Université de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :
Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

Discipline ou spécialité :

Dynamique des Fluides

Présentée et soutenue par :

Olivier Léon

le : 04/12/2012

Titre :

Étude du rayonnement acoustique d'instabilités hydrodynamiques de jets double-flux par les équations de stabilité parabolisée (PSE)

Ecole doctorale :
Mécanique, Energétique, Génie civil et Procédés (MEGeP)

Unité de recherche :
ONERA / DMAE

Directeur(s) de Thèse :
Daniel Juvé (ECL/LMFA)
Jean-Philippe Brazier (ONERA/DMAE)

Rapporteurs :
Jean-Christophe Robinet (ENSAM/DYNFLUID)
Yves Gervais (Université de Poitiers/Institut Pprime)

Membre(s) du jury :
Christophe Airiau (IMFT)
Patrick Huerre (LadHyX)
Peter Jordan (Institut Pprime)
Guillaume Bodard (SNECMA)

Université de Toulouse

Thèse

présentée en vue d'obtenir le grade de Docteur, spécialité « Mécanique des Fluides »

par

Olivier Léon

Étude du rayonnement acoustique des instabilités hydrodynamiques de jets double-flux avec les équations de stabilité parabolisées (PSE)

Thèse soutenue le 04/12/2012 devant le jury composé de :

Pr.	Y.	Gervais	Institut Pprime	(Rapporteur)
Pr.	J.-C.	Robinet	ENSAM/DYNFLUID	(Rapporteur)
Pr.	C.	Airiau	IMFT	
Dr.	G.	Bodard	SNECMA	
Pr.	P.	Huerre	LadHyX	
Dr.	P.	Jordan	Institut Pprime	
Pr.	D.	Juvé	ECL/LMFA	(Directeur de thèse)
Dr.	J.-P.	Brazier	ONERA/DMAE	(Co-Directeur de thèse)

À ma famille. À mes amis.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier mes directeurs de thèse, Daniel Juvé et Jean-Philippe Brazier, qui m'ont fait bénéficier, chacun à leur manière, de leur expérience dans le domaine de l'aéroacoustique, et plus globalement celui de la recherche. La réalisation de cette thèse n'aurait pas été possible sans leur intérêt porté à ce travail, leurs conseils, la motivation qu'ils ont su me donner et bien plus encore. Pour tout cela, je leur exprime toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Effectuer cette thèse au Centre de Toulouse de l'ONERA a été pour moi un réel bonheur. Je tiens donc à remercier Pierre Millan, directeur du Département Modèles pour l'Aérodynamique et l'Énergétique, de m'avoir accueilli à l'ONERA. J'exprime également toute ma gratitude envers Daniel Arnal, chef de l'unité Instabilités, Transition et Acoustique dans laquelle j'ai travaillé, pour sa très grande gentillesse et sa générosité.

Je tiens ensuite à remercier tout particulièrement Yves Gervais et Jean-Christophe Robinet pour avoir relu en détail ce mémoire et assumé la charge de rapporteurs. Merci également à Christophe Airiau pour avoir assuré le rôle de Président du jury. Je remercie vivement Patrik Huerre et Guillaume Bodard pour leur présence, leur intérêt et la pertinence de leurs remarques. Enfin, je tiens à exprimer tous mes remerciements envers Peter Jordan pour son ouverture d'esprit et sa communicativité : les quelques discussions que nous avons pu avoir au cours de cette thèse ont eu un impact non négligeable sur son orientation et ses résultats. J'ai été très heureux de soutenir ma thèse devant un tel jury et j'en remercie encore une fois chaleureusement l'ensemble des membres.

Je remercie du fond du cœur tout le personnel de l'ONERA avec qui j'ai pu travailler, ainsi que le personnel enseignant de l'ISAE. Je suis heureux de pouvoir continuer aujourd'hui à échanger, à apprendre et à travailler avec vous.

Cette aventure restera pour moi trois années extrêmement riches d'un point de vue scientifique, mais plus encore personnel. J'adresse donc un grand merci à tous ceux que j'ai pu côtoyer à l'ONERA et qui ont contribué à l'excellente ambiance au bureau ou en dehors.

Plus spécialement et à peu près par ordre d'apparition au cours de ma thèse, un grand merci à Fabien, Olivier et Romain pour votre verbe, merci Cédric, l'un des deux meilleurs cobureaux, merci à Hélène et Julien qui ont partagé ces trois années jusqu'au bout, merci à Muzo et Tibo pour ces fabuleuses aventures, merci Laurent pour cette bonne humeur légendaire, merci Maxime et tous les coincheurs, ainsi que l'ensemble de la pause café, et merci Lucas, l'autre meilleur cobureau, pour toutes ces discussions et pour m'avoir supporté aussi longtemps ! Il manque bien des noms à cette liste (merci les copains, les colocs, les grimpeurs, ...), mais je ne vous en remercie pas moins !

Plus personnellement, je te remercie infiniment, Caro, pour m'avoir supporté et aidé, sûrement plus que tu ne le penses. Enfin, un grand merci à toute ma famille pour votre soutien continuel.

Merci encore une fois à tous, et bonne lecture à ceux qui le souhaitent !

Olivier

Table des matières

Introduction **1**

I Contexte d'étude et problématique de l'aéroacoustique des jets **5**
I.1 Introduction sur l'aéroacoustique des jets 6
1.1 Problématique de l'aéroacoustique des jets simples 6
1.2 Réduction du bruit au moyen de jets double-flux 7
1.3 Vers un contrôle du bruit de jet 9
1.4 Problématique de la thèse 10
I.2 Mise en évidence expérimentale des caractéristiques du bruit de jet 10
2.1 Turbulence de petite et de grande échelle 10
2.2 Le rayonnement acoustique des jets supersoniques 12
2.3 Continuité des mécanismes acoustiques dans les jets subsoniques 14
I.3 Méthodes de prévision du bruit de jet 18
3.1 Analogies acoustiques 18
3.2 Méthodes semi-empiriques pour jet simple ou double-flux 19
3.3 Simulations numériques pour l'aéroacoustique 20
3.4 Vers l'étude des structures de grande échelle par l'analyse de stabilité . . 22
I.4 Études de stabilité pour la modélisation des structures de grande échelle 23
4.1 Analyse de stabilité locale 24
4.2 Prise en compte de la faible divergence du jet 26
4.3 Modélisations faiblement non linéaires 34
I.5 Le rayonnement acoustique de paquets d'ondes subsoniques 37
I.6 Conclusions 39

II Modélisation des instabilités hydrodynamiques d'un jet par les équations de stabilité parabolisées (PSE) linéaires **41**
II.1 Développement des équations de stabilité parabolisées linéaires 42
1.1 Les équations du mouvement 42
1.2 Discussion sur l'écoulement porteur 48
1.3 La modélisation PSE linéaire 50
1.4 Conditions initiales 54
1.5 Conditions aux limites 56
II.2 Méthodes numériques pour la résolution du système PSE linéaire 58
2.1 Maillage 58
2.2 Discrétisation axiale 59
2.3 Discrétisation radiale 60
2.4 Convergence sur le nombre d'onde axial 62
2.5 Résolution du système discret 63
II.3 Validation du modèle 63
3.1 Étude d'un jet incompressible 64

3.2 Influence de l'incrément axial . . . 67
3.3 Influence de la condition de normalisation . . . 71
3.4 Étude d'un jet supersonique . . . 73
II.4 Conclusions . . . 77

III Analyse des fluctuations de pression en champ proche de jets double-flux par l'approche PSE linéaire 79
III.1 Caractéristiques des jets double-flux issus du projet CoJeN . . . 80
1.1 Géométries des tuyères . . . 80
1.2 Points de fonctionnement . . . 80
1.3 Configurations d'étude . . . 81
III.2 Analyse des mesures de fluctuation de pression . . . 82
2.1 Géométrie des antennes en champ proche et travaux réalisés sur ces mesures 82
2.2 Identification de la bande fréquentielle d'étude et mesures en champ lointain 83
2.3 Décomposition des fluctuations de pression de l'antenne linéaire . . . 85
2.4 Décomposition des fluctuations de pression de l'antenne azimutale . . . 91
III.3 Application de l'analyse PSE linéaire aux jets coaxiaux . . . 97
3.1 Approximation des écoulements porteurs . . . 97
3.2 Identification des modes hydrodynamiques . . . 101
3.3 Approche PSE appliquée au cas coplanaire . . . 102
3.4 Approche PSE appliquée aux cas *short-cowl* . . . 105
III.4 Comparaison entre mesures et résultats de l'analyse PSE sur les cas *short-cowl* . 105
4.1 Évolution axiale des phases . . . 105
4.2 Évolution axiale des amplitudes . . . 108
III.5 Conclusions . . . 113

IV Analyse du lien entre les fluctuations hydrodynamiques obtenues par analyse PSE linéaire et l'acoustique observée en champ lointain 115
IV.1 Modélisation du rayonnement acoustique associé aux fluctuations de pression du champ proche hydrodynamique-linéaire . . . 116
1.1 Étude de la solution PSE dans la région acoustique . . . 116
1.2 Méthodes de propagation acoustique par surface de Kirchhoff . . . 120
IV.2 Validation des méthodes de propagation acoustique par surface de Kirchhoff sur un cas analytique . . . 124
2.1 Modèle analytique de paquet d'ondes . . . 124
2.2 Comparaison des directivités acoustiques entre solutions analytiques et résultats de propagation par surfaces de Kirchhoff . . . 125
IV.3 Propagation acoustique des perturbations de pression issues des calculs PSE linéaires . . . 129
3.1 Forme analytique approchée des perturbations de pression PSE . . . 129
3.2 Propagation acoustique des résultats PSE sur le cas *short-cowl* à partir de l'antenne linéaire . . . 133
3.3 Propagation acoustique à partir d'une surface cylindrique . . . 143
3.4 Composantes supersoniques des ondes d'instabilité . . . 149
IV.4 Conclusions . . . 151

V Modélisation des fluctuations hydrodynamiques d'un jet dans un contexte faiblement non linéaire au moyen des PSE 153
V.1 Développement des équations PSE dans un contexte faiblement non linéaire . . 154
1.1 La modélisation PSE faiblement non linéaire . . . 154
1.2 Cadre d'application de notre approche PSE non linéaire et simplifications du problème . . . 157

V.2 Résolution du système PSE non linéaire 159
2.1 Conditions initiales des modes principaux et résonants 159
2.2 Méthodes de calcul des termes non linéaires 160
2.3 Méthode de convergence pour la résolution du système PSE non linéaire 162
V.3 Applications simples du modèle PSE non linéaire 163
3.1 Interactions d'harmoniques fréquentielles dans un écoulement parallèle incompressible 164
3.2 Interactions d'harmoniques fréquentielles dans un jet simple incompressible 169
V.4 Conclusions 173

VI Conclusions et perspectives **175**
VI.1 Conclusions de l'étude 175
VI.2 Perspectives 177

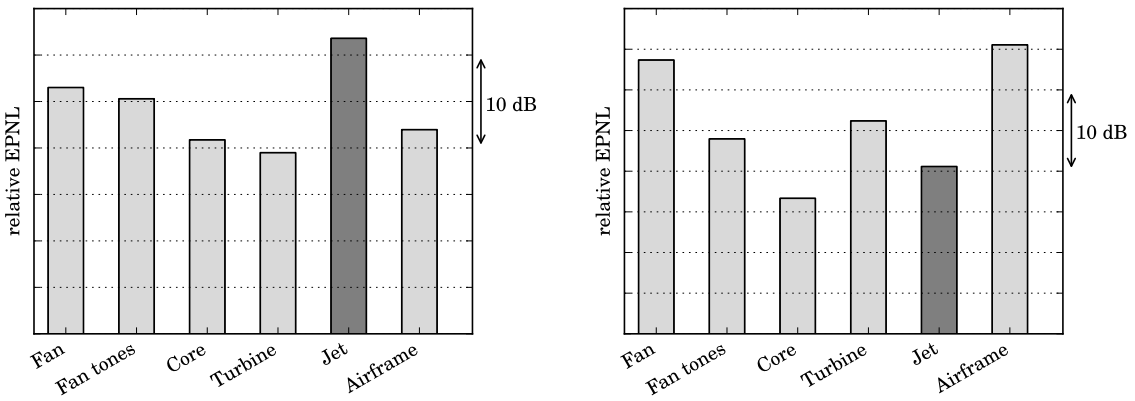
VII Annexes **179**
VII.1 Analyse de stabilité locale sur le cas d'étude COTP2 180
VII.2 Mise en évidence d'une difficulté de calcul de mode par PSE en présence de plusieurs instabilités 184

Bibliographie **I**

Introduction

La réduction du bruit des aéronefs est un enjeu important pour l'industrie aéronautique. En effet, dans un contexte mondial de croissance du trafic aérien, les nuisances sonores liées au décollage et à l'atterrissage des avions représentent une gêne considérable qu'il convient de maîtriser et de réduire dans un souci de respect et d'amélioration de la qualité environnementale aux abords des aéroports. Dans cette optique, les normes européennes en matière de niveaux sonores admissibles sont de plus en plus strictes. D'ambitieux objectifs ont notamment été préconisés par l'*Advisory Council for Aeronautics Research in Europe* (ACARE), visant une réduction de 65% du bruit perçu à l'horizon 2050.

Pour atteindre de tels objectifs, il est avant tout nécessaire d'identifier les sources responsables du bruit d'un avion. Ainsi, un aperçu de la répartition énergétique des différentes sources de bruit au décollage et à l'atterrissage d'un avion de ligne moderne peut être observé sur la figure 1. Les sources de nuisances sonores, et avec elles les mécanismes aéroacoustiques mis en jeu, sont multiples. À l'atterrissage d'un avion, les nuisances sonores trouvent majoritairement leur origine dans l'aéroacoustique des soufflantes (*fan*) et de la cellule (train d'atterrissage, volets, etc). Au décollage cependant, le bruit de jet est la source principale de bruit. En vue d'une réduction globale du bruit d'un avion, particulièrement au décollage, il est donc primordial d'étudier et d'agir sur cette composante qu'est le bruit de jet.



(a) Décollage

(b) Atterrissage

Figure 1 – *Exemple de répartition d'intensités acoustiques illustrant les différentes origines du bruit issu d'un avion (a) au décollage et (b) à l'atterrissage (Source : site du DLR, projet PROBAND)*

Afin d'en réduire l'intensité, il est nécessaire d'acquérir une compréhension fine des mécanismes générateurs de bruit dans de tels écoulements, ceci dans l'optique, à terme, d'élaborer des stratégies efficaces de contrôle de bruit. Au cours des dernières décennies, d'importantes avancées dans la modélisation et la prévision de l'aéroacoustique des jets ont été réalisées. Entre autres, dans ce

domaine, les travaux de Lighthill [1952, 1954] sont largement considérés comme fondateurs de la discipline, posant des bases théoriques importantes dans la compréhension du lien unissant le champ acoustique d'un jet à la turbulence de cet écoulement. Malgré des efforts considérables, les mécanismes hydrodynamiques précis générateurs du bruit de jet observé en champ acoustique lointain n'ont que partiellement été mis en évidence. Une telle difficulté à identifier l'origine hydrodynamique exacte de caractéristiques acoustiques fréquentielles tient à la nature même de l'écoulement étudié. En effet, le rayonnement acoustique d'un jet est le résultat final d'une dynamique complexe régie par la turbulence de l'écoulement dont les mécanismes physiques sont largement non linéaires et instationnaires.

Il s'avère, cependant, qu'un écoulement de type jet n'est pas totalement chaotique, mais que des structures cohérentes en temps et en espace se développent dans la région initiale du jet. Ces structures hydrodynamiques, mises en évidence dans un jet en particulier par Crow et Champagne [1971], ont changé la compréhension de l'aéroacoustique des jets. En effet, ces structures, ayant une signature cohérente mesurable, ont put être corrélées à l'acoustique en champ lointain, entre autres dans les expériences pionnières de Mollo-Christensen *et al.* [1964]. Malgré l'identification de ces structures de grande échelle comme sources acoustiques potentielles, ces observations n'ont pas permis d'établir une méthode de prévision quantitative du bruit qui leur est associé, à l'exception d'écoulements supersoniques (Troutt et McLaughlin [1982]). Récemment, une approche basée sur l'étude de la stabilité des écoulements cisaillés et initialement développée par Herbert [1994, 1997], a permis de modéliser plus précisément et plus aisément qu'auparavant l'évolution spatiale de telles structures cohérentes. Une telle approche utilise des équations de stabilité parabolisées et forme des modèles dits PSE (*Parabolized Stability Equations*). Cependant, si les caractéristiques hydrodynamiques ont bien été analysées au sein du jet, le lien entre ces structures hydrodynamiques et leur rayonnement acoustique n'a quasiment jamais été analysé au vu de résultats expérimentaux, si ce n'est très récemment par Gudmundsson [2010]. Ces études ont permis de mettre en évidence l'existence et la contribution importante des structures cohérentes dans l'hydrodynamique des jets. De plus, les modélisations effectuées reproduisent globalement les caractéristiques de ces structures en champ proche hydrodynamique. Enfin, leur contribution acoustique en champ lointain a également été largement étayée expérimentalement [Jordan et Gervais, 2008]. Cependant, toutes ces études sont limitées à l'étude de jets simples, supersoniques ou subsoniques. Le cas de configurations industrielles de jets à double flux n'a que très rarement été abordé du point de vue de la stabilité (voir par exemple Dahl et Morris [1997a,b]). Enfin, l'étude du lien entre l'évolution axiale de ces structures modélisées par une approche PSE et l'acoustique rayonnée en champ lointain d'un jet double-flux n'a encore jamais été effectuée.

L'objectif de la thèse présentée ici consiste donc en une analyse détaillée, à la fois hydrodynamique et acoustique, des rapports entre mesures et résultats numériques issus d'une modélisation PSE sur des cas complexes de jets double-flux représentatifs des configurations industrielles.

Suite à une présentation détaillée du contexte de la thèse (Chapitre 1), la démarche a donc consisté, dans un premier temps, à décrire mathématiquement l'évolution des instabilités hydrodynamiques décrivant ces structures cohérentes. Pour cela, un modèle d'équations de stabilité parabolisées linéaires a été développé. De plus, une analyse numérique détaillée du modèle a permis d'en déterminer les caractéristiques ainsi que le domaine de validité. Par la suite, ce modèle a été validé sur différents types d'écoulements afin de vérifier sa capacité à prévoir l'évolution axiale des instabilités hydrodynamiques (Chapitre 2). Dans un deuxième temps, ce modèle PSE linéaire a permis d'étudier les fluctuations hydrodynamiques de jets double-flux en champ proche. Pour cela, une analyse détaillée de données expérimentales de jets double-flux issues du projet européen CoJeN (*Coaxial Jet Noise*) a été effectuée afin d'en extraire les caractéristiques des fluctuations de pression représentatives des structures étudiées. Le modèle PSE linéaire a ensuite été appliqué aux écoulements correspondants afin d'évaluer l'évolution théorique des instabilités hydrodynamiques. Enfin, une comparaison entre ces prévisions et les

mesures filtrées a été menée afin de conclure quant à la nature des fluctuations hydrodynamiques observées expérimentalement (Chapitre 3). Suite à cette analyse hydrodynamique, l'étape suivante a consisté à développer un modèle de propagation de ces fluctuations en champ acoustique lointain. Pour cela, la validité de la méthode de résolution PSE dans le domaine acoustique a été analysée afin d'en montrer les limites. Deux méthodes complémentaires de propagation acoustique à partir de surfaces de Kirchhoff cylindriques et coniques ont ensuite été mises en place afin de propager les fluctuations précédemment calculées. Ces modèles de propagation ont ensuite été étudiés sur un cas analytique afin d'en déterminer la validité. Enfin, suite à ces validations, les fluctuations de pression analysées au chapitre précédent ont été propagées en champ lointain afin de les comparer aux mesures. Cette comparaison nous a permis de conclure de manière quantitative sur la part du rayonnement induit par ces instabilités et d'argumenter quant à l'origine du bruit mesuré (Chapitre 4). Les observations effectuées dans les chapitres précédents nous ont conduit à conclure quant à l'influence des structures cohérentes sur les caractéristiques hydrodynamiques et acoustiques des jets, ainsi que sur la pertinence d'une modélisation linéaire. Une dernière étape a été d'étendre notre modélisation dans le but d'explorer l'influence de non linéarités issues d'interactions modales sur la dynamique des ondes d'instabilité. Pour cela, nous avons développé un modèle PSE faiblement non linéaire. Ce modèle a ensuite été appliqué à quelques cas d'étude simples afin d'évaluer les conséquences de la prise en compte d'interactions modales. Nous avons alors pu conclure quant à l'intérêt d'une telle modélisation et dégager quelques perspectives associées (Chapitre 5).

Chapitre I

Contexte d'étude et problématique de l'aéroacoustique des jets

Sommaire

I.1 Introduction sur l'aéroacoustique des jets . . . 6
1.1 Problématique de l'aéroacoustique des jets simples . . . 6
1.2 Réduction du bruit au moyen de jets double-flux . . . 7
1.3 Vers un contrôle du bruit de jet . . . 9
1.4 Problématique de la thèse . . . 10
I.2 Mise en évidence expérimentale des caractéristiques du bruit de jet . . . 10
2.1 Turbulence de petite et de grande échelle . . . 10
2.2 Le rayonnement acoustique des jets supersoniques . . . 12
2.3 Continuité des mécanismes acoustiques dans les jets subsoniques . . . 14
I.3 Méthodes de prévision du bruit de jet . . . 18
3.1 Analogies acoustiques . . . 18
3.2 Méthodes semi-empiriques pour jet simple ou double-flux . . . 19
3.3 Simulations numériques pour l'aéroacoustique . . . 20
3.4 Vers l'étude des structures de grande échelle par l'analyse de stabilité . . . 22
I.4 Études de stabilité pour la modélisation des structures de grande échelle . . . 23
4.1 Analyse de stabilité locale . . . 24
4.2 Prise en compte de la faible divergence du jet . . . 26
4.3 Modélisations faiblement non linéaires . . . 34
I.5 Le rayonnement acoustique de paquets d'ondes subsoniques . . . 37
I.6 Conclusions . . . 39

I.1 Introduction sur l'aéroacoustique des jets

1.1 Problématique de l'aéroacoustique des jets simples

Une question centrale de l'aéroacoustique se situe dans l'identification de sources acoustiques présentes dans un écoulement ainsi que dans la prévision du bruit engendré par celles-ci. Le type d'écoulement ici considéré, le jet débouchant dans un milieu au repos, est en général non linéaire, turbulent et instationnaire. La figure I.1 donne ainsi une visualisation instantanée d'un tel écoulement libre en sortie d'une tuyère simple avec un nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = U_j \rho_j d/\mu_j = 10^5$. Elle met en évidence la relative complexité de l'écoulement par l'injection de fumée aux lèvres de la tuyère. Le développement de la couche de mélange est ainsi bien visualisé : fine au début, elle s'élargit vers l'aval, dispersant la fumée de manière qualitativement chaotique. Les deux couches de mélange présentes dans cette section se rejoignent finalement pour ne former qu'un seul panache de fumée s'évasant toujours dans la direction aval.

Une telle description est schématisée dans la figure I.2. La première zone observée correspond ainsi à la région du cône potentiel. Dans cette zone, le profil de vitesse axiale u_x pris dans une section transverse et moyenné temporellement est uniforme à l'extérieur de la couche de mélange, croît rapidement dans la zone cisaillée et atteint une vitesse moyenne maximale, la vitesse de sortie du jet U_j, jusqu'à l'axe de symétrie. Le cône potentiel est ainsi défini par cette zone où



Figure I.1 – *Visualisation instantanée d'une section d'un jet simple à* $Re = 10^5$ *réalisée par Parekh* et al. *[1988].*

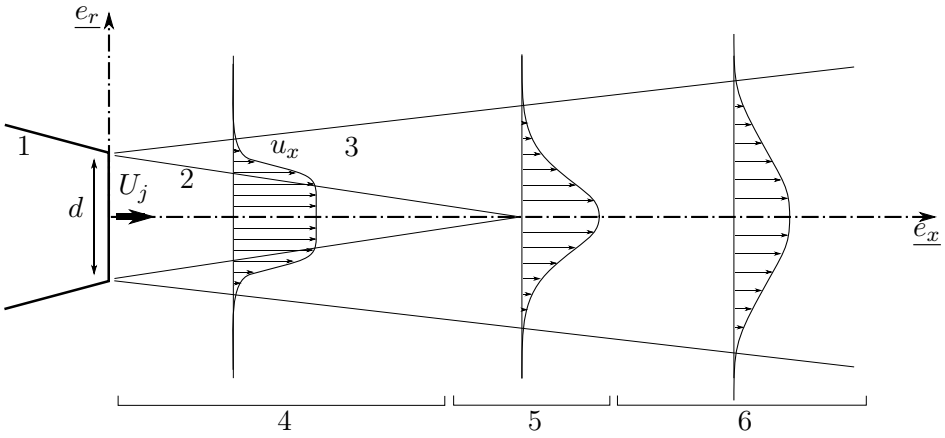


Figure I.2 – *Schéma d'un jet simple en sortie de tuyère (1), faisant apparaître le cône potentiel (2), la couche de mélange (3), la zone potentielle du jet (4), la région de transition (5) et la région pleinement développée (6).*

le champ de vitesse est quasiment uniforme et irrotationnel. L'élargissement des couches de mélange, responsable de l'étrécissement progressif du cône potentiel, est la conséquence directe de la viscosité et du développement de la turbulence dans le jet. Ainsi, la fin de la zone potentielle est caractérisée par une région de transition, où le plateau de vitesse précédent disparaît pour laisser place à un écoulement pleinement turbulent où les profils moyens de vitesse axiale peuvent être décrits par des lois de similitude.

Cette turbulence, qui dessine les caractéristiques géométriques du jet et rend le champ hydrodynamique complexe, est également productrice de bruit. Ce rayonnement acoustique, qui se propage à l'extérieur du jet, est caractérisé par des amplitudes de fluctuations de pression relativement faibles. Par exemple, même pour un jet "extrêmement bruyant" ayant un niveau de bruit de l'ordre de 114 dB sur un point de contrôle latéral utilisé pour la certification industrielle, les amplitudes des fluctuations de pression caractérisant le rayonnement acoustique sont inférieures à 0.01% de la pression ambiante [Colonius et Lele, 2004]. Par conséquent, l'énergie associée au rayonnement acoustique ne représente qu'une fraction infime de l'énergie turbulente présente dans un jet.

Cette disparité d'échelles entre l'acoustique observée et les sources associées (d'origine turbulente) entraîne de grandes difficultés à identifier ces dernières et à prévoir le bruit d'un jet. D'un point de vue numérique par exemple, cela signifie que pour estimer l'acoustique d'un jet turbulent, l'ensemble des échelles énergétiques caractérisant la turbulence doit être pris en compte. Cela peut être fait complètement dans le cas de simulations numériques directes (ou DNS pour *Direct Numerical Simulation*) ou partiellement avec un modèle de sous-maille dans le cas de simulations des grandes échelles (ou LES pour *Large Eddy Simulation*). Cependant, les méthodes numériques utilisées dans de tels modèles (modèles de sous-maille, dissipation visqueuse artificielle, discrétisation, etc.), valides pour le calcul hydrodynamique du jet, peuvent induire de grandes erreurs dans la prévision de l'acoustique si cette problématique n'est pas correctement traitée [Colonius et Lele, 2004], la production de bruit reposant sur des mécanismes parfois subtils d'interférences constructives ou destructives. De manière générale, ces méthodes numériques pour la prévision de l'acoustique, très coûteuses en temps de calcul, restent encore aujourd'hui restreintes à des géométries simples ou des nombres de Reynolds modérés.

1.2 Réduction du bruit au moyen de jets double-flux

Or, pour pouvoir réduire le bruit de jet, une bonne compréhension des mécanismes responsables du bruit observé est indispensable. Ce manque de compréhension explique en partie le peu d'avancées significatives effectuées au cours des dernières années dans ce domaine. La dernière rupture technologique dans la réduction du bruit de jet est l'utilisation de tuyères coaxiales éjectant un jet double-flux.

De tels jets sont constitués d'un jet primaire central, entouré d'un jet secondaire annulaire comme représenté dans la figure I.3. Dans cette dernière, le champ de vitesse axial u_x instantané issu d'un calcul LES met en évidence le développement et l'interaction de ces deux jets. Deux couches de mélange sont visibles. La première se situe entre le jet interne (ou jet primaire) et le jet annulaire externe (ou jet secondaire). La deuxième couche de mélange se situe entre le jet secondaire et le milieu ambiant. Dans cet écoulement, la vitesse du jet primaire est supérieure à celle du jet secondaire, donnant ce qui est nommé un profil de vitesse normal. Le contraire est possible, donnant des profils de vitesse inversés, mais ces derniers ne seront pas abordés dans cette étude. La dynamique des jets double-flux est donc plus complexe que celle des jets simples, les interactions turbulentes pouvant être plus importantes.

De manière schématique, on peut représenter un tel jet double-flux par la figure I.4. La distinction en trois régions est basée sur l'analyse de Ko et Kwan [1976] et Kwan et Ko [1977]. En effet, dans la zone initiale de mélange, les profils moyens de vitesse axiale des couches de mélange interne et externe suivent globalement une loi de similitude, comparable à deux jets simples

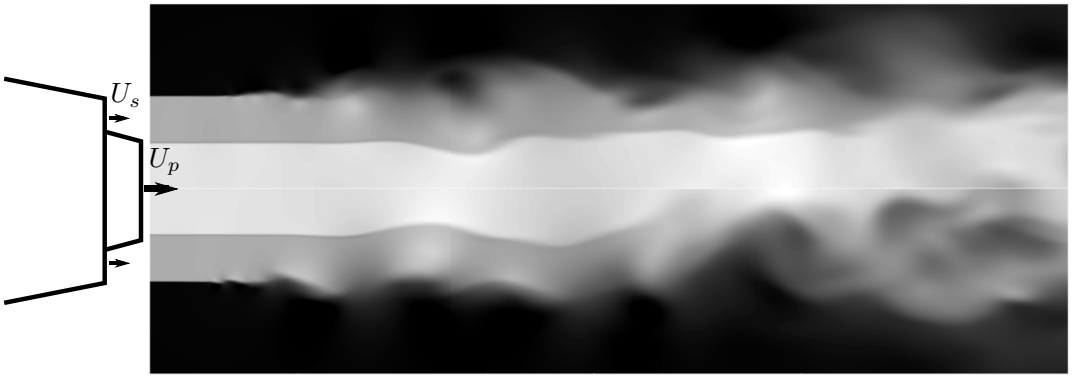


Figure I.3 – *Champ de vitesse axiale instantané issu d'un calcul LES sur un jet double-flux en sortie d'une tuyère coaxiale, calcul réalisé par Vuillot* et al. *[2008].*

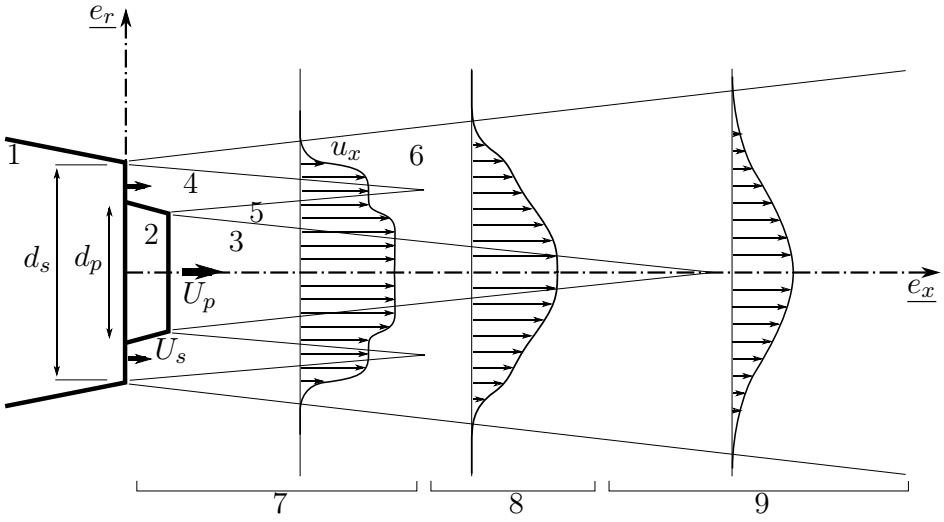
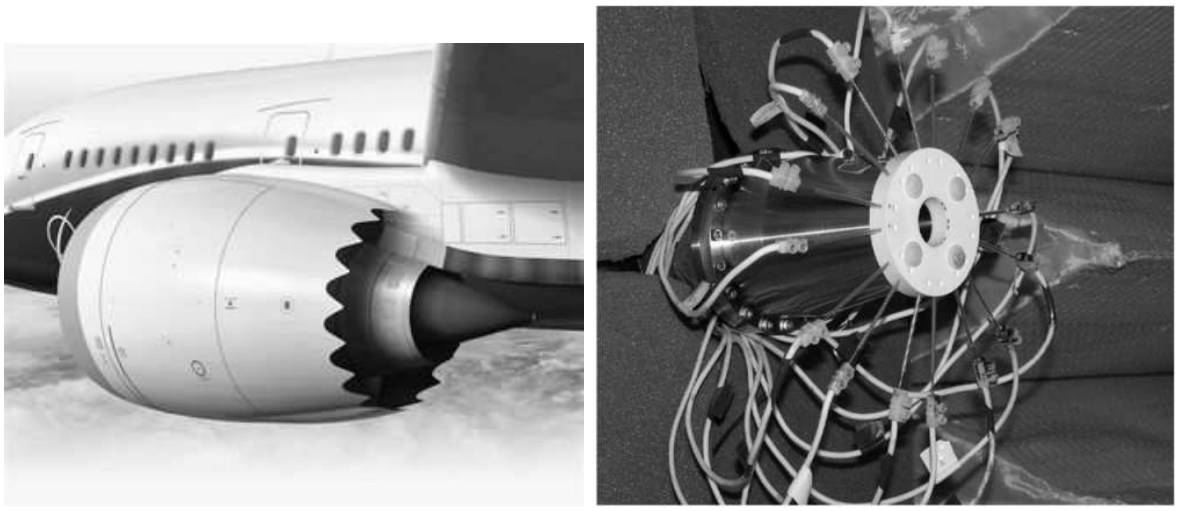


Figure I.4 – *Schéma d'un jet double-flux issu d'une tuyère non coplanaire, où sont représentés la tuyère externe (1), la tuyère interne (2), le cône potentiel primaire (3), le cône potentiel secondaire (4), la couche de mélange interne (5), la couche de mélange externe (6), la zone initiale de mélange (7), la zone intermédiaire (8) et la zone complètement développée (9).*

pris isolément. En fin du cône potentiel secondaire, les deux couches de mélange interagissent et aucune similitude n'est trouvée, cette zone intermédiaire étant une région de transition. Enfin, l'écoulement devient comparable à un jet simple dans la région pleinement développée, où des lois de similitudes peuvent être observées.

Dans ce type de jet, cet ajout d'un écoulement secondaire périphérique froid permet d'augmenter la poussée utile du turboréacteur en augmentant le débit massique total. Ainsi, à poussée fixe, la vitesse de sortie du jet primaire chaud peut être réduite. Cette diminution de vitesse d'éjection est accompagnée d'une forte diminution du bruit rayonné [Morris et Viswanathan, 2011]. En effet, comme détaillé par la suite, pour des jets subsoniques, la puissance acoustique rayonnée suit globalement une loi en U_j^8, résultat classique de l'analogie acoustique de Lighthill. Cette solution technologique est aujourd'hui largement utilisée dans le domaine de l'aviation civile afin de satisfaire les contraintes de nuisances sonores. Ce type de turboréacteur est également plus économique qu'un équivalent simple flux pour des régimes subsoniques. De manière générale, l'augmentation du taux de dilution, c'est-à-dire le rapport des débits massiques des jets secondaire et primaire, permet une réduction du bruit observé, en même temps qu'une diminution de la



(a) (b)

Figure I.5 – *Exemples de dispositifs de contrôle du bruit de jet : (a) Dispositif mécanique passif de type chevrons équipant une tuyère double-flux Rolls-Royce Trent 1000 sur un Boeing 787; (b) Dispositif de contrôle actif par actionneurs plasma [Adamovich* et al.*, 2008].*

consommation de carburant.

1.3 Vers un contrôle du bruit de jet

Cependant, une telle technologie permettant la réduction du bruit de jet atteint aujourd'hui des limites technologiques. En effet, de plus grands taux de dilution impliquent par exemple une augmentation des dimensions de la soufflante et du diamètre de la nacelle. Les contraintes mécaniques sont alors plus importantes et la taille des turboréacteurs est limitée par les contraintes dimensionnelles de l'avion.

Malgré le développement actif de turboréacteurs à grands taux de dilution (comme le Pratt & Whitney PW1000G avec un taux de 12 : 1), une avancée significative dans la réduction du bruit de jet pourrait se situer dans le développement de méthodes innovantes de contrôle du bruit, qu'elles soient passives, donc sans apport énergétique extérieur, au moyen de chevrons (figure I.5(a)) ou de tabs par exemple, ou actives, au moyen de microjets fluidiques ou synthétiques (figure I.5(b)) par exemple. Beaucoup de travaux s'intéressent au contrôle des couches de mélange, l'objectif pouvant être aéroacoustique comme ici (Samimy *et al.* [2007b], Hardy [2012], Koenig *et al.* [2011] pour n'en citer que quelques-uns) ou hydrodynamique (voir par exemple Zaman [1999], Mathis [2006]). Il est intéressant de noter que les dispositifs actifs ont une plus grande flexibilité que leurs équivalents passifs. En effet, le contrôle de la couche de mélange peut se faire de manière dynamique, les possibilités de contrôle offrant un éventail plus large et ouvrant la voie à des systèmes de contrôle rétroactifs. De plus, le contrôle du bruit de jet n'est nécessaire que pour une courte plage de vol et il peut être utile de stopper le contrôle dans les autres phases de vol pour des raisons de performances. Globalement, de telles technologies paraissent prometteuses, même si les gains observés de réduction du bruit total restent souvent en dessous de 3 dB comme dans les travaux de Samimy *et al.* [2007a].

Les mécanismes sur lesquels de telles approches se basent, dans l'optique de réduire le bruit de jet, sont moins directs que dans le cas des tuyères double-flux. En effet, l'objectif est ici de modifier la dynamique des structures turbulentes évoluant dans la couche de mélange du jet. Une altération des sources acoustiques turbulentes est ainsi visée, de manière statique ou dynamique. Par conséquent, le développement de telles méthodes de contrôle requiert une connaissance poussée des mécanismes mis en jeu dans la production de bruit par un jet turbulent afin de

les contrôler de façon optimale. En effet, les démonstrations de contrôle de bruit de jet citées précédemment sont souvent le résultat d'un apprentissage empirique par essais et erreurs. Une optimisation de ces approches demande une modélisation précise des sources d'origine turbulente. Or, si d'importantes avancées dans la compréhension des mécanismes responsables du bruit de jet ont vu le jour au cours des dernières décennies, la description et la modélisation de l'aéroacoustique d'un jet ne sont encore aujourd'hui que partiellement résolues.

1.4 Problématique de la thèse

Beaucoup de travaux sont aujourd'hui entrepris dans cette voie par différentes approches, souvent complémentaires, dans des contextes expérimentaux ou numériques. Les sections suivantes ont pour objectif de mettre en lumière ces différentes méthodes et les théories sous-jacentes, afin d'apporter des éléments clés à mettre en perspective avec les travaux ici réalisés. En effet, cette étude s'inscrit précisément sur cet axe de recherche qu'est la compréhension physique et phénoménologique des mécanismes générateurs de bruit dans les jets. Plus précisément, et comme détaillé par la suite, on s'intéresse à la description des turbulences de grande échelle évoluant dans des jets double-flux. On cherche par ailleurs à répondre à plusieurs questions directrices : peut-on modéliser précisément et simplement l'évolution de ces structures même dans le contexte complexe d'un jet double-flux coaxial ? Retrouve-t-on ces évolutions dans les mesures obtenues en champ proche ? Ces structures peuvent-elles contribuer au rayonnement acoustique observé en champ lointain, même dans le cas de jets subsoniques ? Et si tel est le cas, quelle est la part du rayonnement de ces structures dans le champ rayonné total ? L'état de l'art suivant apporte les bases nécessaires permettant de situer ces questions dans leur contexte et d'en voir l'enjeu. Il ne saurait en aucun cas être exhaustif et d'excellentes synthèses sont disponibles dans la littérature. Ainsi, parmi bien d'autres, nous renvoyons le lecteur vers les synthèses de Lilley [1995], Goldstein [1995], Tam [1995, 1998], Morris et Viswanathan [2011] sur le bruit de jet, la revue de Jordan et Gervais [2008] sur les méthodes expérimentales employées dans l'étude de l'aéroacoustique des jets et la synthèse de Colonius et Lele [2004] sur l'aéroacoustique numérique.

I.2 Mise en évidence expérimentale des caractéristiques du bruit de jet

On s'intéresse principalement aux jets parfaitement adaptés en pression, ne présentant donc pas de chocs, qui peuvent avoir une grande importance sur le bruit pour des régimes supersoniques (*broadband shock-associated noise* et *screech tone* dans la littérature, voir par exemple Tam [1995]).

2.1 Turbulence de petite et de grande échelle

Dans de tels jets, qu'ils soient subsoniques ou supersoniques, le bruit observé est un bruit de mélange turbulent (*turbulent mixing noise*), qui trouve donc son origine dans la turbulence même de l'écoulement. Historiquement, aux prémices de l'aéroacoustique, la turbulence était essentiellement appréhendée comme un phénomène physique chaotique, les fluctuations hydrodynamiques d'un jet n'ayant donc aucune corrélation temporelle ou spatiale. Cette turbulence de petite échelle (*fine-scale turbulence*) était alors perçue comme un ensemble aléatoire de petits tourbillons formant des sources acoustiques quadripolaires convectées dans le jet. Le bruit résultant de cette modélisation a donc des caractéristiques aléatoires et quasi-isotropes, les effets de convection et de réfraction mis à part. Or, dans les années 1960, les travaux de Mollo-Christensen [1967] sur des jets pleinement turbulents ont mis en évidence des fluctuations de pression évoluant en dehors du jet de manière cohérente, sous la forme de paquets d'ondes corrélés temporellement. Ce résultat est important car il suggère l'existence d'une source turbulente cohérente dans le champ hydrodynamique du jet, remettant en cause la vision précédente. Ainsi, dans la continuité de

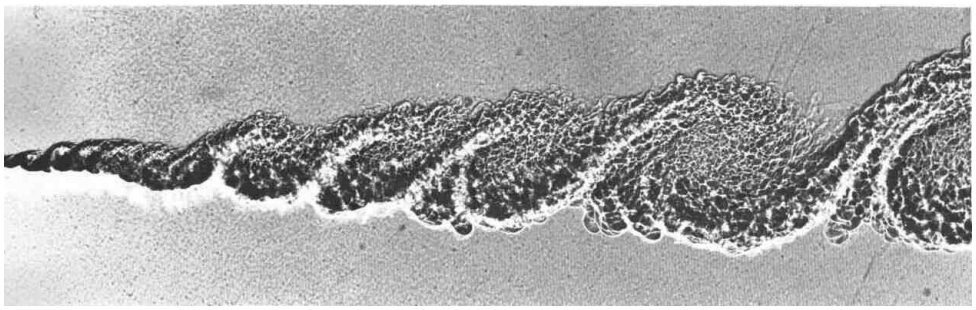
ces travaux, des expériences furent menées sur les couches de mélange bidimensionnelles (Brown et Roshko [1974], figure I.6(a)) et dans les jets (Crow et Champagne [1971], figure I.6(b)) et mirent en évidence l'existence d'une turbulence de grande échelle (*large-scale tubulence*) dans ces écoulements cisaillés, et ce même pour des nombre de Reynolds élevés ($\mathrm{Re} > 10^5$).

