verilir, $\| f \|_{L_{p,\lambda}}$ normu

$$\| f \|_{L_{p,\lambda}} \equiv \| f \|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

$\lambda > 0$ olsun. O zaman $L_{p,0} \equiv L_p(\mathbb{R}^n)$ eşitliği sağlanır. Ayrıca $\lambda > n$ yada $\lambda < 0$ ise burada $L_{p,\lambda} = \theta$ olur. θ ise $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan 0 a denk olan bütün fonksiyonların kümesini belirtir. $WL_{p,\lambda} \equiv WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ ile bütün $f \in WL_p^{loc}$ fonksiyonlarının uzayı olan zayıf Morrey uzayını göstereceğiz, burada

$$\| f \|_{WL_{p,\lambda}} \equiv \| f \|_{WL_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} r^{-\frac{\lambda}{p}} \| f \|_{WL_{p,\lambda}(B(x,r))} < \infty$$

dur.

Lemma 2.3.2 $1 \le p < \infty$ olsun.

$$\| f \|_{L_{p,n}} = \nu_n^{1/p} \| f \|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

ve $L_{p,n} \equiv L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dir, burada $\nu_n = |B(0,1)|$ dir.

İspat $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ olduğundan

$$\left(t^{-n}\int_{B(x,t)}|f(y)|^p dy\right)^{1/p} \leq \nu_n^{1/p} \parallel f \parallel_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $f \in L_{p,n}$ ve

$$\parallel f \parallel_{L_{p,n}} \leq \nu_n^{1/p} \parallel f \parallel_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}$$

sağlanır. $f \in L_{p,n}$ olmak üzere Lebesgue yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{t\to\infty}|B(x,t)|^{-1}\int_{B(x,t)}|f(y)|^p dy = |f(x)|^p$$

olur. Bu durumda

$$|f(x)| = \left(\lim_{t\to\infty}|B(x,t)|^{-1}\int_{B(x,t)}|f(y)|^p dy = |f(x)|^p\right)^{1/p} \leq \nu_n^{-1/p} \parallel f \parallel_{L_{p,n}}$$

sağlanır, burada $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\parallel f \parallel_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \nu_n^{-1/p} \parallel f \parallel_{L_{p,n}}$$

olur.

Lemma 2.3.3 $0 \leq \lambda < n,\ 1 \leq p < \infty$ ve $\alpha = \frac{n-\lambda}{p}$ olsun. O zaman

$$\| f \|_{L_{1,n-\alpha}} \leq v_n^{-1/q} \| f \|_{L_{p,\lambda}}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $L_{p,\lambda} \subset L_{1,n-p}$ sağlanır, $1/p + 1/q = 1$ dir.

İspat $f \in L_{p,\lambda}$, $0 \leq \lambda < n$, $1 \leq p < \infty$, ve $\alpha p = n - \lambda$ olsun. Burada önce Hölder eşitsizliği uygulanır ve böylece

$$t^{\alpha-n} \int_{B(x,t)} |f(y)| dy \leq v_n^{1/p'} t^{\alpha-n/p} \left(\int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p}$$

$$= v_n^{1/p'} \left(t^{-\lambda} \int_{B(x,t)} |f(y)|^p dy \right)^{1/p}$$

$$\leq v_n^{\frac{1}{p'}} \| f \|_{L_{p,\lambda}}$$

elde edilir. Buradan $f \in L_{1,n-\alpha}$ ve

$$\| f \|_{L_{1,n-\alpha}} \leq v_n^{1/p'} \| f \|_{L_{p,\lambda}}$$

olur.

2.4. $L_{p,\kappa}$ Ağırlıklı Morrey Uzayı

Tanım 2.4.1 $0 < \kappa < 1$, $1 \leq p < \infty$, ve w ise ağırlık fonksiyonu olsun. $L_{p,\kappa}(w) \equiv L_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n, w)$ ağırlıklı Morrey uzayı

$$\| f \|_{L_{p,\kappa}(w)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} w(B(x,r))^{-\frac{\kappa}{p}} \| f \|_{L_{p,w}(B(x,r))} < \infty$$

ile tanımlanır.

Ayrıca $WL_{p,\kappa}(w) \equiv WL_{p,\kappa}(\mathbb{R}^n, w)$ ile gösterilen ağırlıklı zayıf Morrey uzayı da

$$\| f \|_{WL_{p,\kappa}(w)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} w(B(x,r))^{-\frac{\kappa}{p}} \| f \|_{WL_{p,w}(B(x,r))} < \infty$$

normu ile verilir.

Uyarı 2.4.2

(i) $w \equiv 1$ ve $0 < \lambda < n$ için $\kappa = \frac{\lambda}{n}$ olsun. Bu durumda $L_{p,\frac{\lambda}{n}}(1) = L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ bilinen Morrey uzayıdır. (Torchinsky 1986).

(ii) $w \in \Delta_2$ olsun. Bu durumda $\kappa = 0$ olduğunda $L_{p,0}(w) = L_p(w)$ olur. $\kappa = 1$ olduğunda ise, Lebesgue diferensiyelleme teoreminden dolayı $L_{p,1}(w) = L_\infty(w)$ bulunur (Torchinsky 1986).

2.5. Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü, Singüler İntegral Operatörü ve Komütatör Operatörü

Tanım 2.5.1 (Hardy-Littlewood Maksimal Fonksiyonu) $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} |B(0,r)|^{-1} \int_{B(0,r)} |f(x-y)| dy.$$

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunda yuvar yerine küpler alındığında aşağıdaki gibi tanımlanır:

$f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Q_r, $[-r,r]$ küpü ise $M'f$ merkezli Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$M'f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int_{Q_r} |f(x-y)|dy$$

ile verilir. $n = 1$ olduğunda ise M' ve M çakışır. $n > 1$ olduğunda

$$C_1 M'f(x) \leq Mf(x) \leq C_2 M'f(x)$$

eşitsizliğini sağlayan n ye bağlı C_1 ve C_2 sabitleri mevcuttur. Ayrıca merkezli olmayan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunu $f \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için M^*f yi aşağıdaki gibi tanımlarız.

$$M^*f(x) = \sup_{x \in B(x_0,r)} \frac{1}{|B(x_0,r)|} \int_{B(x_0,r)} |f(y)|dy$$

Uyarı 2.5.2 Her $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$C_0 Mf(x) \leq C_1 M'f(x) \leq C_2 M^*f(x) \leq C_3 Mf(x)$$

eşitsizliğini sağlayan n ye bağlı $i = 1,2,3$ için C_i sayıları mevcuttur. Burada M^*f, $M'f$ ve Mf, maksimal fonksiyonları noktasal olarak denktir.

Uyarı 2.5.3 $f \in L_1^{loc}$ olsun. $Mf(x)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde alt yarı sürekli ölçülebilir fonksiyondur. Ayrıca M operatörü altlineer ve homojen bir operatördür. $\forall \lambda \geq 0$ için

$$M(f+g) \leq Mf + Mg \text{ ve } M(\lambda f) = \lambda(Mf)$$

sağlanır. $1 < p \leq \infty$ ve $n > 1$ için Hardy-Littelewood maksimal operatörünün

$L_p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayındaki sınırlılığı Wiener tarafından incelenmiştir.

Uyarı 2.5.4 M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlı değildir. Gerçekden $n = 1$ ve $x \geq 1$ durumunda $f(x) = \mathcal{X}_{[0,1]}(x)$ için

$$Mf(x) \geq \frac{1}{2x}\int_0^{2x} |f(y)|dy = \frac{1}{2x}$$

olup, buradan

$$\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)dx \geq \int_1^{\infty} Mf(x)dx \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{2x}dx = \infty$$

bulunur.

Uyarı 2.5.5 Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ sıfıra eşdeğer olmayan bir fonksiyon ise $Mf \notin L_1(\mathbb{R}^n)$ olur. M Hardy-Littlewood maksimal operatörü $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlı değildir fakat $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayından $WL_1(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

Teorem 2.5.6 $w \in A_p$ ve $1 \leq p < \infty$ için M operatörü zayıf $(L_p(w), L_p(w))$ tipinden bir operatördür. Yani $w \in A_p$ ve $1 \leq p < \infty$ için $\forall \lambda > 0$ ve $f(x) \in L_p(w)$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir $C > 0$ sayısı vardır.

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}} w(x) \leq \frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x)dx$$

Teorem 2.5.7 $w \in A_p$ ve $1 < p < \infty$ için M operatörü $(L_p(w), L_p(w))$ tipinden bir operatördür.

Teorem 2.5.8 $0 \leq \lambda < n$ ve $p > 1$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\| Mf \|_{L_{p,\lambda}} \leq C \| f \|_{L_{p,\lambda}}.$$

Ayrıca $p = 1$ için

$$\| Mf \|_{WL_{1,\lambda}} \leq C \| f \|_{L_{1,\lambda}}$$

olur ve C f den bağımsızdır. Ayrıca $0 < \lambda < n$, $1 \leq p \leq \infty$ ve $f \in L_{p,\lambda}$ için $\mathbb{R}^n$ üzerinde Mf hemen her yerde sonludur (Chiarenza and Frasca 1987).

Teorem 2.5.9 $1 < p < \infty$ ve $0 < \kappa < 1$ olsun. Bu durumda $w \in A_p$ için M operatörü $L_{p,\kappa}(w)$ ağırlıklı Morrey uzayında sınırlıdır. $0 < \kappa < 1$, $w \in A_1$ ve $p = 1$ olduğunda ise herhangi bir Q küpü ve $\forall \lambda > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$w(\{x \in Q : Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \| f \|_{L_{1,\kappa(w)}} w(Q)^{\kappa}$$

(Komori and Shirai 2009).