Crow et Champagne [1971] ont ainsi montré que des jets subsoniques libres initialement laminaires présentaient naturellement des structures cohérentes de grande échelle se développant dans leurs couches de mélange. Ce résultat, obtenu pour des jets laminaires, était connu bien avant ces expériences (voir par exemple Bradshaw *et al.* [1964]). Cependant, afin d'isoler ces structures et de contrôler au mieux la fréquence et l'amplitude des fluctuations initiales en sortie de tuyère, les auteurs ont utilisé un forçage périodique acoustique au moyen d'un haut-parleur. De plus, afin de contrôler au maximum les conditions initiales, la turbulence de la couche limite en sortie de tuyère fut déclenchée, les jets étant alors pleinement turbulents. Les auteurs montrèrent ainsi qu'un forçage acoustique permet d'amplifier ces structures, qui croissent d'abord exponentiellement dans la direction du jet pour ensuite saturer et engendrer des harmoniques par non linéarité. Différents types de structures ont ainsi pu être observés, correspondant à différents modes azimutaux. Le mode axisymétrique correspond ainsi à une succession de structures annulaires, alors que les modes hélicoïdaux forment des structures s'enroulant périodiquement autour du jet, dans la direction azimutale. De plus, ces ondes fondamentales excitées possèdent des vitesses de phase globalement bien estimées par des théories de stabilité linéaire. Enfin, pour les jets subsoniques considérés dans leurs travaux, Crow et Champagne [1971] ont observé qu'une fréquence particulière correspondant à un nombre de Strouhal $St = f.d/U = 0.3$ permettait d'engendrer une perturbation d'amplitude maximum. Une telle fréquence est appelée la fréquence privilégiée du jet, fréquence qui serait donc naturellement dominante dans un jet libre.

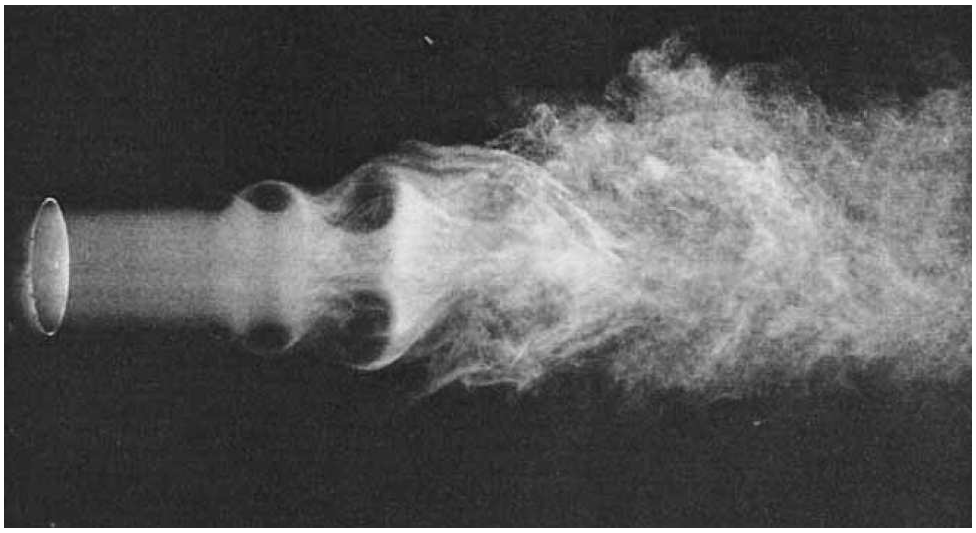
Ces structures cohérentes de grande échelle sont le résultat d'instabilités de la couche de mélange. En effet, la couche de mélange axisymétrique d'un jet est un écoulement cisaillé présentant un profil moyen de vitesse axiale inflexionnel (voir les profils de vitesse représentés dans la figure I.2). Or, un tel profil d'écoulement est convectivement instable [Godrèche *et al.*, 2005] et des instabilités de type Kelvin-Helmholtz (KH par la suite) s'y développent. Il est important de noter que ces instabilités ne sont pas d'origine visqueuse mais hydrodynamique. En amont de cette couche de mélange, la couche limite qui se développe sur les parois de la tuyère contient des fluctuations turbulentes, elles d'origine visqueuse, qui, en sortie de tuyère, viennent exciter les instabilités KH de la couche de mélange. Ces excitations aux lèvres de la tuyère représentent des conditions initiales qui relèvent de la réceptivité de la couche de mélange. Ce domaine d'étude est complexe et n'est pas abordé ici, mais il est important de noter que les amplitudes des fluctuations étudiées par la suite résultent directement de ces conditions initiales.

Suite à l'excitation de la couche de mélange par ces fluctuations turbulentes, les instabilités de Kelvin-Helmholtz croissent dans la direction de l'écoulement comme schématisé dans la figure I.7. Cette croissance prend fin, soit lorsque l'écoulement redevient stable pour la perturbation considérée (en raison de l'épaississement de la couche de mélange), soit lorsque l'amplitude de l'onde devient trop importante, auquel cas elle sature par effets non linéaires. La turbulence de petite échelle est elle-aussi présente dans l'ensemble de l'écoulement et croît en intensité dans la direction aval. Dans le jet, il y a donc coexistence d'une turbulence de petite échelle, au caractère chaotique, et d'une turbulence plus organisée, dite de grande échelle.

Si les résultats de Crow et Champagne [1971], confirmés par la suite (voir entre autres Winant et Browand [1974] pour la couche de mélange, Moore [1977], Yule [1978] dans le cas des jets), ont mis en évidence l'existence de ces structures cohérentes dans des écoulements cisaillés libres et turbulents, leur importance dans le rayonnement acoustique d'un jet n'a été admis que plus tardivement.



(a) Brown et Roshko [1974]



(b) Crow et Champagne [1971]

Figure I.6 – *Photographies Schlieren montrant la présence de structures turbulentes organisées (a) dans une couche de mélange bidimensionnelle entre de l'hélium et de l'azote ($Re > 10^5$) et (b) dans un jet d'air ($Re = 1.05 \times 10^4$).*

2.2 Le rayonnement acoustique des jets supersoniques

La mise en évidence du rôle de ces grosses structures turbulentes dans le mécanisme de rayonnement acoustique est tout d'abord venu de l'étude des jets supersoniques. En effet, dans ces derniers, les ondes d'instabilité se propagent majoritairement à des vitesses de phase supersoniques, produisant alors des ondes de Mach, facilement identifiables par leur directivité et leur vitesse de phase.

Notamment, McLaughlin *et al.* [1975] et Troutt et McLaughlin [1982], ont mené une série d'expériences sur des jets supersoniques libres ou forcés afin d'étudier la dépendance du champ acoustique aux ondes d'instabilité présentes dans le jet. De par la complexité du jet et des techniques de mesure, les nombres de Reynolds atteints lors de ces expériences restent modérés et de l'ordre de 10^5. Cependant, comme l'ont montré plus tard Seiner *et al.* [1982], les conclusions sont similaires pour des nombres de Reynolds plus élevés. Des mesures de fluctuations de vitesse par fils-chauds ainsi que des mesures acoustiques par microphones ont été menées sur des jets parfaitement adaptés en pression, pour un nombre de Mach moyen autour de $M = 2$. Des ondes se déplaçant à des vitesses de phase supersoniques ont ainsi pu être observées et identifiées comme étant des ondes d'instabilité prévues par la théorie de stabilité locale, les taux de croissance et les longueurs d'onde étant retrouvés. De plus, les mesures acoustiques ont montré que la directivité (autour de $\theta = 30°$), la fréquence et la longueur d'onde des ondes acoustiques observées étayaient le modèle de rayonnement par ondes de Mach. Enfin, il a été observé, par simple méthode de lancer de rayon, que la région de production acoustique se situe principalement dans la zone de

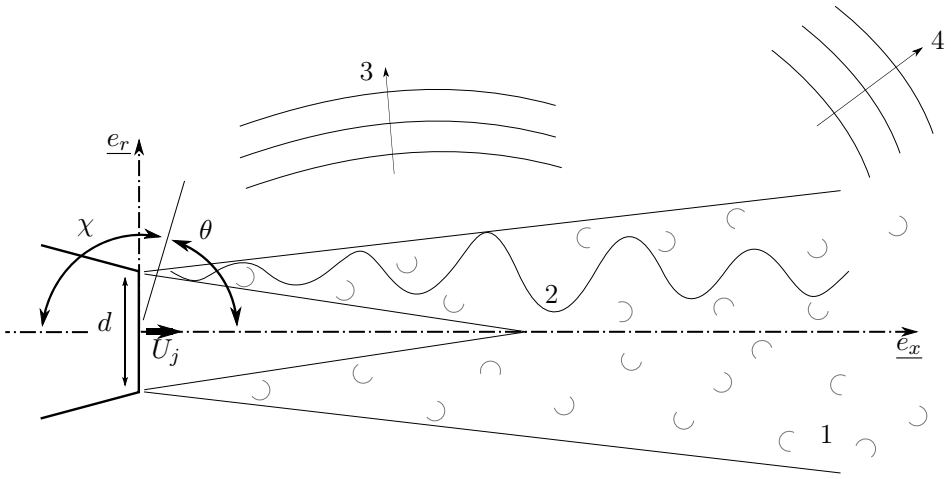


Figure I.7 – *Schéma illustrant la turbulence de petite (1) et de grande échelle (2) dans un jet simple, ainsi qu'une représentation de leurs directions privilégiées de rayonnement (3-4).*

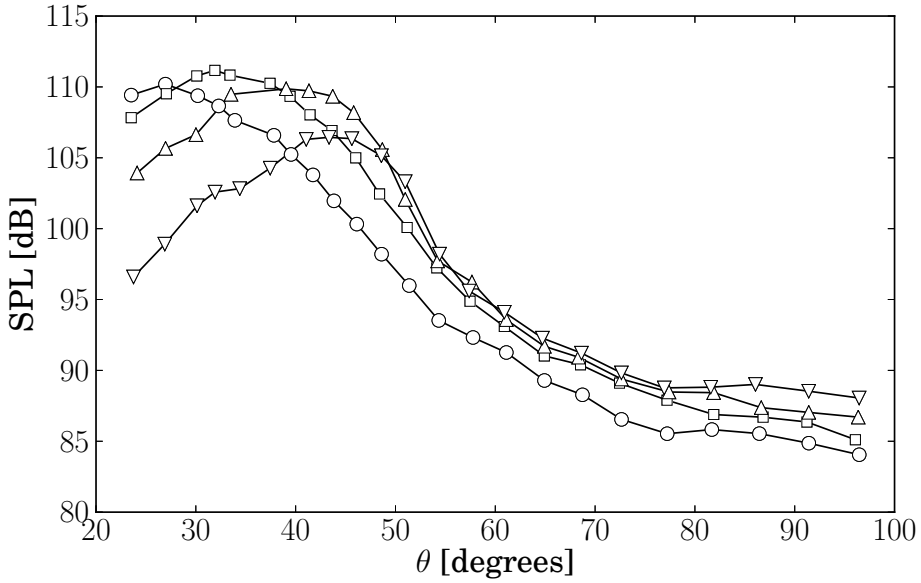


Figure I.8 – *Directivités mesurées dans le champ lointain d'un jet supersonique à $M = 2$ et $T = 500\,K$ et filtrées autour des fréquences suivantes : $St = 0.067$ (○), $St = 0.12$ (□), $St = 0.20$ (△), $St = 0.40$ (▽) [Seiner* et al.*, 1994].*

couche de mélange où les fluctuations cohérentes saturent et commencent à s'amortir, les modes privilégiés rapportés étant le mode axisymétrique ($m = 0$) et le mode hélicoïdal ($m = 1$). Ainsi, il est conclu que le rayonnement acoustique du jet supersonique associe à la fois la saturation des ondes d'instabilité et la production d'ondes de Mach. Ces résultats sont par la suite confirmés par la théorie, en particulier par Tam et Burton [1984a,b] sur ce cas particulier.

Ces expériences ayant été menées à des nombres de Reynolds modérés, il est important de se demander si les mêmes mécanismes sont responsables du bruit observé en champ lointain avec des jets dont le nombre de Reynolds est plus proche des applications industrielles, soit $Re > 10^6$. Dans cette optique, Seiner *et al.* [1982] ont mené des expériences sur des jets supersoniques (dont le nombre de Mach varie autour de $M = 2$) froids à différents nombres de Reynolds, variant de 3.7×10^3 à 5.2×10^6. Leurs observations des champs acoustiques mesurés montrent une grande similitude des spectres émis, des directivités et de la puissance acoustique rayonnée entre ces

différents jets. Ces observations portent à conclure que les mécanismes physiques sont les mêmes sur cette gamme de nombres de Reynolds, et confortent ainsi l'importance des ondes d'instabilité dans la production acoustique des jets supersoniques. De plus, en accord avec des observations antérieures, la zone d'émission acoustique correspond à la région où les perturbations atteignent leur amplitude maximum.

Issues d'expériences similaires, les figures I.8 et I.9 mettent en évidence des caractéristiques importantes du rayonnement acoustique des structures turbulentes. Ainsi, la figure I.8 donne les directivités, mesurées en champ lointain d'un jet supersonique chaud à $M = 2$ et $T_j = 500\,K$ par Seiner *et al.* [1994]. Ces directivités sont montrées à plusieurs fréquences autour de $St_d = 0.20$, dans une gamme fréquentielle présentant classiquement le maximum d'intensité acoustique associé aux structures turbulentes de grande échelle. Malgré cette plage fréquentielle privilégiée, il est important de noter que le rayonnement acoustique de ces structures est par nature large-bande. On observe ici une région de directivité acoustique très intense pour de faibles angles θ, correspondant au rayonnement acoustique très directif d'ondes supersoniques. À l'opposé, le rayonnement acoustique observé autour de $\theta = 90°$ est comparativement faible (plus de 20 dB inférieur au maximum d'intensité acoustique) et relativement uniforme, suggérant le caractère isotrope de sa source. Ce rayonnement, également large-bande, est associé aux structures turbulentes de petite échelle et possède une direction de rayonnement relativement privilégiée à la perpendiculaire de l'axe du jet. Ces directivités propres sont schématisées dans la figure I.7. Des résultats qualitativement similaires peuvent être observés dans la figure I.9. Cette dernière est issue des travaux de Tanna [1977] et présente des directivités d'intensité sonore globale (OASPL pour *Overall Sound Pressure Level*), non filtrées fréquentiellement, pour différentes températures d'un jet supersonique. Ainsi, les caractéristiques spectrales du rayonnement acoustique varient sensiblement avec le nombre de Mach et la température, mais gardent un profil similaire.

On voit donc apparaître ici une distinction spectrale entre le rayonnement acoustique de structures turbulentes de petite et de grande échelle. Il est alors important de bien définir ces termes, car la définition d'une *structure cohérente* varie dans la littérature [Mathis, 2006]. Ainsi, entre autres, Hussain [1983] définit ces structures comme étant des masses de fluide dont la vorticité évolue en corrélation de phase sur son étendue spatiale. Suivant les travaux de Morris et Viswanathan [2011], la distinction entre ces deux structures peut également se faire en fonction des mécanismes acoustiques observés. Ainsi, la turbulence de petite échelle peut référer aux structures turbulentes formant des sources acoustiques relativement compactes et impliquant une propagation acoustique à travers le jet, propagation pour laquelle les phénomènes de convection et de réfraction sont alors importants. Les structures de grande échelle peuvent quant à elles être associées à des structures turbulentes évoluant au sein de la couche de mélange, formant des sources non compactes et en relation directe avec le champ acoustique proche et lointain. À l'évidence, quelle que soit la définition, aucune frontière naturelle n'existe entre ces deux types de structures, l'ensemble des structures turbulentes formant un spectre continu. Ces définitions servent à placer une frontière, arbitraire, permettant leur identification. Dans notre cas d'étude, la définition portera sur la corrélation de phase. En effet, nos analyses de stabilité portent uniquement sur des structures ondulatoires, donc possédant une phase, mais a priori pas nécessairement productrices de bruit, surtout dans le cas de jets subsoniques.

L'ensemble de ces travaux a clairement identifié ces structures turbulentes de grande échelle comme responsables du maximum d'intensité acoustique aux faibles angles d'observation dans le cas de jets supersoniques. Le mécanisme ici mis en jeu repose sur la création d'ondes de Mach par les ondes d'instabilités supersoniques.

2.3 Continuité des mécanismes acoustiques dans les jets subsoniques

S'il peut donc sembler au premier abord que cette production sonore hautement directionnelle est propre aux seuls jets supersoniques, il est en réalité possible d'imaginer une continuité des

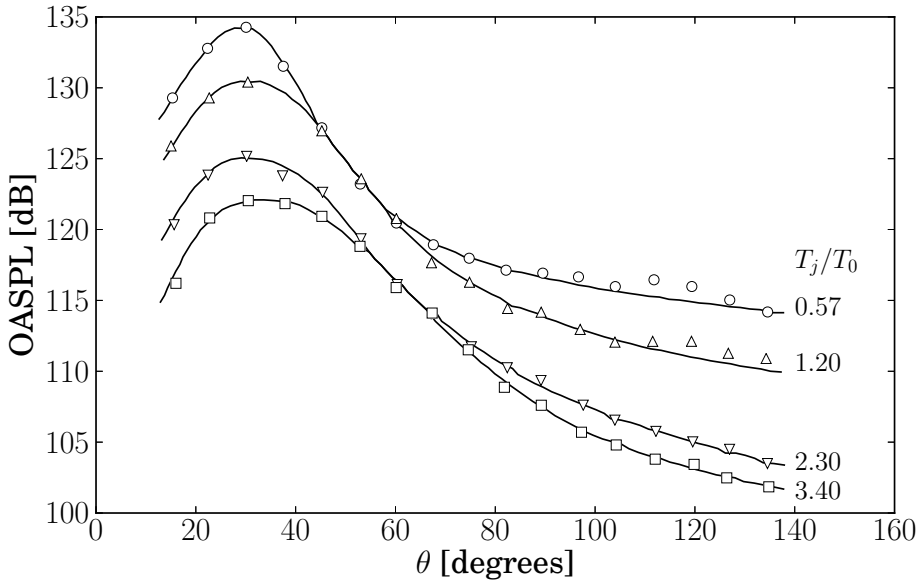


Figure I.9 – *Effet de la température d'un jet supersonique ($V_j/a_o = 1.47$) sur la directivité de l'intensité acoustique globale [Tanna, 1977] ; $T_j/T_0 = 0.57$ (○) ; 1.20 (△) ; 2.30 (▽) ; 3.40 (□).*

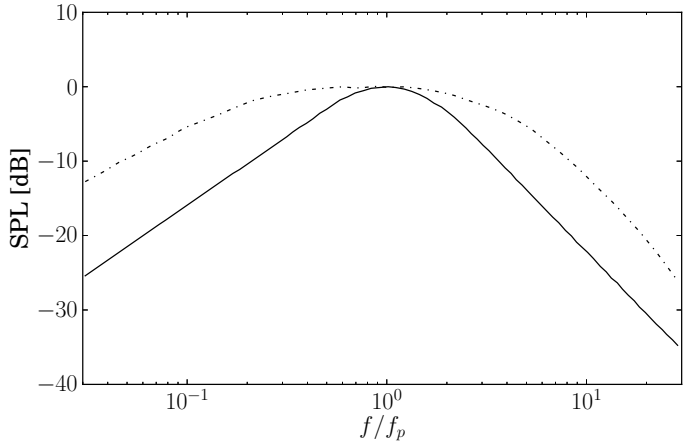


Figure I.10 – *Spectres de similitude de Tam [1998] : spectre associé aux structures de grande échelle (——) et spectre associé aux structures de petite échelle (- - - -).*

mécanismes acoustiques entre les jets supersoniques et subsoniques, continuité observée dans plusieurs travaux relativement récents.

Partant de l'hypothèse que les mécanismes responsables du bruit de jet observé sont identiques quel que soit le jet supersonique considéré, et qu'ils peuvent être attribués aux deux sources turbulentes distinctes que sont les structures cohérentes de petite et de grande échelle, Tam [1998, 2009] a proposé l'existence de deux spectres de similitude caractérisant les directivités en champ lointain. Ces deux spectres sont représentés dans la figure I.10, normalisés en amplitude et en fréquence, avec f_p la fréquence du maximum d'intensité acoustique du spectre considéré. Le premier spectre, en trait continu, caractérise le spectre de similitude proposé comme étant associé aux structures de grande échelle (LSS pour *Large Scale Similarity*). Ce spectre présente donc une fréquence privilégiée bien marquée dans une bande fréquentielle étroite. Le second spectre, en traits interrompus, caractériserait le spectre de similitude associé aux structures de petite échelle (FSS pour *Fine Scale Similarity*), plus étalé en fréquence. Pour obtenir ces spectres de similitude, une large base de données expérimentales de jets supersoniques, d'environ 1900

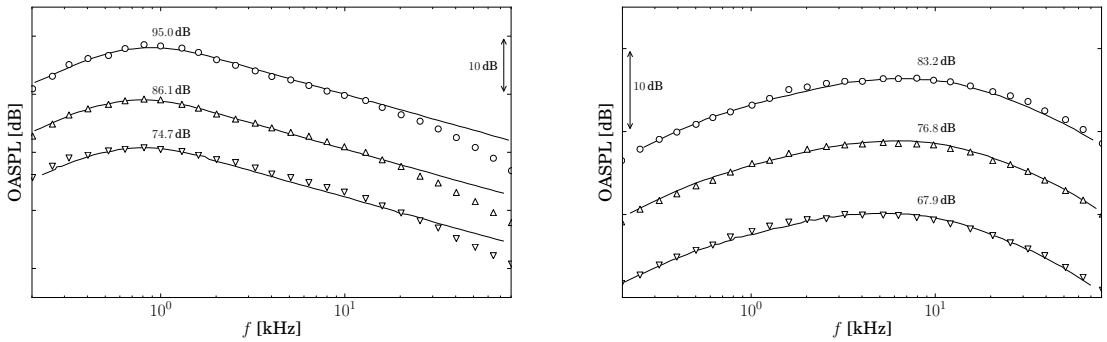


Figure I.11 – *Spectres d'intensité acoustique totale mesurés à (a) $\theta = 30°$ et (b) $\theta = 90°$ en champ lointain de jets froids à $M = 1.0\,(\circ)$, $M = 0.8\,(\triangle)$ et $M = 0.6\,(\triangledown)$ obtenus par Viswanathan [2004] ; les lignes continues représentent les spectres de similitude de Tam [1998].*

spectres, a été étudiée de manière statistique et empirique. Ainsi, en faisant varier l'amplitude et la fréquence de référence de ces deux spectres, Tam est en mesure de "reconstruire" les spectres expérimentaux de jets supersoniques avec une précision remarquable.

Cette approche a ensuite été appliquée aux cas de jets subsoniques et de bonnes corrélations ont été rapportées par Tam [1998] ou Viswanathan [2004]. Un tel résultat est illustré dans la figure I.11 issue des travaux de Viswanathan [2004], et obtenue pour des jets simples froids soniques ou subsoniques. Les deux profils spectraux correctement calibrés rendent bien compte des mesures obtenues à $\theta = 30°$, angle pour lequel les structures turbulentes de grande échelle sont a priori les sources prédominantes, ou à $\theta = 90°$, où la turbulence de petite échelle est cette fois le mécanisme acoustique dominant. Or, comme on peut le voir sur ces figures, une telle approche, qui donne de bonnes corrélations en supersonique, permet également de retrouver la forme spectrale du rayonnement acoustique de jets subsoniques.

Globalement, de très bonnes comparaisons sont obtenues sur l'ensemble des mesures, aussi bien sur des jets supersoniques que subsoniques. Ces observations semblent donc aller dans le sens d'une telle approche et suggèrent bien la distinction possible entre ces deux mécanismes acoustiques associés aux structures de petite et de grande échelle, aussi bien dans les cas supersoniques que subsoniques.

Malgré ses mérites, plusieurs critiques peuvent cependant être adressées à un tel modèle. Il semble en effet assez difficile d'extraire une compréhension physique des mécanismes aéroacoustiques mis en jeu au vu des expressions empiriques complexes servant à décrire ces deux spectres de similitude (voir Tam *et al.* [1996] pour les expressions analytiques). Cette méthode résulte largement d'une approche empirique et aucune démonstration n'est à chercher. De plus, d'autres théories existent, cherchant à expliquer et décrire les caractéristiques spectrales à 30° ou 90°. Par exemple, on peut imaginer que des mécanismes de convection, d'effet Doppler et d'interactions entre l'écoulement et les ondes acoustiques pourraient, seuls, expliquer les variations spectrales en fonction de l'angle d'observation θ, sans qu'il y ait de production sonore associée aux structures turbulentes de grande échelle.

Cependant, un nombre croissant d'observations vont dans le sens de cette décomposition des sources acoustiques en une partie issue de la turbulence de petite échelle et l'autre de structures de grande échelle. Ainsi, dans la continuité de ces travaux, Tam *et al.* [2008] ont en particulier mis en évidence que les caractéristiques acoustiques à 30° et à 90° sont très différentes, aussi bien en subsonique qu'en supersonique. En particulier, Tam *et al.* [2008] et Viswanathan [2009] ont mesuré les corrélations entre les fluctuations de masse volumique dans le jet et de pression en champ lointain. Ils ont ainsi mis en évidence une variation importante de ces corrélations en

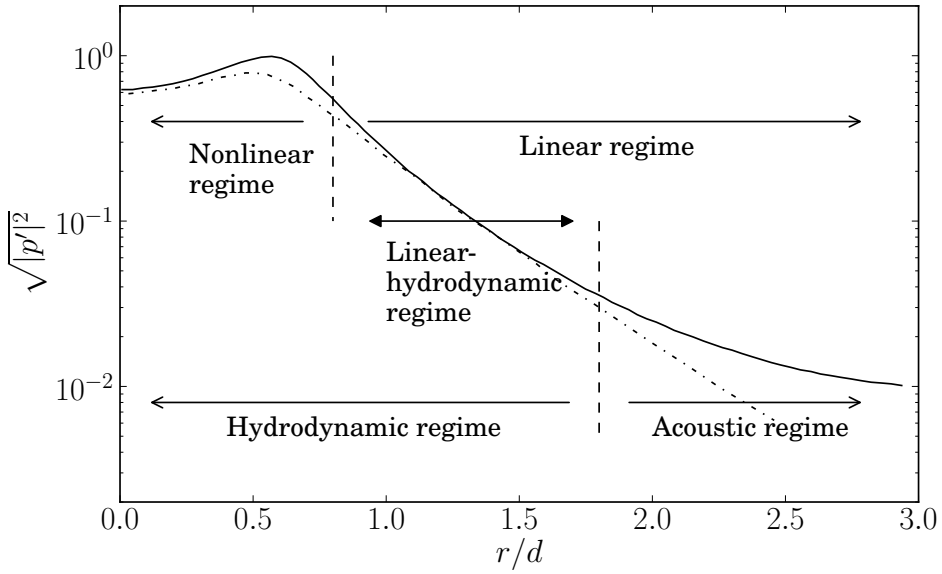


Figure I.12 – *Diagramme extrait de Suzuki et Colonius [2006] : moyenne temporelle d'une fluctuation de pression issue d'un calcul DNS (——), comparée à la fonction propre de perturbation de pression issue d'un calcul de stabilité local (- - - -).*

fonction de l'angle d'observation en champ lointain. Pour des cas supersoniques, de très faibles taux de corrélations sont observés pour des angles $\theta > 50°$. Dans la région aval cependant, autour de $\theta = 30°$, d'importantes corrélations sont rapportées (autour de 20 %). La même tendance est observée pour des jets subsoniques. Ces observations suggèrent là encore la présence de deux mécanismes acoustiques distincts dans ces deux directions, avec un mécanisme cohérent produisant un pic de directivité en aval et un mécanisme très incohérent dominant le spectre pour des angles plus importants.

La difficulté à dégager une conclusion claire sur le rôle acoustique précis des structures cohérentes de grande échelle dans un jet turbulent *libre* tient au fait qu'il est relativement difficile de mettre en évidence leur existence. Pour ce faire, il est nécessaire d'identifier une signature caractéristique de leur présence. Dans le cas de jets turbulents forcés, les techniques de mesure et de corrélation permettent leur mise en évidence de manière relativement aisée, comme dans les expériences de Moore [1977]. Leurs fortes amplitudes ainsi que leurs grandes corrélations de phase permettent de les séparer facilement du reste des fluctuations turbulentes de l'écoulement. Cependant, dans le cas des jets turbulents libres, cette séparation du champ de mesure tridimensionnel instantané n'est pas aussi accessible. En effet, les fluctuations associées aux structures cohérentes d'un jet libre sont corrélées sur des échelles de temps et de longueur bien plus courtes que dans le cas d'un jet forcé. Aucune méthode ne permet aujourd'hui de faire une telle séparation en vue d'identifier directement leur présence, même si des outils tels que la décomposition en modes propres orthogonaux (POD pour *Proper Orthogonal Decomposition*) vont dans cette direction. Reconnaissant cette difficulté, des études visant à détecter ces ondes d'instabilité ont été menées par Suzuki et Colonius [2006]. Ces derniers sont partis du constat que ces ondes d'instabilité s'étendent au-delà du jet dans une région de champ proche non contaminée par les non linéarités du jet, appelée "région hydrodynamique linéaire" par la suite (*linear-hydrodynamic region*). Dans cette zone irrotationnelle, située juste en dehors du jet et mise en évidence dans la figure I.12, ces fluctuations hydrodynamiques prévalent encore sur l'acoustique. Cette zone est une région de transition entre le comportement hydrodynamique d'une part, où la décroissance de l'amplitude de l'onde est exponentielle, et le comportement acoustique d'autre part, pour lequel la décroissance est algébrique. Cette distinction est retrouvée

dans les travaux de Arndt *et al.* [1997], où un critère sur kr est obtenu afin d'identifier une zone pour laquelle le comportement d'une onde peut être considéré comme acoustique, et ce même en champ proche. Suzuki et Colonius [2006] ont ainsi cherché à corréler leurs mesures obtenues dans cette région aux théories de stabilité locale. Les comparaisons statistiques favorables rapportées apportent un élément de preuve supplémentaire soutenant la présence de ces ondes dans des jets subsoniques libres, depuis la sortie de tuyère jusqu'à la fin du cône potentiel, particulièrement autour de fréquences privilégiées.

Cependant, malgré leur existence, l'importance acoustique de ces structures cohérentes de grande échelle dans les jets subsoniques libres n'est pas certaine et fait encore débat dans la communauté aéroacoustique. Les éléments présentés dans cette section suggèrent cependant un rôle non négligeable dans la direction aval, au pic de directivité, comme dans le cas supersonique. Par conséquent et comme précisé dans la section 1.4, un objectif de ces travaux de thèse est également d'apporter, si possible, des éléments permettant de soutenir ou d'invalider cette théorie, à savoir s'il existe une contribution de la part des structures turbulentes cohérentes de grande échelle dans le rayonnement acoustique de jets subsoniques.

I.3 Méthodes de prévision du bruit de jet

Ces résultats expérimentaux mettent en évidence les différentes caractéristiques du bruit de jet, ce dernier étant une conséquence directe de la turbulence, qu'elle soit de petite ou de grande échelle. Afin de comprendre et de prévoir le bruit de jet, il est donc nécessaire d'étudier le lien unissant turbulence et production acoustique. Différentes approches tentant de faire ce lien peuvent être trouvées dans la littérature. Cette section n'est pas exhaustive, des approches telles que la SNGR (*Stochastic Noise Generation and Radiation*, voir entre autres Bailly et Juvé [1999]) par exemple n'étant pas abordées. L'objectif de cette section est de mettre en évidence, succinctement, quelques méthodes de prévision du bruit de jet, leurs limites, et par conséquent l'apport potentiel de ces travaux de thèse dans cette thématique.

3.1 Analogies acoustiques

Historiquement, les travaux fondateurs de Lighthill [1952, 1954] sont considérés comme les premiers pas vers une modélisation du lien unissant turbulence et acoustique d'un jet. Dans ses travaux, Lighthill part de l'hypothèse que le rayonnement acoustique du jet peut être étudié de manière indépendante de la turbulence qui le produit. En d'autres termes, les ondes acoustiques ne modifient pas leurs sources, comme cela est le cas par exemple pour des mécanismes résonants. Ainsi, Lighthill effectue une séparation formelle des équations de Navier-Stokes entre un opérateur linéaire de propagation acoustique dans un milieu au repos d'une part (opérateur $\mathcal{L}$) et un terme source d'autre part (opérateur $\mathcal{S}$), appliqués aux variables $\underline{q}$ de l'écoulement :

$$\mathcal{L}(\underline{q}) = \mathcal{S}(\underline{q}) \tag{1-1}$$

Une telle séparation est exacte et ne change pas la complexité du problème, mais permet de le considérer autrement : connaissant les termes sources issus de la turbulence, il est alors possible d'en calculer le rayonnement. Le problème n'en est pas pour autant simplifié, le calcul des termes sources n'étant pas résolu. Il est cependant possible de modéliser ces termes afin d'obtenir une représentation approchée du rayonnement acoustique d'un jet. Cette séparation en un opérateur de propagation et un terme source est appelée analogie acoustique. En effet, la propagation acoustique est ici représentée de manière équivalente à celle qui aurait lieu dans un milieu au repos dans lequel seraient placées des sources acoustiques.

Lighthill [1952, 1954] s'est plus particulièrement intéressé à la propagation acoustique de sources quadripolaires dans un milieu au repos afin de modéliser le rayonnement acoustique d'un

jet. En effet, la réécriture des équations de Navier-Stokes dans ce cas donne l'équation exacte de Lighthill

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - a_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \,, \tag{1-2}$$

où ρ est la masse volumique, a_0 est la vitesse du son dans le milieu ambiant, et T_{ij} est le tenseur de Lighthill, représentant les termes sources donnés par

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + p_{ij} - a_0^2 \, \rho \, \delta_{ij} - \tau_{ij} \,. \tag{1-3}$$

Dans cette dernière équation, u_i et p_i sont la vitesse et la pression instantanées dans la direction i, δ_{ij} le symbole de Kronecker et τ_{ij} le tenseur des contraintes visqueuses.

Partant de l'hypothèse que dans le cas de jets froids subsoniques (bas nombre de Mach) $T_{ij} \approx \rho_0 u_i u_j$, Lighthill a mis en évidence, au moyen d'une analyse dimensionnelle, que la puissance acoustique issue d'un tel jet était proportionnelle à U_j^8, avec U_j la vitesse du jet en sortie de tuyère. De plus, prenant en compte les effets de convection des sources quadripolaires par l'écoulement, un effet Doppler apparaît et modifie cette loi dans le cas de jets supersoniques, pour lesquels la puissance acoustique est alors proportionnelle à U_j^3.

Se basant sur une telle approche, plusieurs autres analogies acoustiques ont été développées au cours des dernières décennies. En particulier, prenant en compte les effets de réfraction dus à la présence de l'écoulement, Lilley [1974] a développé une analogie acoustique modifiée. Une telle analogie permet entre autre de mettre en évidence la zone de silence en aval du jet [Tam, 1998]. Plus récemment, Goldstein [2003] a généralisé l'approche de Lighthill pour tout type d'écoulement cisaillé.

Ce type d'approche est en théorie capable de reproduire exactement le rayonnement acoustique d'un jet, pourvu que la modélisation des termes sources soit exacte. Or, en pratique, cela est difficilement réalisable. Différentes approches peuvent être envisagées : le terme source peut être modélisé au moyen d'une turbulence isotrope (par exemple dans Lilley [1995]), d'une turbulence axisymétrique (par exemple Khavaran [1999]), au moyen de mesures de corrélations spatiales en deux points (Davies *et al.* [1963]), ou encore au moyen de simulations numériques de type RANS ou LES (Karabasov *et al.* [2010]). Si les résultats sont encourageants, la prévision du bruit d'un jet par ces méthodes reste peu fiable et spécifique aux jets étudiés.

Il est également intéressant de mentionner ici une approche légèrement différente développée par Tam et Auriault [1998, 1999]. Bien que ces auteurs insistent sur le fait qu'il ne s'agisse pas d'une analogie acoustique au sens des théories précédentes, leur approche met en jeu des opérateurs identiques à ceux exposés par Lilley [1974] dans le cas d'un jet parallèle [Morris et Viswanathan, 2011]. Établissant un parallèle avec la théorie cinétique des gaz, les auteurs ont cherché à développer une modélisation du bruit issu de la turbulence de petite échelle. Les résultats obtenus sont en général très satisfaisants dans la direction latérale du jet, encore une fois là où le rayonnement acoustique de la turbulence de petite échelle est dominant, dans des configurations subsoniques ou supersoniques.

Dans ces différentes approches, la modélisation des termes sources décrivant le comportement des structures de grande échelle n'est en général pas explicitement prise en compte. Par conséquent, les méthodes de prévision du bruit de jet basées sur de telles analogies acoustiques donnent de bons résultats autour de $\theta = 90°$, mais sont peu fiables dans la direction aval. En effet, s'il est relativement aisé de modéliser statistiquement une turbulence quasi-isotrope et large-bande correspondant aux structures de petite échelle, il est plus difficile d'en faire de même avec une turbulence anisotrope et marquée en fréquence, représentative de la turbulence de grande échelle.

3.2 Méthodes semi-empiriques pour jet simple ou double-flux

Malgré le grand nombre de travaux présents dans la littérature et basés sur ces analogies acoustiques, il n'existe finalement que peu de méthodes directes de prévision du bruit de jet. Ces

méthodes sont largement semi-empiriques, basées directement sur des analogies acoustiques ou bien sur des extrapolations de bases de données. Les résultats issus de ces approches sont parfois discutables, souvent éloignés de plusieurs décibels et valables seulement dans certaines directions et plages fréquentielles.

L'une des premières méthodes développées tentant de modéliser à la fois l'aérodynamique et l'acoustique des jets est la méthode MGB (Mani-Gliebe-Balsa), ensuite améliorée par le modèle MGBK (MGB-Khavaran [Khavaran *et al.*, 1994]). Dans ce dernier, un modèle de turbulence $k-\varepsilon$ est utilisé afin de prévoir l'aérodynamique du jet et donc les échelles caractéristiques spectrales des sources. Une analogie acoustique de type Lilley est ensuite employée afin d'évaluer le rayonnement acoustique associé. Ce modèle MGBK a été appliqué à des configurations de jets simples [Khavaran *et al.*, 1994] et double-flux [Khavaran, 1999], avec succès dans certaines directions et bandes de fréquences. Cependant, un tel modèle nécessite plusieurs constantes empiriques de calibration, que ce soit pour le modèle de turbulence ou pour la calibration d'échelles caractéristiques, rendant la méthode peu fiable pour de nouvelles configurations complexes. On note également que l'approche développée par Tam et Auriault [1998] s'appuie sur un modèle de turbulence de type $k-\varepsilon$, et dépend donc de constantes empiriques équivalentes. Il semble cependant, au vu des résultats exposés par Morris et Viswanathan [2011], que cette dernière méthode produise globalement de meilleurs résultats que l'approche MGBK dans la direction latérale du jet. La prévision du bruit dans la direction aval reste généralement non assurée par ces approches pour les raisons citées précédemment.

D'un point de vue industriel, les méthodes utilisées reposent davantage sur des lois d'échelles et d'extrapolation de bases de données, ces approches étant bien plus rapides et donc utilisables dans des phases de conception. Dans le cas des jets double-flux, une liste des principales méthodes peut être trouvée dans les travaux de De Almeida [2008]. Les résultats de ce dernier mettent particulièrement en évidence les performances du modèle à 4 sources de Fisher *et al.* [1998a,b]. Cette approche s'appuie sur la décomposition des caractéristiques turbulentes des jets double-flux en plusieurs équivalents de jets simples, en se basant notamment sur les travaux de Ko et Kwan [1976]. Cette séparation en quatre zones distinctes, chacune indépendamment productrice de bruit, permet ensuite, par interpolations et extrapolations de bases de données issues de jets simples, de reconstruire les directivités en champ lointain. D'excellentes comparaisons ont été obtenues par De Almeida [2008] sur diverses géométries et points de fonctionnement. On remarque que de telles méthodes de prévision de bruit de jet sont a priori capables de rendre compte du pic de directivité dans la direction aval, ce dernier étant naturellement présent dans les mesures constituant les bases de données utilisées.

La majeure partie de ces méthodes de prévision reste très empirique et dépend largement de paramètres d'ajustement. Il manque donc toujours une certaine compréhension physique des mécanismes, limitant ainsi grandement leur flexibilité et leur précision. Leur utilisation pour prévoir la réduction du bruit de jet par des dispositifs de contrôle d'écoulement est donc très discutable. Afin d'améliorer ces modèles, il est nécessaire d'étudier plus finement le lien entre la turbulence du jet et son rayonnement acoustique.

3.3 Simulations numériques pour l'aéroacoustique

L'important essor des capacités numériques au cours des dernières décennies permet aujourd'hui l'utilisation intensive de méthodes de résolution, complète ou partielle, des échelles de la turbulence. Ces approches numériques, extrêmement coûteuses en temps de calcul, permettent potentiellement une résolution précise de la turbulence d'un écoulement. Ainsi, l'ensemble des structures turbulentes, de petite ou de grande échelle, pouvant jouer un rôle dans le rayonnement acoustique du jet, peut être pris en compte. Cette résolution, couplée à une propagation acoustique, permet alors l'étude fine du lien entre la turbulence du jet et le rayonnement acoustique produit, comme illustré dans la figure I.13. Ce domaine d'étude, la CAA (*Computational AeroAcoustics*),

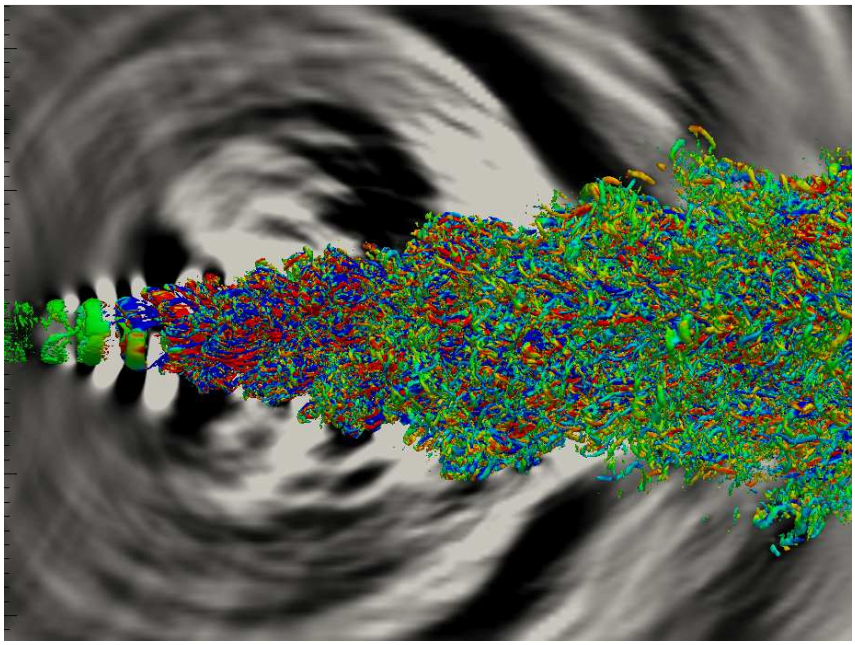


Figure I.13 – *Image instantanée d'un calcul LES effectué par Cavalieri* et al. *[2011] sur un jet à $M = 0.9$; Au centre se trouvent les isosurfaces de facteurs $Q = 0.05(U/d)^2$ positifs, entourées du champ de pression rayonné.*

est abondamment documenté dans la littérature et d'excellentes synthèses peuvent être trouvées dans les travaux de Colonius et Lele [2004] ou encore dans l'ouvrage de Wagner *et al.* [2004].

De manière très succincte, on peut distinguer les approches utilisées en CAA en fonction des échelles de turbulence qu'elles tentent de capturer. La résolution complète de l'écoulement, incluant l'ensemble des échelles de la turbulence, constitue l'approche DNS (*Direct Numerical Simulation*). Les méthodes LES (*Large Eddy Simulation*), elles, modélisent une partie des échelles de la turbulence par un modèle de sous-maille. Ce dernier reproduit, idéalement, le comportement de la turbulence de très petite échelle, d'une fréquence de coupure jusqu'aux échelles de Kolmogorov. En pratique, cela n'est pas totalement vérifié, des compromis étant à effectuer afin d'assurer la stabilité et la rapidité des calculs. Enfin, les approches RANS (*Reynolds-Averaged Navier Stokes*) modélisent complètement la turbulence au moyen de modèles. Ces dernières se révèlent donc en pratique peu adaptées à la prévision du bruit de jet, les approches les plus prometteuses et les plus activement développées en CAA étant les approches DNS et LES.

Le coût numérique des approches DNS augmentant très rapidement avec le nombre de Reynolds, les études DNS de jets sont restreintes à des écoulements à nombres de Reynolds relativement bas [Freund *et al.*, 2000]. Malgré cela, il est très intéressant de noter que d'excellentes comparaisons avec des mesures sont rapportées par Freund [2001], aussi bien en termes de profils de turbulence que de directivités acoustiques. De plus, l'analyse des sources acoustiques de ce jet suggère qu'une source représentée sous forme de paquets d'ondes serait responsable d'une large partie du rayonnement acoustique observé. Plusieurs éléments concordants ont été rapportés dans la continuité des travaux de cet auteur [Freund *et al.*, 2002]. Ces observations ont été effectuées sur des jets à bas Reynolds, mais comme observé précédemment par Seiner *et al.* [1992], les mécanismes de production acoustique dans les jets semblent être peu dépendants du nombre de Reynolds. De tels résultats vont donc dans le sens des observations expérimentales précédentes.

L'approche LES est quant à elle plus adaptée aux capacités numériques actuelles. Cette voie de recherche est extrêmement active et un grand nombre de travaux peut être trouvé dans la littérature [Colonius et Lele, 2004]. Malgré la grande dépendance de ces approches aux modèles de sous-maille, ou encore aux conditions initiales génératrices de la turbulence [Bogey et Bailly,

2010], des comparaisons très favorables de profils de turbulence [Bogey et Bailly, 2009] et de directivités acoustiques avec des mesures peuvent être observées dans le cas de jets simples [Bodony et Lele, 2004]. Certaines limites sont cependant atteintes en haute fréquence par exemple, et une grande attention doit être portée aux schémas numériques utilisés afin d'assurer la qualité des prévisions [Colonius et Lele, 2004]. Le nombre de points de discrétisation est également critique dans de telles approches. Par conséquent, l'étude de jets double-flux est, comparativement aux jets simples, un objectif plus ambitieux car nécessitant un maillage plus important du fait de la présence de deux couches de mélange.

Ainsi, dans le cadre du projet européen CoJeN (*Coaxial Jet Noise*), plusieurs calculs LES ont été menés afin de déterminer les capacités de telles méthodes à prévoir les caractéristiques turbulentes et acoustiques de jets double-flux coaxiaux dans des configurations industrielles et pour différents points de fonctionnement représentatifs des conditions de décollage d'avions modernes. Une partie des détails de ces géométries et points de fonctionnement est présentée par la suite dans la section III.1. En effet, ces travaux de thèse s'articulent essentiellement autour de jets coaxiaux étudiés dans le cadre de ce projet, une large base de données numériques et expérimentales ayant été obtenue. Ainsi, Vuillot *et al.* [2008] ont effectué plusieurs calculs LES dans une optique plutôt industrielle. Le choix d'une résolution relativement basse limite grandement la résolution spectrale des résultats et plusieurs différences majeures sont rapportées par comparaison aux mesures aérodynamiques et acoustiques : les taux de turbulence surestimés impliquent un cône potentiel principal trop court, et une surestimation des niveaux sonores en champ lointain. Cependant, les tendances entre les différentes configurations sont cohérentes et permettent de conclure quant aux performances relatives des différentes tuyères. Ces travaux ont également servi de base à Fayard [2010]. Au moyen d'un maillage bien plus fin, Bogey *et al.* [2009] ont effectué des calculs LES sur des configurations similaires. Si là aussi des comparaisons avec des mesures de directivité montrent un bon accord relatif, des écarts sont encore bien présents. Globalement, les approches LES sur des configurations industrielles aussi complexes produisent des résultats absolus mitigés mais prometteurs. Ces résultats montrent également que des efforts conséquents de modélisation restent encore à effectuer dans ce domaine, notamment en termes de schémas numériques ou de modèles de sous-maille.

Malgré ces limitations, qui s'atténuent progressivement avec l'évolution des modèles, ces approches permettent globalement de développer et d'enrichir la compréhension actuelle des mécanismes régissant la turbulence, ainsi que son lien avec l'aéroacoustique des jets. En effet, ces outils permettent d'avoir accès plus aisément aux diverses grandeurs physiques de l'écoulement que dans les études expérimentales et par conséquent d'aller plus loin dans la modélisation des mécanismes générateurs de bruit. Les travaux de Bogey et Bailly [2007] s'appuient ainsi par exemple sur des résultats LES afin d'analyser le lien unissant structures turbulentes et production acoustique. Ces auteurs mettent en évidence la forte corrélation observée entre l'intermittence de structures tourbillonnaires en fin de cône potentiel de jets et le bruit observé dans la direction aval de l'écoulement. Cavalieri *et al.* [2011] ont également tiré profit d'une simulation des grandes échelles sur un jet simple à $M = 0.9$ (figure I.13) afin d'étudier les structures turbulentes responsables du bruit observé en champ lointain. Au moyen d'un modèle de paquet d'ondes relativement simple, modulé spatialement et temporellement, et d'une analyse fine d'évènements hydrodynamiques et acoustiques en champs proches et lointains, ces auteurs ont été en mesure de reproduire certaines caractéristiques importantes du bruit de jet.

3.4 Vers l'étude des structures de grande échelle par l'analyse de stabilité

L'ensemble des travaux présentés jusqu'à présent, qu'ils soient expérimentaux ou numériques, s'accorde généralement sur l'importance des structures turbulentes de grande échelle dans la dynamique des jets libres, subsoniques ou supersoniques. Leur contribution à l'acoustique observée en champ lointain et leur modélisation restent une question ouverte, surtout dans le cas des jets

subsoniques libres.

L'étude de ces structures peut se faire par différentes approches. D'un point de vue expérimental tout d'abord, comme par exemple dans les travaux précédemment cités de Suzuki et Colonius [2006]. D'un point de vue numérique ensuite, domaine dans lequel plusieurs méthodes d'analyse peuvent être envisagées. Ainsi, comme évoqué précédemment, les simulations numériques instationnaires de type LES ou DNS permettent le calcul de l'évolution de telles structures. Ainsi, il est tout à fait possible d'extraire de ces données, au moyen d'outils de filtrages (Fourier, POD, corrélations spatio-temporelles, etc [Jordan, 2011]), les caractéristiques hydrodynamiques et acoustiques de structures cohérentes présentes dans un jet [Cavalieri *et al.*, 2011].

Une approche plus théorique est également envisageable en considérant la nature même des structures cohérentes de grande échelle. En effet, un cadre théorique permettant d'étudier ces structures, identifiées comme des instabilités convectives de type Kelvin-Helmholtz, peut être trouvé en théorie de stabilité. Ici aussi, différents outils existent. Les analyses de stabilité globale par exemple donnent accès à l'ensemble des modes d'un jet [Nichols *et al.*, 2010], qu'ils soient linéaires ou non linéaires. Ces approches, très coûteuses numériquement, sont très récentes et prometteuses. Les approches de stabilité plus locales permettent également l'étude de ces modes instables caractérisant les structures cohérentes de grande échelle mentionnées jusqu'à présent, pour un coût numérique très faible et une excellente précision. Ces méthodes constituent l'objet des sections suivantes et l'approche PSE utilisée dans ces travaux de thèse est à ranger dans cette catégorie.

Le contexte théorique de ces travaux permet donc d'étudier les mécanismes mêmes de création et d'évolution des structures cohérentes, afin d'en acquérir une meilleure compréhension. En cela, l'analyse de stabilité est complémentaire des autres approches citées, puisque, comme nous le verrons par la suite, les analyses de stabilité effectuées ici n'auront de valeur prédictive que conjuguées à des résultats numériques ou expérimentaux.

I.4 Études de stabilité pour la modélisation des structures de grande échelle

L'approche consiste à étudier la stabilité d'un écoulement de base $\underline{\overline{q}}(\underline{x})$, qui est une donnée du problème. Cet écoulement porteur est supposé stationnaire et ne dépend donc que des coordonnées spatiales $\underline{x}$. Une perturbation instationnaire $\underline{q}'(\underline{x},t)$ modélisant l'onde d'instabilité à étudier y est superposée, décrivant alors un écoulement instationnaire $\underline{q}(\underline{x},t)$:

$$\underline{q}(\underline{x},t) = \underline{\overline{q}}(\underline{x}) + \underline{q}'(\underline{x},t) \tag{1-4}$$

Les fluctuations sont cherchées sous la forme de modes normaux, incluant un terme ondulatoire exponentiel, couplé à une fonction d'amplitude. On obtient alors un système aux valeurs propres dont on peut numériquement trouver les solutions. Dans le cas particulier du jet axisymétrique, pris dans un repère cylindrique (x,r,ϕ), une perturbation $\underline{q}'$ se propageant dans la direction axiale x peut être représentée par l'équation 1-5, où $\underline{\hat{q}}$ est la fonction d'amplitude et Ω une fonction de phase.

$$\underline{q}'(x,r,\phi,t) = \underline{\hat{q}}(x,r)\, e^{i\Omega(x,\phi,t)} \tag{1-5}$$

Une pierre angulaire de l'analyse de stabilité du jet repose sur la faible divergence de l'écoulement porteur. En effet, prenant en compte cette particularité, diverses approximations dans l'écriture de ces perturbations peuvent être faites, menant à des formulations simplifiées du problème considéré. Ces différentes approches permettant de calculer l'évolution des instabilités se développant dans la couche de mélange d'un jet sont abordées dans les sections qui suivent. De plus amples détails sur les instabilités hydrodynamiques peuvent être trouvés dans l'ouvrage de Godrèche *et al.* [2005].

4.1 Analyse de stabilité locale

Éléments théoriques La théorie de stabilité locale est basée sur l'hypothèse simplificatrice d'un écoulement porteur localement parallèle. Cette approximation, raisonnable à l'ordre zéro pour un jet peu divergent, implique donc un écoulement de base, ainsi que des statistiques turbulentes, localement indépendants de l'abscisse x. Considérant une section infiniment mince du jet, prise entre x et $x + dx$, la stabilité de l'écoulement ne dépend ni des variations amont, ni de la divergence du jet. La perturbation locale est donc caractérisée par un nombre d'onde axial α ainsi qu'une amplitude $\underline{\hat{q}}$ localement indépendants de x. Par conséquent, la forme modale des perturbations 1-5 peut être simplifiée et représentée par l'équation 1-6, où α est le nombre d'onde axial local, m le nombre d'onde azimutal et ω la pulsation temporelle. En supposant une symétrie azimutale du jet, m est un entier relatif. Les nombres α et ω sont, a priori, des nombres complexes constants.

$$\underline{q}'(x, r, \phi, t) = \underline{\hat{q}}(r)\, e^{i(\alpha x + m\phi - \omega t)} \tag{1-6}$$

Une telle formulation des perturbations peut alors être introduite dans les équations perturbées du mouvement. En prenant par exemple les équations d'Euler perturbées, le système est ramené à une équation différentielle ordinaire homogène sur la pression, soit l'équation non visqueuse axisymétrique de Pridmore-Brown

$$\frac{d^2\hat{p}}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{d\bar{\rho}}{dr} - \frac{2\alpha}{\alpha\bar{u}_x - \omega}\right)\frac{d\hat{p}}{dr} + \left(\bar{\rho}M^2(\alpha\bar{u}_x - \omega)^2 - \frac{m^2}{r^2} - \alpha^2\right)\hat{p} = 0\,, \tag{1-7}$$

que nous écrirons ensuite simplement

$$\mathscr{L}(\hat{p}) = 0\,. \tag{1-8}$$

Ce problème, assimilable à un problème aux valeurs propres, admet alors une solution non nulle lorsque les variables α, m et ω vérifient une relation complexe de dispersion

$$\mathscr{D}(\alpha, m, \omega) = 0\,. \tag{1-9}$$

Ainsi, satisfaire cette relation complexe de dispersion revient à satisfaire deux relations réelles, $\Re(\mathscr{D}) = 0$ et $\Im(\mathscr{D}) = 0$. En considérant un nombre d'onde azimutal m fixé, ces deux expressions font intervenir les 4 inconnues réelles $(\alpha_r, \alpha_i, \omega_r, \omega_i)$. Il est donc nécessaire de définir deux de ces quatres inconnues afin de résoudre le système. On distingue ainsi deux types d'analyses de stabilité selon le choix des variables étudiées.

La théorie de stabilité temporelle s'attache à étudier la stabilité au cours du temps d'une onde dont le nombre d'onde α est un réel fixé. La perturbation s'écrit alors de manière suivante, où ω_r et ω_i sont les parties réelle et imaginaire de ω :

$$\underline{q}'(x, r, \phi, t) = \underline{\hat{q}}(r)\, e^{\omega_i t}\, e^{i(\alpha x + m\phi - \omega_r t)} \tag{1-10}$$

La résolution du problème aux valeurs propres permet de trouver la fonction d'amplitude ainsi que le coefficient d'amplification local ω_i, dont la valeur caractérise la stabilité ($\omega_i < 0$), la neutralité ($\omega_i = 0$) ou l'instabilité ($\omega_i > 0$) de l'onde. Cette théorie est cependant peu pertinente d'un point de vue physique dans notre contexte d'étude, puisque nous nous intéressons avant tout à l'amplification ou l'amortissement des ondes dans leur évolution spatiale, et non en un point de l'espace en fonction du temps.

La théorie spatiale est donc celle qui est utilisée par la suite. À une pulsation temporelle réelle ω donnée, les perturbations s'écrivent sous la forme suivante, où α_r et α_i sont les parties réelle et imaginaire du nombre d'onde axial α :

$$\underline{q}'(x, r, \phi, t) = \underline{\hat{q}}(r)\, e^{-\alpha_i x}\, e^{i(\alpha_r x + m\phi - \omega t)} \tag{1-11}$$

De manière similaire, la résolution du problème permet d'identifier la nature de l'onde en fonction du taux d'amplification local α_i :

$$\alpha_i < 0 \quad : \quad \text{onde instable} \tag{1-12}$$
$$\alpha_i > 0 \quad : \quad \text{onde stable} \tag{1-13}$$
$$\alpha_i = 0 \quad : \quad \text{stabilité neutre} \tag{1-14}$$

Résultats Cette théorie permet d'effectuer une première étude de stabilité sur le jet. Ainsi Crow et Champagne [1971], en complément de leurs mesures et de leurs observations, ont effectué une analyse de stabilité linéaire sur un jet turbulent. Explorant les approches spatiales et temporelles, ils ont obtenu de cette dernière de bonnes prévisions des vitesses de phase des modes les plus instables. La théorie spatiale, cependant, n'a pas semblé concluante. Mattingly et Chang [1974] suggèrent que ce résultat étonnant est la conséquence du choix du profil de vitesse discontinu, en forme de fonction porte. Ces auteurs ont ainsi effectué une analyse de stabilité locale en théorie spatiale, mais en se basant sur des profils de vitesse expérimentaux d'un jet à $Re = 300$. De bonnes prévisions de taux d'amplification et de longueurs d'onde sont cette fois obtenues en comparaison avec les mesures.

Comme le rapportent Crighton et Gaster [1976], Michalke [1971] a également appliqué cette approche au cas du jet subsonique étudié par Crow et Champagne [1971], en utilisant les mesures de ces derniers pour l'approximation de l'écoulement porteur. Ici aussi, et contrairement à Crow et Champagne [1971], l'épaisseur de la couche de mélange est prise en compte dans le profil de vitesse. Les résultats obtenus sur les vitesses de phase et les taux d'amplification correspondent relativement bien aux mesures rapportées à $x = 2\,d$. De plus, Michalke [1971] observe, conformément aux observations expérimentales, que le mode ayant un nombre de Strouhal se situant autour de 0.3 présente le plus fort taux d'amplification.

Très peu d'études de stabilité ont été menées sur les jets double-flux. Perrault-Joncas et Maslowe [2008] ont ainsi appliqué la théorie de stabilité locale à l'étude de jets coaxiaux subsoniques chauds et froids. Leur étude, purement numérique et sans comparaisons expérimentales, est cohérente avec les résultats de certains auteurs comme Plaschko [1979] concernant la dominance du mode axisymétrique ($m = 0$) et du premier mode hélicoïdal ($m = 1$). Une étude paramétrique a également permis aux auteurs de déterminer l'importance sur les taux de croissance des ondes instables de paramètres tels que l'épaisseur des couches de mélange, le rapport des diamètres, ou encore le rapport des vitesses des deux flux.

Cette théorie a cependant ses limites et il a vite été reconnu que la prise en compte de la divergence du jet est importante dans la prévision de l'évolution axiale des modes instables. En effet, comme le précisent Crighton et Gaster [1976], les caractéristiques du champ moyen variant faiblement dans la direction axiale ne sont pas identiques à celles d'un champ moyen analogue localement parallèle. Il n'est alors pas surprenant de ne pas pouvoir correctement prévoir la position axiale du maximum d'amplification avec une telle modélisation. De plus, dans l'optique d'étudier le rayonnement acoustique des ondes d'instabilité dans un jet, il est primordial de prendre en compte l'évolution axiale des instabilités, c'est-à-dire l'effet d'accumulation représentatif de "l'histoire" axiale de l'onde, dû à la divergence du jet. Cette prise en compte des effets non parallèles fait l'objet des sections suivantes.

Cette théorie locale n'est pas entièrement satisfaisante, mais il est cependant intéressant de noter qu'elle permet d'évaluer facilement une solution approchée du mode recherché, notamment lors de l'initialisation d'un calcul plus complexe prenant en compte des effets non parallèles.

4.2 Prise en compte de la faible divergence du jet

4.2.1 Méthode des échelles multiples

Si la théorie de stabilité locale permet une première approche du problème dans un contexte quasi-parallèle, les résultats obtenus ne représentent que l'ordre 0 de la solution réelle et une partie de la physique reste absente. Comme précisé précédemment, l'hypothèse d'un écoulement localement parallèle ne permet pas de prendre en compte l'historique de l'onde et la faible divergence du jet. Or, ces deux aspects ne sont pas complètement négligeables dans la modélisation du développement des instabilités.

Éléments théoriques La faible divergence du jet peut être prise en compte par l'introduction d'un petit paramètre ε représentatif du taux d'évasement du jet. Ainsi, la lente variation du champ moyen dans la direction axiale peut être modélisée par un changement d'échelle dans cette direction, en introduisant une variable lente s telle que

$$s = \varepsilon x \,. \tag{1-15}$$

Le champ moyen est alors redéfini avec les nouveaux paramètres dans le repère cylindrique (x, r, ϕ) de la manière suivante :

$$\underline{\overline{q}}(x, r, \phi) = \{\overline{u}_x(s, r), \varepsilon\, \overline{u}_r(s, r), 0, \overline{\rho}(s, r), \overline{p}(s, r)\}^T \tag{1-16}$$

Les modes peuvent être représentés suivant la méthode des échelles multiples (MEM) en effectuant un développement des fonctions d'amplitudes en ε,

$$\underline{q}'(x, r, \phi, t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \underline{\hat{q}}_k(s, r)\right) \exp i \left(\int_{x_0}^{x} \alpha(\xi) d\xi + m\phi - \omega t\right), \tag{1-17}$$

où le nombre d'onde axial $\alpha(x)$ est une fonction de l'abscisse x, contrairement à la théorie de stabilité locale.

Cette décomposition modale est introduite dans les équations perturbées du mouvement et les ordres en puissances de ε peuvent alors être séparés. En reprenant les équations d'Euler perturbées, l'ordre 0 donne l'équation différentielle homogène de Pridmore-Brown (1-7) déjà explicitée dans la description de la théorie de stabilité locale, et portant toujours sur la pression :

$$\mathscr{L}(\hat{p}_0) = 0 \tag{1-18}$$

Les ordres k supérieurs sont écrits de manière similaire,

$$\mathscr{L}(\hat{p}_k) = \chi_k \,, \tag{1-19}$$

où les termes non homogènes χ_k du membre de droite ne contiennent que des variables $\hat{p}_i$ d'ordres i inférieurs à k. Les solutions peuvent ainsi être calculées par ordres croissants. Une approximation au premier ordre, donc en ne résolvant que les ordres 0 et 1, est en général considérée comme suffisante dans les études présentées par la suite, les développements mathématiques se compliquant avec l'ordre étudié.

Résultats La méthode des échelles multiples a tout d'abord été appliquée à l'étude des instabilités se développant dans une couche limite, dont les développement théoriques sont détaillés par Saric et Nayfeh [1975]. En se basant sur ces travaux, Crighton et Gaster [1976] ont appliqué cette théorie à l'étude du jet. Comparant leurs résultats aux mesures de Crow et Champagne [1971], ces auteurs montrent un excellent accord sur les longueurs d'ondes ainsi calculées. Des comparaisons moins favorables sont cependant rapportées sur les grandeurs faisant

intervenir l'effet d'accumulation, c'est-à-dire l'intégrale du nombre d'onde axial, comme les taux d'amplification. Ces différences sont cependant à modérer du fait des incertitudes de mesure et de la simplicité du modèle linéaire utilisé. En effet, dans leurs expériences, Crow et Champagne [1971] ont rapporté la présence de fortes non linéarités dans les mesures observées, dues notamment à l'amplitude trop importante du forçage exercé afin de mettre en exergue les structures cohérentes.

Les travaux de Crighton et Gaster [1976] se sont focalisés sur l'étude des modes axisymétriques ($m = 0$) se développant dans un jet, ces modes étant généralement dominants. Cependant, des études expérimentales ont également montré l'importance des modes azimutaux, en particulier du premier mode hélicoïdal ($m = 1$), dans le développement de ces structures cohérentes. Reprenant le modèle théorique des échelles multiples appliqué au jet, Plaschko [1979] a étudié la croissance spatiale des modes azimutaux dans un jet faiblement divergent, dont le profil de vitesse est comparable à celui étudié par Crighton et Gaster [1976]. Cette étude se confine à l'analyse du mode axisymétrique et des deux premiers modes hélicoïdaux. En prenant soin de comparer les résultats théoriques des taux d'amplification des perturbations de pression dans la couche de mélange avec leurs équivalents expérimentaux, un bon accord est rapporté concernant le nombre de Strouhal préféré du jet, se situant alors autour de 0.5 dans la couche de mélange. Enfin, les modes hélicoïdaux semblent être tout aussi instables, et parfois même plus, que les modes axisymétriques, selon la fréquence étudiée. Ces observations rejoignent certaines conclusions expérimentales rapportées par Plaschko [1979].

Cette méthode des échelles multiples a également été étudiée par Morris [1981, 1983]. Dans ses travaux, l'auteur montre l'importance de la prise en compte de la faible divergence du jet étudié. Ainsi, la prise en compte des effets non parallèles augmente les taux d'amplification en comparaison de la théorie de stabilité locale. De plus, en adéquation avec les résultats de Plaschko [1979], le premier mode hélicoïdal apparaît comme potentiellement tout aussi instable et amplifié dans la couche de mélange que le mode axisymétrique. Enfin, l'auteur a également étudié l'effet de la viscosité et du nombre de Mach sur le développement des instabilités, en considérant la MEM appliquée aux équations visqueuses compressibles. Un effet stabilisateur du nombre de Mach, lorsque celui-ci augmente, ainsi que du nombre de Reynolds, lorsque ce dernier diminue, est rapporté.

Si ce modèle basé sur la théorie des échelles multiples donne de bons résultats concernant la prévision de l'amplification des perturbations dans un jet faiblement divergent, aucun lien théorique n'a jusqu'ici été fait avec le rayonnement acoustique observé en champ lointain. Ce premier pas vers une modélisation globale du rayonnement acoustique associé aux ondes d'instabilité a été effectué par Tam et Morris [1980]. Leur approche reprend la théorie des échelles multiples appliquée aux couches de mélange bidimensionnelles, avec cependant l'observation capitale de la nature locale des solutions obtenues, et que, de par le modèle utilisé, la solution locale calculée n'est pas valide en dehors de la couche de mélange [Morris, 1981]. Il est alors nécessaire de construire une solution globale au problème du rayonnement acoustique. En effet, l'introduction d'une variable axiale lente par la MEM privilégie une coordonnée, ici la direction axiale, ce qui est incompatible avec la propagation acoustique pour laquelle aucune direction n'est privilégiée. En supposant que la solution obtenue par la MEM est encore valide dans une région proche de la couche de mélange, Tam et Morris [1980] ont construit une solution uniformément valide étendue au champ lointain. Après résolution du développement des ondes instables dans la couche de mélange, les équations de propagation des ondes acoustiques sont résolues par une méthode de transformée de Fourier, avec les solutions hydrodynamiques comme conditions aux limites.

La suite logique de ce modèle est son application aux jets axisymétriques. Ainsi, Tam et Burton [1984a,b] ont repris cette méthode de décomposition de la solution globale en une solution hydrodynamique valide dans le jet et une solution acoustique valide en dehors de la couche de mélange, la méthode des développements asymptotiques raccordés étant utilisée dans la région de champ proche afin de construire une solution uniformément valide. Afin de valider ce modèle,

Tam et Burton [1984b] ont comparé leurs résultats théoriques aux mesures rapportées par Troutt et McLaughlin [1982] sur un jet supersonique à Mach 2.1, ces comparaisons étant effectuées à la fois dans le jet pour valider les solutions hydrodynamiques, et en champ proche et lointain pour les solutions acoustiques. D'excellentes comparaisons sont obtenues dans les deux cas et pour deux fréquences d'étude, validant ainsi l'approche proposée pour le calcul du rayonnement acoustique à partir des solutions hydrodynamiques obtenues par la méthode des échelles multiples.

Ainsi, leurs résultats montrent que les grosses structures turbulentes supersoniques sont directement responsables du bruit rayonné, avec une directivité privilégiée d'environ 30°, conformément aux observations expérimentales de Troutt et McLaughlin [1982]. Toujours suivant ces résultats, les sources acoustiques émanent principalement de la région du jet où les instabilités saturent en amplitude et commencent à décroître, typiquement en fin du cône potentiel. Les modes prédominants en champ acoustique proche sont le mode axisymétrique et le premier mode hélicoïdal. Enfin, le mécanisme principal générateur de bruit est ici identifié comme étant une combinaison d'ondes de Mach et de saturation des instabilités.

Cette méthode des échelles multiples a également permis l'étude des différentes familles de modes pouvant se développer dans les jets supersoniques [Tam et Hu, 1989]. En effet, en plus des modes de Kelvin-Helmholtz présentés auparavant, Tam et Hu [1989] montrent l'existence de deux autres familles de modes, l'une caractérisée par des vitesses de phase supersoniques et l'autre par des vitesses de phase subsoniques. Ces familles de modes sont effectivement observées expérimentalement [Oertel, 1979] et de plus amples détails sur ces modes peuvent être trouvés dans la thèse de Millet [2003].

Enfin, la MEM a été appliquée à l'étude du rayonnement acoustique d'ondes d'instabilités dans des jets double-flux supersoniques par Dahl et Morris [1997a,b,c]. Ces auteurs ont ainsi appliqué la méthode de raccord développée par Tam et Morris [1980] afin d'évaluer la contribution des ondes d'instabilité supersoniques au champ acoustique lointain. Plus particulièrement, Dahl et Morris [1997b] ont effectué une analyse paramétrique de l'influence des rapports de vitesses du jet primaire et secondaire, ainsi que des rapports des masses volumiques et des rayons des buses dans l'étude de jets à poussée constante. En supposant une amplitude initiale unitaire des ondes d'instabilité en sortie de tuyère, en supposant donc une excitation des modes instables par un bruit blanc, les amplitudes relatives des différents modes, et donc leur rayonnement acoustique relatif, ont pu être mis en évidence.

Limites Du point de vue de la stabilité, la prise en compte de la divergence du jet au moyen de la méthode des échelles multiples est une approche plus satisfaisante et cohérente que l'approche de stabilité locale. Ainsi, l'effet d'accumulation est pris en compte et une meilleure prévision de l'évolution axiale des modes autour des fréquences dominantes est obtenue en comparaison avec les mesures.

Certains points de cette théorie sont cependant délicats à traiter. On peut notamment rencontrer des difficultés d'ordre numérique, dues au modèle lui-même, apparaissant sous certaines conditions, quand l'onde d'instabilité se trouve amortie. Une analyse plus détaillée de l'équation (1-7) permet de montrer que le dénominateur $(\alpha\overline{u}_x - \omega)$ peut s'annuler pour certaines valeurs de r, lorsque la vitesse de phase de l'onde égale la vitesse de convection du jet. Cette singularité introduit des problèmes numériques ne permettant pas le calcul direct de l'évolution de l'onde. Une solution consiste à déformer le chemin d'intégration sur r dans le plan complexe afin de contourner les pôles du système, sans en introduire de nouveaux (voir par exemple les travaux de Tam et Morris [1980] ou la thèse de Millet [2003]). Cette approche, somme toute relativement complexe à mettre en oeuvre, a le désavantage de faire perdre les notions physiques des variables considérées par le passage de la variable r dans le plan complexe.

Il est également important de remarquer que cette méthode des échelles multiples ne permet que la prise en compte des phénomènes linéaires, l'introduction de termes non linéaires n'étant pas triviale. Ainsi, une étude se focalisant à la fois sur les effets non parallèles et non linéaires

serait très difficile à mettre en oeuvre au moyen de cette théorie. Il faut donc se tourner vers une autre approche plus flexible si l'on veut étudier, par exemple, les interactions faiblement non linéaires de plusieurs modes, ou la décomposition en harmoniques d'un mode principal lors de son évolution spatiale.

Ces méthodes de stabilité, locale ou MEM, permettent une évaluation des caractéristiques des ondes d'instabilité dans le jet, mais ne rayonnent pas en champ lointain. Cependant, le couplage développé par Tam et Burton [1984a,b] de la solution MEM avec une solution globale dans la région acoustique au moyen d'une méthode de développements asymptotiques raccordés permet d'obtenir des résultats en accord avec les caractéristiques principales des expériences menées sur le bruit de jets supersoniques. L'utilisation de méthodes plus évoluées, comme les PSE présentées dans la section suivante, permet d'obtenir de meilleures prévisions.

4.2.2 Les équations de stabilité parabolisées (PSE)

Les équations de stabilité parabolisées (ou PSE pour *Parabolized Stability Equations*) simplifient significativement les études de stabilité précédentes, tout en prenant en compte les effets non parallèles, l'effet d'accumulation, le calcul dans la zone stable et la possibilité d'étudier les interactions entre différents modes.

Éléments théoriques Cette approche a originellement été introduite et développée par Bertolotti et Herbert [1991], Herbert [1994, 1997] dans l'étude des instabilités de la couche limite, et s'inspire largement de la méthode des échelles multiples. De manière générale, la méthode peut être appliquée à tout écoulement faiblement divergent présentant une situation d'instabilité convective, comme dans les couches de mélange et les jets. Reprenant la décomposition modale précédente, les perturbations sont écrites sous la forme

$$\underline{q}'(x,r,\phi,t) = \underline{\tilde{q}}(x,r)\,\exp i\,(m\phi-\omega t)\;, \tag{1-20a}$$

$$\underline{\tilde{q}}(x,r) = \underline{\hat{q}}(x,r)\,\underbrace{\exp i\left(\int_{x_0}^{x}\alpha(\xi)d\xi\right)}_{\mathscr{A}}, \tag{1-20b}$$

où $\underline{\hat{q}}$ est la fonction d'amplitude, dépendant de la position radiale et de l'abscisse, $\alpha(x)$ le nombre d'onde axial dépendant également de l'abscisse afin de prendre en compte l'historique de l'onde, m le nombre d'onde azimutal et ω la pulsation temporelle.

L'hypothèse de l'écoulement faiblement divergent est ici utilisée afin de supposer que les fonctions d'amplitude $\underline{\hat{q}}$ varient faiblement dans la direction de l'écoulement x et que la majorité de la partie ondulatoire est absorbée dans le terme exponentiel $\mathscr{A}$. Cette séparation entre terme d'amplitude et terme ondulatoire permet ainsi d'éviter l'utilisation d'une résolution spatiale fine. De plus, la faible variation de la fonction d'amplitude selon x permet de négliger les dérivées secondes $\partial^2\underline{\hat{q}}/\partial x^2$ et ainsi de "paraboliser" les équations perturbées du mouvement, bien qu'une ellipticité résiduelle soit encore présente [Li et Malik, 1996, Andersson *et al.*, 1998]. Cette parabolisation des équations permet leur résolution par une méthode d'avancement en x. Ainsi, ces deux caractéristiques confèrent aux PSE une grande efficacité pour un coût numérique très faible.

L'expression des perturbations (1-20a) peut être introduite dans les équations du mouvement linéarisées (équations de Navier-Stokes ou d'Euler par exemple selon le sujet d'étude), afin d'obtenir le système d'équations aux dérivées partielles homogène quasi-parabolique :

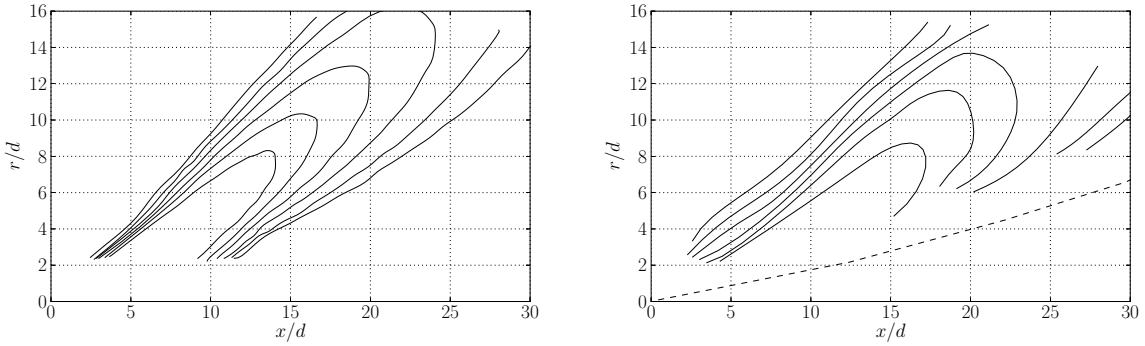
$$\mathscr{P}(\underline{\hat{q}}) = \left(\underline{\underline{\mathcal{A}}} + \underline{\underline{\mathcal{B}}} + \underline{\underline{\mathcal{C}}}\,\frac{\partial}{\partial x} + \underline{\underline{\mathcal{D}}}\,\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot\underline{\hat{q}} = \underline{0} \tag{1-21}$$

Ainsi, une résolution pas à pas dans la direction axiale x peut être menée, en supposant une condition initiale ainsi que des conditions aux limites adéquates, sur l'axe de symétrie et à l'infini. De plus amples détails théoriques sont développés dans le chapitre II.

Résultats Si cette approche a tout d'abord été développée pour étudier les modes instables évoluant dans les couches limites, elle a également été rapidement appliquée à l'étude des jets. Ainsi, Malik et Chang [1997] se sont intéressés au calcul du développement des instabilités dans un jet supersonique à $M = 2.5$, et à faible nombre de Reynolds $Re = 8700$, afin de comparer leurs résultats aux mesures de Morrison et McLaughlin [1980]. Dans leurs travaux, Malik et Chang [1997] ont étudié dans un premier temps la stabilité locale et les PSE linéaires, se basant sur les équations perturbées de Navier-Stokes compressibles, avant de s'intéresser, comme on le verra par la suite, aux PSE non linéaires. Dans un tel jet, deux types de modes instables peuvent être identifiés, en fonction de leur vitesse de phase, conformément aux travaux précédents de Tam et Hu [1989], qui mettent en évidence différentes familles d'ondes dans les jets à très haute vitesse. Les auteurs ont retrouvé la présence de deux types d'onde. Une étude de stabilité locale a permis d'observer que les modes supersoniques présentent les taux d'amplification les plus élevés, à une abscisse donnée de $x = 5.1\,d$. Les deux premiers modes hélicoïdaux ($m = 1$ et $m = 2$) sont ainsi observés comme étant les plus amplifiés, suivis du mode axisymétrique ($m = 0$). Les grandeurs obtenues, telles que les vitesses de phase ou le Strouhal d'amplification maximum, sont en bon accord avec les résultats expérimentaux de Morrison et McLaughlin [1980]. Cette première approche a ensuite permis une comparaison de ces résultats avec ceux obtenus par l'approche PSE. Ainsi, la prise en compte des effets non parallèles et d'accumulation par les PSE donne des taux d'amplification supérieurs, comme observé précédemment au moyen de la méthode des échelles multiples [Morris, 1981]. De plus, Malik et Chang [1997] se sont intéressés aux champs proches de fluctuations de pression issus des calculs PSE. Les angles formés par les fronts d'onde à phase constante avec l'axe du jet correspondent qualitativement aux observations expérimentales. La forme du champ de pression rayonné par les instabilités de la couche de mélange correspond ainsi à certaines visualisations. De plus, une analyse des longueurs d'onde permet aux auteurs de suggérer l'efficacité acoustique potentielle de certains modes.

Toujours concernant le rayonnement acoustique issu d'ondes d'instabilité, Malik et Chang [1997] n'ont pas cherché à étendre le problème à la manière de Tam et Burton [1984a], ou à utiliser une analogie acoustique pour reconstruire les sources. Dans cette optique, Balakumar [1998] a développé cette approche afin d'évaluer, en champ lointain, le rayonnement acoustique associé aux fluctuations de pression obtenues par calculs PSE. Prenant comme référence les expériences de Troutt et McLaughlin [1982] sur un jet froid supersonique à $M = 2.1$, Balakumar [1998] a calculé les perturbations de pression évoluant dans ce jet au moyen d'un modèle PSE linéaire basé sur les équations de Navier-Stokes. Par une technique analogue à celle développée par Tam et Burton [1984b], c'est-à-dire en résolvant des équations de propagation des ondes dans un milieu au repos par une méthode de transformées de Fourier, l'auteur a ainsi pu évaluer les directivités associées en champ lointain. Les développements de cette approche sont par ailleurs repris dans la section IV.1.2.1. L'étude de Balakumar [1998] se focalise sur le développement du premier mode hélicoïdal, correspondant au mode le plus amplifié, à deux fréquences différentes, pour des nombres de Strouhal valant 0.2 et 0.4. Un bon accord entre les champs acoustiques calculés et mesurés est rapporté. L'auteur observe de plus que la majorité du rayonnement acoustique a pour origine les premiers diamètres en sortie de tuyère, où les ondes d'instabilité se déplacent à des vitesses supersoniques, retrouvant les observations expérimentales. Enfin, les directivités acoustiques correspondent très bien aux mesures de Troutt et McLaughlin [1982] comme observé dans la figure I.14. Ce couplage des PSE linéaires avec un modèle de propagation acoustique semble donc donner des résultats en très bon accord avec cette expérience menée sur un jet froid supersonique.

Parallèlement, Yen et Messersmith [1998] se sont également intéressés au calcul du déve-



(a) Balakumar [1998]

(b) Troutt et McLaughlin [1982]

Figure I.14 – *Comparaison du rayonnement acoustique d'un mode calculé au moyen des PSE linéaires, avec le champ proche mesuré expérimentalement*

loppement des instabilités dans un jet au moyen des PSE linéaires, en se limitant à l'étude d'écoulements incompressibles. Des résultats similaires à ceux obtenus par Plaschko [1979] et Morris [1981] avec la MEM sont rapportés. Yen et Messersmith [1999] ont par la suite appliqué cette méthode à l'étude du jet supersonique de Troutt et McLaughlin [1982], de manière similaire à Balakumar [1998]. Les auteurs ont ainsi pu étudier les caractéristiques des instabilités du jet ainsi que les prémices du rayonnement associé à leur développement, sans toutefois faire rayonner les perturbations de pression en champ lointain par une méthode de propagation. Ainsi, même si les angles de propagation du front d'onde en champ proche sont comparables aux directivités en champ lointain rapportées expérimentalement, il est difficile de conclure qualitativement sur l'utilisation directe des PSE linéaires dans l'évaluation du rayonnement acoustique des ondes d'instabilité. En réalité, de manière similaire à la MEM, les PSE ne permettent pas de modéliser directement le rayonnement acoustique en champ lointain, comme observé par différents auteurs, notamment Cheung et Lele [2004]. Une discussion plus complète étudiant cette limitation est présentée dans la section IV.1.1.

Une première application des PSE au cas d'un jet subsonique chaud a été menée par Bertolotti et Colonius [2003] qui ont étudié le bruit produit non pas par les modes étudiés précédemment, c'est-à-dire les modes de Kelvin-Helmholtz résultant du profil inflexionnel du champ de vitesse, mais par des modes de cœur entropiques (*core modes*). Ces modes peuvent être générés en amont de la tuyère, par divers éléments mécaniques présents dans le moteur, tels que la chambre de combustion, puis convectés dans le jet. Ces modes sont susceptibles d'être d'importants contributeurs au rayonnement acoustique dans un jet subsonique chaud : en effet, la distribution spectrale de nombre d'onde de ces perturbations présente des composantes majoritairement supersoniques, comparées aux modes de type Kelvin-Helmholtz. Cependant, là aussi, les auteurs pointent l'incapacité des PSE à calculer directement le champ acoustique. L'approche PSE permet en revanche d'identifier l'angle de rayonnement des ondes de Mach en champ proche de manière satisfaisante.

La théorie généralement avancée afin de justifier le possible rayonnement d'ondes d'instabilités subsoniques est une continuité des mécanismes générateurs de bruit décrits en supersonique [Tam, 1998]. Dans ce dernier cas, une onde possédant une vitesse de phase supersonique produit des ondes de Mach soniques qui peuvent alors se propager en champ lointain. Dans le cas d'ondes à vitesse de phase subsonique, ce mécanisme peut encore être valide dans une moindre mesure. En effet, la modulation d'amplitude axiale de l'onde étale son spectre de nombre d'onde autour de sa valeur principale, comme illustré dans la figure I.15. Ainsi, des composantes spectrales peuvent se trouver dans une zone supersonique et ainsi participer au rayonnement acoustique de l'onde d'instabilité. Ce mécanisme de rayonnement acoustique par modulation spatial de l'amplitude

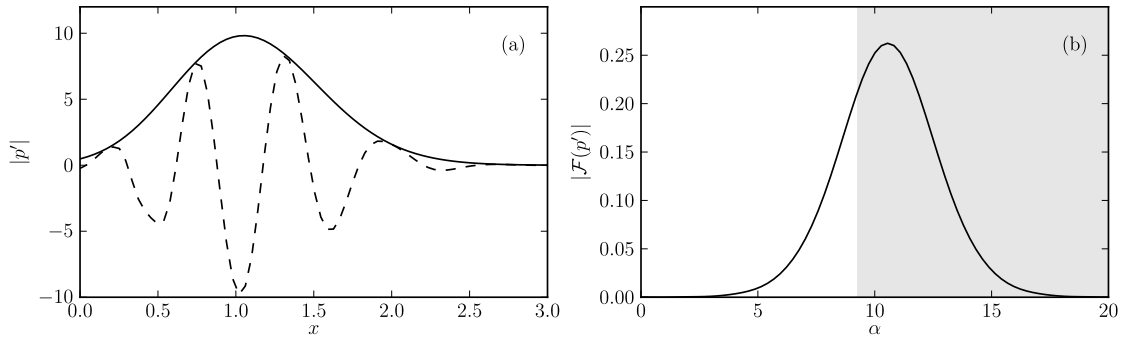


Figure I.15 – *(a) Amplitude (——) et partie réelle (- - - -) d'une fluctuation de pression évoluant dans la direction axiale x et extraite des résultats du chapitre IV, ainsi que (b) le résultat de la transformée de Fourier axiale montrant le spectre de nombre d'onde axial α caractérisant cette perturbation ; la zone blanche ▭ contient des composantes supersoniques ($\alpha < \omega/c$) et la zone grise ▭ des composantes subsoniques.*

d'une onde a notamment été étudié par Crighton et Huerre [1990]. Le caractère directionnel du rayonnement produit par un tel mécanisme est effectivement retrouvé dans les directivités acoustiques des jets aussi bien supersoniques que subsoniques.