Tanım 2.5.10 (Singüler İntegral Operatörü) $y' = y/|y|$ olsun. Singüler İntegraller

$$Tf(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y|>\epsilon} \frac{\Omega(y')}{|y|^n} f(x-y)dy$$

şeklinde tanımlanan operatörlerdir. Bu operatörde tanımlanan Ω fonksiyonu ise $\mathbb{R}^n$ deki S^{n-1} birim küresin de tanımlanan ortalaması sıfır olan ve integrallenebilen fonksiyondur.

Tanım 2.5.11 (Calderón-Zygmund Operatörü) $C_{\infty}^{c}(\mathbb{R}^n)$ den $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ de tanımlı T operatörü verilsin. Eğer

(a) T, $L_2(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı bir lineer operatördür.

(b) $\forall f \in L_{\infty}^{c}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $x \notin \{suppf\}$ olmak üzere

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)f(y)dy$$

dir.

(c) $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $x \notin y$ olsun. Bazı δ ve $C > 0$ için

$$|k(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^n}$$

$$|k(x+h,y) - k(x,y)| \leq \frac{C|h|^{\delta}}{|x-y|^{n+\delta}}$$

$$|k(x,y+h) - k(x,y) \leq \frac{C|h|^{\delta}}{|x-y|^{n+\delta}}$$

Calderón-Zygmund eşitsizlikleri sağlanıyor ve $|h| < |x-y|/2$ oluyorsa o zaman T operatörüne Calderón-Zygmund Operatörü denir.

Teorem 2.5.12 $1 < p < \infty$ için T Calderón-Zygmund operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$ de sınırlı olur. $p = 1$ olursa, $\forall \lambda > 0$ ve $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x) > \lambda|\}| \leq \frac{C}{\lambda} \| f \|_{L_{(\mathbb{R}^n)}}$$

sağlanır, burada $C = C(n) > 0$ dır.

Teorem 2.5.13 Eğer $1 < p < \infty$ ve $w \in A_p$ ise o zaman T Calderón-Zygmund operatörü $L_p(w)$ de sınırlı olur. $p = 1$ ve $w \in A_1$ ise $\forall \lambda > 0$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x) > \lambda|\}| \leq \frac{C}{\lambda} \| f \|_{L_1(w)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.5.14 $1 \leq p < \infty$, $0 < \lambda < n$ olduğunda $1 < p < \infty$ için T ile gösterilen Calderón-Zygmund operatörü $L_{p,\lambda}$ da sınırlıdır. Ayrıca $p = 1$ için $L_{1,\lambda}$ dan $WL_{1,\lambda}$ ya sınırlıdır.

Teorem 2.5.15 $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve $w \in A_p$ olduğunda T ile gösterilen Calderón-Zygmund operatörü $L_{p,\kappa}(w)$ da sınırlıdır. Eğer $p = 1$, $0 < \kappa < 1$ ve $w \in A_1$ ise $\forall \lambda$ ve herhangi Q küpü için

$$w(\{x \in Q : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \| f \|_{L_{1,\kappa}(w)} w(Q)^{\kappa}$$

sağlanır.

Tanım 2.5.16 (Komütatör Operatörü) T ölçülebilir fonksiyonlar, lineer operatör ve b fonksiyon olmak üzere $[b,T]$ komütatör operatörü

$$[b,T]f(x) = b(x)Tf(x) - T(bf)(x)$$

ile tanımlanır (Coifman *et al.* 1976).

$[b,T]$ komütatörünün, $b \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $L_p(\mathbb{R}^n)$ $1 < p < \infty$, sınırlılığını göstermişlerdir. (1.4) şeklindeki komütatörler ise ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin düzenliliği araştırmalarında oldukça faydalıdır. Ayrıca Jonson, çalışmasında $[b,T]$ komütatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlı iken $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olduğunu göstermiştir.

Tanım 2.5.17 $f \in C_0^\infty$, $b \in L^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve T Calderón-Zygmund operatörü olsun. $[b,T]$ komütatör operatörü

$$[b,T]f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [b(x) - b(y)]k(x-y)f(y)dy, \qquad x \notin suppf$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.5.18 T Calderón-Zygmund operatörü ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda her $f \in C_0^\infty$ ve her $\lambda > 0$ için

$$|\{y \in \mathbb{R}^n : |[b,T]f(y) > \lambda\}| \leq C \parallel b \parallel_* \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{\lambda}\left(1 + log^+\left(\frac{|f(y)|}{\lambda}\right)\right)dy$$

sağlanır, burada, $log^+ t = max(logt, 0)$ dir (Pérez 1995).

Teorem 2.5.19 $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olduğunda T Calderón-Zygmund operatörü ve b tarafından üretilen $[b,T]$ komütatörü $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayında sınırlıdır.

Teorem 2.5.20 $1 < p < \infty$, $0 < \kappa < 1$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olduğunda $w \in A_p$ için T Calderón-Zygmund operatörü ve b tarafından üretilen $[b,T]$ komütatör operatörü $L_{p,\kappa}(w)$ ağırlıklı Morrey uzayında sınırlıdır (Segovia and Torrea 1991).

Teorem 2.5.21 $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve bir $C > 0$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^\infty \left(1 + ln\frac{t}{r}\right)\frac{ess\ inf_{t<s<\infty}\varphi_1(x,s)s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{p}}}\frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x,r)$$

şartını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için T_b Calderón-Zygmund operatörünün komütatörü M_{p,φ_1} denn M_{p,φ_2} ye ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} den WM_{1,φ_2} ye sınırlıdır.

Teorem 2.5.22 $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $w \in A_p$ ve bir $C > 0$ için (φ_1, φ_2) çifti

$$\int_r^{\infty} \left(1 + ln\frac{t}{r}\right) \frac{ess\ inf_{t<s<\infty} \varphi_1(x,s)(w(B(x,s)))^{\frac{1}{p}}}{w(B(x,t)^{\frac{1}{p}})} \frac{dt}{t} \leq C\varphi_2(x,r)$$

şartını sağlasın. Bu durumda $p > 1$ için T_b Calderón-Zygmund operatörünün komütatörü $M_{p,\varphi_1}(w)$ den $M_{p,\varphi_2}(w)$ ye ve $p = 1$ için $M_{1,\varphi_1}(w)$ den $WM_{1,\varphi_2}(w)$ ye sınırlıdır.

3. $M_{p,\varphi}$ GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA CALDERÓN - ZYGMUND İNTEGRAL OPERATÖRLERİ TARAFINDAN ÜRETİLEN ALTLİNEER OPERATÖRLER VE KOMÜTATÖRLERİ

Bu bölümde Guliyev tarafından tanımlanmış olan genelleştirilmiş Morrey uzaylarında T ve T_b , $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, operatörlerinin M_{p,φ_1} den M_{p,φ_2} ye sınırlı olduğu gösterilmiştir. T ve T_b operatörlerinin sınırlılığını sağlayan (φ_1, φ_2) ikilisi üzerinde yeterli koşulları bulunmuştur (Guliyev 2009).

3.1. $M_{p,\varphi}$ Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Calderón-Zygmund İntegral Operatörleri Tarafından Üretilen Altlineer Operatörlerin Sınırlılığı

Guliyev tarafından verilen genelleştirilmiş Morrey uzayları aşağıdaki gibi tanımlanır (Guliyev 2009).

Tanım 3.1.1 $\varphi(x,r)$, $1 \le p < \infty$ ve $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ de tanımlı olan pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olursa eğer. $M_{p,\varphi} \equiv M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey Uzayları

$$\| f \|_{M_{p,\varphi}} \equiv \| f \|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1} |B(x,r)^{\frac{-1}{p}} \| f \|_{L_p(B(x,r))} < \infty$$

olacak biçimde tüm $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlanır. Ayrıca, $WM_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \equiv WM_{p,\varphi}$ zayıf Morrey uzayları

$$\| f \|_{WMp,\varphi} \equiv \| f \|_{WMp,\varphi(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r>0} \varphi(x,r)^{-1} |B(x,r)^{\frac{-1}{p}} \| f \|_{WL_p(B(x,r))} < \infty$$

olacak biçimde tüm $f \in WL_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonlarının kümesidir. Bu tanıma göre, $\varphi(x,r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ seçip düzenlersek:

$$L_{p,\lambda} = M_{p,\varphi}|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{(\lambda-n)}{p}}} \text{ ve } WL_{p,\lambda} = WM_{p,\varphi}|_{\varphi(x,r)=r^{\frac{(\lambda-n)}{p}}}$$

Buluruz (Mizuhara 1991, Guliyev 1994, Nakai 1994, Lin 2007, Guliyev 2009, Guliyev *et al.* 2010).

$\varphi(x,r)$, $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon olsun ve $r \le t \le 2r$ olduğunda,

$$c^{-1}\varphi(x,r) \le \varphi(x,t) \le c\varphi(x,r) \tag{3.1}$$

ve

$$\int_r^\infty \varphi(x,t)^p \frac{dt}{t} \le C\varphi(x,r)^p \tag{3.2}$$

eşitsizlikleri sağlansın, burada $c\ (\ge 1)$ ve $C\ (>0)$ sabitleri t, r ve $x \in \mathbb{R}^n$ den bağımsızdır (Nakai 1994).

Teorem 3.1.2 $1 < p < \infty$ olsun ve $\varphi(x,r)$ (3.1) ve (3.2) koşullarını sağlasın. T, $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı ve (1.1) koşulunu sağlayan bir altlineer operatör olsun. O zaman T operatörü $M_{p,\varphi}$ üzerinde sınırlıdır (Fan *et al.* 1998, Lu *et al.* 1998).

Teorem 3.1.3 $1 \le p < \infty$ olsun ve (φ_1, φ_2)

$$\int_t^\infty \varphi_1(x,r)\frac{dr}{r} \le C\varphi_2(x,t)$$

koşulunu sağlasın, burada C x ve t ye bağlı değ ildir. O zaman, M ve T operatörleri $p>1$ için M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} ye ve $p=1$ için M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} ye sınırlıdır (Guliyev 1999, Guliyev 2009).

Bu bölümde

$$(Hg)(t) := \frac{1}{t}\int_0^t g(r)dr \qquad 0 < t < \infty$$

ile tanımlanan Hardy operatörünün sınırlılığı hakkında aşağıdaki ifadeyi kullanacağız:

Teorem 3.1.4

$$ess\sup w(t)Hg(t) \le c \ \ ess\sup_{t>0} v(t)g(t)$$

eşitsizliğinin $(0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan ve artmayan tüm g ler için sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$A := \sup_{t>0} \frac{w(t)}{t}\int_0^t \frac{dr}{ess\sup\limits_{0<s<r} v(s)} < \infty$$

ifadesinin sağlanması ve $c \approx A$ olmasıdır (Carro *et al.* 2001).

Lemma 3.1.5 $1 \le p < \infty$ olmak üzere T (1.1) koşulunu sağlayan ve $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ve $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ den $WL_1(\mathbb{R}^n)$ üzerine sınırlı ve altlineer bir operatör olsun. O zaman $1 < p < \infty$ için

$$\| Tf \|_{L_p(B)} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} t^{-\frac{n}{p+1}} \| f \|_{L_p(B(x_0,t))}\, dt$$

eşitsizliği herhangi bir $B = B(x,r)$ yuvarı ve her $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlanır. Ayrıca $p = 1$ için

$$\| Tf \|_{WL_1(B)} \lesssim r^n \int_{2r}^{\infty} t^{-n-1} \| f \|_{L_1(B(x_0,t))}\, dt \qquad (3.3)$$

eşitsizliği herhangi bir $B = B(x_0, r)$ yuvarı ve her $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlanır.

İspat $p \in (1, \infty)$ olsun. Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için, x_0 merkezli r yarıçaplı yuvara $B = B(x_0, r)$ ve $2B = B(x_0, 2r)$ diyelim. f yi $f = f_1 + f_2$

$$f_1(y) = f_2(y)\chi_{2B}(y), \qquad f_2(y) = f(y)\chi_{c_{2B}}(y)\,, r > 0$$

olarak yazalım, bu durumda

$$\| Tf \|_{L_p(B)} \leq \| Tf_1 \|_{L_p(B)} + \| Tf_2 \|_{L_p(B)}$$

olur. $f_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ iken $Tf_1 \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve T, $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı olduğu için

$$\| Tf_1 \|_{L_p(B)} \leq \| Tf_1 \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq C \| f_1 \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = C \| f \|_{L_p(2B)}$$

yazabiliriz, burada $C > 0$ sabiti f den bağımsızdır. $x \in B, y \in^c (2B)$ den $\frac{1}{2} |x_0 - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|x_0 - y|$ olduğu açıktır. Buradan

$$|Tf_2(x)| \leq 2^n c_0 \int_{c_{2B}} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy$$

elde edilir. Fubini teoreminden

$$\int_{c_{2(B)}} \frac{|f(y)|}{|x_0 - y|^n} dy \approx \int_{c_{2(B)}} |f(y)| \int_{|x_0 - y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy$$

$$\approx \int_{2r}^{\infty} \int_{2r \leq |x_0 - y| < t} |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}}$$

$$\lesssim \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0, t)} f(y) dy \frac{dt}{t^{n+1}}.$$

dir. Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\int_{c_{2(B)}} \frac{|f(y)}{|x_0 - y|^n} \lesssim \int_{2r}^{\infty} \| f \|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/p+1}}$$

elde ederiz. Ayrıca, her $p \in 1, \infty)$ için

$$\| Tf_2 \|_{L_p(B)} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \| f \|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/p+1}} \tag{3.4}$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece

$$\| Tf \|_{L_p(B)} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \| Tf \|_{L_p(B(x_0,r))} \frac{dt}{t^{n/p+1}}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\| f \|_{L_p(2B)} \approx r^{\frac{n}{p}} \| f \|_{L_p(2B)} \int_{2r}^{\infty} \frac{dt}{t^{n/p+1}} \tag{3.5}$$

$$\lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \| f \|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/p+1}}.$$

Böylece,

$$\| Tf \|_{L_p(B)} \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \| f \|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/p+1}}$$

bulunur. $p = 1$ olsun. T nin zayıf (1,1) sınırlılığından ve (3.5) dan

$$\| Tf_1 \|_{WL_1(B)} \leq \| Tf_1 \|_{WL_1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \| f_1 \|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \tag{3.6}$$

$$= \| f \|_{L_1(2B)} \lesssim r^n \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |f(y)| dy \frac{dt}{t^{n+1}}.$$

olduğu görülür. Bu durumda (3.4) ve (3.6) den dolayı (3.3) ü elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.6 $1 \leq p < \infty$ olsun ve (φ_1, φ_2)

$$\int_r^{\infty} \frac{ess\inf_{1<s<\infty} \varphi_1(x,s) s^{\frac{n}{p}}}{t^{\frac{n}{n+1}}} dt \leq C\varphi_2(x,r) \tag{3.7}$$

koşulunu sağlasın, burada C x ve r den bağımsızdır. T (1.1) koşulunu sağlayan ve $p > 1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ve $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ den $WL_1(\mathbb{R}^n)$ e sınırlı bir alt lineer operatör olsun. O zaman , T operatörü $p > 1$ için M_{p,φ_1} den M_{p,φ_2} ye sınırlı ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} den WM_{1,φ_2} ye sınırlıdır. Ayrıca $p > 1$ için

$$\| Tf \|_{M_{p,\varphi_2}} \lesssim \| f \|_{M_{p,\varphi_1}}$$

ve $p = 1$ için

$$\| Tf \|_{WM_{1,\varphi_2}} \lesssim \| f \|_{M_{1,\varphi_1}}$$

dir.

İspat. Lemma 3.1.5 ve Teorem 3.1.4 den $p > 1$ için

$$\| Tf \|_{M_{p,\varphi_2}} \lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_r^{\infty} \| f \|_{L_p(B(x,t))} \frac{dt}{t^{n/n+1}}$$

$$\approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x,r)^{-1} \int_0^{\frac{-n}{p}} \| f \|_{L_p(B(x,t^{-p/n}))} dt$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x, r^{-p/n})^{-1} \int_0^r \| f \|_{L_p(B(x,t^{-p/n}))}\, dt$$

$$\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x, r^{-p/n})^{-1} r \| f \|_{L_p(B(x,t))}$$

$$= \| f \|_{M_{p,\varphi_1}},$$

ve $p = 1$ için

$$\| Tf \|_{WM_{1,\varphi_2}} \lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x, r)^{-1} \int_r^\infty \| f \|_{L_1((B(x,t)))} \frac{dt}{t^{n+1}}$$

$$\approx \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x, r)^{-1} \int_0^{r^{-n}} \| f \|_{L_1((B(x,t^{-1/n})))}\, dt$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_2(x, r^{-1/n})^{-1} \int_0^r \| f \|_{L_1((B(x,t^{-1/n})))}\, dt$$

$$\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^n, r>0} \varphi_1(x, r^{-1/n})^{-1} r \| f \|_{L_1((B(x,r^{-1/n})))}$$

$$= \| f \|_{M_{1,\varphi_1}}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.7 $1 \le p < \infty$ olsun ve (φ_1, φ_2) (3.7) koşulunu sağlasın. O zaman, M ve T operatörleri $p > 1$ için M_{p,φ_1} uzayından M_{p,φ_2} ye ve $p = 1$ için M_{1,φ_1} uzayından WM_{1,φ_2} ye sınırlıdır (Akbulut *et al.* 2010).

3.2. $M_{p,\varphi}$ Genelleştirilmiş Morrey Uzaylarında Calderón-Zygmund İntegral Operatörleri Tarafından Üretilen Altlineer Operatörlerin Komütatörlerinin Sınırlılığı

T bir Calderón-Zygmund singüler integral operatörü ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun (Coifman *et al.* 1976). $[b,T]f = T(bf) - bTf$ komütatör operatörünün $1 < p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı olduğunu göstermiştir. Calderón-Zygmund operatörlerinin komütatörü ikinci dereceden eliptik kısmi diferensiyel denklemlerinin çözümlerinin düzgünlüğü çalışmalarında ö nemli bir rol oynamaktadır (Di Fazio and Ragusa 1993, Chiarenza *et al.* 1991, Chiarenza *et al.* 1993).

Teorem 3.2.1 (Ding *et al.* 1998) $1 < p < \infty$ olmak üzere $\varphi(x,r)$ (3.1) ve (3.2) koşullarını sağlasın ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. T nin (1.1) koşulunu sağlayan bir lineer operatör olduğunu varsayalım.

Eğer $[b,T]$ operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı ise o zaman, $[b,T]$ operatör ü $M_{p,\varphi}$ üzerinde sınırlıdır (Ding *et al.* 1998).

Uyarı 3.2.2 Aşağıdaki formdaki Teorem 3.2.3 ün geçerli olduğunu belirtelim. $1 < p < \infty$ olmak üzere $\varphi(x,r)$ (3.1) ve (3.2) koşullarını sağlasın ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer T_b operatörünün $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı ve (1.2) koşulunu sağlayan bir altlineer operatör ise o zaman T_b operatörü $M_{p,\varphi}$ üzerinde sınırlıdır.