Si les *core modes* étudiés par Bertolotti et Colonius [2003] sont susceptibles d'être de forts radiateurs acoustiques en subsonique, les modes de Kelvin-Helmholtz peuvent théoriquement, par ce mécanisme, également produire du bruit. Dans cette optique, Lin *et al.* [2004] ont donc appliqué la méthode PSE linéaire, dans un cas tridimensionnel en se basant sur les équations de Navier-Stokes linéarisées, à un jet subsonique chaud à $M = 0.9$. Cette approche est également couplée à une résolution de l'équation de propagation des ondes comme présenté par Balakumar [1998]. Les résultats obtenus montrent une bonne corrélation sur les niveaux acoustiques entre les calculs PSE linéaires rayonnés et les mesures, sur une gamme de nombres de Strouhal représentative de basses fréquences.

L'application des PSE linéaires à l'étude d'un jet subsonique chaud a également été faite par Piot [2005] et Piot *et al.* [2006]. Dans ces travaux, une approche PSE linéaire basée sur les équations d'Euler compressibles a permis le calcul du développement des ondes d'instabilité dans un jet à M = 0.7 dont le champ moyen est issu des calculs LES de Muller [2006]. Ainsi, une comparaison de l'évolution axiale des ondes d'instabilités entre les résultats PSE linéaires et des résultats de calcul LES montre un bon accord en champ proche entre les deux approches. Cependant, des différences apparaissent lorsque la position radiale de comparaison augmente, soit en s'éloignant de la couche de mélange. Là aussi, l'incapacité des méthodes PSE à évaluer la propagation des perturbations au-delà du champ proche peut être observée.

Se basant sur les travaux de Suzuki et Colonius [2006] et Ryu *et al.* [2008], Gudmundsson et Colonius [2009] et Gudmundsson [2010] ont appliqué les PSE linéaires à l'étude des instabilités se développant dans les jets subsoniques chauds et froids à des nombres de Mach compris entre 0.5 et 0.9. Les résultats obtenus montrent un excellent accord entre les mesures obtenues en champ proche pour de basses fréquences et filtrées par décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD pour *Proper Orthogonal Decomposition*), et les fluctuations de pression calculées au moyen des PSE, tant au niveau des amplitudes que des phases. Les POD sont ici utilisées afin d'extraire des mesures la structure cohérente possédant le maximum d'énergie cinétique. De façon remarquable, les prévisions PSE linéaires reproduisent de manière très satisfaisante l'évolution des perturbations bien après le cône potentiel (figure I.16). Ces résultats témoignent donc de la présence de structures cohérentes de grande échelle dans ces jets subsoniques. Par la suite, Colonius *et al.* [2010] ont poursuivi ces travaux en calculant le rayonnement acoustique associé aux modes instables par une méthode de rayonnement acoustique de type Kirchhoff, en

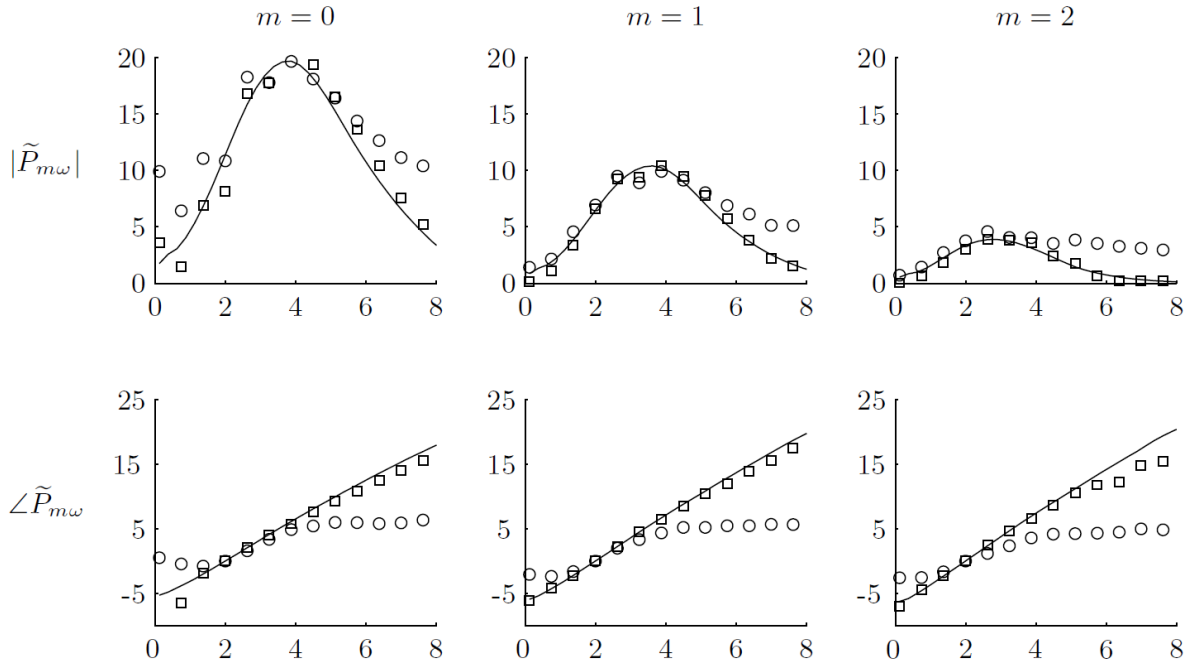


Figure I.16 – *Amplitudes et angles de phase des perturbations de pression à* $St = 0.35$ *sur l'antenne linéaire positionnée en champ proche d'un jet froid subsonique* $M_j = 0.9$ *;* ○ *: Mesures ;* □ *: 1er mode POD ;* —— *: PSE [Gudmundsson, 2010].*

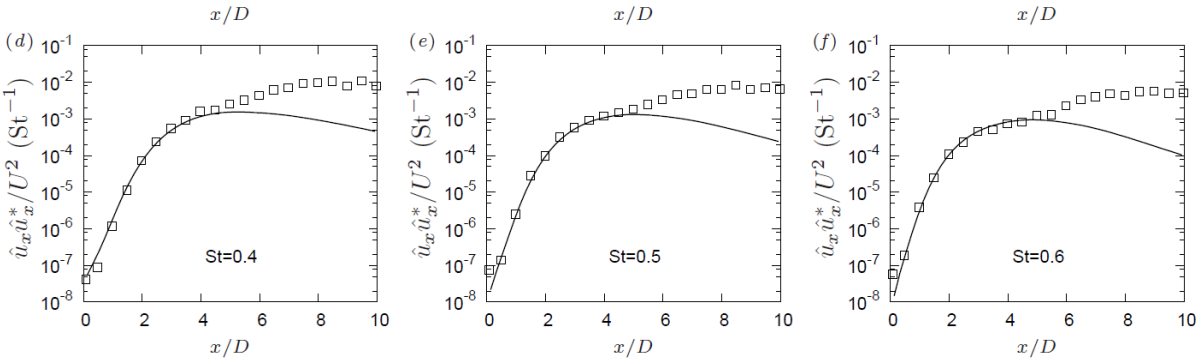


Figure I.17 – *Comparaison des résultats PSE (——) du mode axisymétrique* $m = 0$ *et des mesures (□) de fluctuation de vitesse sur l'axe d'un jet froid subsonique à* $M = 0.4$ *[Cavalieri* et al.*, 2012].*

se basant sur les travaux de Reba *et al.* [2010]. De bonnes comparaisons sont là aussi observées.

De très bonnes corrélations sont également obtenues dans les travaux de Ray *et al.* [2009], et ce pour des jets libres subsoniques et supersoniques. Ces résultats suggèrent là aussi la validité d'une approche PSE dans l'étude des structures cohérentes de grande échelle se développant dans des jets libres subsoniques ou supersoniques. Ces résultats sont intéressants car ils ne vont pas dans le sens des travaux de Ryu *et al.* [2008]. Ces derniers ont en effet observé de larges écarts, en champs proches et lointains, dans des comparaisons effectuées entre des résultats de calculs PSE et LES sur des jets soniques et supersoniques. Ryu *et al.* [2008] suggèrent l'importance d'une modélisation non linéaire dans leur cas d'étude d'un jet supersonique. La contamination des senseurs par les ondes de Mach est également avancée par les auteurs comme possible source d'erreur.

Enfin, dans la continuité des travaux de Colonius *et al.* [2010], Rodríguez *et al.* [2011] et Cavalieri *et al.* [2012] ont appliqué l'approche PSE linéaire aux cas de jets subsoniques froids à $M = 0.4, 0.5, 0.6$. Des comparaisons sur les évolutions axiales des fluctuations de vitesses sur l'axe

du jet entre les mesures et les prévisions PSE sont excellentes dans la région du cône potentiel sur une gamme de nombres de Strouhal compris entre 0.3 et 0.6 (figure I.17). D'importantes différences sont cependant observées pour des nombres de Strouhal autour de 0.1. Ce résultat est généralement observé dans d'autres études PSE [Piot, 2005, Gudmundsson, 2010] et trouve vraisemblablement une explication dans le fait que, pour ces basses fréquences, les longueurs d'ondes sont du même ordre de grandeur que la longueur du cône potentiel. Par conséquent, l'hypothèse PSE d'une lente variation axiale de l'écoulement porteur n'est plus vérifiée. Les différences apparaissant pour des Strouhal supérieurs à 0.3, et au-delà du cône potentiel, seraient le résultat de la turbulence de petite échelle venant se superposer aux mesures de perturbations associées aux structures turbulentes de grande échelle. En effet, dans la zone potentielle, cette turbulence fine n'est pas encore présente. Les excellentes comparaisons observées dans la région potentielle sont là aussi un témoignage de la présence de structures cohérentes dans les jets subsoniques libres et de la capacité des approches PSE à prévoir leur évolution.

4.3 Modélisations faiblement non linéaires

L'approche PSE linéaire présentée dans la section précédente semble donc en mesure de modéliser de manière très satisfaisante certaines caractéristiques des structures cohérentes de grande échelle. Ainsi les taux d'amplification et les vitesses de phase des modes les plus amplifiés sont remarquablement reproduits dans une région du jet correspondant globalement au cône potentiel. Cependant, plusieurs critiques peuvent être formulées vis-à-vis de l'approche *linéaire* adoptée. En effet, rien ne prouve que les mécanismes régissant le développement des ondes ici étudiées soient entièrement linéaires, malgré les résultats remarquables précédents. L'écoulement considéré étant de nature hautement non linéaire, il peut être surprenant que l'évolution de telles structures puisse être modélisée par un système linéaire. De plus, les ondes étant amplifiées spatialement, elles peuvent atteindre une amplitude de saturation, donnant lieu à des effets non linéaires. Enfin, si on s'intéresse à la production sonore des jets, il est tout à fait envisageable que des phénomènes non linéaires aient une importance dans le rayonnement acoustique des jets (appariement tourbillonnaire, saturation, interactions modales, etc). Mohseni *et al.* [2002] se sont par exemple intéressés au cas d'un jet supersonique à $M = 1.92$ à bas Reynolds ($Re = 2000$) calculé par DNS [Freund *et al.*, 2000]. Utilisant ce calcul pour l'écoulement de base, les auteurs ont résolu les équations de Navier-Stokes linéarisées afin de comparer le rayonnement acoustique des différents modes avec celui obtenu dans l'approche non linéaire. Si des comparaisons satisfaisantes sont rapportées autour de la fréquence dominante, d'importants effets non linéaires semblent intervenir soit dans l'amplification des modes, soit dans dans la propagation acoustique des ondes de Mach.

Afin d'étudier l'importance de certains phénomènes non linéaires dans le calcul des instabilités se développant dans un jet, subsonique ou supersonique, ainsi que dans les mécanismes de production acoustique, l'utilisation des PSE constitue une approche relativement simple et prometteuse. En effet, les interactions entre modes, et notamment la création d'harmoniques, peuvent être prises en compte en retenant, dans les équations perturbées, les termes non linéaires issus du produit des perturbations, et en résolvant plusieurs systèmes semblables aux PSE linéaires mais comportant un terme non homogène. Les développements sont détaillés dans la section V.1.1. Il n'y a donc a priori aucune difficulté d'ordre théorique ; les limitations sont à chercher dans les conditions initiales des modes étudiés, ainsi que dans le traitement du mode déformant le champ de base. Les PSE permettent donc de traiter à la fois l'effet non parallèle de l'écoulement et les interactions modales, autorisant ainsi une prise en compte complète des effets faiblement non linéaires.

Éléments théoriques L'approche utilisée pour inclure les termes non linéaires dans les équations PSE est identique à celle présentée par Herbert [1997] et Airiau [1994] dans l'étude

de la couche limite. On s'intéresse ici aux interactions faiblement non linéaires dans le sens où l'on étudie l'évolution d'un mode principal, caractérisé par une pulsation temporelle ω et un nombre d'onde azimutal m, qui est linéairement amplifié, pour ensuite donner naissance à des harmoniques temporelles et azimutales. Dans ce cadre d'étude, on s'intéresse également aux interactions entre plusieurs modes sélectionnés en conditions initiales.

Reprenant les équations d'Euler perturbées utilisées pour développer le système PSE linéaire, les termes non linéaires issus du produit des perturbations sont conservés. Afin de pouvoir considérer la création de ces harmoniques lors de l'étude d'un ou de plusieurs modes principaux, les perturbations sont écrites sous forme modale, comme précédemment, mais en la considérant cette fois comme une superposition de plusieurs modes, caractérisés par des nombres d'onde azimutaux m et des pulsations temporelles $n\omega$, soit sous la forme d'une double série de Fourier :

$$\underline{q}'(x,r,\phi,t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{\tilde{q}}_{m,n}(x,r)\, \exp i(m\phi - n\omega t) \tag{1-22a}$$

$$\underline{\tilde{q}}_{m,n}(x,r) = \underline{\hat{q}}_{m,n}(x,r) \underbrace{\varepsilon_{m,n}\, \exp\left(i \int_{x_0}^{x} \alpha_{m,n}(\xi) d\xi\right)}_{\mathscr{A}_{m,n}} \tag{1-22b}$$

Cette décomposition modale est similaire à celle employée dans la formulation PSE linéaire, et les même hypothèses sont utilisées afin de décomposer les fonctions $\underline{\tilde{q}}_{m,n}(x,r)$ en une partie lentement variable $\underline{\hat{q}}_{m,n}(x,r)$ dans la direction de l'écoulement et une partie ondulatoire $\mathscr{A}_{m,n}$ absorbant les fortes variations axiales de l'onde.

Les amplitudes relatives sont ici importantes dans l'étude des modes et leurs valeurs initiales sont introduites par les termes $\varepsilon_{m,n}$ inclus dans $\mathscr{A}_{m,n}$. Le système d'équation obtenu dans l'approche PSE linéaire 1-21 est complété d'un terme non homogène pour chaque mode (m,n) étudié :

$$\mathscr{P}_{m,n}(\underline{\hat{q}}_{m,n}) = -\frac{\underline{\mathcal{F}}_{m,n}}{\mathscr{A}_{m,n}} \tag{1-23}$$

Ce terme non homogène représente un terme de forçage associé aux interactions croisées des modes considérés et représente donc des termes d'ordre au minimum quadratique.

Par construction et en appliquant des hypothèses PSE, le système d'équations obtenu est quasi-parabolique. La méthode de résolution précédente par marche en x peut être employée, du fait de la faible variation des fonctions d'amplitude dans la direction de l'écoulement.

Résultats Parmi les phénomènes non linéaires potentiellement importants dans l'étude des jets, les interactions modales peuvent avoir un impact significatif sur l'évolution des modes dans une couche de mélange. Plus particulièrement, les modes hélicoïdaux $m = \pm 1$ sont susceptibles de fortement interagir et de mener à une rapide transition turbulente, ce mécanisme étant couramment appelé *oblique-mode breakdown*. Ainsi, suite à une analyse PSE linéaire, Malik et Chang [1997] ont appliqué l'approche PSE non linéaire à l'étude de ce scénario sur un jet supersonique à $M = 2.5$. De très fortes interactions modales sont observées, ainsi qu'une rapide saturation des modes, une forte déformation du champ de base en aval et une augmentation importante du nombre d'harmoniques remplissant le spectre des modes. Une comparaison du débit massique calculé, avec des mesures effectuées par Morrison et McLaughlin [1980], montrent un accord très satisfaisant avec le mode dominant hélicoïdal.

Les PSE non linéaires ont également été employées dans l'étude du forçage de couches de mélange compressibles subsoniques réactives par Day *et al.* [2001]. Dans ces travaux, les auteurs ont comparé l'évolution des perturbations calculées au moyen des PSE non linéaires à celles obtenues par calcul DNS. Un excellent accord sur les fluctuations de vitesse est obtenu entre ces deux méthodes lorsque les conditions initiales employées sont identiques, avec un gain de temps

appréciable avec les PSE. Les PSE linéaires montrent ici très rapidement leurs limites. De plus, il est montré dans cette étude que le mécanisme d'appariement tourbillonnaire peut être décrit par une modélisation PSE non linéaire, suggérant que les mécanismes associés sont intimement liés aux ondes d'instabilité.

Dans la continuité de ces travaux, qui se sont focalisés sur l'étude des perturbations et des interactions non linéaires, Cheung et Lele [2004], puis Cheung *et al.* [2007], ont appliqué les PSE non linéaires à l'étude des perturbations dans les couches de mélange subsoniques et supersoniques, puis dans les jets turbulents forcés, afin d'en extraire le rayonnement acoustique au moyen d'une analogie acoustique de type Lilley. Des comparaisons entre résultats PSE et DNS montrent, de manière similaire à Day *et al.* [2001], d'excellentes corrélations, validant l'approche PSE non linéaire pour le calcul des fluctuations à l'intérieur du jet et en champ proche. Cependant, le calcul du champ acoustique rayonné est clairement mis en défaut. Cette observation rejoint celles effectuées précédemment lors de l'étude des PSE linéaires, montrant que l'incapacité des PSE à calculer le champ lointain ne réside pas dans la modélisation des termes non linéaires, mais bien dans la nature même de la modélisation. Afin de contourner cette limitation, il est donc nécessaire de faire appel à une méthode de rayonnement acoustique, comme ici une analogie acoustique de Lilley. Les résultats de Cheung *et al.* [2007] semblent cependant discutables, le champ propagé étant moyennement corrélé aux résultats DNS. Les auteurs précisent également que l'utilisation d'une méthode de rayonnement par surfaces de Kirchoff n'est pas satisfaisante, les champs lointains obtenus étant a priori irréalistes.

D'autres travaux menés par Sandham *et al.* [2006a] montrent également l'importance des mécanismes non linéaires dans l'étude acoustique de jets forcés. Au moyen d'une approche PSE non linéaire, Sandham *et al.* [2008] ont ainsi obtenu des comparaisons qualitatives intéressantes entre calculs et résultats expérimentaux sur des jets subsoniques à $M = 0.9$ et faible Reynolds. Dans la continuité de ces travaux, Suponitsky *et al.* [2010] ont émis l'hypothèse de l'importance de l'interaction modale dans le rayonnement acoustique de certains jets pour expliquer un pic de directivité observé expérimentalement à une fréquence dominante différente de celle observée en champ proche. Par interactions forcées de deux modes, ces auteurs concluent sur la possibilité de produire un rayonnement plus efficace que lors d'un forçage direct. Cependant, Rodríguez *et al.* [2011] remettent en question ce mécanisme dans le cas de jets libres à hauts nombres de Reynolds. Reprenant les travaux de Suponitsky *et al.* [2010], ces auteurs ont montré que ce mécanisme est considérablement moins efficace dans le cas d'un jet libre.

Conclusions partielles Considérant tous ces éléments, plusieurs conclusions concernant l'intérêt d'une approche PSE non linéaire dans l'étude des jets peuvent être établies. Tout d'abord, l'approche PSE linéaire semble être en mesure de reproduire de manière très satisfaisante les caractéristiques des structures cohérentes de grande échelle, aussi bien à l'intérieur qu'en périphérie proche de jets libres subsoniques et supersoniques. Ces observations suggèrent donc que l'évolution de ces structures peut être décrite par un modèle linéaire relativement simple, malgré la complexité de l'écoulement considéré. Cependant, ces résultats ne permettent pas d'exclure une possible contribution de mécanismes non linéaires dans la dynamique de ces ondes, certaines observations allant dans ce sens. Des travaux restent donc à mener concernant la part des non linéarités dans la description de ces structures, et une approche PSE non linéaire est un outil envisageable.

Ensuite, l'utilisation d'une approche PSE non linéaire est très efficace et prometteuse dans l'étude de jets ou de couches de mélange forcés. Des comparaisons expérimentales ou numériques (DNS) montrent la précision et le potentiel de cette méthode. En conséquence de cette remarque, l'emploi d'une approche PSE non linéaire dans l'étude du contrôle d'un jet par forçage périodique peut être envisagé.

Enfin, même si l'évolution axiale des structures cohérentes de grande échelle peut être correctement modélisée au moyen d'une approche PSE, le rayonnement acoustique associé à

ces ondes reste problématique, surtout dans le cas de jets subsoniques, et n'est pas résolu au moyen d'une méthode non linéaire. En effet, l'approche PSE ne permettant pas par construction le calcul du champ lointain, il est nécessaire d'avoir recours à des méthodes de propagation complémentaires (Lighthill, Kirchhoff, etc.). De manière générale, le rayonnement acoustique de paquets d'ondes subsoniques n'est pas trivial et la section suivante s'attache à en donner quelques éléments.

I.5 Le rayonnement acoustique de paquets d'ondes subsoniques

Comme évoqué dans les sections précédentes, le rayonnement acoustique d'un paquet d'ondes se déplaçant à une vitesse de phase supersonique trouve clairement son origine dans la production d'ondes de Mach [Tam, 1998]. Le mécanisme de production sonore d'un paquet d'ondes subsonique a également été présenté et peut trouver son origine dans la continuité de ce même mécanisme, par l'étalement du spectre de nombre d'onde dans une plage supersonique (figure I.15) permettant alors à l'onde de rayonner en champ lointain. Crighton et Huerre [1990] ont ainsi mis en évidence le rôle important de la modulation d'amplitude des paquets d'ondes dans cette production acoustique. En considérant des enveloppes spatiales gaussiennes, classiquement rencontrées dans la modélisation des ondes d'instabilité évoluant dans un jet, un rayonnement super-directif a ainsi été mis en évidence pour des paquets d'ondes ayant des vitesses de phase subsoniques. Une extension des travaux de Crighton et Huerre [1990] peut être trouvée dans ceux de Sandham *et al.* [2006b], où une variation temporelle de l'enveloppe est étudiée afin de montrer, là aussi, le rayonnement acoustique effectif d'un paquet d'ondes subsonique.

Les travaux de Cavalieri *et al.* [2011] vont également dans ce sens. Considérant un paquet d'ondes subsonique modulé à la fois spatialement et temporellement par des enveloppes gaussiennes, ces auteurs ont étudié l'effet de l'étendue ou de la localisation spatio-temporelle de ces paquets d'ondes sur les niveaux acoustiques en champ lointain. En effet, dans un jet, de tels paquets d'ondes apparaissent par intermittence et possèdent donc une évolution temporelle en plus de leur évolution spatiale. Cavalieri *et al.* [2011] montrent ainsi que l'étendue temporelle joue un rôle potentiellement tout aussi important dans la prévision des niveaux acoustiques observés à de faibles angles dans le champ lointain de jets subsoniques. Appliquant leur modèle simplifié au cas de deux jets subsoniques à $M = 0.9$, ces auteurs présentent des résultats de directivité très cohérents dans la direction aval. Ces conclusions suggèrent alors qu'un tel mécanisme temporel joue un rôle important dans la modélisation de paquets d'ondes, et donc des structures cohérentes de grande échelle, comme sources acoustiques de jets subsoniques.

Ce mécanisme temporel n'est pas pris en compte dans une approche PSE, contrairement à la modulation axiale de l'amplitude des perturbations. En considérant uniquement le mécanisme acoustique associé à cette modulation spatiale, plusieurs approches peuvent être couplées aux calculs PSE afin d'évaluer le rayonnement acoustique des ondes d'instabilité. Les méthodes basées sur des surfaces de Kirchhoff cylindriques [Balakumar, 1998] ou coniques [Colonius *et al.*, 2010] sont théoriquement en mesure d'effectuer une telle propagation. Le placement de la surface de Kirchhoff est critique, car la solution de stabilité devient rapidement non valable en dehors du jet, s'amortissant approximativement en $\exp(-\sqrt{1-M^2}r)$. Cette limitation est discutée par la suite dans la section IV.1.1. Alternativement, des approches basées sur les analogies acoustiques permettent également la reconstruction du champ acoustique associé à une onde d'instabilité [Cheung *et al.*, 2007]. Au moyen d'une analogie acoustique simplifiée s'inspirant de la modélisation de Cavalieri *et al.* [2011], Rodríguez *et al.* [2011] ont ainsi évalué le rayonnement acoustique d'instabilités calculées par un modèle PSE linéaire dans des jets subsoniques froids. Des accords satisfaisants sont rapportés, et un exemple de directivité comparant cette projection aux mesures peut être observé dans la figure I.18. De manière très remarquable, ces directivités projetées en champ lointain à partir de fluctuations de vitesses calibrées sur l'axe reproduisent très correctement les niveaux mesurés avec moins de 3 dB d'erreur dans la direction aval du jet.

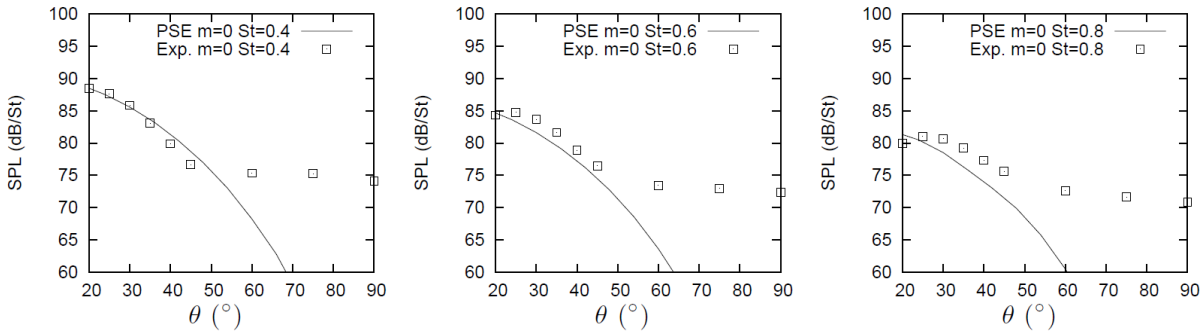


Figure I.18 – *Comparaison des directivités d'un jet subsonique froid à* $M = 0.5$ *entre mesure (□) et projection des calculs PSE linéaires (——) [Rodríguez* et al.*, 2011].*

Enfin, une telle modélisation permet également de retrouver les tendances des niveaux sonores absolus en fonction du nombre de Mach.

Ces différentes études étayent donc la possibilité de rayonnement acoustique de structures cohérentes de grande échelle dans des jets subsoniques. Plus encore, même si une approche de stabilité de type PSE ne permet pas le calcul direct du rayonnement acoustique d'une onde d'instabilité, il est tout de même possible de reconstruire raisonnablement celui-ci.

I.6 Conclusions

L'étude des structures cohérentes de grande échelle se développant dans les jets est au cœur de nombreuses activités de recherche. L'existence de telles structures hydrodynamiques a été mise en évidence dans des jets supersoniques et subsoniques, libres et forcés. Les mécanismes mis en jeu, ainsi que le rôle exact de ces structures dans l'acoustique des jets, restent cependant encore mal définis, empêchant le développement de méthodes de prévision de bruit efficaces. Parmi les mécanismes sources avancés dans la littérature, les structures cohérentes de grande échelle, identifiables à des ondes d'instabilité convectives hydrodynamiques, semblent être responsables d'un rayonnement acoustique très directif, aussi bien pour des jets subsoniques que supersoniques. De telles structures forment ainsi des sources non compactes, modulées en temps et en espace, et dont la dynamique est potentiellement descriptible au moyen de modèles linéaires pour des jets libres. Une approche pertinente permettant l'étude de ces structures est alors donnée par les théories de stabilité, notamment par les modélisations basées sur les équations de stabilité parabolisées (PSE). En effet, de tels modèles sont prometteurs et reproduisent de manière très satisfaisante les caractéristiques des perturbations mesurées dans les jets simples subsoniques ou supersoniques.
Ces travaux de thèse s'inscrivent dans la continuité des études présentées jusqu'ici. Ainsi, un objectif est de mettre en évidence au moyen d'un modèle PSE linéaire la présence d'ondes d'instabilité dans les mesures acoustiques réalisées en champ proche de jets libres à double flux, issus de tuyères à géométries complexes. Nous cherchons donc à évaluer si une telle approche permet, conformément aux études précédentes réalisées sur des cas plus simples, d'en décrire les caractéristiques de manière satisfaisante. L'objectif principal de nos travaux est alors d'évaluer la part du rayonnement acoustique, mesuré en champ lointain, attribuable à la dynamique de ces ondes d'instabilité dans des jets à configurations quasiment industrielles.

Chapitre II

Modélisation des instabilités hydrodynamiques d'un jet par les équations de stabilité parabolisées (PSE) linéaires

Sommaire

II.1 Développement des équations de stabilité parabolisées linéaires . . . 42
1.1 Les équations du mouvement . . . 42
1.2 Discussion sur l'écoulement porteur . . . 48
1.3 La modélisation PSE linéaire . . . 50
1.4 Conditions initiales . . . 54
1.5 Conditions aux limites . . . 56
II.2 Méthodes numériques pour la résolution du système PSE linéaire . . . 58
2.1 Maillage . . . 58
2.2 Discrétisation axiale . . . 59
2.3 Discrétisation radiale . . . 60
2.4 Convergence sur le nombre d'onde axial . . . 62
2.5 Résolution du système discret . . . 63
II.3 Validation du modèle . . . 63
3.1 Étude d'un jet incompressible . . . 64
3.2 Influence de l'incrément axial . . . 67
3.3 Influence de la condition de normalisation . . . 71
3.4 Étude d'un jet supersonique . . . 73
II.4 Conclusions . . . 77

Ce chapitre présente le développement des équations de stabilité parabolisées linéaires basées sur les équations d'Euler perturbées dans le cas d'un écoulement cisaillé de type jet. Ces équations sont explicitées dans un repère cylindrique pour un jet axisymétrique. Les hypothèses effectuées sur l'écoulement ainsi que sur la forme des ondes étudiées sont explicitées et discutées. Le système linéaire obtenu permet ainsi de décrire mathématiquement et numériquement l'évolution axiale des instabilités de Kelvin-Helmholtz se développant dans les jets. Les détails sur les méthodes numériques employées dans la résolution du système sont donnés, notamment sur les schémas numériques utilisés. Enfin, plusieurs validations de la méthode développée sont présentées. Ainsi, les sensibilités aux conditions de normalisation et au pas d'avancement axial sont discutées. Des comparaisons avec des cas déjà traités dans la littérature sont analysées. L'ensemble de ces résultats nous permet de conclure quant à la validité du modèle.

II.1 Développement des équations de stabilité paraboliséES linéaires

Les structures étudiées sont équivalentes à des ondes d'instabilité hydrodynamiques convectives de type Kelvin-Helmholtz se développant dans la couche de mélange d'un jet. L'étude de ces structures peut donc être effectuée au moyen d'une analyse de stabilité. Pour cela, un écoulement de base, ou écoulement porteur, est donné et représente en toute rigueur l'écoulement stationnaire associé au problème considéré. L'objectif est alors d'étudier la réponse de cet écoulement porteur à une perturbation caractérisant un mode instable, à une fréquence et un nombre d'onde azimutal donnés.

Un objectif de ce chapitre est de développer un système d'équations permettant de décrire l'évolution axiale de ces ondes instables. Pour cela, et afin de simplifier au maximum la complexité du système, plusieurs hypothèses et simplifications sont appliquées sur la base de l'analyse dimensionnelle et de la connaissance physique que nous possédons des ondes étudiées.

1.1 Les équations du mouvement

L'écoulement considéré satisfait les équations de Navier-Stokes instationnaires, compressibles et tridimensionnelles. Ces équations, très complexes et dont le coût de résolution numérique est prohibitif, constituent donc la base de notre analyse. Or, la prise en compte de l'intégralité de la physique décrite par ces équations n'est a priori pas nécessaire pour l'étude ici envisagée. Il est donc intéressant d'effectuer un ensemble d'approximations, adaptées au cadre de notre étude, et de réduire ainsi le modèle à des équations décrivant principalement l'évolution des ondes d'instabilité étudiées.

1.1.1 Adimensionnements

Avant de considérer les équations du mouvement mises en jeu, il est utile d'effectuer un adimensionnement des variables de l'écoulement. Cette étape permet de mettre en évidence les paramètres intrinsèques à l'écoulement et d'effectuer par la suite des comparaisons entre différentes configurations. Ainsi, on adimensionne les variables d'écoulement du jet par des grandeurs de référence, comme présenté dans l'équation 2-1, où les membres de gauche sont des grandeurs adimensionnées. On note x l'abscisse, r la position radiale, t la variable temporelle, $\underline{u}$ le champ de vitesse instantané, ρ la masse volumique, p la pression statique, T la température statique et e l'énergie interne. De plus, d est le diamètre de la tuyère supposée cylindrique, U_j est la vitesse axiale du jet en sortie de tuyère et C_v la capacité thermique du fluide à volume constant, également en sortie de tuyère. Enfin, les grandeurs indicées par j représentent ces grandeurs prises en sortie de tuyère sur l'axe, et les grandeurs marquées d'un symbole $*$ sont des grandeurs dimensionnelles.

$$x = \frac{x^*}{d} \qquad r = \frac{r^*}{d} \qquad t = \frac{t^* U_j}{d} \tag{2-1a}$$

$$\underline{u} = \frac{\underline{u}^*}{U_j} \qquad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_j} \qquad p = \frac{p^*}{\rho_j U_j^2} \tag{2-1b}$$

$$T = \frac{T^*}{T_j} \qquad e = \frac{e^*}{C_v T_j} \tag{2-1c}$$

Avec ces adimensionnements, on définit respectivement les nombres de Mach, de Reynolds et

de Prandtl :

$$M_j = \frac{U_j}{a_j}\,, \tag{2-2}$$

$$Re_d = \frac{U_j\,\rho_j\,d}{\mu_j}\,, \tag{2-3}$$

$$Pr = \frac{\mu_j\,C_p}{\lambda_j}\,, \tag{2-4}$$

où a_j est la vitesse du son, μ_j la viscosité dynamique et λ_j le coefficient de conductivité thermique du fluide, ces paramètres étant pris en sortie de tuyère. La vitesse du son a pour un gaz parfait est donnée par

$$a = \sqrt{\gamma\,\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma\,R_s\,T}\,, \tag{2-5}$$

où γ est le coefficient adiabatique et R_s est la constante spécifique de l'air. On obtient alors les relations adimensionnelles pour la pression p_j et l'énergie interne e_j en sortie de tuyère

$$\frac{p_j}{\rho_j\,U_j^2} = \frac{1}{\gamma\,M_j^2}\,, \tag{2-6}$$

$$e_j = \frac{a_j^2}{\gamma\,(\gamma-1)}\,. \tag{2-7}$$

1.1.2 Équations de Navier-Stokes adimensionnées

En négligeant les forces volumiques ainsi que les flux de rayonnement, les équations de Navier-Stokes adimensionnées s'écrivent alors sous la forme des équations de continuité 2-8a, de quantité de mouvement 2-8b et de conservation de l'énergie 2-8c,

$$\frac{\partial\,(\,\rho\,)}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\,\rho\underline{u}\,) = 0\,, \tag{2-8a}$$

$$\frac{\partial\,(\,\rho\underline{u}\,)}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\,\rho\underline{u}\otimes\underline{u}\,) = -\,\underline{\nabla p} \;+\; \frac{1}{Re_d}\,\left(\underline{\nabla}\cdot\underline{\underline{\tau}}\right)\,, \tag{2-8b}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,(\,\rho e\,)}{\partial t} + \underline{\nabla}\cdot(\,\rho e\underline{u}\,) = &-\gamma\,(\gamma-1)\,M_j^2\,p\,(\,\underline{\nabla}\cdot\underline{u}\,)\\ &+\gamma\,(\gamma-1)\frac{M_j^2}{Re_d}\,\Phi_D\\ &-\frac{\gamma}{Pr\,Re_d}\,\left(\underline{\nabla}\cdot\underline{\varphi_c}\right)\,,\end{aligned} \tag{2-8c}$$

avec $\underline{\underline{\tau}}$ le tenseur des contraintes visqueuses, Φ_D la fonction de dissipation et $\underline{\varphi_c}$ le flux de chaleur par conduction. Ces variables s'expriment, respectivement, au moyen des équations 2-9 et 2-10 en utilisant les hypothèses de Stokes, et au moyen de l'équation 2-11 selon la loi de Fourier.

$$\underline{\underline{\tau}} = -\frac{2\mu}{3}(\underline{\nabla}\cdot\underline{u})\,\underline{\underline{I}} + \mu\left(\underline{\underline{\nabla u}} + \underline{\underline{\nabla u}}^t\right) \tag{2-9}$$

$$\Phi_D = \frac{\underline{\underline{\tau}}^2}{2\mu} \tag{2-10}$$

$$\underline{\varphi_c} = -\lambda_c\,\underline{\nabla T} \tag{2-11}$$

On peut remarquer que la fonction de dissipation produit des termes non linéaires des variables de vitesse, le tenseur de viscosité $\underline{\underline{\tau}}$ étant lié à $\underline{u}$ par la loi de Newton pour les fluides ici étudiés.

1.1.3 Méthode des petites perturbations

Comme présenté dans la section I.4, lors d'une analyse de stabilité, l'approche consiste à étudier le comportement d'un champ de base stationnaire $\underline{\overline{q}}(\underline{x})$ soumis à une perturbation $\underline{q}'(\underline{x},t)$:

$$\underline{q}(\underline{x},t) = \underline{\overline{q}}(\underline{x}) + \underline{q}'(\underline{x},t) \tag{2-12}$$

Le champ de base est supposé satisfaire les équations de Navier-Stokes stationnaires, alors que le champ instationnaire doit être solution des équations instationnaires précédentes.

Les écoulements porteurs étudiés par la suite sont toujours supposés axisymétriques, avec une vitesse azimutale nulle. En se plaçant dans un repère cylindrique (x, r, ϕ), cela implique $\overline{u}_\phi = 0$. Cette hypothèse est généralement vérifiée dans les jets étudiés ici, mais il peut en être autrement, par exemple lorsqu'une rotation solide (ou *swirl*) est appliquée au jet. De plus, le champ de pression est supposé uniforme dans le jet, soit $\underline{\nabla \overline{p}} = 0$. Cette approximation est expérimentalement bien vérifiée pour les jets étudiés, parfaitement adaptés en pression. De plus, avec les choix d'adimensionnement effectués (relation 2-6), la pression du champ de base est telle que $\overline{p} = 1/(\gamma M^2)$. Les grandeurs instantanées étudiées s'écrivent alors :

$$u_x = \overline{u}_x + u'_x \tag{2-13a}$$
$$u_r = \overline{u}_r + u'_r \tag{2-13b}$$
$$u_\phi = u'_\phi \tag{2-13c}$$
$$\rho = \overline{\rho} + \rho' \tag{2-13d}$$
$$p = \frac{1}{\gamma M^2} + p' \tag{2-13e}$$

1.1.4 Importance des termes visqueux

Les équations complètes de Navier-Stokes 2-8 doivent être satisfaites lors d'une résolution numérique mettant en jeu l'ensemble des échelles de la turbulence. Cependant, on s'intéresse ici à des fluctuations de grande échelle se propageant dans la direction de l'écoulement. Par conséquent, les échelles étudiées couvrent une gamme relativement restreinte, qu'il est intéressant d'utiliser afin de simplifier nos équations.

En effet, l'échelle caractérisant l'évolution de ces structures dans la direction axiale x est de l'ordre du diamètre, utilisé dans l'adimensionnement précédent, soit un ordre de grandeur unitaire dans les équations adimensionnelles précédentes. Dans la direction radiale, l'échelle caractéristique est différente de par la présence de la couche de mélange : on prend l'épaisseur adimensionnée (par le diamètre d) de celle-ci, δ_w, comme ordre de grandeur. Enfin, on considère des perturbations ayant des amplitudes adimensionnées de l'ordre de δ et une fréquence caractéristique adimensionnée en nombre de Strouhal $St = f\,d/U_j$.

Pour simplifier l'analyse, on omet le fait qu'il existe également un ordre de grandeur entre les vitesses axiale $\overline{u}_x$ et radiale $\overline{u}_r$. Cela n'influence que peu l'analyse suivante et n'en modifie pas les conclusions. On écrit alors pour une grandeur stationnaire $\overline{\varphi}$ et une perturbation φ' :

$$\overline{\varphi} \sim 1 \qquad \varphi' \sim \delta \tag{2-14a}$$
$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} \sim 1 \qquad \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \sim \delta \tag{2-14b}$$
$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y} \sim \frac{1}{\delta_w} \qquad \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \sim \frac{\delta}{\delta_w} \tag{2-14c}$$
$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} = 0 \qquad \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \sim 2\pi\, St\, \delta \tag{2-14d}$$

Afin d'apprécier simplement les importances relatives des différents termes des équations du mouvement, nous pouvons considérer l'exemple d'un écoulement bidimensionnel, le cas axisymétrique étant équivalent en termes d'ordres de grandeur. L'équation de quantité de mouvement projetée selon $\underline{e}_x$ s'écrit comme suit pour un écoulement incompressible :

$$\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{Re_d}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) \tag{2-15}$$

Après développement de cette équation, le membre de gauche fait apparaître des termes ayant des ordres de grandeurs δ, $2\pi\,St\,\delta$ et δ/δ_w, ainsi que des termes d'ordres supérieurs en δ correspondant à des termes non linéaires issus du produit des perturbations. Les ordres de grandeur de ces termes sont δ^2, δ^2/δ_w et δ^3. Le membre de droite contient lui des termes ayant pour ordres de grandeur δ/Re_d et $\delta/(Re_d\,\delta_w^2)$. Des ordres de grandeur identiques sont retrouvés avec l'équation de quantité de mouvement projetée selon $\underline{e}_y$.

Les écoulements étudiés par la suite ont des nombres de Reynolds de l'ordre de $Re_d = 10^6$. De plus, les épaisseurs des couches de mélange sont inférieures au diamètre d'au moins un ordre de grandeur, rendant le rapport $1/\delta_w$ conséquent. Enfin, les nombres de Strouhal considérés sont supérieurs à 0.1. En considérant uniquement les termes linéaires du membre de gauche dans l'équation 2-15, l'ordre de grandeur le plus petit est donc δ. Dans le membre de droite, l'ordre de grandeur le plus grand est $\delta/(Re_d\,\delta_w^2)$. Par conséquent, ces deux termes sont du même ordre de grandeur si $\delta_w \sim 1/\sqrt{Re_d} = 10^{-3}$.

Or, l'ensemble des jets étudiés par la suite présentent des couches de mélange ayant des épaisseurs caractéristiques supérieures à $\delta_w \sim 10^{-2}$, et croissant rapidement. Une approximation peut donc être faite ici en supposant que les termes visqueux jouent un rôle peu important dans l'évolution des perturbations étudiées. Certes, une telle approximation semble plutôt grossière dans la région de la couche de mélange, surtout lorsque cette dernière est fine (généralement sur le premier diamètre de l'écoulement), mais reste raisonnable, comme nous le verrons par la suite. De plus, on peut remarquer que le terme du membre de gauche d'ordre δ/δ_w sera dominant. Il est également intéressant de remarquer que cette approximation trouve un écho dans les observations expérimentales de Brown et Roshko [1974], où la variation du nombre de Reynolds ne modifie que très peu les caractéristiques des structures cohérentes de grande échelle observées.