Lemma 3.2.3 (Lokal Guliyev eşitsizliği) $1 < p < \infty$ olmak üzere $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve T_b (1.2) koşulunu sağlayan ve $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı olan bir altlineer operatör olsun. O zaman

$$\| T_b f \|_{L_p(B)} \lesssim \| b \|_* r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln\frac{t}{r}\right) t^{-(n/p)-1} \| f \|_{L_p(B(x_0,t))} \, dt$$

eşitsizliği herhangi bir $B = B(x_0,r)$ yuvarı ve her $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için sağlanır.

İspat $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve T_b (1.2) koşulunu sağlayan bir altlineer operatör olsun. Keyfi $x_0 \in (\mathbb{R}^n)$ için $B = B(x_0, r)$ x_0 merkezli ve r yarıçaplı bir yuvar olsun. $f = f_1 + f_2$ yazalım öyle ki $f_1 = f\mathcal{X}_{2B}$ ve $f\mathcal{X}_{c_{(2B)}}$ olsun. Buradan

$$\| T_b f \|_{L_p(B)} \leq \| T_b f_1 \| |_{L_p(B)} + |T_b f_2 \| |_{L_p(B)}$$

olur. T_b nin $L_p(\mathbb{R}^n)$ deki sınırlılığından

$$\| T_b f_1 \|_{L_p(B)} \leq \| T_b f_1 \|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\lesssim \| b \|_* \| f_1 \|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \| b \|_* \| f \|_{L_p(2B)}$$

olduğunu buluruz. $x \in B$ için

$$\| T_b f_2 \| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|b(y)-b(x)|}{|x-y|^n} |f(y)| dy$$

$$\approx \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|b(y)-b(x)|}{|x_0-y|^n} |f(y)| dy$$

elde ederiz. O zaman

$$\| T_b f_2 \|_{L_p(B)} \lesssim \left(\int_B \left(\int_{c_{(2B)}} \frac{|b(y)-b(x)|}{|x_0-y|^n} |f(y)| dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lesssim \left(\int_B \left(\int_{c_{(2B)}} \frac{|b(y)-b_B|}{|x_0-y|^n} |f(y)| dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \left(\int_B \left(\int_{c_{(2B)}} \frac{|b(x)-b_B|}{|x_0-y|^n} |f(y)| dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = I_1 + I_2$$

yazarız. I_1 i belirleyelim:

$$I_1 \approx r^{n/p} \int_{c(2B)} \frac{|b(y)-b_B|}{|x_0-y|^n} |f(y)|dy$$

$$\approx r^{\frac{n}{p}} \int_{c(2B)} |b(y)-b_B||f(y)| \int_{|x_0-y|}^{\infty} \frac{dt}{t^{n+1}} dy$$

$$\approx r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \int_{2r\leq|x_0-y|\leq t} |b(y)-b_B||f(y)|dy \frac{dt}{t^{n+1}}$$

$$\lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |b(y)-b_B||f(y)|dy \frac{dt}{t^{n+1}}$$

elde ederiz. Hölder eşitsizliğini uyguladığımızda

$$I_1 \lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |b(y)-b_B||f(y)|dy \frac{dt}{t^{n+1}}$$

$$\lesssim r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \int_{B(x_0,t)} |b(y)-b_B||f(y)|dy \frac{dt}{t^{n+1}}$$

$$+r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(\int_{B(x_0,t)} |b(y)-b_{B(x_0,t)}|^{p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \| f \|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n+1}}$$

$$+r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} |b_{B(x_0,r)} - |b_{B(x_0,t)}| \| f \|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/n+1}}$$

$$\lesssim \| b \|_* r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1+\ln\frac{t}{n}\right) | \| f \|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/n+1}}$$

elde ederiz. I_2 yi belirlemek için

$$I_2 = \left(\int_B |b(x)-b_b|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \int_{c(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n} dy$$

olduğunu hatırlatalım.

$$I_2 \lesssim \| b \|_* r^{\frac{n}{p}} \int_{c(2B)} \frac{|f(y)|}{|x_0-y|^n} dy$$

elde ederiz. Böylece

$$I_2 \lesssim \| b \|_* r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} | \| f \|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/n+1}}$$

olur. Her $p \in 1, \infty)$ için I_1 ve I_2 yi toplarsak

$$\| T_b f_2 \|_{L_p(B)} \lesssim \| b \|_* r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{n}\right) | \| f \|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/n+1}}$$

buluruz. Son olarak

$$\| T_b f_2 \|_{L_p(B)} \lesssim \| b \|_* \| f \|_{L_p(2B)} + \| b \|_* r^{\frac{n}{p}} \int_{2r}^{\infty} \left(1 + \ln \frac{t}{n}\right) | \| f \|_{L_p(B(x_0,t))} \frac{dt}{t^{n/n+1}}$$

ve buradan lemmanın ispatı tamamlanır.

Teorem 3.2.4 $1 < p < \infty$ olmak üzere $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve (φ_1, φ_2)

$$\int_r^{\infty} (1 + \ln \frac{t}{n}) \frac{ess \inf_{t \le s < \infty} \varphi_1(x,s) s^{n/p}}{t^{n/n+1}} dt \le C \varphi_2(x,r) \tag{3.8}$$

koşulunu sağlasın, burada C, x ve r den bağımsızdır. T_b nin (1.2) koşulunu sağlayan ve $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı olan bir altlineer operatör olduğunu varsayalım. O zaman, T_b operatörü M_{p,φ_1} den M_{p,φ_2} ye sınırlıdır. Ayrıca,

$$\| T_b f \|_{M_{p,\varphi_2}} \lesssim \| b \|_* \| f \|_{M_{p,\varphi_1}}$$

dir.

İspat Teorem 3.1.6 nın ispatındaki gibi benzer şekilde Lemma 3.2.3 i ve Teorem 3.1.4 ü uygularsak istenen sonucu elde ederiz.

Maksimal operatörün

$$M_b(f)(x) = \sup_{t>0} |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |b(x) - b(y)||f(y)|dy$$

altlineer komütatörü için ve Teorem 3.2.6 dan Calderó n-Zygmund operatörünün $[b,T]$ lineer komütatörü i çin aşağıdaki yeni sonuçları yazabiliriz.

Sonuç 3.2.5 $1 < p < \infty$ olmak üzere (φ_1, φ_2) (3.8) koşulunu sağlasın ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman M_b altlineer komütatör operatörü M_{p,φ_1} den M_{p,φ_2} ye sınırlıdır.

Sonuç 3.2.6 $1 < p < \infty$ olmak üzere (φ_1, φ_2) (3.8) koşulunu sağlasın ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman, $Tf(x)$ Calderón-Zygmund Singüler integrali h.h. $x \in \mathbb{R}^n$ için vardır ve $[b,T]$ operatörü M_{p,φ_1} den M_{p,φ_2} ye sınırlıdır (Akbulut *et al.* 2010).

4. $M_{p,\varphi}$ GENELLEŞTİRİLMİŞ MORREY UZAYLARINDA CALDERÓN-ZYGMUND İNTEGRAL OPERATÖRLERİ TARAFINDAN ÜRETİLEN KABA ÇEKİRDEKLİ ALTLİNEER OPERATÖRLER VE KOMÜTATÖRLERİ

Bu bölümde Mizuhara tarafından tanımlanmış olan genelleştirilmiş Morrey uzayları tanımlanmış ve bu uzaylarda Calderon-Zygmund integral operatörleri tarafından üretilen kaba çekirdekli alt lineer operatörler ve onların BMO fonksiyonları ile komüutatörlerinin sınırlılığı gösterilmiştir (Mizuhara 1991).

4.1. $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayları Üzerinde Calderón-Zygmund İntegral Operatörleri Tarafından Üretilen Kaba Çekirdekli Altlineer Operatörlerinin Sınırlılığı

T_Ω bir lineer veya altlineer operatör olmak üzere bir $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ kompakt destekli fonksiyonu için (1.3) denklemi ile verilen

$$|T_\Omega f(x)| \leq C \int_{R^n} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^n} |f(y)| dy, \qquad x \notin suppf$$

eşitsizliği sağlansın, burada $C > 0$ bir mutlak sabittir, Ω sıfırıncı dereceden homojen ve bir $q \in 1, \infty]$ için $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ dir. Bu kesimde ilk olarak Mizuhara tarafından tanımlanmış olan $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayları tanıtılmış ve eğer T_Ω, $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ olacak şekilde (1.3) ü sağlayan ve $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı olan bir altlineer operatör ise o zaman T_Ω nın $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı olduğu gösterilmiştir (Mizuhara 1991). Morrey uzaylarının genişlemesi olan $M_{p,\varphi}$ genelleştirilmiş Morrey uzayları Mizuhara tarafından tanımlanmış ve singüler integral operatörünün bu uzaylardaki sınırlılığı araştırılmıştır (Mizuhara 1991). Şimdi Mizuhara tarafından tanımlanmış olan $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzaylarının tanımını hatırlayalım. φ, $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ üzerinde negatif olmayan bir fonksiyon olsun, $r > 0$ ve herhangi bir $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$I(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - a_i| \leq r/2, i = 1,2\ldots,n\}$ diyelim. $I = I(a,r)$ için

$kI \equiv I(a,kr)$ ve $\varphi(I) \equiv \varphi(a,r)$ olsun.

Tanım 4.1.1 $1 \leq p < \infty$ ve φ yukardaki gibi olsun. $\| f \|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} < \infty$ sağlayan lokal integrallenebilen f fonksiyonlarının uzayını $M_{p,\varphi} \equiv M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterelim, burada

$$\| f \|_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \equiv \sup_I \left(\frac{1}{\varphi(I)} \int_I |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

dir ve supremum kenarları eksenlere parelel olan tüm küpler üzerinden alınır (Nakai, 1994).