Ce résultat constitue donc une première simplification négligeant la contribution des termes visqueux dans les équations de quantité de mouvement. La même analyse peut être répétée sur l'équation de conservation de l'énergie. En effet, la fonction de dissipation Φ_D ainsi que le terme de conduction thermique (Laplacien de la température) font apparaître le même ordre de grandeur maximum. De telles simplifications nous amènent alors à considérer dans la section suivante les équations d'Euler comme suffisantes en première approximation dans la description de l'évolution des perturbations de grande échelle dans un jet.

Cependant, cette approximation devient discutable si maintenant nous nous intéressons à la contribution des termes non linéaires. En effet, les ordres de grandeur minimum considérés dans le membre de gauche de l'équation 2-15 sont alors δ^2 et δ^3. Le terme d'ordre de grandeur maximum du membre de droite est toujours $\delta/(Re_d\,\delta_w^2)$. Dans ce cas, ces deux termes sont du même ordre de grandeur si $\delta_w \sim 1/\sqrt{\delta Re_d} \approx 10^{-2}$. L'approximation est donc ici moins pertinente, dans le cas non linéaire, si on veut garder une certaine cohérence des ordres considérés dans nos équations. Entre autres et allant dans le sens de cette observation, Day *et al.* [2001] ont rapporté un effet stabilisateur dans la résolution des équations PSE non linéaires, appliquées aux couches de mélanges réactives bidimensionnelles, lorsque les effets de viscosité sont pris en compte.

1.1.5 Les équations d'Euler compressibles

L'analyse précédente permet de négliger en première approximation la contribution des termes visqueux dans l'évolution des perturbations. Cela revient donc à considérer les équations d'Euler

compressibles dans la modélisation de ces dernières. Il est cependant important de remarquer que ces équations servent ici uniquement à décrire ces structures de grande échelle et que le champ de base stationnaire, lui, doit être obtenu en considérant l'intégralité des échelles de la turbulence. En effet, le développement de la couche de mélange est piloté par l'ensemble des structures turbulentes.

En négligeant les termes en $1/Re_d$ et en utilisant la relation entre l'entropie s et l'énergie interne e

$$\rho\, T\, \frac{ds}{dt} = \rho\, \frac{de}{dt} + \gamma\, (\,\gamma - 1\,)\; M_j^2\; p\; (\,\underline{\nabla} \cdot \underline{u}\,)\;, \tag{2-16}$$

les équations du mouvement s'expriment alors au moyen des équations 2-17. L'équation de l'énergie sous forme entropique traduit la modélisation isentropique des ondes étudiées.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\,\rho \underline{u}\,) = 0 \tag{2-17a}$$

$$\frac{\partial\,(\,\rho \underline{u}\,)}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\,\rho \underline{u} \otimes \underline{u}\,) = -\,\underline{\nabla p} \tag{2-17b}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \underline{\nabla s} \cdot \underline{u} = 0 \tag{2-17c}$$

Pour un gaz caloriquement parfait, la variable d'entropie s et sa dérivée totale sont reliées à la pression p et à la masse volumique ρ au moyen des relations suivantes :

$$s = C_v \ln\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) \tag{2-18}$$

$$ds = C_v \left(\frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho}\right) \tag{2-19}$$

Les équations d'Euler perturbées peuvent alors être formulées par les équations 2-20, après simplification des termes de l'écoulement de base.

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \overline{\rho}\;(\,\underline{\nabla} \cdot \underline{u}'\,) + \rho'\;(\,\underline{\nabla} \cdot \overline{\underline{u}}\,) + \left(\overline{\underline{u}} \cdot \underline{\nabla \rho'}\right) + \left(\underline{u}' \cdot \underline{\nabla \overline{\rho}}\right) = f_1 \tag{2-20a}$$

$$\overline{\rho}\left(\frac{\partial\, \underline{u}'}{\partial t} + \left(\underline{\underline{\nabla u'}} \cdot \overline{\underline{u}}\right) + \left(\underline{\underline{\nabla \overline{u}}} \cdot \underline{u}'\right)\right) + \rho'\left(\underline{\underline{\nabla \overline{u}}} \cdot \overline{\underline{u}}\right) + \underline{\nabla p'} = \underline{f_2} \tag{2-20b}$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + (\,\underline{\nabla s'} \cdot \overline{\underline{u}}\,) + (\,\underline{\nabla \overline{s}} \cdot \underline{u}'\,) = f_3 \tag{2-20c}$$

Les termes f_i regroupent quant à eux les termes non linéaires, développés dans les équations 2-21.

$$f_1 = -\rho'\,(\,\underline{\nabla} \cdot \underline{u}'\,) - \left(\underline{u}' \cdot \underline{\nabla \rho'}\right) \tag{2-21a}$$

$$\underline{f_2} = -\overline{\rho}\left(\underline{\underline{\nabla u'}} \cdot \underline{u}'\right) - \rho'\left(\frac{\partial\, \underline{u}'}{\partial t} + \left(\underline{\underline{\nabla u'}} \cdot \overline{\underline{u}}\right) + \left(\underline{\underline{\nabla \overline{u}}} \cdot \underline{u}'\right) + \left(\underline{\underline{\nabla u'}} \cdot \underline{u}'\right)\right) \tag{2-21b}$$

$$f_3 = -\,(\,\underline{\nabla s'} \cdot \underline{u}'\,) \tag{2-21c}$$

En tenant compte du fait que la pression moyenne $\overline{p}$ est constante dans l'ensemble des écoulements considérés, soit que $\underline{\nabla p'} = \underline{0}$, les équations 2-20 se réduisent aux équations 2-22 suivantes, le terme $\underline{\underline{\nabla \overline{u}}} \cdot \overline{\underline{u}}$ étant alors nul.

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \overline{\rho}\;(\,\underline{\nabla} \cdot \underline{u}'\,) + \rho'\;(\,\underline{\nabla} \cdot \overline{\underline{u}}\,) + \left(\overline{\underline{u}} \cdot \underline{\nabla \rho'}\right) + \left(\underline{u}' \cdot \underline{\nabla \overline{\rho}}\right) = f_1 \tag{2-22a}$$

$$\overline{\rho}\left(\frac{\partial\, \underline{u}'}{\partial t} + \left(\underline{\underline{\nabla u'}} \cdot \overline{\underline{u}}\right) + \left(\underline{\underline{\nabla \overline{u}}} \cdot \underline{u}'\right)\right) + \underline{\nabla p'} = \underline{f_2} \tag{2-22b}$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + (\,\underline{\nabla s'} \cdot \overline{\underline{u}}\,) + (\,\underline{\nabla \overline{s}} \cdot \underline{u}'\,) = f_3 \tag{2-22c}$$

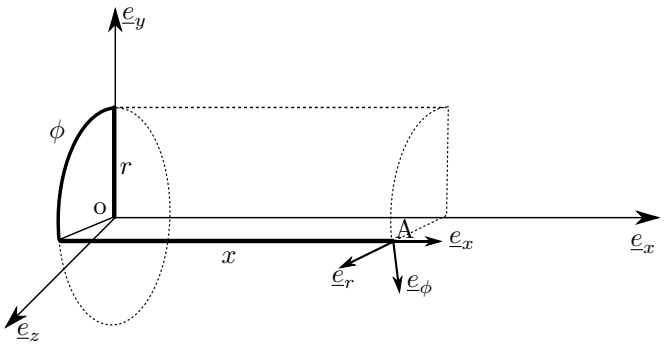


Figure II.1 – *Représentation du repère cylindrique (x, r, ϕ) ; l'axe du jet coïncide avec $\underline{e}_x$.*

1.1.6 Linéarisation des équations d'Euler compressibles perturbées

On considère par la suite des perturbations $\underline{q}'$ de "petites" amplitudes, c'est-à-dire pour lesquelles les termes non linéaires (d'ordres supérieurs à 1 en δ) issus des produits des perturbations sont négligeables : on suppose ici que les interactions modales ne sont pas les mécanismes principaux pilotant la dynamique des ondes d'instabilité dans un écoulement naturel. Comme on le verra par la suite, on supposera que l'évolution des perturbations est plutôt contrôlée par des effets non parallèles issus de la divergence du jet. Les équations obtenues sont alors les équations d'Euler linéarisées 2-23, qui se réduisent aux équations 2-22 avec $f_i = 0$.

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \overline{\rho}\,(\,\underline{\nabla}\cdot\underline{u}'\,) + \rho'\,(\,\underline{\nabla}\cdot\overline{\underline{u}}\,) + \left(\overline{\underline{u}}\cdot\underline{\nabla\rho'}\right) + \left(\underline{u}'\cdot\underline{\nabla\overline{\rho}}\right) = 0 \tag{2-23a}$$

$$\overline{\rho}\left(\frac{\partial \underline{u}'}{\partial t} + \left(\underline{\underline{\nabla u'}}\cdot\overline{\underline{u}}\right) + \left(\underline{\underline{\nabla\overline{u}}}\cdot\underline{u}'\right)\right) + \underline{\nabla p'} = \underline{0} \tag{2-23b}$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + (\,\underline{\nabla s'}\cdot\overline{\underline{u}}\,) + (\,\underline{\nabla\overline{s}}\cdot\underline{u}'\,) = 0 \tag{2-23c}$$

1.1.7 Écriture des équations du mouvement dans le repère cylindrique

Ces équations vectorielles sont ici développées dans un repère cylindrique (x, r, ϕ) associé au jet, comme schématisé dans la figure II.1 : $\underline{e_x}$ est situé dans l'axe du jet et dirigé dans le sens de l'écoulement, $\underline{e_r}$ dans la direction radiale et $\underline{e_\phi}$ dans la direction azimutale.

En coordonnées cylindriques, les opérateurs vectoriels se développent sous la forme suivante, en prenant $\underline{a} = (\,a_x, a_r, a_\phi\,)$:

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial\,(\,r a_r\,)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} \tag{2-24a}$$

$$\underline{\nabla b} = \frac{\partial b}{\partial x}\,\underline{e_x} + \frac{\partial b}{\partial r}\,\underline{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial b}{\partial \phi}\,\underline{e_\phi} \tag{2-24b}$$

$$\underline{\underline{\nabla a}}\cdot\underline{u} = \left(u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)\underline{a} \tag{2-24c}$$

En particulier, l'opérateur d'advection s'écrit une fois développé

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\nabla a}}\cdot\underline{u} = &\left(u_r\frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \phi} + u_x\frac{\partial a_r}{\partial x} - \frac{u_\phi a_\phi}{r}\right)\underline{e_r} + \\ &\left(u_r\frac{\partial a_\phi}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r}\frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + u_x\frac{\partial a_\phi}{\partial x} + \frac{u_\phi a_r}{r}\right)\underline{e_\phi} + \\ &\left(u_r\frac{\partial a_x}{\partial r} + \frac{u_\phi}{r}\frac{\partial a_x}{\partial \phi} + u_x\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)\underline{e_x}\,.\end{aligned} \tag{2-25}$$

Les équations 2-23 s'expriment dans ce repère par les équations 2-26, l'entropie ayant été remplacée par la relation thermodynamique 2-18.

$$\frac{\overline{d}\rho'}{\overline{dt}} + \overline{\rho}\left(\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(ru'_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u'_\phi}{\partial \phi}\right) + \rho'\left(\frac{\partial \overline{u}_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\overline{u}_r\right)}{\partial r}\right) + \left(u'_x\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x} + u'_r\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial r}\right) = 0 \tag{2-26a}$$

$$\overline{\rho}\left(\frac{\overline{d}u'_x}{\overline{dt}} + u'_x\frac{\partial\overline{u}_x}{\partial x} + u'_r\frac{\partial\overline{u}_x}{\partial r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \tag{2-26b}$$

$$\overline{\rho}\left(\frac{\overline{d}u'_r}{\overline{dt}} + u'_x\frac{\partial\overline{u}_r}{\partial x} + u'_r\frac{\partial\overline{u}_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial r} = 0 \tag{2-26c}$$

$$\overline{\rho}\left(\frac{\overline{d}u'_\phi}{\overline{dt}} + \frac{u'_\phi\overline{u}_r}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial p'}{\partial \phi} = 0 \tag{2-26d}$$

$$\overline{\rho}M^2\frac{\overline{d}p'}{\overline{dt}} - \frac{\overline{d}\rho'}{\overline{dt}} - u'_x\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x} - u'_r\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial r} = 0 \tag{2-26e}$$

avec la dérivée particulaire se basant sur l'écoulement porteur définie par

$$\frac{\overline{d}}{\overline{dt}} = \frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}_x\frac{\partial}{\partial x} + \overline{u}_r\frac{\partial}{\partial r}\,. \tag{2-27}$$

Ce système de 5 équations à 5 inconnues, $(u'_x, u'_r, u'_\phi, \rho', p')$ est le système final sur lequel est ensuite basée notre analyse de stabilité linéaire avec les PSE.

1.2 Discussion sur l'écoulement porteur

Dans la modélisation précédente, l'écoulement porteur a clairement été identifié comme étant une solution stationnaire des équations de Navier-Stokes non linéaires. Or, en pratique, obtenir cette solution pour des écoulements turbulents à grands nombres de Reynolds n'est pas aisé, les solutions étant intrinsèquement instables et les calculs DNS à réaliser étant en dehors des capacités numériques actuelles. Cependant, pour des nombres de Reynolds raisonnables, de récentes techniques peuvent être employées. Ainsi, par exemple, Bagheri *et al.* [2009] ont évalué le champ de base d'un écoulement présentant un jet de paroi sortant dans un écoulement transverse. Pour cela, ces auteurs ont couplé leur résolution DNS (un champ instantané de vorticité est présenté sur la figure II.2(a)) à une méthode de filtrage fréquentiel développée par Akervik *et al.* [2006] permettant l'obtention d'une solution d'équilibre stationnaire. L'écoulement de base obtenu est ainsi visible sur la figure II.2(b).

Pour les écoulements que nous souhaitons étudier, les nombres de Reynolds sont considérables. Une telle approche est donc hors de portée. Face à cette difficulté, une solution très simple consiste à considérer le champ moyenné temporellement comme écoulement porteur de nos instabilités. Cette approche n'est cependant pas rigoureuse : pour un écoulement turbulent, il n'y a pas identité entre solution stationnaire et champ moyen, ce dernier n'étant pas un point d'équilibre stationnaire des équations de Navier-Stokes non linéaires. Les figures II.2(c) et (d) mettent ce point en évidence : clairement, les moyennes temporelles des fluctuations de vitesse axiale u_x (rouges) pour les deux senseurs positionnés dans l'écoulement étudié par Bagheri *et al.* [2009] sont différentes des solutions stationnaires (bleues). L'emploi du champ moyen comme écoulement porteur dans une étude de stabilité peut donc paraître inadapté. Toutefois, il est important de remarquer qu'une telle approche peut convenir dans des configurations pour lesquelles le critère développé par [Sipp et Lebedev, 2007] est vérifié. Dans l'étude des jets, il semble que ce choix soit suffisamment pertinent pour l'étude des modes dominants.

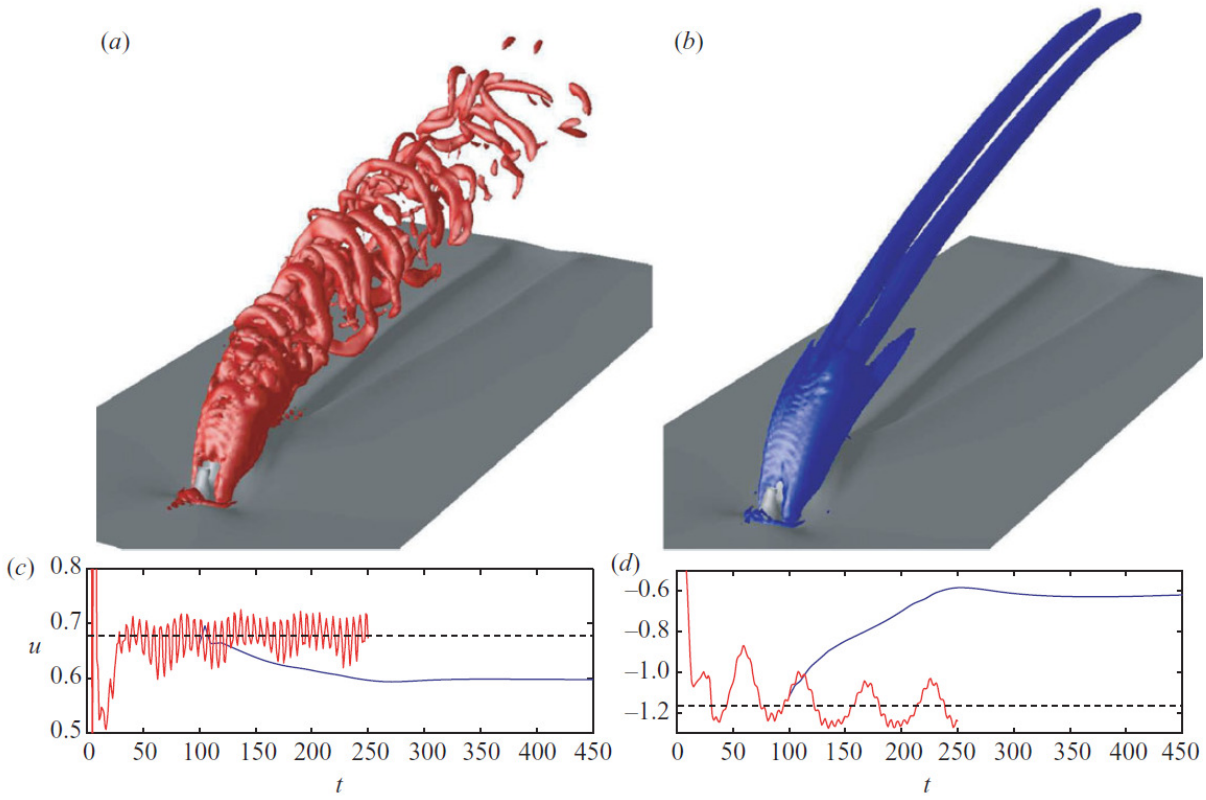


Figure II.2 – *Illustrations issues des travaux de Bagheri* et al. *[2009] sur un jet débouchant dans écoulement transverse, présentant (a) un champ de vorticité instantané issu d'un calcul DNS, (b) l'écoulement de base convergé, ainsi que (c) et (d) les fluctuations temporelles de vitesse axiale mesurées par deux senseurs sur les cas (a) et (b).*

En effet, la région du cône potentiel est globalement une zone où les perturbations s'accroissent et où les non linéarités ne se manifestent a priori que de manière limitée. Dans cette zone, il paraît raisonnable de prendre pour écoulement porteur un champ moyen issu de mesures ou de simulations. Cependant, dans la région en aval du cône potentiel, de très fortes non linéarités apparaissent. Il est alors très discutable, voir incohérent, de prendre comme écoulement porteur ce même champ moyen. Par conséquent, effectuer une analyse de stabilité sur ce dernier ne peut a priori pas rendre compte correctement de l'évolution aval des perturbations. À défaut d'autres solutions adaptées, tout en reconnaissant les limites de l'approche, nous utilisons toujours dans la suite de notre étude des champs moyennés temporellement comme écoulement de base.

Malgré cette limitation apparente, il est intéressant d'observer les résultats de Gudmundsson [2010] reproduits sur la figure I.16 du chapitre précédent. L'auteur compare l'évolution des perturbations de pression en champ proche d'un jet subsonique froid, sur une antenne linéaire, entre mesures filtrées par POD et calculs PSE linéaires autour de la fréquence dominante. Il est très intéressant d'observer qu'à la fois la croissance et la décroissance des perturbations de pression sont reproduites par l'analyse de stabilité. Or, cette décroissance a lieu dans cette zone pleinement turbulente. Il semblerait donc que, dans ce cas, le choix du champ moyen comme écoulement porteur des perturbations étudiées soit suffisamment représentatif de l'écoulement stationnaire, au moins pour les fréquences dominantes qui nous intéressent. Il est alors important de remarquer que ce champ moyen inclut naturellement toute déformation stationnaire du champ de base issue des non linéarités du jet dans la zone pleinement turbulente : la concordance observée par Gudmundsson et Colonius [2011] entre les mesures et les calculs PSE linéaires dans la zone turbulente laisse supposer qu'une telle modélisation permet de prendre en compte dans une certaine mesure l'effet des non linéarités par le biais de l'écoulement porteur choisi. Cette

discussion se retrouve ainsi dans la section V.1.2.1 sur la déformation de l'écoulement porteur par le mode stationnaire $(0,0)$ dans la modélisation PSE non linéaire.

1.3 La modélisation PSE linéaire

On se base sur les équations simplifiées 2-26 (non visqueuses et linéarisées) pour développer un modèle adapté à la description de l'évolution des instabilités hydrodynamiques. Pour cela, on cherche à faire d'autres hypothèses, cette fois sur la forme des ondes étudiées, afin de simplifier davantage le système à résoudre.

1.3.1 Formes modales des perturbations

Contrairement à la théorie de stabilité locale dans laquelle l'écoulement porteur est supposé quasi-parallèle, l'approche ici développée cherche à prendre en compte la divergence du jet afin de modéliser plus précisément l'évolution axiale des ondes d'instabilité. Cette divergence du jet étant faible dans la direction axiale, on peut représenter le champ porteur comme étant fonction d'un paramètre s défini dans l'équation 2-28a, lentement variable en x, avec ε un paramètre d'échelle représentatif de cette faible divergence et donc du taux d'évasement du jet :

$$s = \varepsilon\, x \tag{2-28a}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\delta_w}{\Delta x} \tag{2-28b}$$

On réécrit la superposition d'une perturbation à l'écoulement de base en théorie de stabilité (équation 2-12) par l'équation 2-29, afin de marquer cette lente variation axiale de l'écoulement porteur.

$$\underline{q}(x,r,\phi,t) = \overline{\underline{q}}(s,r) + \underline{q}'(x,r,\phi,t) \tag{2-29}$$

Les perturbations $\underline{q}'$ ne varient a priori pas aussi lentement que l'écoulement porteur dans la direction axiale. Cependant, suivant l'approche développée par Herbert [1994, 1997], ces fluctuations peuvent être écrites sous la forme de modes normaux avec une fonction d'amplitude $\hat{\underline{q}}$ lentement variable dans la direction axiale x, donc fonction du paramètre s, et un terme ondulatoire dont l'objet est d'absorber un maximum de fluctuations axiales rapides. Une telle approche est donc très proche de la méthode des échelles multiples. Les perturbations s'écrivent alors

$$\underline{q}'(x,r,\phi,t) = \hat{\underline{q}}(s,r)\, \exp i\left(\int_{x_0}^{x} \alpha(\xi)d\xi + m\,\phi - \omega\, t\right), \tag{2-30}$$

avec α le nombre d'onde axial, m le nombre d'onde azimutal et ω la pulsation temporelle. Les dérivées partielles s'écrivent

$$\frac{\partial \underline{q}'}{\partial x}(x,r,\phi,t) = \left(\frac{\partial \hat{\underline{q}}}{\partial x} + i\alpha(x)\hat{\underline{q}}\right) E\,, \tag{2-31a}$$

$$\frac{\partial \underline{q}'}{\partial r}(x,r,\phi,t) = \frac{\partial \hat{\underline{q}}}{\partial r}\, E\,, \tag{2-31b}$$

$$\frac{\partial \underline{q}'}{\partial \phi}(x,r,\phi,t) = im\hat{\underline{q}}\, E\,, \tag{2-31c}$$

$$\frac{\partial \underline{q}'}{\partial t}(x,r,\phi,t) = -i\omega\hat{\underline{q}}\, E\,, \tag{2-31d}$$

avec $E = \exp i\left(\int_{x_0}^{x} \alpha(\xi)d\xi + m\,\phi - \omega\, t\right)$ le terme ondulatoire.

1.3.2 Perturbations dans un écoulement turbulent

Il est ici important de faire un lien avec la physique réelle de l'écoulement. En effet, l'approche de stabilité représentée par l'équation 2-29 représente l'évolution instationnaire d'une perturbation cohérente sur un écoulement porteur. Or, ce champ instationnaire $\underline{q}$ n'est pas représentatif d'un écoulement turbulent instationnaire réel. En effet, le champ instationnaire mesuré ou simulé, que nous notons ici $\underline{\varphi}$, contient, en plus des structures cohérentes que nous étudions, des fluctuations incohérentes $\underline{q}''$ que nous identifions à la turbulence de petite échelle. Ce champ instationnaire réel peut donc être représenté au moyen d'une décomposition triple comme dans l'équation 2-32. Dans une telle décomposition, $\underline{q}'$ représente les fluctuations cohérentes, corrélées en phase, et $\underline{q}''$ représente les fluctuations incohérentes, non corrélées en phase.

$$\underline{\varphi}(x,r,\phi,t) = \underline{\overline{q}}(s,r) + \underline{q}'(x,r,\phi,t) + \underline{q}''(x,r,\phi,t) \tag{2-32}$$

On voit alors que l'évolution des structures cohérentes de grande échelle est également dépendante de l'évolution de la turbulence de petite échelle, puisque l'ensemble doit satisfaire les équations de Navier-Stokes. Par conséquent, la pertinence de notre étude de stabilité dans la description des structures cohérentes au moyen de l'équation 2-29 n'a physiquement de sens que si l'influence de la turbulence de petite échelle sur ces grandes structures turbulentes est négligeable.

Une telle simplification suppose donc que les échelles spatiales et temporelles des petites et grandes structures turbulentes soient suffisamment séparées afin d'en négliger les interactions, ce qui est globalement vérifié [Hussain, 1983]. Cette hypothèse peut être étayée par l'expérience, toujours en se basant sur les observations expérimentales de Brown et Roshko [1974] : dans ces travaux, malgré l'augmentation importante du nombre de Reynolds et donc de la turbulence de petite échelle, les structures cohérentes de grande échelle sont, elles, qualitativement inchangées.

1.3.3 Système PSE linéaire

On définit les vecteurs des variables d'écoulement du champ de base et du champ perturbé par

$$\underline{\overline{q}} = (\overline{u}_x, \overline{u}_r, 0, \overline{\rho}, \overline{p})^T \ , \tag{2-33a}$$

$$\underline{q}' = \left(u'_x, u'_r, u'_\phi, \rho', p'\right)^T \ . \tag{2-33b}$$

L'introduction de la décomposition en modes normaux 2-30 dans les équations 2-26 donne alors un système d'équations linéaires portant sur le terme d'amplitude $\underline{\hat{q}}$ lentement variable en x. Ce système est représenté sous forme matricielle dans l'équation 2-34, les expressions des matrices mises en jeu étant explicitées dans les équations 2-35.

$$\left(\underline{\underline{\mathcal{A}}} + \underline{\underline{\mathcal{B}}}\right) \cdot \underline{\hat{q}} + \underline{\underline{\mathcal{C}}} \cdot \frac{\partial \underline{\hat{q}}}{\partial x} + \underline{\underline{\mathcal{D}}} \cdot \frac{\partial \underline{\hat{q}}}{\partial r} = \underline{0} \tag{2-34}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{A}}} = \alpha(x)\underline{\underline{\mathcal{A}_0}} + m\underline{\underline{\mathcal{A}_1}} + \omega\underline{\underline{\mathcal{A}_2}} \tag{2-35a}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{A}_0}} = i \begin{bmatrix} \overline{\rho} & 0 & 0 & \overline{u}_x & 0 \\ 0 & \overline{\rho}\,\overline{u}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\rho}\,\overline{u}_x & 0 & 0 \\ \overline{\rho}\,\overline{u}_x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\overline{u}_x & \overline{\rho}\,\overline{u}_x M^2 \end{bmatrix} \tag{2-35b}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{A}_1}} = \frac{i}{r}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \overline{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-35c}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{A}_2}} = -i\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \overline{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\rho} & 0 & 0 \\ \overline{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \overline{\rho}M^2 \end{bmatrix} \tag{2-35d}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x} & \frac{\overline{\rho}}{r} + \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial r} & 0 & \frac{\overline{u}_r}{r} + \frac{\partial\overline{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial\overline{u}_r}{\partial r} & 0 \\ \overline{\rho}\frac{\partial\overline{u}_r}{\partial x} & \overline{\rho}\frac{\partial\overline{u}_r}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\overline{\rho}\,\overline{u}_r}{r} & 0 & 0 \\ \overline{\rho}\frac{\partial\overline{u}_x}{\partial x} & \overline{\rho}\frac{\partial\overline{u}_x}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x} & -\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-35e}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{C}}} = \begin{bmatrix} \overline{\rho} & 0 & 0 & \overline{u}_x & 0 \\ 0 & \overline{\rho}\,\overline{u}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\rho}\,\overline{u}_x & 0 & 0 \\ \overline{\rho}\,\overline{u}_x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\overline{u}_x & \overline{\rho}\,\overline{u}_x M^2 \end{bmatrix} \tag{2-35f}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{D}}} = \begin{bmatrix} 0 & \overline{\rho} & 0 & \overline{u}_r & 0 \\ 0 & \overline{\rho}\,\overline{u}_r & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \overline{\rho}\,\overline{u}_r & 0 & 0 \\ \overline{\rho}\,\overline{u}_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\overline{u}_r & \overline{\rho}\,\overline{u}_r M^2 \end{bmatrix} \tag{2-35g}$$

Le système 2-34 porte sur le vecteur des amplitudes $\underline{\hat{q}}$ supposé "lentement" variable dans la direction axiale. Par conséquent, pourvu que cette hypothèse soit vérifiée, la résolution du système dans cette direction ne devrait requérir que peu d'efforts numériques. De plus, plusieurs travaux antérieurs ont mis en évidence la quasi parabolicité d'un tel système dans la direction axiale, sujet abordé dans la section 2.2. En effet, la direction de l'écoulement constitue une direction fortement privilégiée dans la propagation des ondes d'instabilité hydrodynamiques ici étudiées. Quasiment aucune perturbation ne "remonte" l'écoulement, tant que l'on se situe dans l'écoulement et pour l'ensemble des jets ici considérés.[1] Cependant, une telle approche n'est a priori plus valable en dehors de l'écoulement, où les ondes acoustiques ne sont pas soumises aux mêmes contraintes. Cette observation justifiera dans le chapitre IV l'emploi d'une technique complémentaire de propagation acoustique.

Par conséquent, dans l'étude des ondes d'instabilité, la résolution du système peut se faire par une simple méthode de marche en avant : se donnant une solution initiale, l'évolution de l'onde aux abscisses suivantes peut être obtenue.

1.3.4 Condition de normalisation

La décomposition effectuée dans l'équation 2-30 en une amplitude lentement variable en x d'une part, et un terme ondulatoire E également fonction de l'abscisse par le nombre d'onde

1. Lorsque le jet est suffisamment chauffé, des instabilités absolues peuvent apparaître, pour lesquelles cette hypothèse n'est plus valable [Lesshafft *et al.*, 2006].

axial $\alpha(x)$ d'autre part, est ambigüe. En effet, une telle décomposition ne saurait être unique, la répartition des énergies associées aux fluctuations $\underline{q}'(\underline{x},t)$ pouvant a priori s'effectuer de différentes manières entre $\alpha(x)$ et $\underline{\hat{q}}(s,r)$, aucune condition n'étant imposée dans la formulation précédente. De plus, ce nombre d'onde axial s'ajoute aux 5 inconnues de $\underline{\hat{q}}(s,r)$, portant le total à 6 inconnues pour 5 équations. Il est donc nécessaire d'établir une relation assurant une telle décomposition et permettant de satisfaire l'hypothèse énoncée précédemment d'une lente variation axiale des amplitudes $\underline{\hat{q}}(s,r)$, soit encore d'une absorption maximale des variations axiales rapides dans le terme ondulatoire E.

Pour cela, Herbert [1997] part du principe que l'analyse PSE est une extension directe de l'analyse de stabilité locale. Dans cette dernière, la dérivée du logarithme de la fluctuation $\underline{q}'$ donne naturellement le nombre d'onde axial,

$$-i\frac{\partial \ln \underline{q}'}{\partial x} = \alpha\,, \tag{2-36}$$

tandis que dans l'approche PSE,

$$-i\frac{\partial \ln \underline{q}'}{\partial x} = \alpha(x) - i\frac{1}{\underline{\hat{q}}}\frac{\partial \underline{\hat{q}}}{\partial x}\,. \tag{2-37}$$

Si dans l'analyse de stabilité locale la relation 2-36 est indépendante de r par construction, il n'en va pas de même dans l'approche PSE. En effet, cette dernière est une fonction de la position radiale : une définition de $\alpha(x)$ comparable à celle de l'approche de stabilité locale ne peut être obtenue que dans un sens local ou intégral. Suivant la modélisation de Airiau [1994], on multiplie cette dernière équation par $\underline{\hat{q}}^\dagger\underline{\hat{q}}\mu_k$, on intègre dans la direction radiale et on divise par l'intégrale de la distribution $|\underline{\hat{q}}|^2\mu_k$, représentant potentiellement une forme d'énergie associée à la fonction d'amplitude $\underline{\hat{q}}(\underline{x},t)$:

$$\frac{\int_0^\infty -i|\underline{\hat{q}}|^2\frac{\partial \ln \underline{q}'}{\partial x}\mu_k\,dr}{\int_0^\infty |\underline{\hat{q}}|^2\mu_k\,dr} = \alpha(x) - i\frac{\int_0^\infty \underline{\hat{q}}^\dagger\frac{\partial \underline{\hat{q}}}{\partial x}\mu_k\,dr}{\int_0^\infty |\underline{\hat{q}}|^2\mu_k\,dr} \tag{2-38}$$

Le terme μ_k est fonction du type de normalisation choisie. Une liste non exhaustive de normalisations possibles peut être trouvée dans les travaux de Airiau [1994]. Dans la suite de cette étude, on ne considérera que deux valeurs possibles de μ_k :

- $\mu_1 = 1$, utilisé par exemple dans les travaux de Piot *et al.* [2006] ou encore Yen et Messersmith [1999]
- $\mu_2 = r$, utilisé par Gudmundsson [2010]

Différentes normalisations sont ainsi étudiées sur un cas numérique dans la section 3.3. Le choix de la norme porte également sur les variables représentées par $\underline{\hat{q}}$: seules les fonctions d'amplitude des vitesses, par exemple, peuvent être utilisées afin de travailler sur une norme basée sur la représentation de l'énergie cinétique associée aux fonctions d'amplitudes des perturbations. Ainsi, en toute rigueur, les notations $\underline{\hat{q}}_j$ et $\alpha_{k,j}(x)$ devraient ici être employées. Par simplicité ces indices sont omis, mais il importe de remarquer que selon la norme choisie, le nombre d'onde axial $\alpha(x)$ diffère. La perturbation finale $\underline{q}'$, elle, ne devrait par contre pas dépendre de la norme choisie, puisque cette dernière n'a pour but que de "répartir" les énergies entre E et $\underline{\hat{q}}$.

L'équation 2-38 peut s'écrire de manière schématique

$$\alpha_{obj} = \alpha(x) - i\frac{N}{A^2}\,, \tag{2-39}$$

où α_{obj} est la valeur recherchée du nombre d'onde axial, N la normalisation et A l'amplitude de la perturbation associée à la normalisation choisie. Ainsi, en imposant la condition

$$N = \int_0^\infty \underline{\hat{q}}^\dagger\frac{\partial \underline{\hat{q}}}{\partial x}\mu_k\,dr = 0\,, \tag{2-40}$$

on obtient une définition du nombre d'onde axial $\alpha(x)$ sous forme intégrale dans l'approche PSE, cohérente et compatible avec l'approche de stabilité locale :

$$\alpha(x) = -i\frac{\int_0^\infty |\underline{\hat{q}}|^2 \frac{\partial \ln q'}{\partial x}\mu_k \, dr}{\int_0^\infty |\underline{\hat{q}}|^2 \mu_k \, dr} \tag{2-41}$$

La condition 2-40 est appelée condition de normalisation et assure la suppression de toute forme exponentielle dans la définition de $\underline{\hat{q}}$, qui a alors une évolution lente (algébrique) dans la direction axiale [Gudmundsson, 2010]. La condition 2-40 peut être vue comme la projection de $\frac{\partial \underline{\hat{q}}}{\partial x}$ sur le vecteur $\underline{\hat{q}}$ au moyen d'un produit scalaire. En imposant la normalité de ces deux vecteurs on assure la croissance algébrique de $\underline{\hat{q}}$ en x. En effet, dans le cas contraire on aurait une relation différentielle du type $\frac{\partial \underline{\hat{q}}}{\partial x} = a\underline{\hat{q}} + b$ donnant lieu à une croissance exponentielle de $\underline{\hat{q}}$. Une telle condition satisfait donc la contrainte souhaitée précédemment sur la "lente" évolution axiale du terme d'amplitude et permet de définir la valeur du nombre d'onde axial $\alpha(x)$.

1.4 Conditions initiales

Par la quasi-parabolicité du système, une simple méthode de marche en x est utilisée pour sa résolution. L'initialisation de la résolution se fait donc à l'abscisse initiale x_0 au moyen d'une solution exacte ou approchée du problème.

1.4.1 Méthodes d'initialisation

La prise en compte des effets non parallèles dans cette condition initiale devrait en toute rigueur être faite, l'approche PSE étant développée dans cette optique. En effet, il est important d'apporter une condition initiale qui ne soit pas trop éloignée de la solution réelle afin que la convergence et donc la résolution du système PSE soient assurées. Pour ce faire, des approches asymptotiques de type méthode des échelles multiples peuvent être employées localement. Une autre approche consiste à résoudre le système PSE sur un écoulement parallèle représentatif de l'écoulement initial afin d'approcher la solution PSE réelle [Yen et Messersmith, 1998, 1999]. Ces différentes méthodes assurent une certaine cohérence dans l'initialisation du système PSE et réduisent les effets transitoires.

Cependant, l'initialisation peut également se faire au moyen de solutions issues de l'analyse de stabilité locale. Le gain apporté par l'utilisation de méthodes non parallèles est en général mineur. En effet, la divergence de l'écoulement étant faible, l'analyse de stabilité locale, qui donne la solution à l'ordre 0, est généralement suffisante. Les effets transitoires sont plus importants aux premières stations, mais ne compromettent pas la convergence du calcul. De plus, cette solution est beaucoup plus simple à mettre en oeuvre qu'une initialisation prenant en compte les effets non parallèles. Notre choix s'est donc porté sur cette approche.

1.4.2 Système d'équations pour l'analyse de stabilité locale

Le système à résoudre pour l'analyse de stabilité locale est directement obtenu à partir du formalisme développé pour l'analyse PSE linéaire dans les équations 2-34 et 2-35. Pour cela, comme présenté dans la section I.4.1, on considère un écoulement localement parallèle et une forme des mode normaux définie par l'équation 1-6. Tous les termes d'ordre ε sont alors négligés (les dérivées axiales et la vitesse radiale $\overline{u}_r$ de l'écoulement de base), ainsi que la dérivée axiale du vecteur $\underline{\hat{q}}$. On obtient ainsi un système simplifié, à l'ordre 0 en ε, qui s'écrit sous forme matricielle de manière comparable au système PSE :

$$\left(\underline{\underline{\mathcal{A}}} + \underline{\underline{\mathcal{B}}}\right) \cdot \underline{\hat{q}} + \underline{\underline{\mathcal{D}}} \cdot \frac{\partial \underline{\hat{q}}}{\partial r} = \underline{0} \tag{2-42}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{A}}} = \alpha\underline{\underline{\mathcal{A}_0}} + m\underline{\underline{\mathcal{A}_1}} + \omega\underline{\underline{\mathcal{A}_2}} \tag{2-43a}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{A}_0}} = i\begin{bmatrix} \overline{\rho} & 0 & 0 & \overline{u}_x & 0 \\ 0 & \overline{\rho}\,\overline{u}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\rho}\,\overline{u}_x & 0 & 0 \\ \overline{\rho}\,\overline{u}_x & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\overline{u}_x & \overline{\rho}\,\overline{u}_x M^2 \end{bmatrix} \tag{2-43b}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{A}_1}} = \frac{i}{r}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \overline{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-43c}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{A}_2}} = -i\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \overline{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\rho} & 0 & 0 \\ \overline{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \overline{\rho}M^2 \end{bmatrix} \tag{2-43d}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\overline{\rho}}{r} + \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\rho}\frac{\partial\overline{u}_x}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-43e}$$

$$\underline{\underline{\mathcal{D}}} = \begin{bmatrix} 0 & \overline{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-43f}$$

Pour un nombre d'onde azimutal m et une pulsation ω donnés, le système constitue un problème aux valeurs propres pour α. La détermination des valeurs propres du système se fait par un calcul direct, les dimensions des matrices considérées par la suite restant raisonnables. Un spectre de stabilité donnant la répartition des nombres d'onde axiaux α dans le plan complexe est ainsi obtenu. Un tel spectre est présenté sur la figure II.3. Ce dernier est obtenu à l'abscisse initiale d'un jet supersonique à $M = 2.1$, étudié dans la section 3.4, pour un nombre d'onde azimutal $m = 0$ (mode axisymétrique) et une fréquence adimensionnée en nombre de Strouhal $St = f\,d/U_j = 0.20$.

Il est possible de mettre en évidence plusieurs familles de valeurs propres dans ce spectre. Avec la convention de signes choisie dans l'équation 2-30, les modes hydrodynamiques instables de Kelvin-Helmholtz (modes KH par la suite) sont identifiés dans le quart de plan inférieur droit. Ainsi, ces modes possèdent une partie imaginaire α_i négative, leur taux d'amplification, et une partie réelle α_r positive, associée à leur vitesse de phase locale.

À cette valeur propre α est associé un vecteur propre $\underline{\hat{q}} = (\hat{u}_x, \hat{u}_r, \hat{u}_\phi, \hat{\rho}, \hat{p})$. Ce couple $(\alpha, \underline{\hat{q}})$ définit notre condition d'initialisation du système PSE. Les fonctions définissant le vecteur propre $\underline{\hat{q}}$ associé à l'exemple précédent sont représentées sur la figure II.4, en notant que dans le cas axisymétrique $\hat{u}_\phi = 0$. Dans cet exemple, la couche de mélange se situe à la position radiale $r/d = 0.5$, où les amplitudes des perturbations sont les plus importantes.

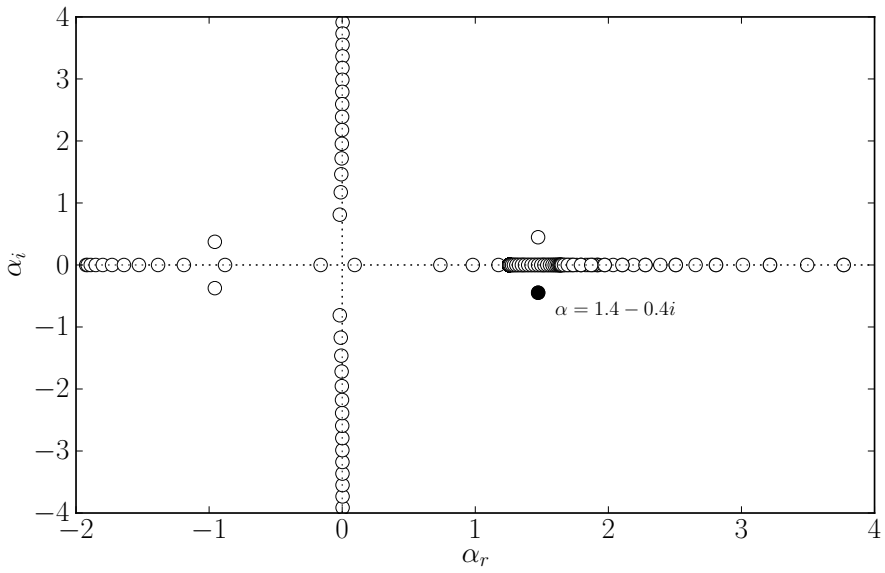


Figure II.3 – *Spectre de stabilité d'un jet supersonique à $M = 2.1$ [Troutt et McLaughlin, 1982], obtenu pour $m = 0$ et $St = 0.20$ à l'abscisse initiale $x = 0$, mettant en évidence les différentes valeurs propres du système (○), ainsi qu'un mode KH (●) pour un nombre d'onde axial $\alpha = 1.4 - 0.4i$.*

1.5 Conditions aux limites

La résolution du système 2-34 nécessite la définition de conditions aux limites adéquates pour le problème considéré, sur l'axe et à l'infini.