Açık olarak $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ bir Banach uzayıdır. Ayrıca eğer $\varphi(a,r) \equiv 1$ ise, o zaman $M_{p,\varphi} = L_p$; eğer $\varphi(a,r) = r^\lambda$, $0 < \lambda < n$ ise, o zaman $M_{p,\varphi}$ sadece $M_{p,\lambda}$ standart Morrey uzayıdır; ve eğer $\varphi(a,r)$ a dan bağımsız ise, o zaman $M_{p,\varphi}$ Mizuhara tarafından tanımlanmış olan genelleştirilmiş Morrey uzayıdır (Mizuhara 1991).

Herhangi bir $p \in (1,\infty)$ için $p' = p/(p-1)$ ve $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ yazacağız. T_Ω (1.3) eşitsizliğini sağlayan bir lineer veya altlineer operatör olsun. Ω, $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ üzerinde sıfırıncı dereceden homojen bir fonksiyon olmak ü zere kaba çekirdekli maksimal operatörünü

$$M_\Omega f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{|y \leq r|} |\Omega(y) f(x-y)| dy$$

şeklinde tanımlayalım.

Lemma 4.1.2 $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ olsun. Eğer herhangi bir $r > 0$ için bir $C > 0$ sabiti varsa öyle ki (Nakai 1994),

$$\int_r^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \leq C\varphi(r)$$

ise o zaman herhangi bir $r > 0$ için $\epsilon > 0$ ve $C' > 0$ sabitleri vardır öyle ki,

$$\int_r^{\infty} \frac{\varphi(t)t^{\epsilon}}{t} dt \leq C'\varphi(r)r^{\epsilon}$$

dir. Lemma 4.1.2 deki ϵ nun $0 < \epsilon < 1/C$ yi sağlayacak şekilde seçilebileceğini hatırlatalım (Nakai 1994).

Lemma 4.1.3 $0 < \delta \leq 1$ olsun. φ nin bir $C > 0$ sabiti ve herhangi bir $a \in \mathbb{R}^n$ için

$$r \leq t \leq 2r \Longrightarrow C^{-1} \leq \varphi(a,t)/\varphi(a,r) \leq C, r > 0 \qquad (4.1)$$

ve

$$\int_r^{\infty} \frac{\varphi(a,t)}{t^{n\delta+1}} dt \leq C \frac{\varphi(a,r)}{r^{n\delta}}$$

eşitsizliklerilerini sağladığını varsayalım. O zaman $1 \leq p < \infty$ için bir $C > 0$ sabiti vardır öyleki herhangi bir $f \in M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p (M\chi_I(x))^{\delta} dx \leq C\varphi(I)||f||^p_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}$$

dir, burada Mf, f nin standart Hardy-Littlewood maxsimal fonksiyonudur (Nakai 1994).

Herhangi bir $a \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için $I \equiv I(a,r)$ olsun. $\mathbb{R}^n$ üzerinde herhangi bir kompleks değerli ölç ülebilir $f(y)$ foksiyonu için

$$f(y) = f(y)_{\chi 2I(a,r)}(y) + \sum_{k=1}^{\infty} f(y)_{\chi_{2^{k+1}I/2^k I}}(y) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f_k(y) \qquad (4.2)$$

yazacağız.

Lemma 4.1.4 Herhangi bir $a \in \mathbb{R}^n$ ve herhangi bir $r > 0$ için $C > 0$ sabiti olduğunu varsayalım öyle ki (4.1) eşitsizliği ve

$$\int_r^{\infty} \frac{\varphi(a,t)}{t^{n+1}} dt \leq C \frac{\varphi(a,r)}{r^n} \qquad (4.3)$$

sağlansın. $p \in (1,\infty)$ ve $q \geq p'$ olsun. O zaman herhangi bir $k > 0$ ve $f \in M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ için bir $\epsilon > 0$ vardır öyle ki

$$\int_{I(a,r)} |M_\Omega f_k(x)|^p dx \leq C\varphi(I)^{2^{-k\epsilon}} \| f \|^p_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}$$

dir, burada C k, $I(a,r)$ ve f den bağımsızdır.

İspat $I \equiv I(a,r)$ olsun. A_p ağırlıklarının özelliklerinden dolayı (Garcia-Cuerva and Rubio de Francia 1985), herhangi bir $\theta \in (0,1)$ için kolayca

$$(M_{\chi I})^\theta \in A_{p/q'}, \quad q \geq p'$$

olduğu kolayca görülür. O zaman, Watsonun sonuçlardan dolayı (Watson 1994).

$$\int_{I(a,r)} |M_\Omega f_k(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} |M_\Omega f_k(x)|^p (M_{\chi I}(x))^\theta dx$$

$$\leq C(\theta) \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x)|^p (M_{\chi I}(x))^\theta dx$$

elde ederiz. φ nin (4.3) ü sağladığına dikkat edelim. Lemma 4.1.2 den bir $\epsilon_0 \in (0,n)$ vardır öyle ki

$$\int_r^{\infty} \frac{\varphi(a,t)}{t^{n-\epsilon_0+1}} dt \leq C \frac{\varphi(a,r)}{r^{n-\epsilon_0}}$$

dir. $\delta = (n-\epsilon_0)/n$ olsun. $\delta \in (0,1)$ olduğu a çıkdır. Dolayısıyla, eğer $\theta \in (\delta,1)$ seçersek ve $x \in 2^{k+1}I \backslash 2^k I$ olduğunda $M_{\chi_I}(x)$ in 2^{-kn} ile karşılartırılabilir olduğuna dikkat edersek, o zaman Lemma 4.1.3 den dolayı

$$\int_{I(a,r)} |M_\Omega f_k(x)|^p dx \leq C 2^{-kn(\theta-\delta)} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x)|^p (M_{\chi_J})^\delta dx$$

$$\leq C\varphi(I) 2^{-kn(\theta-\delta)} \| f \|^p_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}$$

elde ederiz. $\epsilon = n(\theta-\delta)$ alındığında lemmanın ispatı tamamlanır.

Teorem 4.1.5 Herhangi bir $a \in \mathbb{R}^n$ ve herhangi bir $r > 0$ i çin $C > 0$ sabiti olduğunu varsayalım öyle ki (4.1) ve (4.3) sağlansın, $p \in (1,\infty)$ ve $q \geq p'$ olsun. Eğer T_Ω, $\Omega \in L^q(S^{n-1})$ olacak şekilde (1.3) ü sağlayan ve $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı olan bir altlineer operatör ise o zaman T_Ω $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ üzerinde de sınırlıdır.

İspat $I \equiv I(a,r)$ için, f yi (4.2) deki gibi yazalım. Kolayca görülür ki

$$\int_{I(a,r)} |T_\Omega f_0(x)|^p dx \leq C \| f_0 \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\varphi(2I) \| f \|^p_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \leq C\varphi(I) \| f \|^p_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}$$

dir. $k > 0$ için, Lemma 4.1.4 den

$$\int_{I(a,r)} |T_\Omega f_k(x)|^p dx \leq C \int_{I(a,r)} |M_\Omega f_k(x)|^p dx \leq C\varphi(I) 2^{-k\epsilon} \| f \|^p_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}$$

yazabiliriz, burada C ve ϵ, f ve k dan bağımsızdır. Böylece,

$$\left(\frac{1}{\varphi(I)}\int_{I(a,r)}|T_\Omega f(x)|^p dx\right)^{1/p} \leq C \parallel f \parallel^p_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \left(1+\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\epsilon/p}\right) \leq C \parallel f \parallel_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}$$

olur. İstenilen sonuç şimdi kolaylıkla çıkarılabilir. Bu da Teoremin ispatını tamamlar.

4.2. $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ Genelleştirilmiş Morrey Uzayları Üzerinde Calderón-Zygmund İntegral Operatörleri Tarafından Üretilen Kaba Çekirdekli Altlineer Operatörlerin Komütatörlerinin Sınırlılığı

T bir lineer operatör ve b bir BMO fonksiyonu olsun. T ve b tarafından üretilen $[b,T]$ komütatörü uygun bir f fonksiyonu için

$$[b,T]f(x) \equiv b(x)Tf(x) - T(bf)(x)$$

biçiminde tanımlandığını biliyoruz. (1.3) eşitsizliğini sağlayan Calderón-Zygmund integral operatörü tarafından üretilen kaba çekirdekli T_Ω operatörü ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun ürettiği (1.4) denlemi ile verilen

$$[b,T_\Omega](f)(x) = p.v.\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}[b(x)-b(y)]f(y)dy$$

komütatör operatörünü göz önüne alalım, burada Ω

(i) herhangi bir $\lambda > 0$ ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $\Omega(\lambda x) = \Omega(x)$

ve

(ii) $\int_{S^{n-1}} \Omega(x')d\sigma(x') = 0$

şartlarını sağlar. Bu kesimde $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ Mizuhara tarafından tanımlanan genelleştirilmiş Morrey uzayı olmak üzere T_Ω alt lineer operatörleri ve $b \in BMO$ fonksiyonu tarafından üretilen komütatör olan $[b, T_\Omega]$ nın $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \times BMO(\mathbb{R}^n)$ den $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı olduğu gösterilmiştir (Mizuhara 1991).

Teorem 4.2.1 φ (4.1) ve (4.3) ü sağlasın. $p \in (1, \infty)$ ve $q > p'$ olsun. T_Ω nın (1.3) ü sağlayan bir lineer operatör olduğunu varsayalım. Eğer $[b, T_\Omega]$, $L_p(\mathbb{R}^n) \times BMO(\mathbb{R}^n)$ den $L_p(\mathbb{R}^n)$ e sınırlıysa, o zaman $[b, T_\Omega]$ $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \times BMO(\mathbb{R}^n)$ den $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ e de sınırlıdır.

İspat Herhangi bir $I \equiv I(b, r)$ için, f yi (4.2) deki gibi yazalım. $[b, T_\Omega]$ nin L_p sınırlılığından dolayı

$$\int_{I(a,r)} |[b, T_\Omega] f_0(x)|^p dx \leq C \parallel f_0 \parallel^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\leq C\varphi(2I) \parallel f \parallel^p_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \leq C\varphi(I) \parallel f \parallel^p_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}$$

elde ederiz. $k > 0$ ve $x \in I(a, r)$ için

$$|[b, T_\Omega] f_k(x)| \leq \frac{C}{(2^k r)^n} \int_{2^{k+1}I} |b(x) - b_r| |\Omega(x - y) f_k(y)| dy$$

$$+ \frac{C}{(2^k r)^n} \int_{2^{k+1}I} |b_r - b_{2^{k+1}r}| |\Omega(x - y) f_k(y)| dy$$

$$+ \frac{C}{(2^k r)^n} \int_{2^{k+1}I} |b(y) - b_{2^{k+1}r}| |\Omega(x - y) f_k(y)| dy$$

$$\equiv I_1(x) + I_2(x) + I_3(x)$$

yazabiliriz, burada ve bundan sonra, b_δ *yı*, $\delta > 0$ şu şekilde tanımlayacağız:

$$b_\delta = \frac{1}{|I(a,\delta)|}\int_{I(a,\delta)} b(y)dy$$

Herhangi bir $r > 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$|b_{2^{k+1}r} - b_r| \leq C(n)(k+1) \parallel b \parallel_*$$

olduğu bilinmektedir (Torchinsky 1988). Buradan

$$I_2(x) \leq C(k+1) \parallel b \parallel_* M_\Omega f_k(x)$$

elde ederiz. Lemma 4.1.4 den dolayı f, r ve k dan bağımsız olan bir $\epsilon_1 > 0$ vardır öyle ki

$$\int_{I(a,r)} I_2(x)^p dx \leq C(k+1)^p \parallel b \parallel_*^p \varphi(I)^{-k\epsilon_1} \parallel f \parallel^p_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}$$

yazabiliriz. $I_3(x)$ için, $1 < u < min\{p, q, qp/(q+p)\}$ seçelim. O zaman

$$I_3(x) \leq C\left[\frac{1}{(2^k r)^n}\int_{2^{k+1}I} |b(y) - b_{2^{k+1}r}|^{u'} dy\right]^{\frac{1}{u'}}$$

$$\times \left[\frac{1}{(2^k r)^n}\int_{2^{k+1}I} |\Omega(x-y)|^u |f_k(y)|^u dy\right]^{\frac{1}{u}}$$

$$\leq C \parallel b \parallel_* \left(M_{|\Omega|^u}(|f_k|^u)(x)\right)^{\frac{1}{u}}$$

dir, burada BMO fonksiyonu üzerinde Hölder eşitsizliği ve John-Nirenberg lemması kullanılmıştır (Torchinsky 1986). $|\Omega|^u \in L^{q/u}(S^{n-1})$ olmasından ve Lemma 4.1.4 den dolayı

$$\int_{I(a,r)} I_3(x)^p dx \leq C \parallel b \parallel_*^p \int_{I(a,r)} \left(M_{|\Omega|^u}(|f_k|^u)(x)\right)^{p/u} dx$$

$$\leq C \parallel b \parallel_*^p 2^{-k\epsilon_2} \parallel f \parallel_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}^p \varphi(I)$$

yazabiliriz, burada ϵ_2 f, $I(a,r)$ ve k dan bağımsızdır. Yukarıdaki eşitsizlikleri birleştirdiğimizde

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_I I_2(x)^p dx\right)^{1/p} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_I I_3(x)^p dx\right)^{1/p} \leq C \parallel b \parallel_* \varphi(I) \parallel f \parallel_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}^p$$

dir. $I_1(x)$ i tahmin etmek kalmıştır. $p/q' > 1$ olduğ undan, $(v-1)/u < p/q' - 1$ olacak şekilde $u > 1,\ 1 < v < p$ seçeriz. Buradan

$$1/q + v/(pu) + 1/(pu') < 1$$

elde ederiz. Şimdi $1/q < s < 1$ ve $1/(pu') + 1/(sq) = 1$ i sağ layan s yi alalım. Böylece

$$1/(pu') + 1/(sq) > 1/q + v/(pu) + 1/(pu')$$

yani

$$1/s > 1 + qv/(pu) = (pu + qv)/(pu)$$

olur. Buradan

$$pu/(sqv) > 1 \text{ ve } 1/s > (pu/(sqv))'$$

elde ederiz. $1/(pu')+1/(sqv)+1/(sqv')=1$ olduğundan $x\in I$ için, Hölder eşitsizliğinden dolayı

$$I_1(x)\leq |b(x)-b_r|\left[\frac{1}{(2^k r)^n}\int_{2^{k+1}I}|f_k(y)|^p dy\right]^{1/(pu')}$$

$$\times\left[\frac{1}{(2^k r)^n}\int_{2^{k+1}I}|\Omega(x-y)|^{sq}|f_k(y)|^{sqv/u}dy\right]^{1/(sqv)}$$

$$\times\left[\frac{1}{(2^k r)^n}\int_{2^{k+1}I}|\Omega(x-y)|^{sq}dy\right]^{1/(sqv')}$$

$$\leq \frac{C|b(x)-b_r|}{(2^k r)^{n/(pu')}}\varphi^{1/(pu')}(2^{k+1}I)\parallel f\parallel^{1/u'}_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}\left(M_{|\Omega|^{sq}}(|f_k|^{sqv/u})(x)\right)^{1/(sqv)}$$

dir. Burada ve bundan sonra, kısalık için $[\omega(2^{k+1}I)]^{1/(pu')}$ yi $\omega^{1/(pu')}(2^{k+1}I)$ ile göstereceğiz. $|\Omega|^{sq}\in L^{1/s}(\Sigma)$, $pu/(sqv)>1$ ve $1/s>(pu/(sqv))'$ olduğundan Hölder eşitsizliğini ve Lemma 4.1.4 ü uygularsak

$$\int_I I_1(x)^p dx\leq \frac{C}{(2^k r)^{n/u'}}\varphi^{1/u'}(2^{k+1}I)||f||^{p/u'}_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}$$

$$\times\int_I |b(x)-b_r|^p\left(M_{|\Omega|^{sq}}(|f_k|^{sqv/u})(x)\right)^{p/(sqv)}dx$$

$$\leq \frac{C}{(2^k r)^{n/u'}}\varphi^{1/u'}(2^{k+1}I)||f||^{p/u'}_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}\left[\int_I |b(x)-b_r|^{pu'}dx\right]^{1/u'}$$

$$\times\left[\int_I (M_{|\Omega|^{sq}}(|f_k|^{sqv/u})(x))^{pu/(sqv)}dx\right]^{1/u}$$

$$\leq \frac{C\parallel b\parallel^p_*}{2^{\frac{kn}{u'}}}\varphi^{\frac{1}{u'}}(2^{k+1}I)\parallel f\parallel^{p/u'}_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}\left[\int_I (M_{|\Omega|^{sq}}(|f_k|^{sqv/u})(x))^{pu/(sqv)}dx\right]^{1/u}$$

$$\leq \frac{C\|b\|_*^p}{2^{\frac{kn}{u'}}} \varphi^{\frac{1}{u'}}(2^{k+1}I) \| f \|^{\frac{p}{u'}}_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \varphi^{\frac{1}{u}}(I) 2^{-k\epsilon_0} \| f \|^{sqv/u} \|^{p/(sqv)}_{M_{pu/(sqv),\varphi}(\mathbb{R}^n)}$$

elde ederiz, burada k, $I(a,r)$ ve f den bağımsız olan ϵ_0, Lemma 4.1.4 den dolayı çok küçük olarak seçilebilir.

$$\| |f|^{sqv/u} \|^{p/(sqv)}_{M_{pu/(sqv),\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \| f \|^{p/u}_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)}$$

olduğunu belirtelim.

$$\int_I I_1(x)^p dx \leq C||b||_*^p ||f||^p_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \varphi^{1/u'}(2^{k+1}I) \varphi^{1/u}(I) 2^{-kn/u' - k\epsilon_0}$$

dir. Dolayısıyla

$$\left(\int_I I_1(x)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$C\left|||b||_*\right| ||f||_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \varphi^{\frac{1}{pu'}}(2^{k+1}I) \varphi^{\frac{1}{pu}}(I) 2^{-kn/(pu') - k\epsilon_0/p}$$

$$\leq C||b||_* ||f||_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \varphi^{1/(pu)}(I) r^{n/(pu') + \epsilon_0/p} \int_{2^k r}^{2^{k+1} r} \frac{\varphi^{1/(pu')}(a,t)}{t^{n/(pu') + \epsilon_0/p + 1}} dt$$

dır. Lemma 4.1.2 den dolayı, bir $\eta \in (0,1)$ vardır öyle ki

$$\int_r^\infty \frac{\varphi(a,t)}{t^{n+\eta}} dt \leq C \frac{\varphi(a,r)}{r^{n+\eta-1}}$$

dir. $1/(pu') + 1/(sq) = 1$ olduğunu belirtelim

$$\sum_{k=1}^\infty \left(\int_I I_1(x)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq Cb \parallel_* f \parallel_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \varphi^{1/(pu)}(I) r^{n/(pu')+\epsilon_0/p} \int_r^\infty \frac{\varphi^{1/(pu')}(a,t)}{t^{n/(pu')+\epsilon_0/p+1}} dt$$

$$\leq C \parallel b \parallel_* \parallel f \parallel_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \varphi^{1/(pu)}(I) r^{n/(pu')+\epsilon_0/p} \left(\int_r^\infty \frac{\varphi(a,t)}{t^{n+\eta}} dt \right)^{\frac{1}{pu'}}$$

$$\times \left(\int_r^\infty \frac{\varphi^{(1/pu')}(a,t)}{t^{(1+\epsilon_0/p-\eta/(pu'))sq}} dt \right)^{\frac{1}{sq}}$$

$$\leq C \parallel b \parallel_* \parallel f \parallel_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \varphi^{1/(pu)}(I) r^{n/(pu')+\epsilon_0/p} \varphi^{1/(pu')}(I)$$

$$\times r^{-(n+\eta-1)/(pu')} r^{1/(sq)+\eta/(pu')-\epsilon_0/p-1}$$

$$\leq C \parallel b \parallel_* \parallel f \parallel_{M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} \varphi^{1/(p)}(I)$$

dir. Bu $I_1(x)$ için istenilen bir tahmindir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

5. BAZI UYGULAMALAR

Bu bölümde psödodiferensiyel operatörleri gibi bir kaç belirli operatörlere Teorem 3.1.6 ve 3.2.6 yı uygulayacağız.