Conditions sur l'axe L'utilisation de coordonnées cylindriques introduit classiquement une singularité sur l'axe, en $r = 0$, par l'apparition de termes en $1/r$ dans les matrices $\underline{\underline{\mathcal{A}_1}}$ et $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$. Cette difficulté est résolue au moyen de conditions appropriées obtenues en considérant l'équation de continuité et l'équation de quantité de mouvement projetée sur ϕ. Ainsi, on fait apparaître les conditions

$$\overline{\rho}\hat{u}_r + im\overline{\rho}\hat{u}_\phi = 0\,, \tag{2-44a}$$

$$im\hat{p} = 0\,, \tag{2-44b}$$

sachant que par symétrie on doit avoir $\overline{u}_r = 0$ sur l'axe du jet. Cette dernière condition est importante et doit être vérifiée afin d'obtenir une solution satisfaisante. Dans le cas contraire, la résolution peut rapidement diverger par incompatibilité des conditions sur l'axe. On voit apparaître deux cas distincts selon la valeur prise par le nombre d'onde azimutal m :

$$m = 0 \implies \hat{u}_r = 0 \tag{2-45}$$

$$m \neq 0 \implies \begin{cases} \hat{p} = 0 \\ \hat{u}_r + im\hat{u}_\phi = 0 \end{cases} \tag{2-46}$$

Ces conditions ne sont valables que pour les équations développées dans notre modélisation PSE à partir des équations d'Euler linéarisées et perturbées. Lorsque les termes visqueux sont retenus, des conditions telles que celles utilisées par Khorrami *et al.* [1989] sont nécessaires, d'autres distinctions selon m pouvant apparaître.

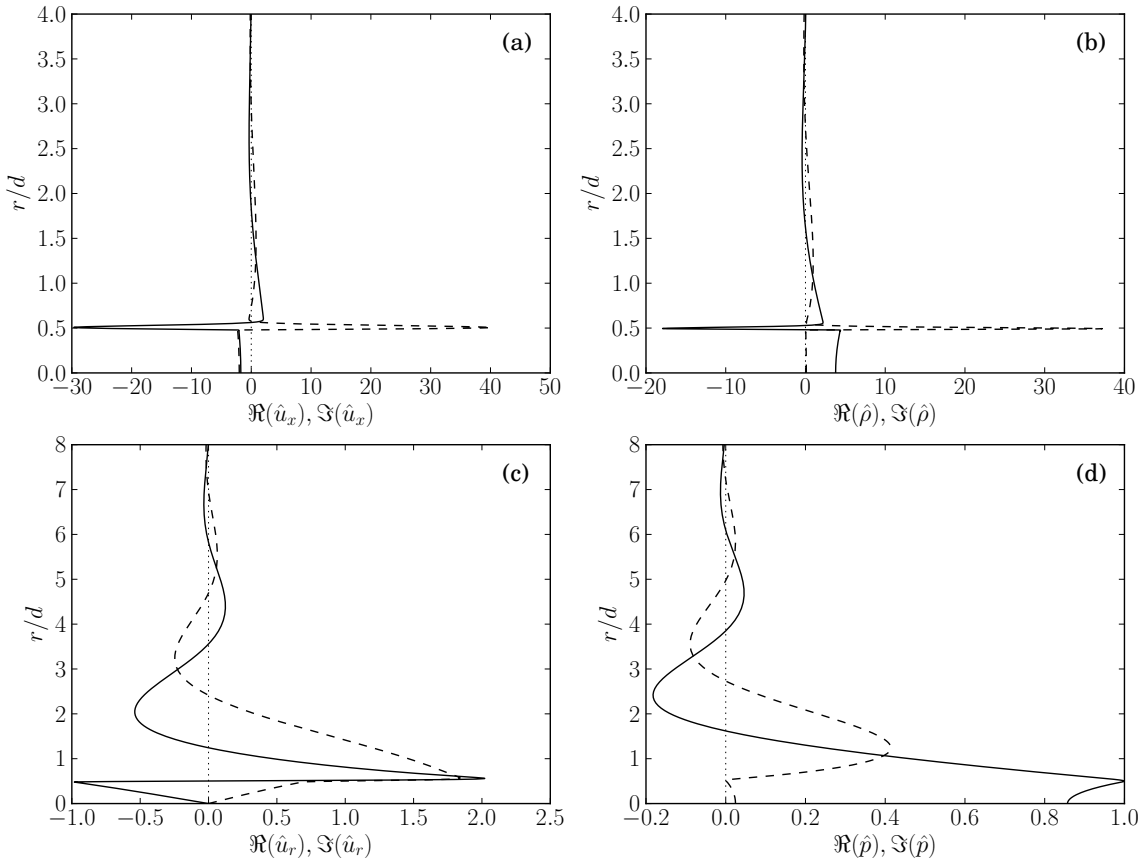


Figure II.4 – *Fonctions propres issues de l'analyse de stabilité locale effectuée sur un jet supersonique* $M = 2.1$ *pour* $m = 0$ *et* $St = 0.20$*, décrivant les parties réelles (——) et imaginaires (- - - -) des fonctions (a)* $\hat{u}_x$ *; (b)* $\hat{\rho}$ *; (c)* $\hat{u}_r$ *; (d)* $\hat{p}$*.*

Conditions à l'infini Loin de l'axe, le système 2-34 se simplifie en considérant un milieu ambiant au repos, soit avec $\overline{u}_x = \overline{u}_r = \overline{u}_\phi = 0$. On obtient alors le système d'équations suivant :

$$(i\overline{\rho}\alpha)\,\hat{u}_x + \left(\frac{\overline{\rho}}{r}\right)\hat{u}_r + \left(\frac{im\overline{\rho}}{r}\right)\hat{u}_\phi - (i\omega)\,\hat{\rho} + \overline{\rho}\left(\frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial r}\right) = 0 \tag{2-47a}$$

$$-(i\omega\overline{\rho})\,\hat{u}_r + \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} = 0 \tag{2-47b}$$

$$-(i\omega\overline{\rho})\,\hat{u}_\phi + \left(\frac{im}{r}\right)\hat{p} = 0 \tag{2-47c}$$

$$-(i\omega\overline{\rho})\,\hat{u}_x + (i\alpha)\,\hat{p} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = 0 \tag{2-47d}$$

$$(i\omega)\,\hat{\rho} - \left(i\omega\overline{\rho}M^2\right)\hat{p} = 0 \tag{2-47e}$$

Plusieurs approches sont ici possibles. Afin d'obtenir des conditions à l'infini satisfaisantes, il est a priori nécessaire d'utiliser une méthode numérique de non réflexion sur cette frontière. On peut par exemple citer les conditions de Thompson [1987], utilisées dans l'approche PSE de Malik et Chang [1997] ou Gudmundsson [2010].

Il est cependant possible de simplifier davantage ce système en exploitant les hypothèses PSE [Piot *et al.*, 2006]. En effet, la lente variation axiale des fonctions d'amplitude permet de considérer les termes $\partial_x \hat{p}$ et $\partial_x \hat{u}_x$ comme étant d'ordre 1 en ε, les autres termes étant d'ordre 0.

En négligeant ces termes, on obtient alors une équation différentielle homogène d'ordre 2 sur $\hat{p}$:

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \left(\overline{\rho}\omega^2 M^2 - \frac{m^2}{r^2} - \alpha^2\right)\hat{p} = 0 \tag{2-48}$$

Cette équation a pour solution une combinaison linéaire des fonctions de Hankel $H_m^{(1)}$ et $H_m^{(2)}$, soit

$$\hat{p}(r) = a_1 H_m^{(1)}(i\lambda r) + a_2 H_m^{(2)}(i\lambda r)\,, \tag{2-49}$$

avec $\lambda^2 = \alpha^2 - \overline{\rho}\omega^2 M^2$. Ces fonctions ont des comportements asymptotiques exponentiels en r et seule une solution décroissante peut être physiquement admissible. On choisit alors λ tel que sa partie réelle soit positive et la solution est alors

$$\hat{p}(r) = a_1 H_m^{(1)}(i\lambda r)\,. \tag{2-50}$$

Finalement, le comportement asymptotique de $H_m^{(1)}$ lorsque $r \to \infty$ permet d'obtenir la relation suivante utilisée sur notre frontière :

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \left(\lambda + \frac{1}{2r}\right)\hat{p} = 0 \tag{2-51}$$

Une telle approche n'est a priori pas cohérente avec la modélisation PSE, dont le but était justement de prendre en compte ces termes d'ordre ε. Cependant, comme montré par la suite, le terme $\partial_x \hat{p}$ est négligé dans la résolution du système PSE. Le terme $\partial_x \hat{u}_x$ quant à lui s'exprime en fonction de $\partial_x \hat{p}$, $\partial_x^2 \hat{p}$ et $\partial_x \alpha$. Ces deux premiers termes sont négligeables avec l'argument précédent. Le dernier terme est, lui, d'ordre ε et n'est pas négligé dans la résolution PSE. On considère cependant cette approximation comme satisfaisante au vu des résultats obtenus par la suite, peu de différences significatives étant attendues par l'utilisation des méthodes plus complexes évoquées précédemment.

II.2 Méthodes numériques pour la résolution du système PSE linéaire

La résolution du système PSE nécessite la discrétisation radiale et axiale des opérateurs, ainsi que l'utilisation de méthodes numériques adaptées au problème afin d'assurer la convergence et la qualité de la solution. Cette solution est recherchée sous la forme du couple $(\alpha, \underline{\hat{q}})$ à chaque abscisse x.

2.1 Maillage

Le maillage utilisé dans l'ensemble des configurations ici traitées est un maillage bidimensionnel structuré dans le plan (x, r), le problème étant axisymétrique. De plus, la méthode de résolution associée à l'approche PSE impose de considérer le problème à des abscisses x successives. Par conséquent, il est naturel ici de choisir un maillage rectiligne. Enfin, les profils des champs porteurs présentent typiquement de forts gradients dans la couche de mélange autour de $r = 0.5\,d$ comme observé sur la figure II.4. Il est donc nécessaire de concentrer la répartition radiale des points dans de telles zones. Par simplicité, comme la divergence du jet est faible, le maillage radial est choisi constant dans la direction axiale. Ainsi, la figure II.5 est représentative des maillages utilisés par la suite. Une répartition radiale évoluant axialement peut également être envisagée en introduisant alors une métrique associée à cette répartition dans notre système PSE (voir par exemple Airiau [1994]).

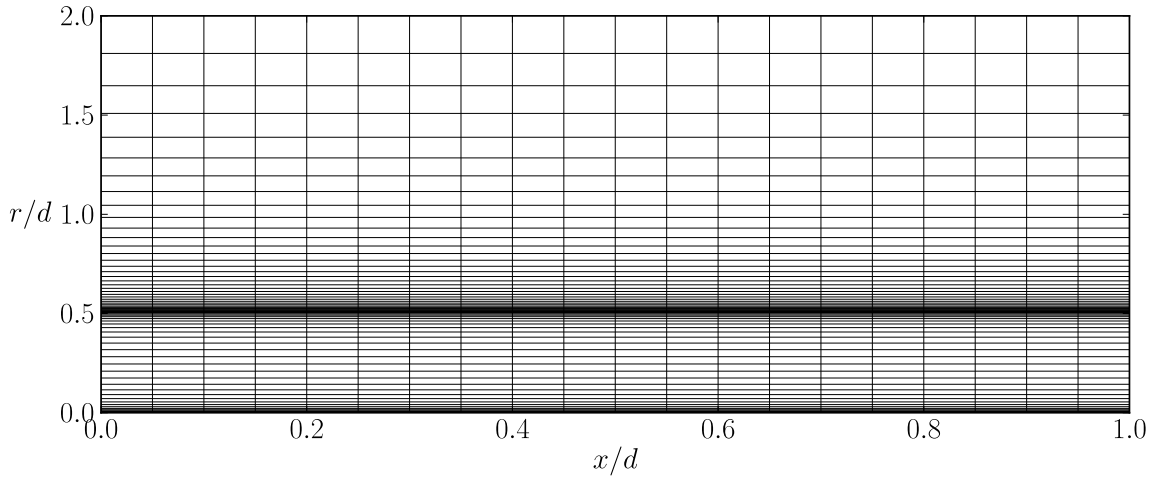


Figure II.5 – *Maillage structuré bidimensionnel rectiligne resserré autour de* $r/d = 0.5$.

2.2 Discrétisation axiale

Le système PSE étant quasi-parabolique, un schéma implicite d'ordre 1 est généralement considéré comme suffisant afin d'estimer les dérivées axiales du système [Airiau, 1994, Day *et al.*, 2001], les variations axiales des fonctions d'amplitude étant faibles par construction du modèle PSE. Les résultats de la section 3.2 vérifient cette hypothèse sur un cas particulier en comparant des schémas d'ordre 1 et 2 en x. Numériquement, la résolution se fait alors par incréments axiaux Δx_j et les dérivées axiales s'écrivent

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial x} \approx \frac{\hat{q}_j - \hat{q}_{j-1}}{\Delta x_j}\,, \tag{2-52}$$

avec $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$.

Pour un système parfaitement parabolique, ce pas de discrétisation axial pourrait être choisi sans contraintes. Or, le système PSE ici obtenu contient un résidu d'ellipticité principalement associé au gradient de la fonction d'amplitude de pression $\partial_x \hat{p}$, comme observé dans le cas de la couche limite par Haj-Hariri [1994]. Ce résidu d'ellipticité peut être physiquement appréhendé comme une perturbation pouvant se propager dans la direction amont, invalidant l'hypothèse de parabolicité et rendant le problème mal posé. Pour de trop petits incréments Δx, la méthode de résolution ne converge plus.

Afin d'assurer la convergence de la solution, plusieurs approches sont possibles. En effet, comme explicité par Li et Malik [1996] dans le cas de couches de mélange bidimensionnelles, un critère sur le pas de discrétisation axial peut être établi. Ces auteurs ont ainsi montré qu'un incrément axial tel que

$$\Delta x > \frac{1}{|\alpha_r|} \tag{2-53}$$

permet de "sauter" les perturbations se propageant dans la direction amont et ainsi assurer la stabilité du calcul. Ce pas minimum est également retrouvé dans le cas du jet dans les travaux de Piot [2005]. Une solution permettant de réduire cette ellipticité est d'amortir l'effet de ce gradient de pression. Sa suppression pure et simple permet de réduire le pas d'avancement en x d'un ordre de grandeur et ne modifie pas significativement la solution [Li et Malik, 1996]. Cette approche est celle retenue dans nos travaux. Cette suppression du terme $\partial_x \hat{p}$ a également été choisie par Day *et al.* [2001] dans l'analyse de couches de mélange réactives, et d'excellentes comparaisons numériques avec des résultats DNS ont été observées. Il est cependant intéressant de noter que malgré la suppression de ce terme, le système n'est toujours pas complètement

parabolique. Une ellipticité résiduelle se manifeste ainsi pour des incréments plus faibles et pourrait être une conséquence de la condition de normalisation. Enfin, une dernière solution est de stabiliser la méthode de résolution des PSE, comme cela est suggéré par Andersson *et al.* [1998]. Cette méthode, relativement simple, n'a cependant que peu d'intérêt ici : comme nous le verrons par la suite, les pas de discrétisation que nous pouvons utiliser sont suffisamment faibles pour décrire correctement la solution, puisque une dizaine de points par longueur d'onde peuvent généralement être obtenus.

La convergence de la solution est également conditionnée par le schéma numérique utilisé dans la direction axiale. En effet, comme observé par Herbert [1994] et Airiau [1994], les schémas explicites engendrent des instabilités numériques. On utilise donc un schéma totalement implicite.

2.3 Discrétisation radiale

Dans la direction radiale, les contraintes de discrétisation sont différentes. Les approches de stabilité, locales ou non locales, nécessitent de capturer finement les inflexions des profils du champ de base. Ainsi, une discrétisation relativement fine doit être effectuée dans les zones de cisaillement. Suite à plusieurs essais, deux schémas de discrétisation radiale sont ici utilisés, selon le jet étudié.

2.3.1 Méthode spectrale

La méthode de collocation spectrale pour la résolution d'équations différentielles emprunte à la méthode de Fourier en représentant la solution comme une somme tronquée de fonctions de base [Peyret, 2002]. Dans le cas de problèmes à caractère non périodique, l'utilisation de polynômes de Tchebychev comme base de décomposition avec les points de collocation de Gauss-Lobato est bien adaptée. Ces points de collocation, définis dans l'espace de calcul sur l'intervalle $[-1, 1]$, sont tels que

$$\xi_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right) , \tag{2-54}$$

avec $0 \leq j \leq N$, définissant ainsi $N + 1$ points de collocation dans le domaine considéré. Les fonctions propres peuvent ainsi être décomposées sur la base des polynômes de Tchebychev

$$\hat{q}(\xi) = \sum_{k=0}^{N} a_k T_k(\xi) , \tag{2-55}$$

où les T_k sont les polynômes définis par

$$T_k(\xi) = \cos\left(k \cos^{-1} \xi\right) . \tag{2-56}$$

Un résultat important dans l'utilisation de la méthode de collocation spectrale est l'obtention de la dérivée des grandeurs considérées en fonction de ces mêmes grandeurs aux points de collocation. Ainsi, on montre que

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial \xi}(\xi_i) = \sum_{j=0}^{N} d_{i,j}\, \hat{q}(\xi_j) , \tag{2-57}$$

soit encore sous forme matricielle, pour un vecteur $\underline{\hat{q}}$ issu de la discrétisation d'une fonction $\hat{q}$:[2]

$$\frac{\partial \underline{\hat{q}}}{\partial \xi} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\hat{q}} . \tag{2-58}$$

2. Ce vecteur $\underline{\hat{q}}$ issu de la discrétisation d'une fonction $\hat{q}$ est différent du vecteur $\underline{\hat{q}} = (\hat{u}_x, \hat{u}_r, \hat{u}_\theta, \hat{\rho}, \hat{p})^T$ utilisé dans la modélisation PSE pour définir l'ensemble des variables de l'écoulement. Cependant, la forme discrète de ce dernier vecteur est également représentée par un vecteur $\underline{\hat{q}}$, ce qui justifie cette indifférence de notation.

Les coefficients de la matrice de dérivation $\underline{\underline{D}}$ sont tels que

$$\begin{cases} d_{i,j} = & \dfrac{c_i}{c_j}\dfrac{(-1)^{i+j}}{(\xi_i-\xi_j)}, \quad 0 \leq i,j \leq N, \quad i \neq j \\ d_{i,i} = & -\dfrac{\xi_i}{2(1-\xi_i^2)}, \quad 1 \leq i \leq N-1 \\ d_{0,0} = -d_{N,N} = & \dfrac{2N^2+1}{6}, \end{cases} \tag{2-59}$$

où $c_0 = c_N = 2$ et $c_j = 1$ pour $1 \leq j \leq N-1$. Cette matrice complète de dérivation donne la dérivée dans l'espace de calcul ξ. Les points de collocation étant définis et fixes dans l'espace de calcul, il est probable que leur répartition ne soit pas adaptée aux caractéristiques du problème considéré, puisque ces points sont concentrés aux extrémités du domaine par une répartition en cosinus.

Il est par conséquent nécessaire d'utiliser un changement de variable définissant une fonction de correspondance entre l'espace de calcul et l'espace physique, afin de mieux mailler les zones de forts gradients. Cette fonction $\xi \mapsto r = f(\xi)$ doit être bijective, facilement inversible et continue. Dans l'espace physique, la dérivée d'une fonction $\hat{q}$ au point i est alors donnée par

$$\frac{\partial \hat{q}}{\partial r}(\xi_i) = \sum_{j=0}^{N} d_{i,j}\ \hat{q}(\xi_j)\ \left(f'(\xi_i)\right)^{-1}\ , \tag{2-60}$$

soit sous forme matricielle

$$\frac{\partial \underline{\hat{q}}}{\partial r} = \underline{\underline{\mathcal{E}}} \cdot \underline{\hat{q}}\,, \tag{2-61}$$

avec les éléments de la matrice de dérivation dans l'espace physique $\underline{\underline{\mathcal{E}}}_{i,j} = d_{i,j}\,(f_i')^{-1}$.

Une approche de type collocation spectrale permet l'utilisation de peu de points pour l'obtention d'une solution précise, là où des méthodes classiques de différences finies seraient moins efficaces. Cependant, lorsque les fonctions étudiées présentent de très forts gradients, la répartition des points de collocation devient critique. En effet, des oscillations de type Gibbs peuvent apparaître si cette répartition n'est pas adaptée. De plus, pour un nombre de points important, l'utilisation de méthodes spectrales n'est pas plus avantageuse que certains schémas de différences finies.

2.3.2 Différences finies

Une seconde approche dans la discrétisation radiale du système a donc été recherchée dans les cas où la méthode spectrale montrait ses limites et où la répartition des points devenait délicate. Ainsi, un schéma compact d'approximation tridiagonale d'ordre 6 permet d'avoir une précision pseudo-spectrale tout en imposant moins de contraintes sur le maillage qu'avec la méthode de collocation spectrale précédente.

Sur un maillage non uniforme, deux techniques sont possibles : la transformation jacobienne et la FIM (*Fully Integrated Metrics*) [Gamet *et al.*, 1999, Lele, 1992]. La première approche est la plus simple et se base sur l'approximation de fonctions sur un maillage uniforme. Elle conduit cependant à d'importantes erreurs lorsque la fonction de passage de l'espace de calcul à l'espace physique $\xi \mapsto r = f(\xi)$ n'est pas dérivable. La seconde approche est plus précise, mais demande des développements mathématiques plus conséquents. Par simplicité, la transformation jacobienne a été retenue ici.

Afin d'exprimer les dérivées premières radiales, on utilise l'approximation tridiagonale de dérivation suivante sur un maillage régulier à pas de discrétisation h :

$$\frac{1}{3}\hat{q}'_{i-1} + \hat{q}'_i + \frac{1}{3}\hat{q}'_{i+1} = \frac{14}{9}\frac{\hat{q}_{i+1}-\hat{q}_{i-1}}{2h} + \frac{1}{9}\frac{\hat{q}_{i+2}-\hat{q}_{i-2}}{4h} \tag{2-62}$$

Aux bornes du domaine, des schémas de discrétisation non centrés sont nécessaires, et on utilise des schémas de Padé d'ordre 4 :

$$i = 1, \qquad \hat{q}'_1 + 2\hat{q}'_2 = \frac{1}{h}\left(-\frac{5}{2}\hat{q}_1 + 2\hat{q}_2 + \frac{1}{2}\hat{q}_3\right) \tag{2-63a}$$

$$i = 2, \qquad \frac{1}{4}\hat{q}'_1 + \hat{q}'_2 + \frac{1}{4}\hat{q}'_3 = \frac{3}{4h}\left(\hat{q}_3 - \hat{q}_1\right) \tag{2-63b}$$

$$i = N-1, \qquad \frac{1}{4}\hat{q}'_{N-2} + \hat{q}'_{N-1} + \frac{1}{4}\hat{q}'_N = \frac{3}{4h}\left(\hat{q}_N - \hat{q}_{N-2}\right) \tag{2-63c}$$

$$i = N, \qquad \hat{q}'_N + 2\hat{q}'_{N-1} = \frac{1}{h}\left(\frac{5}{2}\hat{q}_N - 2\hat{q}_{N-1} - \frac{1}{2}\hat{q}_{N-2}\right) \tag{2-63d}$$

Ces relations peuvent alors se mettre sous forme matricielle afin de construire une matrice de dérivation dans l'espace de calcul ξ, dans lequel la répartition des points est uniforme,

$$\underline{\underline{D}}_1 \cdot \frac{\partial \underline{\hat{q}}}{\partial \xi} = \underline{\underline{D}}_2 \cdot \underline{\hat{q}}\,, \tag{2-64}$$

soit encore

$$\frac{\partial \underline{\hat{q}}}{\partial \xi} = \underline{\underline{D}}_1^{-1} \cdot \underline{\underline{D}}_2 \cdot \underline{\hat{q}} = \underline{\underline{D}}_3 \cdot \underline{\hat{q}}\,. \tag{2-65}$$

La transformation jacobienne permet alors de définir la matrice de dérivation dans l'espace physique, où le maillage est irrégulier, soit

$$\frac{\partial \underline{\hat{q}}}{\partial r} = \underline{\underline{D}}_3 \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\hat{q}} = \underline{\underline{\mathcal{E}}} \cdot \underline{\hat{q}}\,, \tag{2-66}$$

où $\underline{\underline{J}}_{i,j} = \delta_{i,j}\,(f'_i)^{-1}$. Bien entendu, la matrice de dérivation radiale finale $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$ est différente de celle développée par la méthode de collocation spectrale, mais par cohérence avec la suite la même notation est utilisée.

2.4 Convergence sur le nombre d'onde axial

La résolution du système PSE demande l'évaluation du nombre d'onde axial α au moyen d'une condition de normalisation développée dans la section 1.3.4. Une première méthode de calcul de α peut être basée sur l'approche développée par Herbert [1994]. Au moyen de l'équation 2-39, la méthode itérative suivante est obtenue :

$$\alpha_j^{p+1} = \alpha_j^p - i\frac{N(\underline{\hat{q}}_j^p,\, \underline{\hat{q}}_{j-1}^p)}{A^2(\underline{\hat{q}}_j^p)}\,, \tag{2-67}$$

avec

$$N(\underline{\hat{q}}_j^p,\, \underline{\hat{q}}_{j-1}^p) = \frac{1}{\Delta x_j}\int_0^\infty (\underline{\hat{q}}_j^p)^\dagger \cdot (\underline{\hat{q}}_j^p - \underline{\hat{q}}_{j-1}^p)\mu_k\, dr\,, \tag{2-68a}$$

$$A^2(\underline{\hat{q}}_j^p) = \int_0^\infty |\underline{\hat{q}}_j^p|^2 \mu_k\, dr\,. \tag{2-68b}$$

Ainsi, à une station axiale x_j, partant d'une condition initiale $(\alpha_j^0, \underline{\hat{q}}_j^0) = (\alpha_{j-1}, \underline{\hat{q}}_{j-1})$, une nouvelle valeur du nombre d'onde α_j^1 est calculée. Le système PSE est alors résolu afin d'obtenir $\underline{\hat{q}}_j^1$. En itérant ainsi sur p, une solution convergée du système PSE à l'abscisse x_j est obtenue lorsque le critère de convergence

$$\left|\frac{\alpha_j^{p+1} - \alpha_j^p}{\alpha_j^{p+1}}\right| \leq 10^{-6} \tag{2-69}$$

est satisfait. La même procédure est alors appliquée à l'abscisse suivante, avec comme conditions initiales le résultat convergé obtenu précédemment.

Une seconde approche, strictement équivalente, peut être basée directement sur l'annulation de la normalisation N. Par une méthode de type Newton-Raphson, une convergence sur le nombre d'onde axial peut être effectuée de la même manière et avec le même critère de convergence. Contrairement aux résultats de Airiau [1994], cette approche s'est révélée bien plus robuste que la méthode itérative de Herbert [1994], surtout lorsque le terme $\partial_x \underline{\hat{p}}$ est négligé dans les équations PSE. Cette dernière méthode a donc été privilégiée au cours de cette étude.

2.5 Résolution du système discret

Après discrétisation, le système PSE linéaire 2-35 s'écrit sous la forme matricielle

$$\left(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_j + \underline{\underline{\mathcal{B}}}\right) \cdot \underline{\hat{q}}_j + \underline{\underline{\mathcal{C}}} \cdot \left[\frac{\underline{\hat{q}}_j - \underline{\hat{q}}_{j-1}}{\Delta x_j}\right] + \underline{\underline{\mathcal{D}}} \cdot \left[\underline{\underline{\mathcal{E}}} \cdot \underline{\hat{q}}_j\right] = \underline{0}\,, \tag{2-70}$$

soit encore

$$\left(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_j + \underline{\underline{\mathcal{B}}} + \frac{\underline{\underline{\mathcal{C}}}}{\Delta x_j} + \underline{\underline{\mathcal{D}}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{E}}}\right) \cdot \underline{\hat{q}}_j = \frac{\underline{\underline{\mathcal{C}}}}{\Delta x_j} \cdot \underline{\hat{q}}_{j-1}\,. \tag{2-71}$$

La solution à l'abscisse x_{j-1} étant connue, le membre de droite est identifiable. Le système linéaire ainsi formé est alors numériquement résolu afin d'obtenir la solution à l'abscisse x_j.

Comme détaillé auparavant, cette résolution se fait par la détermination du nombre d'onde complexe $\alpha(x_j)$. Ce dernier est présent dans la matrice $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_j$ et doit être évalué à chaque position axiale x_j en utilisant les approches itératives développées dans la section 2.4. L'organigramme suivant, extrait de Piot [2005] et de Airiau [1994], présente ainsi l'approche retenue :

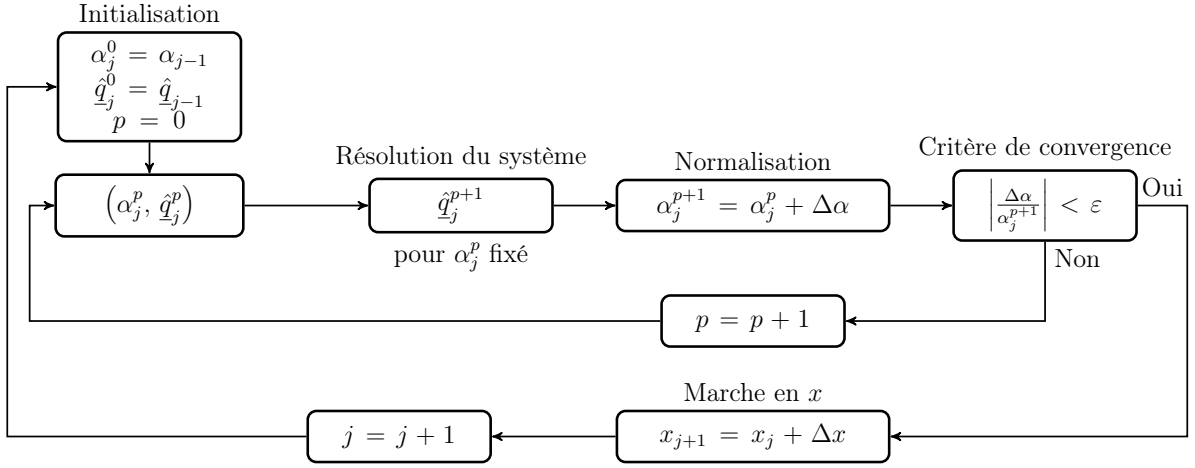


Figure II.6 – *Organigramme de résolution du système PSE linéaire.*

II.3 Validation du modèle

Afin de valider le modèle développé et implémenté, plusieurs cas de validation ont été analysés. Le premier se concentre sur l'étude d'un jet incompressible et compare différents résultats à ceux rapportés par Yen et Messersmith [1998]. Ensuite, sur ce même cas d'étude, l'influence du

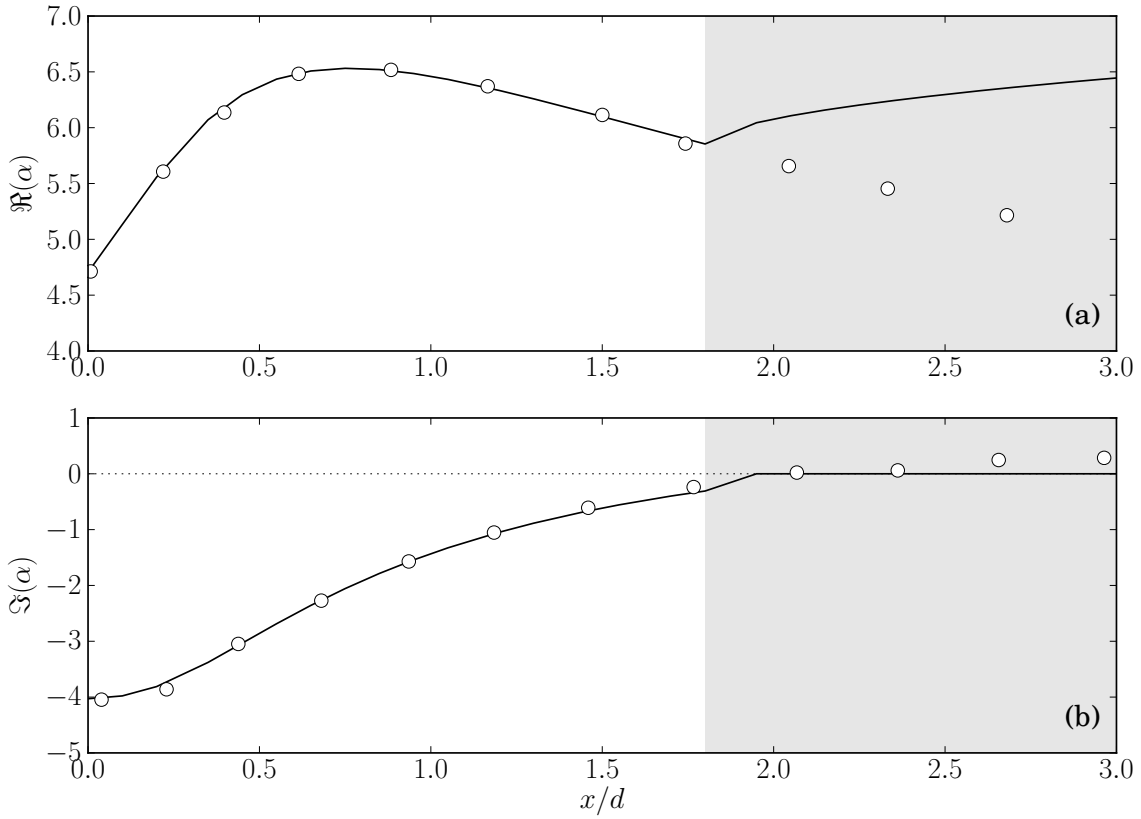


Figure II.7 – *Comparaison de l'évolution axiale des parties (a) réelle et (b) imaginaire issues du calcul de stabilité locale (——) avec les résultats de Yen et Messersmith [1998] (○) dans l'étude d'un jet incompressible à* $St = 0.6$ *et* $m = 0$.

pas de discrétisation axial ainsi que le choix de la normalisation sont analysés afin de vérifier la cohérence de notre modélisation. Enfin, une seconde comparaison est effectuée, cette fois dans un contexte compressible, sur le cas d'un jet supersonique étudié par Yen et Messersmith [1999].

3.1 Étude d'un jet incompressible

Nous reprenons ici le cas étudié par Yen et Messersmith [1998] et Piot [2005] d'un jet incompressible représentatif des expériences menées par Crow et Champagne [1971]. Les auteurs des deux premières références ont ainsi effectué une analyse PSE linéaire sur cet écoulement. L'écoulement porteur est défini de manière analytique par

$$\overline{u}_x(x,r) = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\left[\frac{1}{4\Theta(x)}\left(\frac{1}{2r} - 2r\right)\right]\right), \tag{2-72a}$$

$$\overline{\rho}(x,r) = 1, \tag{2-72b}$$

avec $\Theta(x) = 0.03x + 0.02$ l'épaisseur locale de quantité de mouvement de la couche de mélange, adimensionnée par le diamètre d. Le champ de vitesse radiale $\overline{u}_r(x,r)$ est obtenu en résolvant l'équation de continuité.

Dans leur étude, Yen et Messersmith [1998] se sont basés sur des équations totalement incompressibles. Suivant l'approche de Piot [2005], et afin de pouvoir nous placer dans un contexte incompressible sans introduire de singularité dans nos équations, les résultats obtenus par la suite le sont pour un nombre de Mach $M = 0.01$.

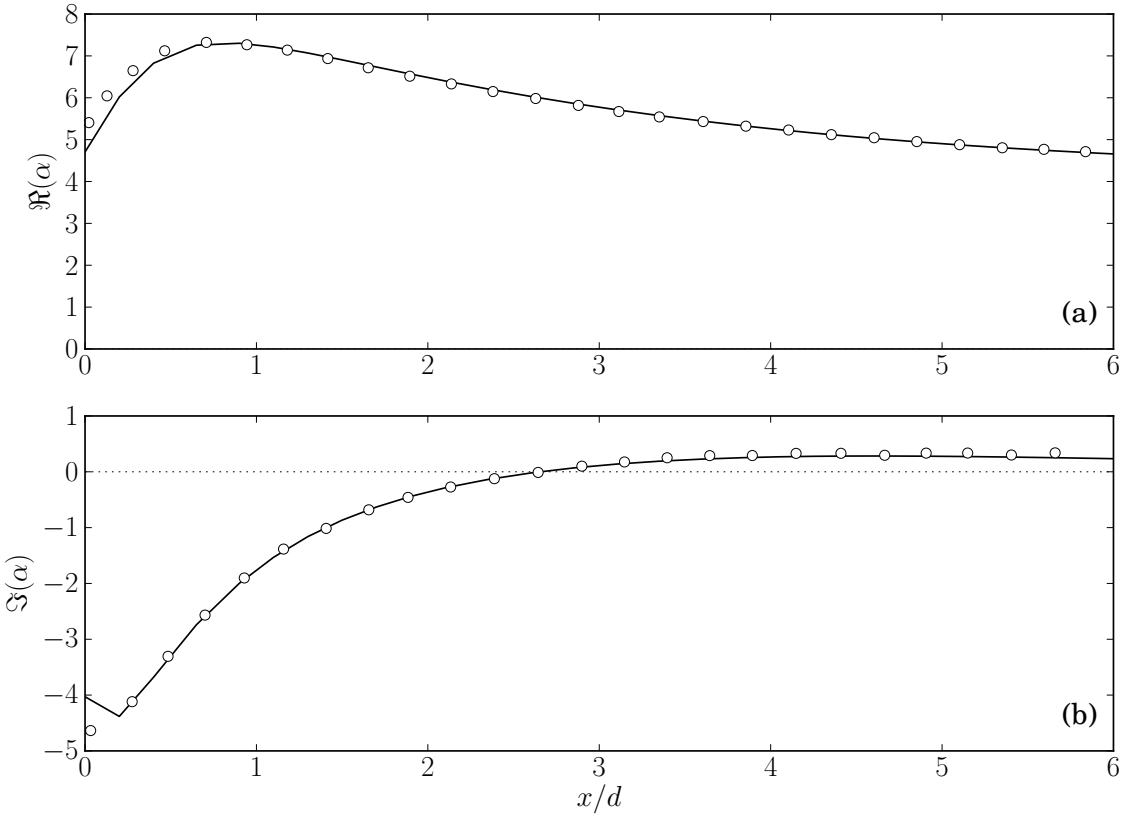


Figure II.8 – *Comparaison de l'évolution axiale des parties (a) réelle et (b) imaginaire issues du calcul PSE (——) avec les résultats de Yen et Messersmith [1998] (○) dans l'étude d'un jet incompressible à* $St = 0.6$ *et* $m = 0$.

Stabilité locale Avant toute analyse PSE, il est intéressant de comparer nos résultats issus d'un calcul de stabilité locale. Ainsi, la figure II.7 représente l'évolution axiale des parties réelle et imaginaire du nombre d'onde axial α pour un nombre de Strouhal $St = f\,d/U_j = 0.6$ et un nombre d'onde azimutal $m = 0$. Les lignes continues représentent nos résultats et les symboles les calculs de Yen et Messersmith [1998].

Dans l'intervalle $x/d \in [0.0, 1.7]$, nos résultats sont en parfait accord. En particulier, la partie imaginaire du nombre d'onde axial est initialement négative, autour de $\alpha_i = -4.0$, pour ensuite croître et approcher l'axe des abscisses vers $x/d \approx 1.7$. À cette abscisse, on observe alors une divergence entre nos résultats et ceux de Yen et Messersmith [1998]. En effet, à cette abscisse, une singularité apparaît dans nos équations de stabilité locale, explicitée dans la section I.4.1. Cette singularité de la couche critique n'est pas traitée dans notre approche : la partie imaginaire devient alors nulle et la solution diverge de la solution réelle. Yen et Messersmith [1998] ont quant à eux effectué un contournement des pôles dans le plan complexe du chemin d'intégration en r afin de continuer la résolution dans la zone de décroissance de l'onde d'instabilité. Nous n'avons cependant pas jugé utile d'en faire de même, notre étude étant axée sur l'analyse PSE dans laquelle cette singularité n'apparaît pas.

En dehors de cette zone, notre approche locale reproduit exactement l'évolution du nombre d'onde axial.

Analyse PSE linéaire Les figures suivantes présentent nos résultats issus de calculs PSE linéaires pour plusieurs fréquences et nombres d'onde azimutaux.

Ainsi, la figure II.8 reprend le cas d'étude précédent pour l'analyse de stabilité locale et

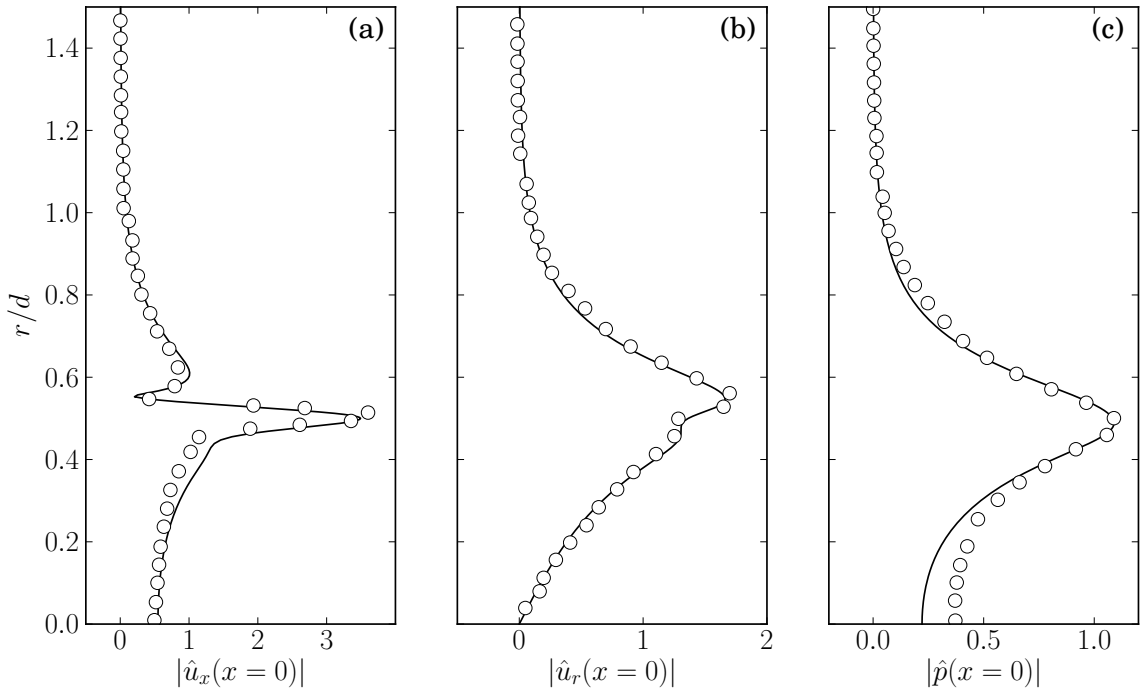


Figure II.9 – *Comparaison des fonctions d'amplitude (a) $\hat{u}_x$; (b) $\hat{u}_r$; (c) $\hat{p}$ issues du calcul PSE (——) avec les résultats de Yen et Messersmith [1998] (○) à l'abscisse initiale $x = 0.0$ dans l'étude d'un jet incompressible à $St = 0.6$ et $m = 0$.*

compare l'évolution des parties réelle et imaginaire du nombre d'onde axial $\alpha(x)$. Là encore, les lignes continues représentent nos résultats PSE, et les symboles ceux de Yen et Messersmith [1998].

Tout d'abord, on peut observer une nette différence des valeurs initiales de $\Im(\alpha)$: nos résultats présentent une valeur supérieure à celle de référence. Cependant, après un pas d'avancement axial, les valeurs redeviennent parfaitement comparables, formant une légère cassure entre la station initiale $x = 0$ et les abscisses suivantes. Cette légère différence trouve son origine dans l'initialisation du problème : là où les auteurs ont utilisé une approche PSE sur un écoulement localement parallèle à la première station, nous avons choisi d'utiliser directement la solution issue d'un calcul de stabilité locale. Comme on peut l'observer, cette différence d'initialisation a finalement peu d'effet sur l'évolution du nombre d'onde axial, et la comparaison est quasiment parfaite, validant la méthode d'initialisation ici choisie.

L'analyse PSE n'est pas confrontée au problème précédent de singularité, et le calcul poursuit la résolution dans la zone de décroissance. Cette zone débute au point de neutralité, soit $\Im(\alpha) = 0$, autour de $x/d = 2.7$. L'analyse de stabilité locale précédente situe ce point de neutralité à une abscisse $x/d = 2.0$. Cette différence est non négligeable et met en évidence la relative incapacité de l'analyse locale à rendre compte de l'abscisse du maximum d'amplitude. Cette observation illustre l'importance de l'effet d'accumulation modélisé dans l'approche PSE, et par cela la nécessité de la prise en compte de la faible divergence du jet, au moins au premier ordre.

La solution PSE est constituée du couple $(\alpha, \underline{\hat{q}})$. Il est donc également nécessaire de valider le calcul des fonctions d'amplitude. La figure II.9 montre ainsi les fonctions d'amplitude de vitesse axiale $\hat{u}_x$, de vitesse radiale $\hat{u}_r$ et de pression $\hat{p}$ obtenues à l'abscisse initiale au moyen des équations PSE appliquées à un écoulement localement parallèle. Les comparaisons sont dans l'ensemble satisfaisantes. On note cependant quelques différences, notamment sur la fonction d'amplitude de pression, au niveau de l'axe. Cette différence est très probablement due aux conditions aux limites employées par Yen et Messersmith [1998] sur la pression, qui sont légèrement différentes

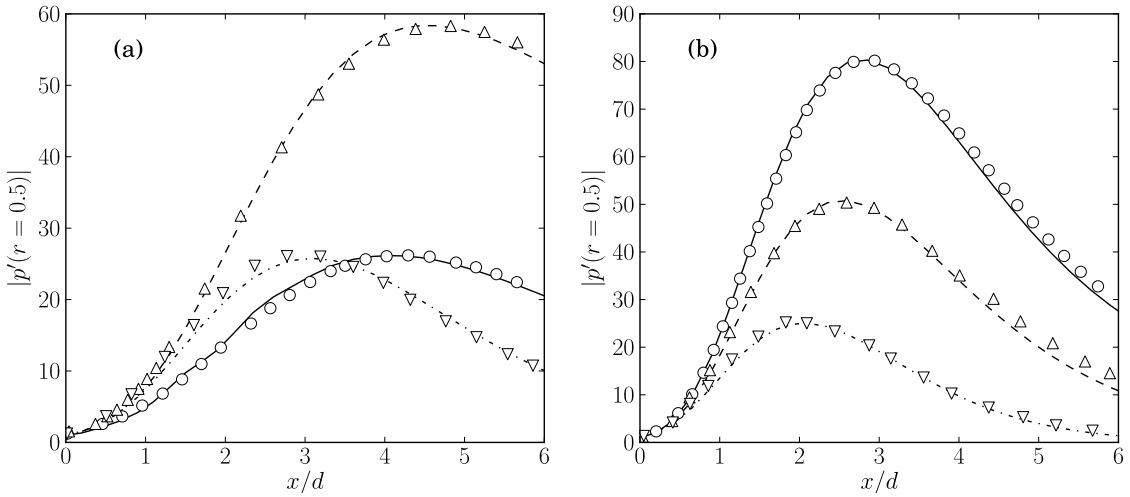


Figure II.10 – *Comparaisons entre les gains de pression issus des calculs PSE obtenus pour* $m = 0$ *:* ——— *;* $m = 1$ *:* - - - - *;* $m = 2$ *:* ····· *; avec (a)* $St = 0.3$ *et (b)* $St = 0.5$*, et les résultats de Yen et Messersmith [1998] avec* $m = 0$ *:* $\circ$ *;* $m = 1$ *:* $\triangle$ *;* $m = 2$ *:* $\triangledown$*.*

des nôtres. Cela ne semble cependant pas avoir d'impact sur les autres fonctions, le nombre d'onde axial ou même la fonction de pression au niveau de la couche de mélange pour $r/d = 0.5$.

Enfin, la représentation combinée du couple solution $(\alpha(x), \underline{\hat{q}}(x, r))$ se traduit par la représentation de l'évolution des perturbations $\underline{q}'(x, r)$. La figure II.10 met ainsi en évidence l'évolution des gains de pression $|\underline{p}'|$ dans la couche de mélange du jet à $r/d = 0.5$ pour deux fréquences différentes de celles étudiées jusqu'à présent, $St = 0.3$ et $St = 0.5$, et pour les nombres d'onde azimutaux $m = 0, 1, 2$. Dans ces deux figures, les amplitudes des courbes ont été ajustées afin de correspondre aux données de Yen et Messersmith [1998]. En effet, l'analyse étant linéaire, les amplitudes absolues ne sont pas significatives. Cependant, ces écarts d'amplitude traduisent ici aussi les différences d'initialisation entre les deux méthodes PSE. Malgré cela, un excellent accord sur les profils d'évolution des gains de pression est observé entre nos résultats PSE linéaires et ceux de référence, pour les deux fréquences et les trois nombres d'onde azimutaux considérés.

Ces comparaisons numériques sont globalement excellentes et suffisantes pour valider notre approche et notre implémentation de la méthode, au moins dans le cas de jets incompressibles. Une seconde validation, sur le cas d'un jet supersonique, est effectuée par la suite. À cette étape de la validation, il est cependant intéressant d'aller plus loin dans l'analyse de ce cas relativement simple et d'étudier certaines hypothèses émises précédemment dans la modélisation du système.

3.2 Influence de l'incrément axial

La résolution numérique du système PSE est faite au moyen d'une méthode de marche en x. Un schéma implicite d'ordre 1 est utilisé avec un pas Δx. Or, comme expliqué dans la section 2.2, un résidu d'ellipticité dans nos équations nous empêche d'utiliser un pas de discrétisation trop fin. Par conséquent, il est nécessaire de vérifier que notre solution n'est pas trop dépendante de Δx, auquel cas l'approche retenue ne serait pas satisfaisante.

Pour cela, on considère le cas d'étude précédent où $St = 0.5$ et $m = 0$. Ce cas correspond à une onde présentant une longueur d'onde axiale adimensionnée $\lambda = 2\pi/\alpha_r \in [1.1, 1.8]$. Le pas minimum théorique obtenu par Li et Malik [1996] est alors $\Delta x_{min} = 1/\alpha_r = 0.3$ à l'abscisse initiale $x = 0$, ce qui ne permet d'avoir que 6 points environ par longueur d'onde dans la description des ondes d'instabilité. En supprimant le terme $\partial_x \hat{p}$, on élimine une partie de l'ellipticité résiduelle, ce qui nous permet de diminuer ce pas.

Ainsi, sur la figure II.11 sont représentées les évolutions axiales de $\alpha(x)$ pour des pas de discrétisation Δx de 0.1, 0.2 et 0.4, avec le terme $\partial_x \hat{p}$ négligé dans le calcul PSE. Un calcul prenant

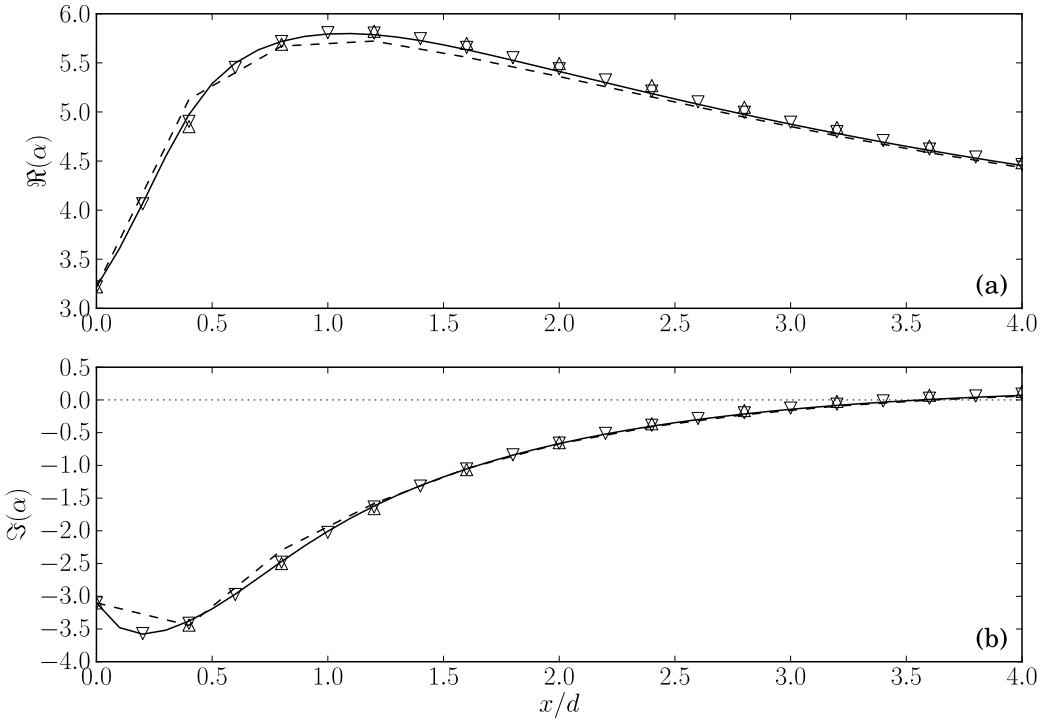


Figure II.11 – *Évolutions axiales des parties (a) réelle et (b) imaginaire du nombre d'onde axial α issues de calculs PSE sur un jet incompressible à $St = 0.5$ et $m = 0$ pour différents incréments axiaux Δx ; 0.1 : ——— ; 0.2 : ∇ ; 0.4 : $\triangle$; Un calcul avec $\Delta x = 0.4$ et en conservant $\partial_x \hat{p}$ est représenté (- - - -).*

en compte ce terme est également représenté, pour un pas de discrétisation de 0.4. Plusieurs remarques peuvent être faites. Tout d'abord, on vérifie ici que la suppression du gradient de pression n'impacte que peu l'évolution du nombre d'onde axial. Ensuite, sa suppression permet effectivement de diminuer largement le pas. Enfin, en prenant comme référence le calcul effectué avec le pas le plus faible de 0.1, de très légères différences sont observées qualitativement pour des pas plus importants, suggérant une certaine robustesse dans la méthode de résolution PSE.

La figure II.12 représente ces tendances de manière plus quantitative. Ainsi, toujours en prenant le cas $\Delta x = 0.1$ comme référence, cette figure met en évidence les différences absolues sur les parties réelle et imaginaire des nombres d'onde axiaux. Quatre pas de discrétisation sont représentés, entre 0.1 et 0.4. Les plus grandes différences sont observées pour le plus grand pas, et inversement, suggérant une relative convergence de la solution en fonction du pas, même si nous ne pouvons pas diminuer beaucoup plus du fait de l'ellipticité résiduelle.

L'impact relativement limité du choix du pas de discrétisation dans ce cas d'étude est également observé sur les fonctions d'amplitude. Ainsi, la figure II.13 représente l'amplitude des fonctions de vitesse axiale $\hat{u}_x$, de vitesse radiale $\hat{u}_r$ et de pression $\hat{p}$ à l'abscisse $x/d = 2.4$. Ces amplitudes sont obtenues pour des pas de discrétisation de 0.05, 0.10, 0.20 et 0.40. Peu d'écarts sont visibles entre les différentes solutions, celles s'éloignant le plus des autres étant obtenues pour le plus grand pas de discrétisation $\Delta x = 0.4$. Les courbes des fonctions obtenues pour des pas de 0.05 et 0.10 sont quasiment confondues et suggèrent ici également une convergence des solutions.

Il est intéressant de remarquer que malgré les différences marginales relevées dans ces dernières figures entre les solutions obtenues pour des pas de discrétisation de 0.1 et 0.4 par exemple, l'effet d'accumulation des PSE amplifie ces erreurs lors de l'intégration du nombre d'onde axial. Ainsi, sur la figure II.14, sont comparées les évolutions axiales des gains de pression sur l'axe ($r/d = 0$) et dans la couche de mélange ($r/d = 0.5$). Si les écarts entre les solutions obtenues pour Δx

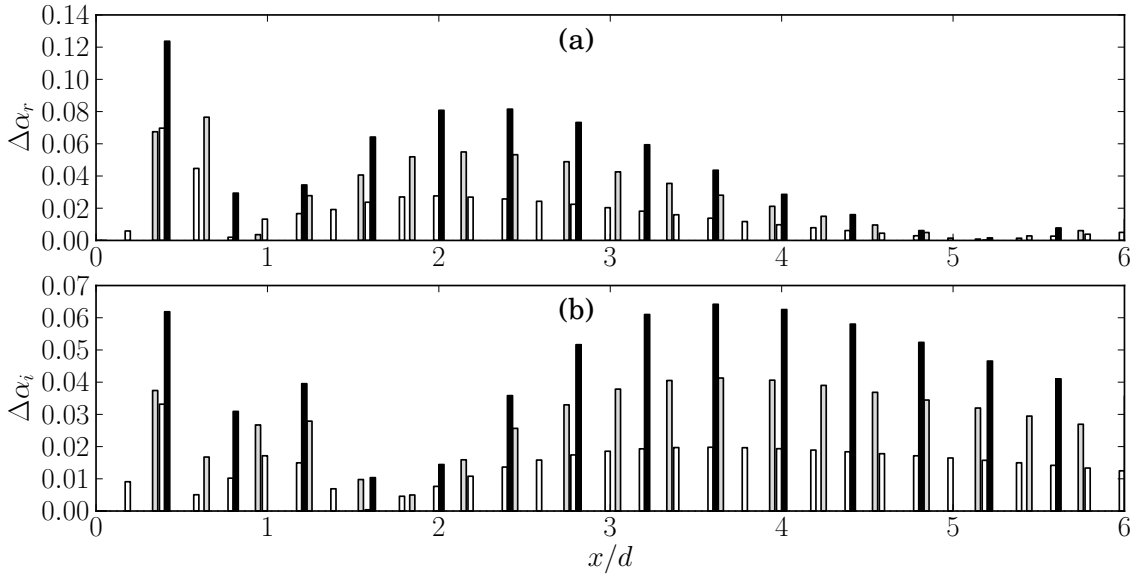


Figure II.12 – *Évolutions axiales des différences absolues des parties (a) réelle et (b) imaginaire du nombre d'onde axial α entre la solution PSE obtenue avec $\Delta x = 0.10$ et les résolutions effectuées avec $\Delta x = 0.20$: ▭ ; 0.30 : ▭ ; 0.40 : ■ ; Jet incompressible à $St = 0.5$ et $m = 0$.*

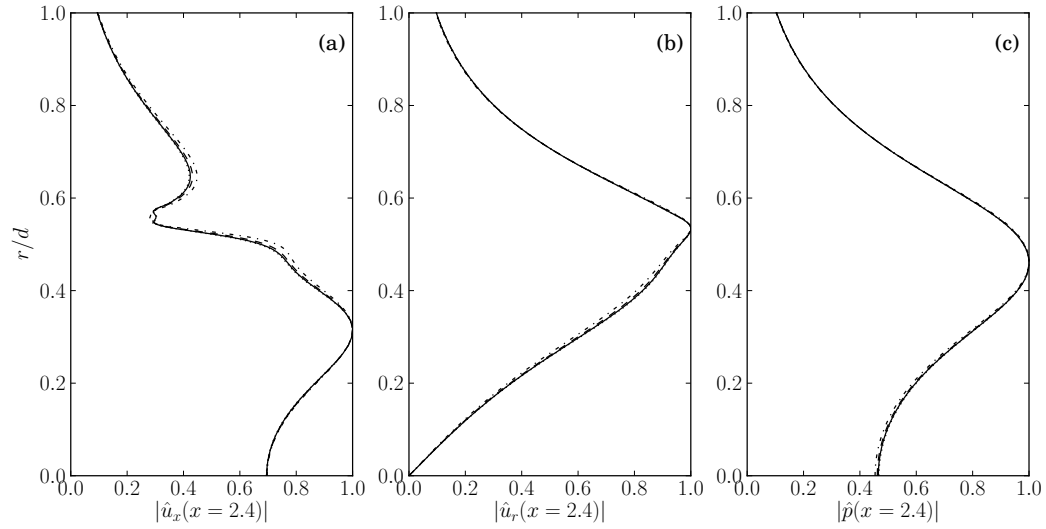


Figure II.13 – *Fonctions d'amplitude normalisées des perturbations de (a) vitesse axiale, (b) vitesse radiale, (c) pression, issues de calculs PSE effectués avec $\Delta x = 0.05$: ····· ; 0.10 : —— ; 0.20 : - - - - ; 0.40 : -·-·- ; Jet incompressible à $St = 0.5$ et $m = 0$.*

égal à 0.05 et 0.10 sont très raisonnables, de larges différences sont observées entre Δx égal à 0.10 et 0.40. Or, ce sont ces perturbations "totales" $\underline{q}'$ que nous souhaitons calculer. Il apparaît donc important de choisir un pas de discrétisation bien plus petit que le pas minimum théorique, afin d'obtenir une solution suffisamment convergée et peu dépendante du choix de Δx. Cette observation justifie donc le choix de la suppression du gradient de pression $\partial_x \hat{p}$ et d'un pas de discrétisation le plus fin possible.

Enfin, pour conclure cette étape de validation du schéma de discrétisation axial, la figure II.15 représente l'évolution axiale de $\alpha(x)$ calculé avec un schéma de discrétisation axiale implicite d'ordre 1 et d'ordre 2, avec un pas de discrétisation de 0.20. De très faibles écarts sont observés, encore moins significatifs que lors de la suppression du gradient de pression. Par conséquent,

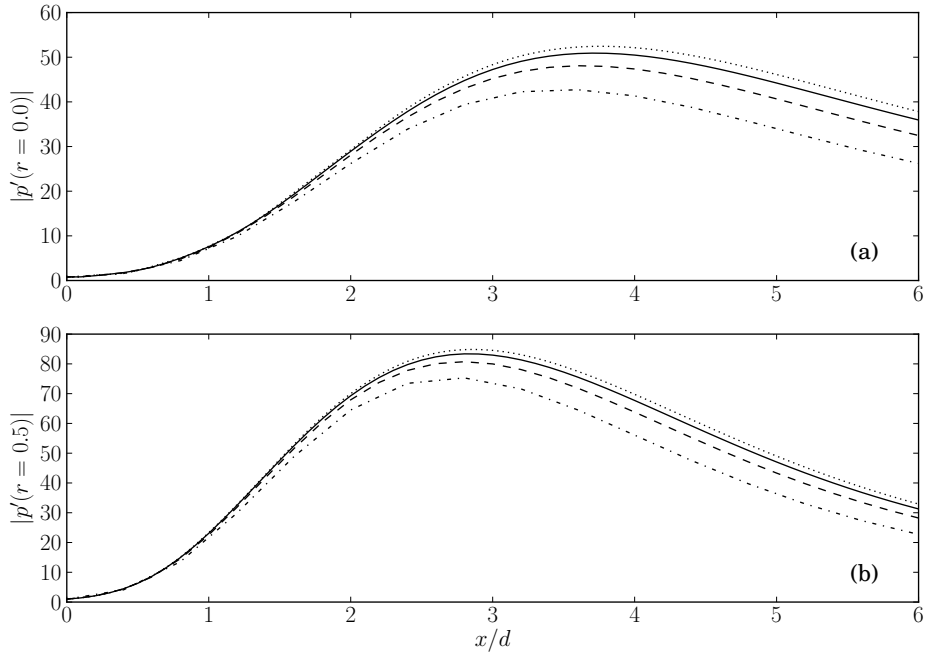


Figure II.14 – *Évolutions axiales des amplitudes des perturbations de pression (a) sur l'axe et (b) dans la couche de mélange, issues de calculs PSE effectués avec* $\Delta x = 0.05$ *:* ····· *;* 0.10 *:* —— *;* 0.20 *:* - - - - *;* 0.40 *:* -·-·- *; Jet incompressible à* $St = 0.5$ *et* $m = 0$.

nous considérons le schéma de discrétisation à l'ordre 1 comme suffisant.

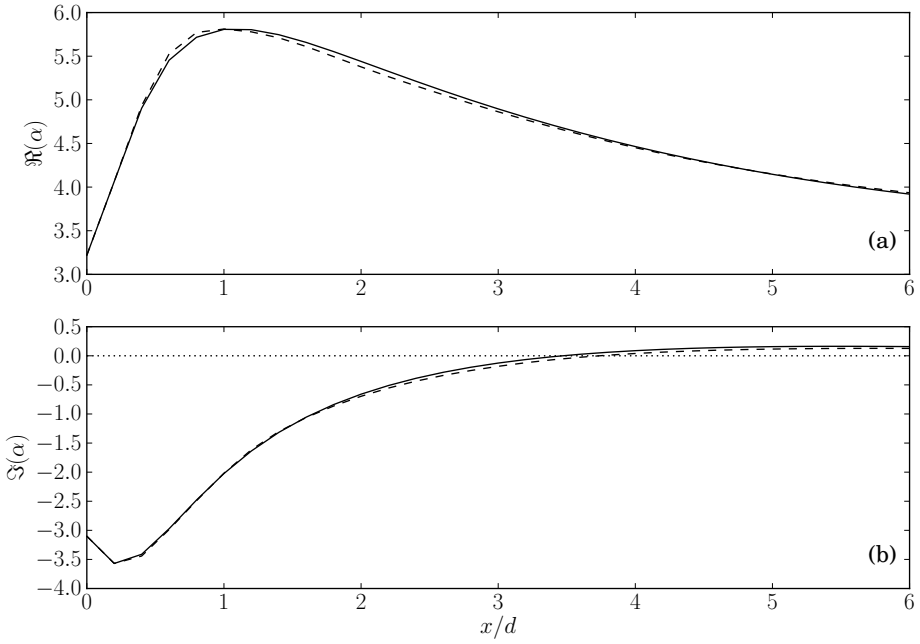


Figure II.15 – *Évolutions axiales des parties (a) réelle et (b) imaginaire du nombre d'onde axial obtenues par calcul PSE avec* $\Delta x = 0.20$ *et un schéma en x d'ordre 1 (——) et d'ordre 2 (- - - -), pour un jet incompressible à* $St = 0.50$ *et* $m = 0$.

3.3 Influence de la condition de normalisation

Nous nous intéressons ici à l'effet du choix de la normalisation présentée dans la section 1.3.4. En effet, différentes options nous sont offertes quant à la définition de cette norme, permettant le calcul du nombre d'onde axial afin d'assurer une "lente" variation axiale des fonctions d'amplitude. Les différentes normes ici étudiées sont :

$$N_1 = \int_0^\infty \left(\hat{u}_x^\dagger \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \hat{u}_r^\dagger \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x} + \hat{u}_\phi^\dagger \frac{\partial \hat{u}_\phi}{\partial x} \right) dr \tag{2-73a}$$

$$N_2 = \int_0^\infty \left(\hat{u}_x^\dagger \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} \right) dr \tag{2-73b}$$

$$N_3 = \int_0^\infty \left(\hat{u}_x^\dagger \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} + \hat{u}_r^\dagger \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial x} + \hat{u}_\phi^\dagger \frac{\partial \hat{u}_\phi}{\partial x} \right) r dr \tag{2-73c}$$

$$N_4 = \int_0^\infty \left(\frac{\hat{u}_x^\dagger}{\sqrt{\hat{u}_x^\dagger \hat{u}_x}} \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial x} \right) dr \tag{2-73d}$$

À ces différentes normes sont associées les amplitudes :

$$A_1 = \left(\int_0^\infty \left(|\hat{u}_x|^2 + |\hat{u}_r|^2 + |\hat{u}_\phi|^2 \right) dr \right)^{1/2} \tag{2-74a}$$

$$A_2 = \left(\int_0^\infty \left(|\hat{u}_x|^2 \right) dr \right)^{1/2} \tag{2-74b}$$

$$A_3 = \left(\int_0^\infty \left(|\hat{u}_x|^2 + |\hat{u}_r|^2 + |\hat{u}_\phi|^2 \right) r dr \right)^{1/2} \tag{2-74c}$$

$$A_4 = \int_0^\infty |\hat{u}_x| dr \tag{2-74d}$$

Ainsi, la norme N_1 est à relier à l'énergie cinétique des fonctions d'amplitude, mais en considérant le problème comme étant cartésien. La norme N_2 est à relier à l'énergie associée à

la vitesse axiale, de la même manière. La norme N_3, quant à elle, est également représentative de l'énergie cinétique des fonctions d'amplitude, mais pour un problème cylindrique. Enfin, la norme N_4 n'a pas d'interprétation physique, mais sert à illustrer la diversité des normes pouvant être employées [Airiau, 1994].

L'effet de ces différentes normes sur la détermination du nombre d'onde axial α est représenté sur la figure II.16. À l'évidence, le choix de la condition de normalisation a un impact non négligeable sur le calcul de α. En effet, la condition de normalisation intervient directement dans cette détermination selon l'équation 2-39. Par conséquent, il est nécessaire de se demander si ces différences se répercutent sur la solution finale, soit sur les perturbations $\underline{q}'$ recherchées.

Ainsi, la figure II.17 met en évidence l'évolution des gains de pression associés à ces différentes conditions de normalisation, sur l'axe et dans la couche de mélange. L'hypothèse de la section 1.3.4 selon laquelle la normalisation ne devrait pas modifier la solution finale n'est pas totalement vérifiée : les figures (a) et (b) montrent ainsi des écarts d'amplitude appréciables selon la normalisation choisie. Cependant, une fois ces profils normalisés par leur maximum respectif, ces évolutions se superposent quasiment parfaitement, comme observé sur les figures (c) et (d). De plus, les phases des perturbations sont également quasiment identiques, comme visible sur les figure (e) et (f) où les courbes sont strictement superposées.

Ainsi, le choix de la condition de normalisation n'a qu'un faible impact sur l'évolution relative des perturbations de pression ici calculées, validant l'hypothèse émise lors de la modélisation. Les écarts absolus d'amplitudes n'ont ici aucune importance, l'analyse étant linéaire. Par conséquent, dans la suite de l'étude nous baserons notre choix de normalisation sur la norme N_1.

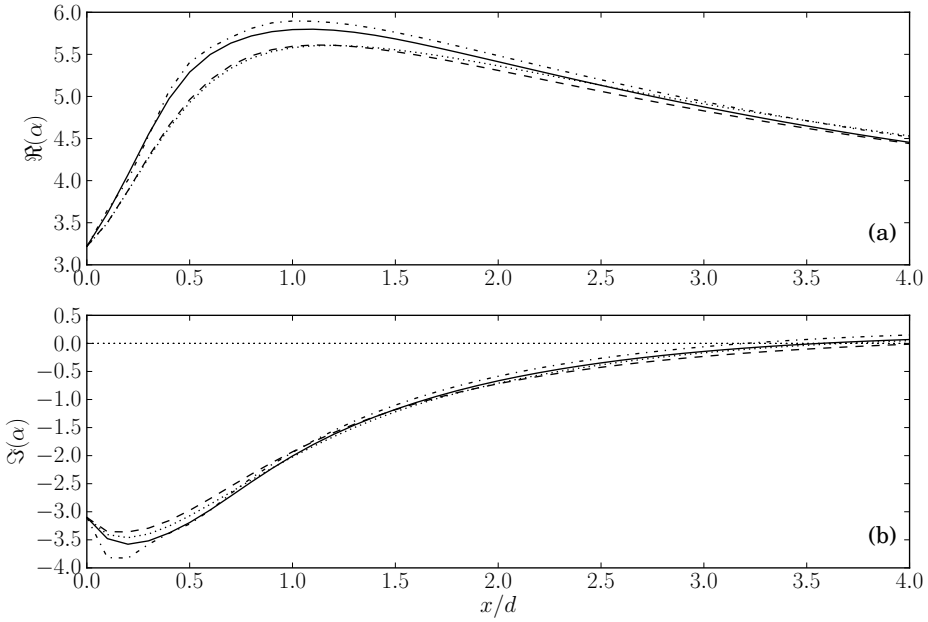


Figure II.16 – *Évolutions axiales des parties (a) réelle et (b) imaginaire du nombre d'onde axial issues de calculs PSE effectués avec les conditions de normalisation N_1 : ——— ; N_2 : - - - - ; N_3 : -·-·- ; N_4 : ····· ; sur un jet incompressible à $St = 0.50$ et $m = 0$.*

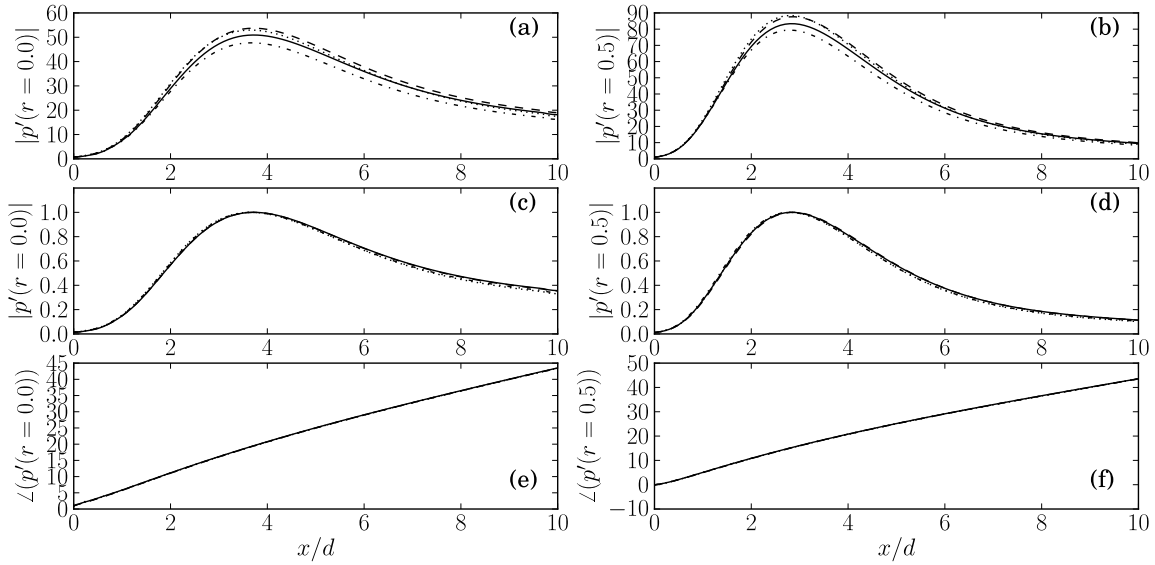


Figure II.17 – *Évolution axiale des gains de pression (a) sur l'axe et (b) dans la couche de mélange obtenues avec les conditions de normalisation N_1 : ——— ; N_2 : - - - - ; N_3 : - · - · - ; N_4 : ····· ; sur un jet incompressible à $St = 0.50$ et $m = 0$; ces mêmes évolutions normalisées donnent respectivement les courbes (c) et (d) ; les phases de ces perturbations donnent respectivement les courbes (e) et (f).*

Enfin, une remarque importante doit ici être mentionnée. Une comparaison directe des seules valeurs du nombre d'onde axial α entre la théorie de stabilité locale et l'analyse PSE n'est pas entièrement satisfaisante. Comme nous avons pu le voir dans la figure II.16, cette évolution est dépendante de la normalisation choisie et ne prend pas en compte l'évolution axiale des fonctions d'amplitude ; il serait plus pertinent d'employer la définition 2-41 afin d'effectuer de telles comparaisons.

3.4 Étude d'un jet supersonique

Suite à ces validations de certaines hypothèses émises dans notre modélisation PSE, ainsi qu'à la validation de notre résolution sur un cas incompressible, il est maintenant intéressant de comparer nos résultats sur un second écoulement. Nous choisissons ici le cas d'un jet supersonique à $M = 2.1$, étudié expérimentalement par Troutt et McLaughlin [1982] et pour lequel Yen et Messersmith [1999] et Balakumar [1998] ont effectué une analyse PSE linéaire, et Tam et Burton [1984b] une analyse par la méthode des échelles multiples. Ces derniers se sont essentiellement attachés à une problématique acoustique ; nous prenons donc comme référence les travaux de Yen et Messersmith [1999].

L'écoulement de base est ici calculé au moyen de la méthode empirique développée par Tam et Burton [1984b] et également utilisée par Balakumar [1998] et Yen et Messersmith [1999]. Suivant cette méthode, le jet est décomposé en trois zones :

– la région potentielle, telle que $0 < x < x_t$, pour laquelle

$$\overline{u}_x(x,r) = \begin{cases} 1 & r < h \\ \exp\left(-\ln 2 \left[\frac{r-h(x)}{b(x)}\right]^2\right) & r \geq h \end{cases} \tag{2-75}$$

– la région de transition, telle que $x_t < x < x_f$, pour laquelle

$$\overline{u}_x(x,r) = \begin{cases} u_c(x) & r < h \\ u_c(x) \exp\left(-\ln 2 \left[\frac{r-h(x)}{b(x)}\right]^2\right) & r \geq h \end{cases} \tag{2-76}$$

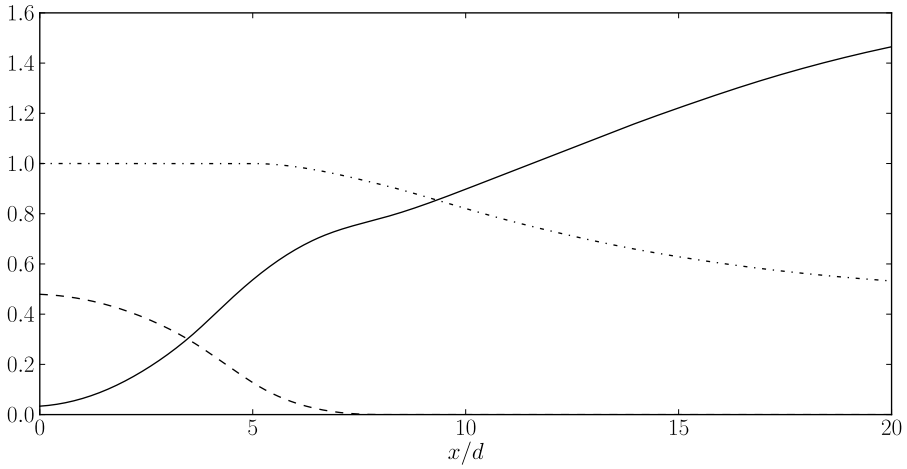


Figure II.18 – *Évolution axiale des paramètres $b(x)$: ——; $h(x)$: - - - -; $u_c(x)$: -·-·- ; définissant le champ moyen issu des expériences de Troutt et McLaughlin [1982].*

– la région complètement développée, telle que $x > x_f$, pour laquelle

$$\overline{u}_x(x,r) = u_c(x) \exp\left(-\ln 2 \left[\frac{r}{b(x)}\right]^2\right) \tag{2-77}$$

Les fonctions $h(x)$ et $b(x)$ sont respectivement l'épaisseur de la région potentielle et la distance radiale séparant cette frontière potentielle du point à vitesse axiale divisée de moitié $\overline{u}_x/2$. Ces paramètres sont ici adimensionnés par le diamètre d. La fonction $u_c(x)$ est quant à elle la vitesse axiale sur l'axe, adimensionnée par U_j. Ces fonctions sont déterminées en se basant sur les données expérimentales rapportées par Troutt et McLaughlin [1982], au moyen de splines interpolantes et de la conservation de moment axial [Tam et Burton, 1984b]. Les fonctions utilisées sont ainsi représentées sur la figure II.18. Enfin, les positions axiales x_t et x_f désignent respectivement les abscisses de fin de cône potentiel et de début de la zone pleinement développée. Ces abscisses sont choisies telles que $x_t/d = 5$ et $x_f/d = 8$, valeurs correspondant aux observations expérimentales.

En se basant sur cet écoulement porteur, nous effectuons une analyse de stabilité PSE aux fréquences de Strouhal $St = 0.2$ et $St = 0.4$, pour des nombres d'onde azimutaux $m = 0$ et 1. Les champs de perturbations de pression sont alors obtenus et nous comparons sur la figure II.19 l'évolution des gains de pression dans la couche de mélange, à $r/d = 0.5$, entre nos résultats et ceux rapportés par Yen et Messersmith [1999]. On notera que nous avons ajusté les amplitudes des résultats de ces auteurs afin de les comparer aux nôtres, puisque comme nous l'avons vu précédemment, ces amplitudes absolues sont dépendantes du pas de discrétisation, de la condition de normalisation choisie ou encore des conditions d'initialisation.

Cette comparaison met en évidence un accord très raisonnable avec nos résultats, même si elle n'est pas aussi bonne que dans le cas de validation de la section 3.1. Notamment dans les zones de décroissance, des différences relativement marquées apparaissent, malgré un excellent accord sur la croissance. Deux explications nous paraissent ici plausibles : une différence sensible entre nos écoulements porteurs pourrait produire ces écarts constants, ou bien le fait que Yen et Messersmith [1999] ont utilisé les équations complètes de Navier-Stokes perturbées dans leur modélisation, alors que nous utilisons les équations d'Euler.

Les figures II.20, quant à elles, montrent les différences sur les parties réelles des champs de pression. Nous pouvons ainsi apprécier et comparer, qualitativement faute de résultats plus précis présentés par Yen et Messersmith [1999], les longueurs d'ondes calculées pour un nombre de Strouhal $St = 0.20$ et pour le mode axisymétrique et le premier mode hélicoïdal. Tout d'abord, les niveaux utilisés ne sont manifestement pas parfaitement identiques, puisque comme observé

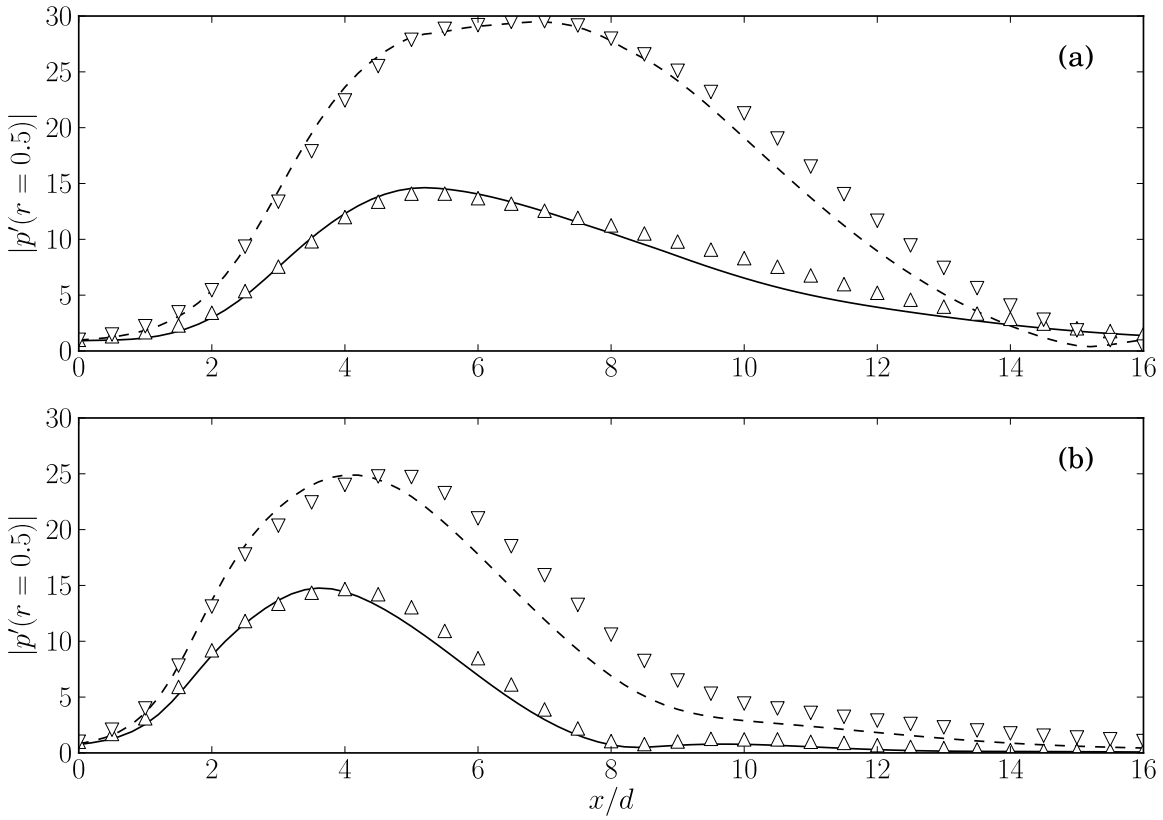


Figure II.19 – *Comparaisons des gains de pression à $r/d = 0.5$ des calculs PSE effectués aux fréquences (a) $St = 0.2$ et (b) $St = 0.4$ pour les modes $m = 0$ (——) et $m = 1$ (- - - -) avec les résultats de Yen et Messersmith [1999] (respectivement △ et ▽) obtenus sur un jet supersonique à $M = 2.1$.*

précédemment, les amplitudes absolues sont différentes de nos résultats. Cela ne nous empêche pas d'observer une très bonne correspondance des formes d'onde dans tout le plan considéré. Ensuite, il est possible de comparer assez précisément les longueurs d'onde en se basant sur les contours coupant l'axe des abscisses. Notamment, 3 longueurs d'onde ½ correspondent dans les deux cas à l'abscisse $x/R_j = 20$. Enfin, on peut déjà remarquer un front d'onde se propageant en dehors de la couche de mélange et possédant une directivité très marquée représentative d'un rayonnement par onde de Mach.

Globalement, les écarts relevés entre nos résultats et ceux de Yen et Messersmith [1999] restent modérés, et étant donné les différences de modélisation entre nos deux approches, nous les considérons comme tout à fait acceptables.

Enfin, il est intéressant de remarquer que, sur nos deux cas de validation, la modélisation que nous avons choisi d'adopter en nous basant sur les équations d'Euler perturbées produit des résultats très satisfaisants comparés aux approches prenant en compte la viscosité. Cette observation étaye a posteriori notre choix dicté par l'analyse dimensionnelle de la section 1.1.4 consistant à négliger les effets de la viscosité.