5.1. Psödodiferensiyel Operatörler

Psödodiferensiyel operatörleri singüler integraller ve diferensiyel operatörlerin genelleştirmeleridir. m bir reel sayı $0 \leq \delta < 1$ ve $0 \leq p < 1$ olsun. (Hörmander 1967, Taylor 1991) $S^m_{p,\delta}$ içindeki bir $\sigma(x,\varsigma)$ sembolü, her α ve β katlı indisleri için

$$|D_x^a D_\varsigma^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|a|}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan bir düzgün fonksiyondur, burada $C_{\alpha,\beta} > 0$, x den ve ξ den bağımsızdır. $S^{-\infty}_{\rho,\delta}$ içindeki bir sembol her bir m reel sayısı için yukardaki eşitsizliği sağlayan bir semboldür.

$$Af(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x,\xi) e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

ile verilen A operatörüne $\sigma(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}$ sembollü bir psödodiferensiyel operatör denir, burada f bir Schwartz fonksiyonudur ve $\hat{f}$ da f 'nin fourier dönüşümüdür. $L^m_{\rho,\delta}$ $S^m_{\rho,\delta}$'deki sembollü psödodiferensiyel operatörlerin sınıfını ifade edecektir.

Miller $L_p(1 < p < \infty)$ ağırlıklı uzaylarında ağırlık fonksiyonu A_p Muckenhoupt sınıfına ait olduğunda $L^0_{1,0}$ psödodiferensiyel operatörlerinin sınırlılığını gösterdi (Miller 1982). $L^0_{1,0}$'daki psödodiferensiyel operatörlerin Calderón-Zygmund operatörleri olduğu gösterildi (Coifman and Meyer 1978). Sonuç 3.11 den aşağıdaki yeni sonuçları elde ederiz.

Sonuç 5.1.1 $1 \leq p < \infty$ olsun, ve (φ_1, φ_2) (3.7) deki koşulları sağlasın. Eğer A $L^0_{1,0}$ Hörmander sınıfından bir psödodiferensiyel operatörü ise, o zaman A $p > 1$ için M_{p,φ_1} den M_{p,φ_2} ye sınırlıdır ve $p = 1$ için M_{p,φ_1} den WM_{p,φ_2} ye sınırlıdır.

Sonuç 5.1.2 $1 \leq p < \infty$ olsun, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve (φ_1, φ_2) (3.8) deki koşulları sağlasın. A, $L^0_{1,0}$ Hörmander sınıfından bir psödodiferensiyel operatör olsun. O zaman, $[b, A]$ komütatör operatörü M_{p,φ_1} den M_{p,φ_2} ye sınırlıdır.

5.2. Littlewood-Paley Operatörü

Littlewood-Paley fonksiyonlarının çeşitli uygulamalrı vardır. Bunlardan bazıları Fatou tipinin teğetsel olmayan yakınsaklık ve Riesz dönüşümleri ile çarpanların sınırlılığı çalışmalarıdır (Stein 1958, Stein 1970, Stein 1993, Torchinsky 1986). Littlewood-Paley operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 5.2.1 $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 0 \tag{5.1}$$

nin sağlandığını varsayalım. O zaman g_ψ genelleştirilmiş Littlewood-Paley g fonksiyonu

$$g_\psi(f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_t(f)(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanır, burada $t > 0$ için $\psi_t(x) = t^{-n}\psi(\frac{x}{t})$ ve $F_t(f) = \psi_t * f$ dir.

g_ψ altlineer komütatör operatörü

$$[a, g_\psi](f)(x) = \left(\int_0^\infty |F_t^a(f)(x)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanır, burada

$$F_t^a(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [b(x) - b(y)] \psi_t(x-y) f(y) dy$$

dir (Torchinsky 1986).

Teorem 5.2.2 $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ nin (5.1) eşitliğini ve aşağıdaki özellikleri sağladığını varsayalım:

$$|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{n+\alpha}} \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{5.2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x+h) - \psi(x)| dx \leq C|h|^\alpha, \ h \in \mathbb{R}^n, \tag{5.3}$$

burada C ve $\alpha > 0$, x ve h dan bağımsızdır. O zaman g_ψ her $1 < p < \infty$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlıdır ve $p = 1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ den $WL_1(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır (Lu *et al.* 2007).

$H = \left\{ h: \| h \| = (\int_0^\infty |h(t)|^2 \frac{dt}{t})^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$ uzayını göz önüne alalım. Herbir sabit $x \in \mathbb{R}^n$ için $F_t(f)(x)$ $[0, \infty)$ dan H ye bir dönüşüm olarak olarak görülebilir ve açık olarak $g_\psi(f)(x) = \| F_t(f)(x) \|$ dir. Aslında, Minkowski eşitsizliğinden ve ψ üzerindeki koşullardan

$$g_\psi(f)(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_0^\infty |\psi_t(x-y)|^2 \frac{dt}{t} \right)^{1/2} dy$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \left(\int_0^\infty \frac{t^{-2n}}{\left(\frac{1+|x-y|}{t}\right)^{2(n+1)}} \frac{dt}{t} \right)^{1/2} dy$$

$$= C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n} dy$$

elde ederiz. Böylece aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 5.2.3 $1 < p < \infty$ olmak üzere (φ_1, φ_2) (3.7) koşulunu sağlasın ve $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ (5.1), (5.2) ve (5.3) koşullarını sağlasın. O zaman g_ψ operatörü $p > 1$ için M_{p,ψ_1} den M_{p,ψ_2} ye sınırlıdır ve $p = 1$ için M_{1,ψ_1} den WM_{1,ψ_2} ye sınırlıdır.

Sonuç 5.2.4 $1 < p < \infty$ olmak üzere (ψ_1, ψ_2) (3.8) koşulunu sağlasın, $\psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ (5.1), (5.2) ve (5.3) koşullarını sağlasın ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman $[b, g_\psi]$ operatörü M_{p,ψ_1} den M_{p,ψ_2} ye sınırlıdır.

5.3. Marcinkiewiz Operatörü

$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ $\mathbb{R}^n$ de $d\sigma$ Lebesgue ölçüsü donatılmış birim küre olsun. Kabul edelim ki Ω aşağıdaki koşulları sağlar. (a) $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ve herhangi bir $t > 0$ için

$$\Omega(tx) = \Omega(x)$$

dir.

(a)

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x') d\sigma(x') = 0$$

eşitliği sağlanır.

(b) $\Omega \in Lip_{\gamma}(S^{n-1}),\ 0 < \gamma \leq 1$, yani bir $M > 0$ sabiti vardır öyle ki herhangi $x', y' \in S^{n-1}$ için

$$|\Omega(x') - \Omega(y')| \leq M|x' - y'|^{\gamma}$$

dır.

Stein μ_{Ω} yüksek boyutlu

$$\mu_{\Omega}(f)(x) = \left(\int_0^{\infty} |F_{\Omega,t}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t^3}\right)^{1/2}$$

Marcinkiewicz integralini tanımlamıştır (Stein 1958). Burada

$$F_{\Omega,t}(f)(y) = \int_{|y-z|\leq t} \frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^{n-1}} f(z)dz$$

dir. Stein'in bu çalışmasından beri (Stein 1958), Marcinkiewicz integralinin sürekliliği bir araştırma konusu olarak kapsamlı bir şekilde incelenmiştir ve ayrıca harmonik analizde faydalı bir araçtır (Lu *et al.* 2007, Stein 1970, Stein 1993, Torchinsky 1986).

μ_{Ω} altlineer komütatör operatörü

$$[b, \mu_{\Omega}](f)(x) = \left(\int_0^{\infty} |F_{\Omega,t,a}(f)(x)|^2 \frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır, burada

$$F_{\Omega,t,a}(f)(x) = \int_{|x-y|\le t} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-1}}[b(x)-b(y)]f(y)dy.$$

$H = \left\{h: \| h \| = (\int_0^\infty |h(t)|^2 \frac{dt}{t^3})^{\frac{1}{2}} < \infty\right\}$ uzayını göz önüne alalım. O zaman açık olarak $\mu_\Omega(f)(x) = \| F_{\Omega,t}(f)(x) \|$ olur.

Minkowski eşitsizliğinden ve Ω üzerindeki koşulardan,

$$\mu_\Omega(f)(x) \le \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-1}}|f(y)|\left(\int_{|x-y|}^\infty \frac{dt}{t^3}\right)^{\frac{1}{2}} dy \le C\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{|x-y|^n}dy$$

elde ederiz. Böylece, μ_Ω (1.1) koşulunu sağlar. μ_Ω nın $p>1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde ve $p=1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ den $WL_1(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı olduğunu biliyoruz (Torchinsky and Wang 1990). O zaman Teorem 3.1.6 ve 3.2.6 dan aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 5.3.1 $1 < p \le \infty$ olmak üzere (φ_1, φ_2) (3.7) koşulunu sağlasın ve Ω (a)-(c) koşullarını sağlasın. O zaman μ_Ω $p>1$ için M_{p,φ_1} den M_{p,φ_2} ye sınırlıdır ve $p=1$ için M_{1,φ_1} den WM_{1,φ_2} ye sınırlıdır.

Sonuç 5.3.2 $1 < p \le \infty$ olmak üzere (φ_1, φ_2) (3.8) koşulunu sağlasın, Ω (a)-(c) koşullarını sağlasın ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman $[b, \mu_\Omega]$ M_{p,φ_1} den M_{p,φ_2} ye sınırlıdır.

5.4. Bochner-Riesz Operatörü

$\delta > \frac{n-1}{2}$, $B_t^\delta = (1-t^2|\xi|^2)^\sigma + \hat{f}(\xi)$ ve $t>0$ için $B_t^\delta(x) = t^{-n}B^\delta(\frac{x}{t})$ olsun. Maksimal Bochner-Riesz operatörü

$$B_*^\delta(f)(x) = \sup_{t>0}|B_t^\delta(f)(x)|$$

ile tanımlanır (Liu and Chen 2008, Lanzhe and Shanzhen 2003).

$H = \{h: \| h \| = \sup_{t>0}|h(t)| < \infty\}$ uzayını göz önüne alalım. O zaman açıktır ki $B_*^\delta(f)(x) = \| B_t^\delta(f)(x) \|$ dır.

B_r^δ (Garcia-Cuerva and Rubio de Francia 1985) üzerindeki koşuldan dolayı

$$B_r^\delta(x-y) \le Cr^{-n}\left(1+\frac{|x-y|}{r}\right)^{-\left(\delta+\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$= C\left(\frac{r}{r+|x-y|}\right)^{\left(\delta-\frac{n-1}{2}\right)}\frac{1}{(r+|x-y|)^n}$$

$$\le |x-y|^{-n}$$

ve

$$B_*^\delta(f)(x) \le C\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(y)|}{|x-y|^n}dy$$

elde ederiz. Böylece, B_*^δ (1.1) koşulunu sağlar. B_*^δ nın $p>1$ için $L_p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı ve $p=1$ için $L_1(\mathbb{R}^n)$ den $WL_1(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı olduğunu biliyoruz. O zaman Teorem 3.1.6 ve 3.2.6'dan aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 5.4.1 $1 \le p < \infty$ olmak üzere (φ_1, φ_2) (3.7) koşulunu sağlasın ve $\delta > \frac{n-1}{2}$ olsun. O zaman, B_*^δ operatörü $p>1$ için M_{p,φ_1} den M_{p,φ_2} ye sınırlıdır ve $p=1$ için M_{1,φ_1} den WM_{1,φ_2} ye sınırlıdır.

Sonuç 5.4.2 $1 < p < \infty$ olmak üzere (φ_1, φ_2), (3.8) koşulunu sağlasın, $\delta > \frac{n-1}{2}$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman $[b, B_t^\delta]$ operatörü M_{p,φ_1} den M_{p,φ_2} ye sınırlıdır.

Uyarı 5.4.3 $\varphi(x,r)$ nin (3.1) ve (3.2) koşullarını sağladığını varsayımı altında Sonuç 5.4.1 ve 5.4.2 tarafından ispatlanmıştır (Liu and Chen 2008).

KAYNAKLAR

Akbulut, A., Guliyev, V.S. and Mustafayev, R., 2010. Boundedness of the maximal operator and singular integral operator in generalized Morrey spaces, Preprint, Institute of Mathematics, AS CR, 1-26, Prague.

Carro, M., Pick, L., Soria, J. and Stepanov, V.D., 2001. On embeddings between classical Lorentz spaces. Mathematical Inequalities Applications, 4(3): 397–428.

Chiarenza, F. and Frasca, M., 1987. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function. Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni, Serie VII, 7(4): 273–279.

Chiarenza, F., Frasca, M. and Longo, P., 1991. Interior $W^{2,p}$ estimates for nondivergence elliptic equations with discontinuous coefficients. Ricerche di Matematica, 40(1): 149–168.

Chiarenza, F., Frasca, M. and Longo, P., 1993. $W^{2,p}$ solvability of the Dirichlet problem for nondivergence elliptic equations with BMO coefficients. Trans. Amer. Math. Soc., 336(2) 841–853.

Coifman, R.R., Rochberg, R. and Weiss, G., 1976. Factorization theorems for Hardy spaces in several variables. Annals of Mathematics, Second Series, 103(3): 611–635.

Coifman, R.D. and Meyer, Y., 1978. Au Deá des operateurs Pseudo-Differentiels, vol. 57 of Asterisque Société Mathématique de France, 210 pages, Paris.

Di Fazio G. and Ragusa, M. A., 1993. Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients. Journal of Functional Analysis, 112(2): 241–256.

Ding, Y., Yang, D. and Zhou, Z., 1998. Boundedness of sublinear operators and commutators on $L^{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$. Yokohama Mathematical Journal, 46(1): 15–27.

Duoandikoetxea, J., 2001. Fourier Analysis. Amer. Math. Soc., Graduate Studies in Mathematics 29, Providence, 222 pages, Rhode Island.

Fan, D., Lu, S. and Yang D., 1998. Boundedness of operators in Morrey spaces on homogeneous spaces and its applications. Acta Mathematica Sinica. New Series, 14: 625–634.

Garcia-Cuerva, J. and Rubio de Francia, J. L., 1985. Weighted Norm Inequalities and Related Topics, North-Holland Mathematics Studies, 116. North-Holland, 604 pages, Amsterdam.

Guliyev, V.S, 1994. Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in Rn Doctor's Degree Dissertation, Mathematical Institute, Moscow, Russia.

Guliyev, V.S., 1999 Function Spaces, Integral Operators and Two Weighted Inequalities on Homogeneous Groups, Some Applications, Elm., 332 pages, Baku.

Guliyev V.S., 2009. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces. Journal of Inequalities and Applications, vol. 2009, Article ID 503948, 20 pages.

Guliyev, V.S., Hasanov, J.J. and Samko, S.G., 2010. "Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces," Mathematica Scandinavica, vol. 107, no. 2, pp. 285–304.

Hörmander, L., 1967. Pseudo-differential operators and hypo-elliptic operators. In: Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society, pp. 138–183.

Komori, Y. and Shirai, S., 2009. Weighted Morrey spaces and a singular integral operator. Math. Nachr., 282: 219-231.

Lanzhe, L. and Shanzhen, L., 2003. Weighted weak type inequalities for maximal commutators of BochnerRiesz operator. Hokkaido Math. J., 32(1): 85–99.

Lin, Y., 2007. "Strongly singular Calderon-Zygmund operator and commutator on Morrey type spaces," Acta Mathematica Sinica (English Series), vol. 23, no. 11, pp. 2097–2110.

Liu, Y. and Chen, D., 2008. The boundedness of maximal Bochner-Riesz operator and maximal commutator on Morrey type spaces. Analysis in Theory and Applications, 24(4): 321–329.

Lu, S., Yang, D. and Zhou, Z., 1998. Sublinear operators with rough kernel on generalized Morrey spaces. Hokkaido Math. J., 27(1): 219–232.

Lu, S., Ding, Y. and Yan, D., 2007. Singular Integrals and Related Topics, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 280 pages, Singapore.

Miller, N., 1982. Weighted Sobolev spaces and pseudodifferential operators with smooth symbols. Trans.Amer. Math. Soc., 269(1): 91–109.

Mizuhara, T., 1991. Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces, In: Harmonic Analysis (Sendai, 1990), S. Igari, Ed. , ICM 90 Satellite Conference Proceedings, pp. 183–189, Springer, Tokyo, Japan.

Morrey, C.B., 1938. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential Equations. Trans. Amer. Math. Soc., 43(1): 126–166.

Nakai, E., 1994. Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces. Math. Nachr., 166: 95–103.

Pérez, C., 1995. Endpoint estimates for commutators of singular integral operators. J. Funct. Anal., 128: 163-185.

Segovia, C. and Torrea, J.L., 1991. Weighted inequalities for commutators of fractional and singular integral, Publ. Mat., 35: 209-235.

Soria F. and Weiss, G., 1994. A remark on singular integrals and power weights. Indiana Univ. Math. J., 43(1): 187–204.

Stein, E.M., 1958. On the functions of Littlewood-Paley, Lusin, and Marcinkiewicz. Trans. Amer. Math. Soc., 88(2): 430–466.

Stein, E.M., 1970. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Mathematical Series No. 30, Princeton University Press, 304 pages, New Jersey.

Stein, E.M., 1993. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals, vol. 43 of Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, 695 pages, New Jersey.

Taylor, M.E., 1991. Pseudo-Differential Operators and Nonlinear PDE, vol. 100 of Progress in Mathematics, Birkhauser, 216 pages, Boston.

Torchinsky, A., 1986. Real Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press, 474 pages, New York.

Torchinsky, A., 1988. Real Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press New York

Torchinsky, A. and Wang, S.L., 1990. A note on the Marcinkiewicz integral. Colloquium Mathematicum, 60/61(1): 235–243.

Watson, D.K., 1994. Vector-valued inequalities, factorization, and extrapolation for a family of rough operators. J. Funct. Anal. 121: 389-415.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı : Muhammed Emre ODABAŞI

Eğitim

Yüksek Lisans Çankırı Karatekin Üniversitesi 2020 -
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Lisans Ankara Üniversitesi 2013 – 2019
Fen Fakültesi
Matematik Bolümü