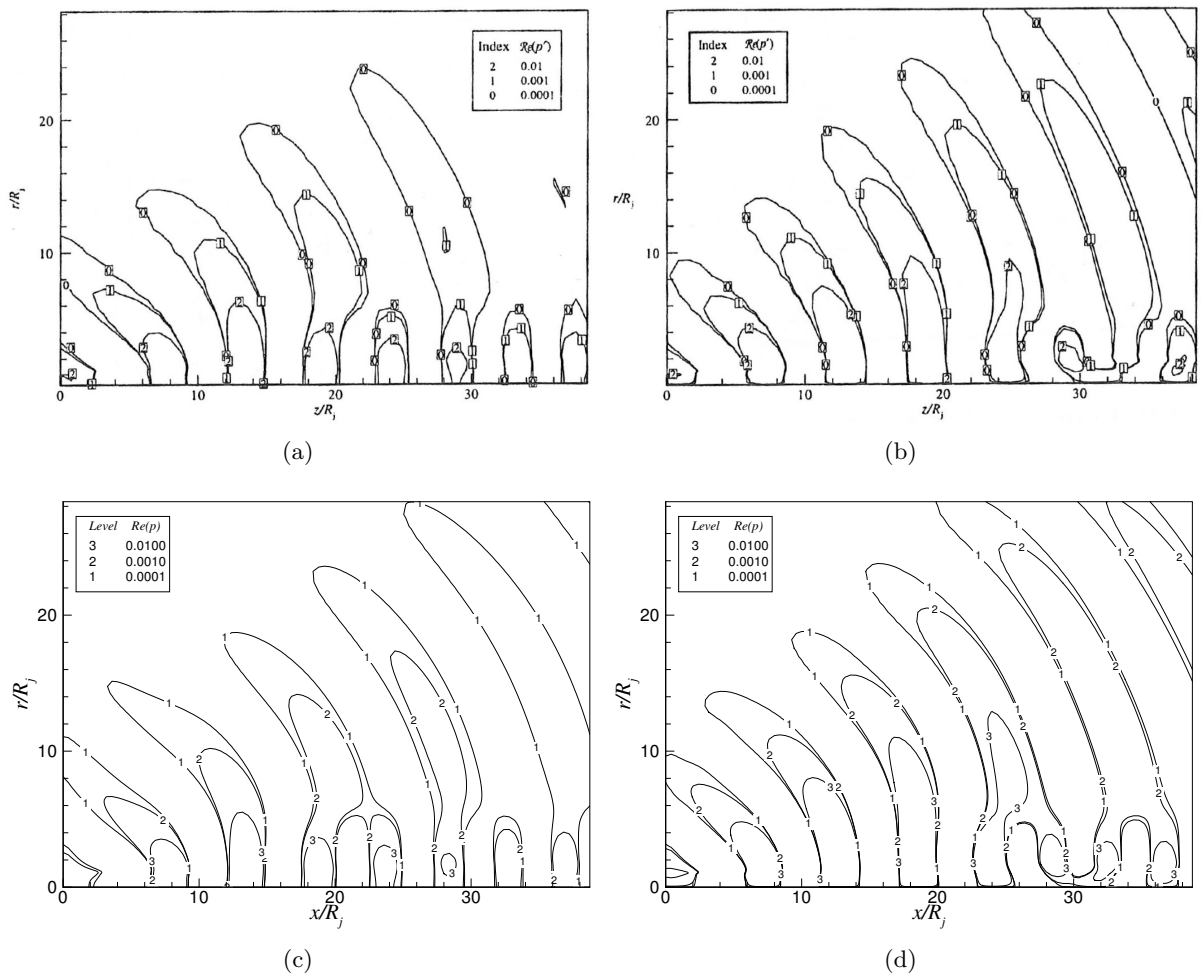


Figure II.20 – *Parties réelles du champ des perturbations de pression* $\Re(p')$ *rapportées par Yen et Messersmith [1999] pour un nombre de Strouhal* $St = 0.20$ *et pour un nombre d'onde azimutal (a)* $m = 0$ *et (b)* $m = 1$*, comparées à nos calculs PSE respectifs (c) et (d).*

II.4 Conclusions

Dans ce chapitre, le développement d'un système d'équations PSE linéaires adapté à la description des ondes d'instabilité convective de Kelvin-Helmholtz, ainsi que l'ensemble des méthodes numériques utilisées dans sa résolution ont été explicités. Cette modélisation a ensuite été appliquée à deux cas d'étude de jets pour lesquels des analyses PSE linéaires sont rapportées dans la littérature. Ainsi, sur ces deux cas d'écoulements, l'un incompressible et l'autre compressible, d'excellents accords sur les évolutions des nombres d'onde axiaux ainsi que des gains de pression dans la couche de mélange sont observés pour plusieurs fréquences et nombres d'onde azimutaux. De plus, si ces résultats valident notre modèle ainsi que nos méthodes numériques face aux modélisations d'autres auteurs, ils nous permettent également d'explorer plusieurs hypothèses émises lors de notre modélisation. Ainsi, notre choix d'initialisation par une simple approche locale est suffisant. De plus, le pas de discrétisation dans la méthode de marche en x doit être suffisamment réduit afin de garantir l'obtention de solutions convergées. L'emploi d'un schéma numérique d'ordre supérieur à 1 dans la direction axiale n'est pas nécessaire. Ensuite, le choix de la condition de normalisation a une influence sur l'amplitude absolue des perturbations calculées. Cependant, les champs relatifs sont parfaitement équivalents. Enfin, notre modélisation basée sur les équations d'Euler perturbées donne des résultats parfaitement comparables à ceux des modèles basés sur les équations de Navier-Stokes perturbées.

Chapitre III

Analyse des fluctuations de pression en champ proche de jets double-flux par l'approche PSE linéaire

Sommaire

III.1 Caractéristiques des jets double-flux issus du projet CoJeN . . . 80
1.1 Géométries des tuyères . . . 80
1.2 Points de fonctionnement . . . 80
1.3 Configurations d'étude . . . 81
III.2 Analyse des mesures de fluctuation de pression . . . 82
2.1 Géométrie des antennes en champ proche et travaux réalisés sur ces mesures . . . 82
2.2 Identification de la bande fréquentielle d'étude et mesures en champ lointain . . . 83
2.3 Décomposition des fluctuations de pression de l'antenne linéaire . . . 85
2.4 Décomposition des fluctuations de pression de l'antenne azimutale . . . 91
III.3 Application de l'analyse PSE linéaire aux jets coaxiaux . . . 97
3.1 Approximation des écoulements porteurs . . . 97
3.2 Identification des modes hydrodynamiques . . . 101
3.3 Approche PSE appliquée au cas coplanaire . . . 102
3.4 Approche PSE appliquée aux cas *short-cowl* . . . 105
III.4 Comparaison entre mesures et résultats de l'analyse PSE sur les cas *short-cowl* . . . 105
4.1 Évolution axiale des phases . . . 105
4.2 Évolution axiale des amplitudes . . . 108
III.5 Conclusions . . . 113

Suite au développement et à la validation de notre approche PSE linéaire, nous nous intéressons à son application sur des configurations complexes de jets double-flux coaxiaux subsoniques. Pour cela, nous nous appuyons sur un ensemble de données numériques et expérimentales issues du projet européen CoJeN (*Coaxial Jet Noise*). Dans ce chapitre, nous effectuons tout d'abord une série de post-traitements de mesures obtenues en champ proche de jets double-flux. L'analyse fréquentielle et modale des fluctuations de pression, obtenues sur des antennes linéaire et azimutale, met ainsi en évidence les caractéristiques des structures turbulentes évoluant dans ces jets. Ensuite, des écoulements porteurs représentatifs des écoulements moyens mesurés par PIV ou LDV sont construits à partir de résultats de calculs LES. Ces écoulements de base calibrés nous permettent alors d'effectuer des analyses PSE linéaires. Enfin, ces calculs de stabilité sont comparés aux mesures précédentes en champ proche des jets.

III.1 Caractéristiques des jets double-flux issus du projet CoJeN

Les jets double-flux étudiés dans ces travaux sont issus du projet collaboratif européen CoJeN (2004 - 2007). Plusieurs études numériques et expérimentales ont ainsi déjà été menées sur les configurations ici retenues. Nos travaux s'appuient donc largement sur l'ensemble des études menées au cours de ce projet, dont les résultats sont notamment rapportés dans les travaux de Tinney et Jordan [2008], Bogey *et al.* [2009], Vuillot *et al.* [2008], Fayard [2010], Guérin et Michel [2006] et Kerhervé et Fitzpatrick [2011].

1.1 Géométries des tuyères

Nous nous concentrons sur deux géométries de tuyère. La première est une tuyère coaxiale coplanaire dont la géométrie est présentée sur la figure III.1(a). Les diamètres des buses interne et externe sont respectivement $d_p = 100\,\text{mm}$ et $d_s = 200\,\text{mm}$, soit un rapport surfacique égal à 3. L'origine axiale $x = 0$ est prise aux lèvres de la tuyère.

La seconde géométrie étudiée est celle d'une tuyère coaxiale de type *short-cowl* avec un corps central de révolution, dont les caractéristiques sont données par la figure III.1(b). Cette dernière géométrie est représentative d'une configuration industrielle. Les diamètres des buses sont ici légèrement différents du cas coplanaire, avec $d_p = 136\,\text{mm}$ et $d_s = 273.4\,\text{mm}$, le rapport surfacique étant cependant toujours égal à 3. Enfin, l'origine axiale est ici prise aux lèvres de la tuyère externe.

Au cours du projet CoJeN, une troisième configuration a été étudiée, numériquement et expérimentalement. Cette configuration reprend la géométrie de la tuyère *short-cowl* en y ajoutant une série de chevrons aux lèvres de la tuyère externe. Les détails de cette configuration sont donnés, par exemple, dans les travaux de Tinney et Jordan [2008].

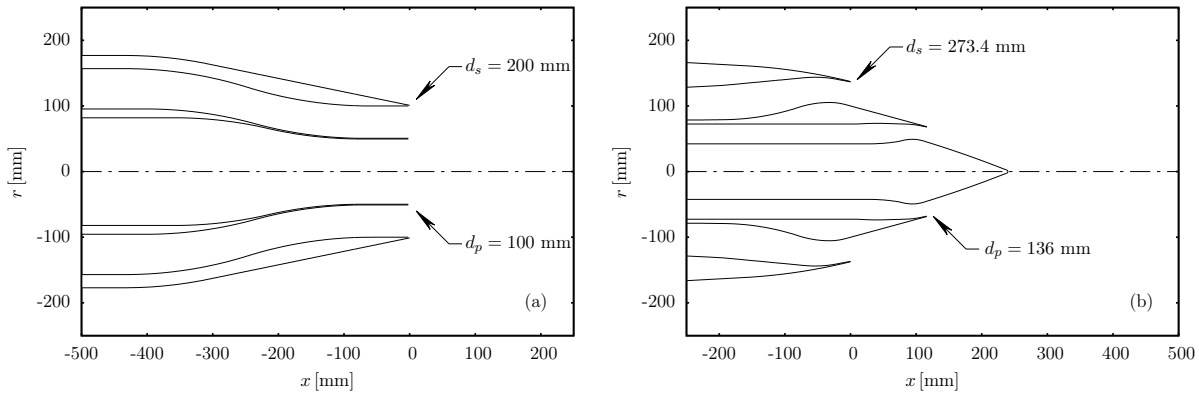


Figure III.1 – *Géométries des tuyères coaxiales (a) coplanaire et (b) short-cowl définies lors du projet CoJeN.*

1.2 Points de fonctionnement

Ces deux tuyères ont été étudiées pour trois points de fonctionnement (TP par la suite pour *test point*). Pour des raisons de disponibilité de données, nos travaux ne s'appuient ici que sur deux de ces trois conditions d'opération, soit les points 2 et 3 définis dans le projet. Ces points de fonctionnement sont décrits dans la table III.1 et sont désignés par la suite par les conditions TP2 et TP3.

Plusieurs paramètres conditionnent les caractéristiques du bruit engendré par un jet double-flux : le rapport des vitesses du jet primaire au jet secondaire $\lambda = U_p/U_s$, le nombre de Mach

	U $[m.s^{-1}]$	a $[m.s^{-1}]$	M_j	T [K]	T_0 [K]
Primaire TP2	$U_p = 404.5$	$a_p = 548.2$	$M_p = 0.738$	$T_p = 775.60$	$T_{0p} = 849.5$
Primaire TP3	$U_p = 480.7$	$a_p = 548.2$	$M_p = 0.877$	$T_p = 775.60$	$T_{0p} = 879.9$
Secondaire	$U_s = 306.8$	$a_s = 340.3$	$M_s = 0.902$	$T_s = 288.14$	$T_{0s} = 335.0$
Atmosphère	$U_\infty = 0$	$a_\infty = 340.3$	0	$T_\infty = 288.14$	$T_{0\infty} = 288.14$

Tableau III.1 – *Points de fonctionnement TP2 et TP3 des tuyères étudiées dans le cadre du projet CoJeN.*

	TP2	TP3
CO	Calculs LES, champ de vitesse PIV	
SC	Calcul LES, champ de vitesse LDV, mesures antennes en champ proche, directivité en champ lointain	Calcul LES, champ de vitesse LDV, mesures antennes en champ proche, directivité en champ lointain

Tableau III.2 – *Données expérimentales et numériques disponibles.*

des jets, le rapport des températures du primaire à l'atmosphère ou encore le rapport des températures du secondaire à l'atmosphère.

Pour les deux points de fonctionnement, TP2 et TP3, le jet primaire est un jet chaud dont le nombre de Mach de sortie M_j est subsonique. [1] Le jet secondaire est froid, éjecté à une vitesse inférieure à celle du jet primaire, avec un nombre de Mach également subsonique. Le milieu ambiant est quant à lui au repos. Ainsi, entre les conditions TP2 et TP3, seules les caractéristiques du jet primaire sont modifiées : les températures statiques des deux jets sont inchangées, mais les rapports de vitesses diffèrent, avec $\lambda_{TP2} = 1.32$ et $\lambda_{TP3} = 1.57$, la vitesse d'éjection du primaire étant plus importante dans le cas TP3. On observe que l'écart de vitesse entre les jets primaire et secondaire reste cependant bien inférieur à l'écart de vitesse existant entre le jet secondaire et l'atmosphère. Enfin, il est intéressant de remarquer que les caractéristiques de ces jets ont été choisies afin de reproduire des conditions types de jets double-flux au décollage d'un avion de ligne moderne.

1.3 Configurations d'étude

Par l'importance des moyens mis en oeuvre et le temps alloué lors du projet CoJeN, l'ensemble des configurations possibles entre géométries et points de fonctionnement n'a pas été étudié. Ainsi, d'un point de vue expérimental, les mesures par microphones des fluctuations de pression en champ proche n'ont été réalisées que dans le cas de la tuyère *short-cowl* (SC par la suite). Par conséquent, nos analyses PSE ne pourront être comparées d'un point de vue hydrodynamique que sur les cas SCTP2 et SCTP3. Le cas COTP2 sera tout de même analysé en comparaison des résultats obtenus sur ces deux derniers cas. Les mesures acoustiques en champ lointain sont disponibles dans les cas coplanaire (CO par la suite) et *short-cowl* des conditions TP2 et TP3. Cependant, pour des raisons détaillées ultérieurement, seules les directivités mesurées sur les cas SCTP2 et SCTP3 seront utilisées.

Le tableau III.2 récapitule les données disponibles que nous utilisons dans ces travaux. En champ proche, nous étudions donc par la suite les cas COTP2, SCTP2 et SCTP3. En champ lointain, nous comparons les directivités des cas SCTP2 et SCTP3.

1. Les nombres de Mach acoustiques ($M = U_p/a_\infty$) du jet primaire pour les deux conditions SCTP2 et SCTP3 sont cependant supersoniques, avec respectivement $M = 1.19$ et $M = 1.41$.

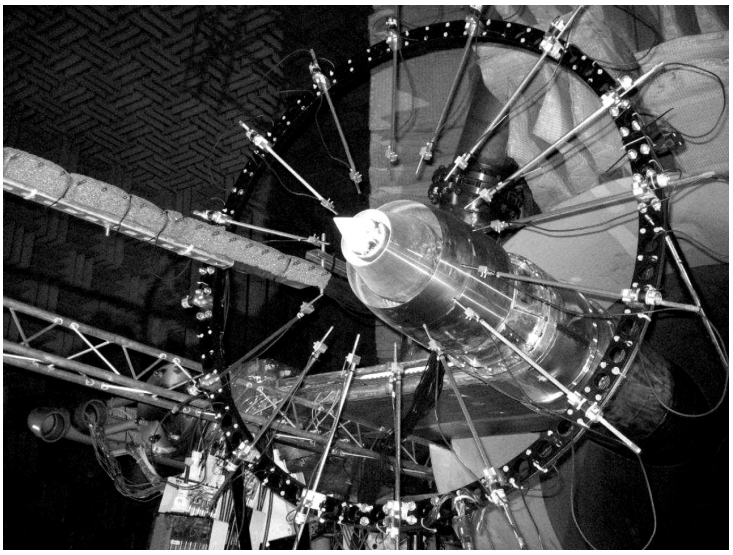


Figure III.2 – *Montage expérimental de la tuyère coaxiale short-cowl en présence des antennes azimutale et linéaire au NTF (Noise Test Facility) de QinetiQ.*

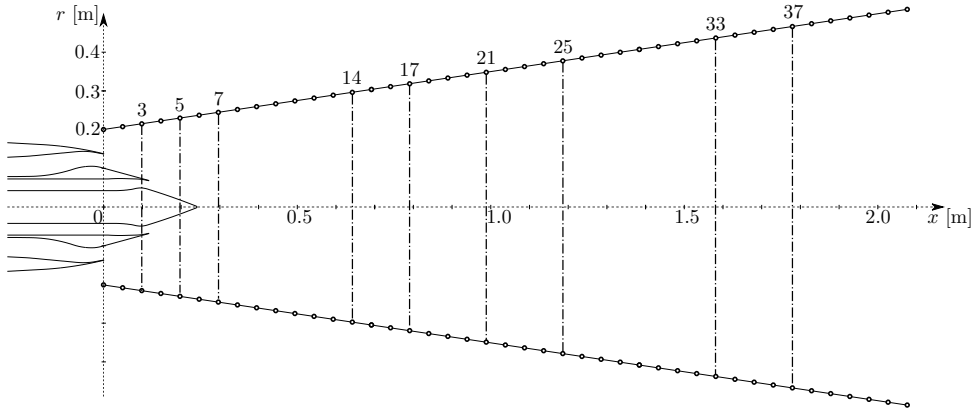


Figure III.3 – *Positions des microphones de l'antenne linéaire (○) et abscisses d'acquisition de l'antenne azimutale (- · - · -).*

III.2 Analyse des mesures de fluctuation de pression

Avant d'effectuer une analyse PSE sur ces trois configurations, nous réalisons ici une étude fréquentielle et modale des fluctuations de pression mesurées en champ proche des jets SCTP2 et SCTP3. Cette étude a pour objectif de préparer ces résultats expérimentaux en vue d'une comparaison aux calculs PSE linéaires.

2.1 Géométrie des antennes en champ proche et travaux réalisés sur ces mesures

Les mesures de fluctuation de pression en champ proche des jets SCTP2 et SCTP3 ont été réalisées au NTF (*Noise Test Facility*) de QinetiQ, à Farnborough, UK. Les mesures de pression ont été réalisées au moyen d'une antenne linéaire et d'une antenne azimutale, toutes deux visibles sur la figure III.2. L'antenne linéaire est composée de 48 microphones, répartis à intervalles réguliers de 50 mm, positionnés sur une droite inclinée d'un angle de 8.5° par rapport à l'axe du jet afin de suivre sa divergence axiale. Les positions de ces microphones sont ainsi représentées sur la figure III.3. Le premier microphone est situé à l'abscisse initiale $x/d_s = 0$, aux lèvres de la tuyère externe, à une position radiale $r/d_s = 0.738$. L'antenne azimutale est constituée de 15 microphones, en plus d'un 16$^{\text{ème}}$ pris sur l'antenne linéaire et servant de référence. Ces

microphones sont ainsi répartis uniformément sur un cercle dont le rayon dépend de la position radiale du microphone de l'antenne linéaire. Cette antenne azimutale est déplacée à 9 positions axiales représentées dans les figures III.3 et III.5.

Une analyse poussée de ces données a notamment été menée dans les travaux de Tinney et Jordan [2008]. Ces derniers ont focalisé leur étude sur une analyse POD des fluctuations de pression, ainsi que sur une analyse hydro-acoustique de ces mesures. Plus particulièrement, les auteurs mettent en évidence le caractère très structuré du champ de pression proche au moyen d'une analyse POD des corrélations temporelles de fluctuations de pression mesurées sur l'antenne linéaire. Une analyse POD basée sur les interspectres des fluctuations de pression a également été explorée, mais de manière plus succincte : nous reprenons par la suite cette dernière approche pour analyser la structure des fluctuations de pression aux fréquences que nous étudions par la suite, ce qui n'est pas détaillé dans les travaux de Tinney et Jordan [2008]. Ces derniers se sont également intéressés à l'action de chevrons, placés aux lèvres extérieures de la tuyère *short-cowl*, sur la dynamique et la structure du champ proche de pression, ainsi que sur la réduction du bruit observé. L'analyse hydro-acoustique de leurs travaux consiste en une séparation explicite des mesures de fluctuations de pression de l'antenne linéaire en une partie subsonique, d'origine hydrodynamique, et une partie supersonique, d'origine acoustique. Dans nos travaux, nous n'effectuons pas explicitement un tel filtrage hydro-acoustique, mais nous sommes cependant en mesure de retrouver une partie de leurs observations. Ces résultats nous servent alors de base afin d'approfondir l'analyse au moyen de notre modélisation PSE, puisque, contrairement à ces auteurs, nous pouvons alors déterminer l'origine des fluctuations hydrodynamiques et acoustiques.

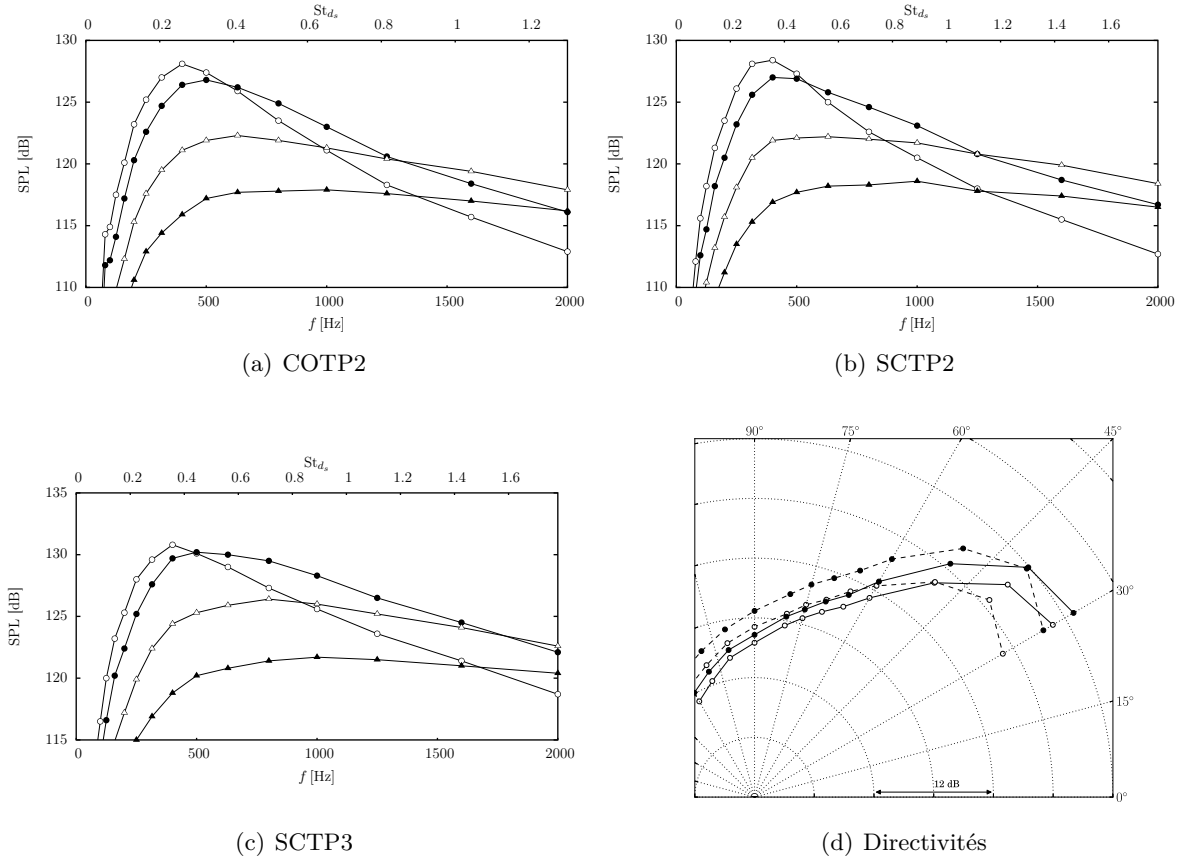
Parmi les autres études réalisées sur ces mesures, Guérin et Michel [2006] ont étudié la structure azimutale du champ proche de pression. Pour cela, ces auteurs ont réalisé une décomposition à la fois azimutale et spectrale des mesures réalisées sur l'antenne circulaire. Cependant, dans leurs travaux, seule la condition SCTP1 a été étudiée, et uniquement pour des fréquences supérieures à 1 kHz, considérant que les plus basses fréquences ne sont pas importantes en termes de nuisances sonores. Comme nous le justifions par la suite, notre étude se concentre justement sur ces fréquences inférieures à 1 kHz, sur les cas SCTP2 et SCTP3. Par conséquent, nos résultats de décomposition azimutale des champs proches de pression issus des tuyères *short-cowl* sont clairement à différencier des travaux de Guérin et Michel [2006].

2.2 Identification de la bande fréquentielle d'étude et mesures en champ lointain

En plus des fluctuations de pression dans la région proche du jet, des mesures de puissance acoustique en champ lointain ($R > 40\,d_s$) ont été relevées sur un arc compris entre $\theta = 30°$ et $\theta = 120°$ pour les trois cas d'étude COTP2, SCTP2 et SCTP3. La figure III.4 met ainsi en évidence les densités spectrales de puissance acoustique mesurées aux angles $\theta = 30°$, $40°$, $50°$ et $60°$. Pour ces trois cas d'étude, le maximum de puissance est obtenu à un angle de $30°$ et à une fréquence de 400 Hz. En adimensionnant la fréquence en termes de nombre de Strouhal basé sur les caractéristiques du jet secondaire, soit

$$St_{d_s} = \frac{f\,d_s}{U_s}\,, \tag{3-1}$$

le maximum de puissance acoustique est obtenu pour $St_{d_s} = 0.261$ dans le cas COTP2 et $St_{d_s} = 0.356$ dans les cas SCTP2 et SCTP3. Nous remarquons de plus que la densité spectrale de puissance acoustique à $40°$ est également significative, son maximum étant à moins de 2 dB du pic observé à $30°$. Ce maximum est ainsi atteint autour d'une fréquence de 500 Hz, soit $St_{d_s} = 0.326$ dans le cas COTP2 et $St_{d_s} = 0.446$ dans les cas SCTP2 et SCTP3. Enfin, cet adimensionnement par rapport aux grandeurs du jet secondaire trouve son sens dans les observations ultérieures, montrant la pertinence d'une telle description dans l'étude du champ hydrodynamique proche, pour lequel les instabilités de la couche de mélange externe sont dominantes.



(a) COTP2 (b) SCTP2

(c) SCTP3 (d) Directivités

Figure III.4 – *Densité spectrale de puissance acoustique en champ lointain observée dans les configurations (a) COTP2, (b) SCTP2, (c) SCTP3, aux angles θ d'observation ○ : 30° ; ● : 40° ; △ : 50° ; ▲ : 60° ; Les directivités en champ lointain des cas SCTP2 (○) et SCTP3 (●) sont présentées sur la figure (d) aux fréquences $f = 400\,Hz$ (——) et $f = 800\,Hz$ (- - - -) ; ces données sont issues des mesures réalisées par QinetiQ.*

Réf.	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
f [Hz]	250	315	400	500	630	800
St_{d_s} COTP2	0.163	0.205	0.261	0.326	0.411	0.522
St_{d_s} SCTP2/3	0.223	0.281	0.356	0.446	0.561	0.713

Tableau III.3 – *Correspondance entre fréquences et nombres de Strouhal dans les différents cas d'étude.*

Notre étude se focalise sur l'étude des instabilités se développant dans ces jets double-flux et leur lien potentiel avec ces pics de directivité acoustique observés en champ lointain. Par conséquent, nous centrons notre analyse sur une gamme de fréquence relativement restreinte, autour des fréquences présentant un maximum de puissance acoustique à de faibles angles dans la direction axiale du jet. Les fréquences et nombres de Strouhal étudiés par la suite sont donnés dans la table III.3.

À ces différentes fréquences d'étude sont associées des directivités acoustiques présentant la puissance en fonction de l'angle d'observation. La figure III.4(d) donne ainsi un aperçu de ces directivités pour les cas SCTP2 et SCTP3 pour les nombres de Strouhal $St_{d_s} = 0.356$ et 0.713. Globalement, les puissances acoustiques observées sur le cas SCTP3 et pour les basses fréquences considérées sont plus importantes que dans le cas SCTP2. Ce résultat suggère une influence non négligeable des caractéristiques du jet primaire dans le rayonnement acoustique à de faibles angles et de basses fréquences.

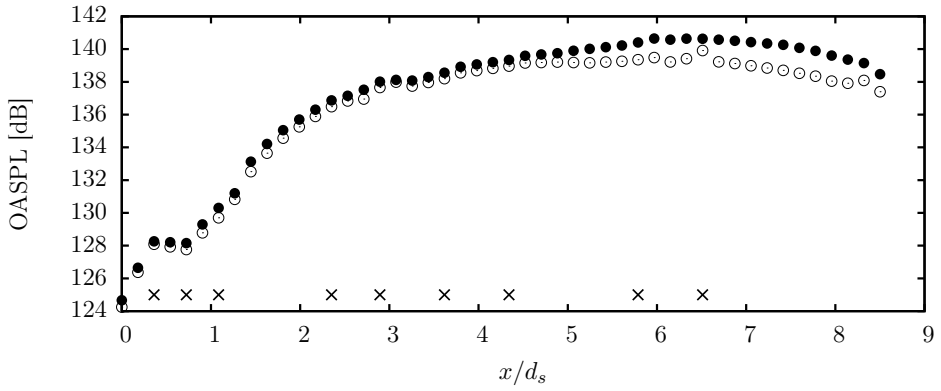


Figure III.5 – *Niveaux de pression acoustique (OASPL) mesurés sur l'antenne linéaire dans les configurations SCTP2 (○) et SCTP3 (•) ; Les symboles × indiquent les positions axiales de l'antenne azimutale.*

2.3 Décomposition des fluctuations de pression de l'antenne linéaire

Suite à l'identification de la bande fréquentielle d'étude, nous analysons ici les mesures de fluctuation de pression sur l'antenne linéaire seule, dans les cas SCTP2 et SCTP3. Comme décrit précédemment, cette antenne linéaire est composée d'un nombre important de microphones, dont sont issues des mesures simultanées. Cette acquisition en temps réel et cette résolution spatiale nous permettent de décrire précisément la dynamique des fluctuations de pression au moyen d'analyses spectrales, objectif de cette section.

Il est cependant important de remarquer qu'une décomposition azimutale de ces fluctuations sur l'ensemble des microphones de l'antenne linéaire n'est pas possible. En effet, une seule antenne azimutale a servi aux mesures, et ce pour seulement 9 positions axiales. Par conséquent, nous n'avons pas de moyen direct d'effectuer un filtrage azimutal des fluctuations mesurées sur l'antenne linéaire. Une telle décomposition azimutale peut néanmoins être effectuée localement, aux 9 abscisses de mesures, et fait l'objet de la section 2.4. [2]

2.3.1 Fluctuations de pression en champ proche

L'évolution axiale des niveaux de pression acoustique (OASPL pour *overall sound pressure level*) mesurés le long de l'antenne linéaire pour les conditions SCTP2 et SCTP3 est tracée sur la figure III.5. Peu de différences sont observées entre les deux points de fonctionnement pour des abscisses $x/d_s < 4$. Une forte croissance est visible dans la région $1 < x/d_s < 3$, ensuite suivie par une seconde amplification bien moins marquée. Les différences entre les conditions SCTP2 et SCTP3 sont plus significatives dans la région $x/d_s > 4$. L'augmentation de la vitesse de sortie du jet primaire, dans ce cas, se traduit par une augmentation des niveaux totaux dans cette zone.

Afin de mettre en perspective ces mesures avec notre étude PSE, il est nécessaire d'accéder au contenu fréquentiel de ces données. La figure III.6 donne ainsi les spectres fréquentiels associés aux microphones 14 et 30 de l'antenne linéaire, soit encore, respectivement, aux abscisses $x/d_s = 2.35$ et $x/d_s = 5.25$, pour les deux cas d'utilisation SCTP2 et SCTP3. Sur cette figure, il apparaît que le contenu spectral des fluctuations de pression en champ proche pour des abscisses $x/d_s < 4$ est quasiment identique entre les conditions SCTP2 et SCTP3. Pour des abscisses supérieures, les différences se manifestent sur une large bande fréquentielle. À l'abscisse considérée dans la figure III.6(b), cette région débute à un nombre de Strouhal d'environ $St_{d_s} = 0.4$. Le contenu spectral à plus basse fréquence est quant à lui quasiment inchangé. Ces observations sont également rapportées dans les travaux de Tinney et Jordan [2008]. Ainsi, le changement du

2. Nous remarquons cependant que des outils tels que la LSE (*Linear Stochastic Estimation*, voir par exemple Tinney *et al.* [2006]) pourraient permettre d'estimer des champs de pression azimutaux représentatifs de ces mesures.

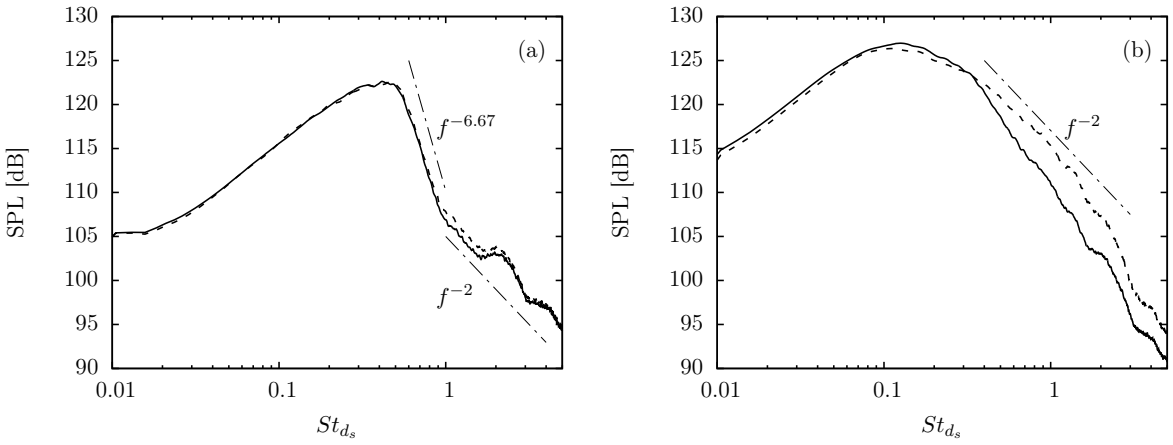


Figure III.6 – *Spectres des fluctuations de pression des microphones aux abscisses (a) $x = 2.35\,d_s$ et (b) $x = 5.25\,d_s$ pour les configurations SCTP2 (——) et SCTP3 (- - - -).*

point de fonctionnement du jet primaire n'a que très peu modifié la signature spectrale mesurée en champ proche sur les premiers diamètres du jet, les effets ne se faisant ressentir qu'en aval à "haute" fréquence.

La figure III.6(a) met également en évidence la séparation possible du contenu spectral en deux régions distinctes : la première, en basses fréquences, est dominée par des fluctuations hydrodynamiques, cette région s'étendant jusqu'à la zone présentant une décroissance en $f^{-6.67}$; la seconde, en plus hautes fréquences, est dominée par des fluctuations d'origine acoustique, caractérisées par une décroissance en f^{-2}. Ces distinctions suivent les observations de Arndt *et al.* [1997] dans le cas d'un jet simple. La frontière est extrêmement nette à cette abscisse, autour de $St_{d_s} = 1.0$, comme déjà observé sur le cas présent dans les travaux de Tinney et Jordan [2008]. Cette séparation en deux régimes hydro-acoustiques distincts semble pertinente [Coiffet *et al.*, 2006] et nous permet donc de distinguer la nature hydrodynamique ou acoustique des fluctuations mesurées sur l'antenne linéaire en fonction de la fréquence.

La figure III.6(b), quant à elle, ne présente pas une telle démarcation. Une décroissance en f^{-2} est tout de même suggérée en hautes fréquences, même si les pentes observées sont légèrement différentes, trouvant potentiellement une origine dans un effet Doppler. Ainsi, la région à dominance acoustique semble ici débuter autour de $St_{d_s} = 0.4$, correspondant également à la région où les différences spectrales entre les conditions SCTP2 et SCTP3 se manifestent sur cette figure. Ainsi, l'augmentation de la vitesse du jet primaire semble majoritairement impliquer une modification des signatures acoustiques ici observées, plutôt qu'une altération des signatures hydrodynamiques. Ces observations portent à conclure que le champ proche hydrodynamique dans la région initiale est majoritairement contrôlé par les caractéristiques du jet secondaire, au moins pour les deux configurations ici étudiées [Tinney et Jordan, 2008].

Enfin, ces observations montrent également que les microphones de l'antenne linéaire sont situés dans une région proche du jet permettant d'avoir accès au contenu hydrodynamique des fluctuations sur la gamme fréquentielle qui nous intéresse, soit des nombres de Strouhal compris entre 0.22 et 0.71, au moins sur les 4 premiers diamètres du jet. L'antenne linéaire est ainsi positionnée dans la région hydrodynamique linéaire présentée précédemment sur la figure I.12 de la section I.4.2.2.

2.3.2 Décomposition aux valeurs propres (POD)

L'analyse précédente va dans le sens de notre étude, puisque nous souhaitons, si possible, extraire de ces mesures une signature hydrodynamique comparable aux ondes d'instabilité étudiées par la suite. Cependant, le jet étant libre, l'excitation des modes instables est aléatoire,

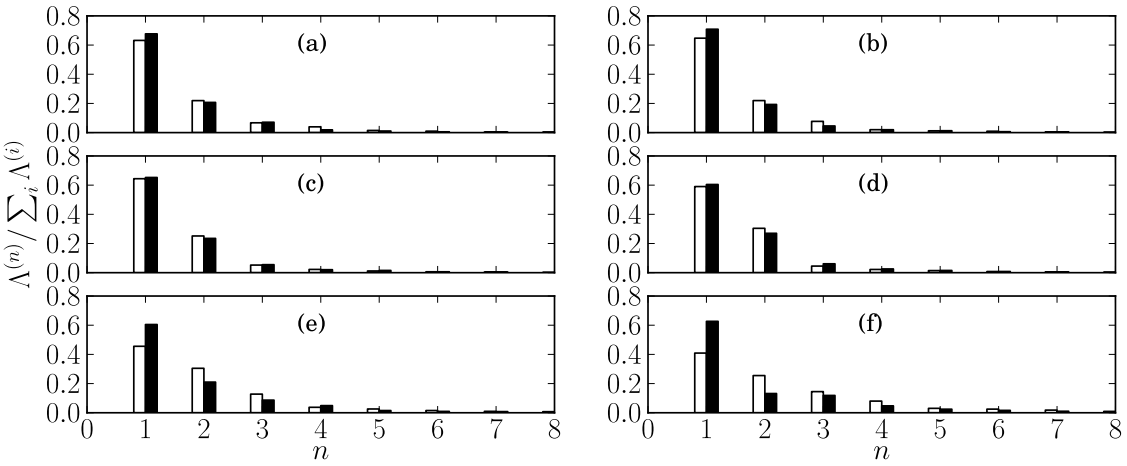


Figure III.7 – *Convergence des valeurs propres $\Lambda^{(n)}$ issues de la POD pour les configurations SCTP2 (▭) et SCTP3 (▬) aux fréquences respectives retenues dans le tableau III.3.*

rendant la signature de ces structures cohérentes également aléatoire (amplitude et phase). Ainsi, les mesures contiennent ici essentiellement des signaux non corrélés en phase dans lesquels nous cherchons à identifier ces structures cohérentes. Or, après un nombre important de "réalisations", les caractéristiques de ces structures cohérentes doivent apparaître en moyenne [Gudmundsson, 2010], nous permettant ainsi de les identifier. La question que nous nous posons ici est alors la suivante : dans quelle proportion les mesures de fluctuation de pression que nous analysons sont-elles représentatives de structures cohérentes ?

Afin de répondre à cette question, nous effectuons ici une analyse par décomposition aux valeurs propres (POD pour *proper orthogonal decomposition*). Nous reprenons ici une approche employée dans les travaux de Tinney et Jordan [2008]. Les résultats que nous obtenons ne font cependant pas partie de leur étude, puisque nous nous intéressons à la structure du champ de pression à des fréquences spécifiques. Afin d'isoler les composantes fréquentielles, nous basons le noyau de notre analyse POD sur les densités interspectrales des fluctuations de pression, soit

$$R(x,x';f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \langle p(x,t)p(x',t+\tau)\rangle e^{-2i\pi f\tau} d\tau\,. \tag{3-2}$$

Les valeurs propres $\Lambda^{(n)}$ et les vecteurs propres $\Phi^{(n)}(x,f)$ donnant la décomposition optimale des fluctuations en composantes orthogonales sont obtenus en résolvant l'équation

$$\int R(x,x';f)\,\Phi^{(n)}(x',f)\,dx' = \Lambda^{(n)}(f)\,\Phi^{(n)}(x,f)\,. \tag{3-3}$$

Le problème est alors équivalent à un problème aux valeurs propres.

Ainsi, en appliquant cette décomposition aux fréquences d'étude du tableau III.3 et pour les deux conditions SCTP2 et SCTP3, nous obtenons la figure III.7. Sur cette dernière sont représentées les convergences des valeurs propres normalisées par l'énergie totale $\sum_i \Lambda^{(i)}$ pour ces différentes fréquences et conditions. Ces valeurs propres $\Lambda^{(n)}$ sont représentatives de l'énergie associée au mode POD n dont les caractéristiques spatiales sont données par le vecteur propre $\Phi^{(n)}(x,f)$. La convergence extrêmement rapide des valeurs propres est significative d'une structure très cohérente des fluctuations de pression aux fréquences considérées. Ainsi, les 3 premiers modes concentrent à eux seuls plus de 80% de l'énergie dans tous les cas étudiés, dépassant généralement 90%.

Cette forte structuration du champ de pression mesuré nous permet donc d'envisager une extraction modale des fluctuations. Cependant, l'analyse POD n'a pas été poussée plus loin. En effet, il aurait été très intéressant d'effectuer une décomposition azimutale, en plus du filtrage

fréquentiel ici réalisé, couplée à une décomposition aux valeurs propres. De tels travaux ont été réalisés par Gudmundsson [2010] dans le cas d'un jet simple subsonique, et d'excellents résultats y sont rapportés (voir la figure I.16 de la section I.4.2.2). Les données dont nous disposons ne permettent pas d'aller dans cette direction, puisque les acquisitions des antennes azimutales à différentes abscisses n'ont pas été simultanées, ne permettant donc pas d'effectuer de corrélation de phase. De plus, les modes POD ici extraits des mesures de l'antenne linéaire seule n'ont pas de raison apparente d'être représentatifs des modes instables étudiés. En effet, les modes POD ne sont ici qu'une représentation optimale en terme d'énergie des structures cohérentes des fluctuations de pression mesurées, et ne donnent donc pas explicitement accès aux modes azimutaux des deux couches de mélange. Aucune comparaison n'est donc ici réalisée avec nos résultats PSE.

2.3.3 Phases des composantes fréquentielles

L'analyse précédente confirme le caractère organisé et cohérent des fluctuations de pression mesurées. Nous analysons maintenant les caractéristiques axiales de ces fluctuations. La phase de la fluctuation la plus corrélée à la fréquence d'étude f entre deux microphones consécutifs i et j de l'antenne linéaire est obtenue par

$$\Delta\varphi_{i,j} = \arg(C_{i,j}(f)) \tag{3-4}$$

où $C_{i,j}(f)$ est l'interspectre des deux signaux considérés. Ce dernier est obtenu par moyenne de périodogrammes selon la méthode de Welch. La figure III.8 donne ainsi les évolutions axiales des phases des fluctuations les plus corrélées pour les 6 fréquences et les 2 points de fonctionnement étudiés.

Tout d'abord, les écarts entre les conditions SCTP2 et SCTP3 sont très peu marqués sur l'ensemble des fréquences étudiées. Cela suggère que les mécanismes produisant ces signatures de phase sont similaires dans les deux conditions et peu influencés par le changement de régime du jet primaire. Ensuite, l'évolution axiale des phases peut globalement être séparée en 2 zones linéaires, une rupture de pente autour de $x/d_s = 3$ ou 4, selon la fréquence, étant visible. Cette rupture de pente intervient à des abscisses comparables à celles relevées précédemment concernant le changement de nature des fluctuations, passant d'un régime hydrodynamique à un régime acoustique. Il est donc intéressant d'étudier les vitesses de phase associées, de manière similaire à l'analyse hydro-acoustique menée par Tinney et Jordan [2008].

Dans cette optique, nous représentons sur la figure III.9 les pentes des phases observées dans la figure III.8 en fonction du nombre de Strouhal, pour la condition SCTP2. Ces pentes $\partial_x\varphi$ sont directement reliées aux vitesses de phase v_{ph} (adimensionnées par la vitesse de référence U_s) par

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial(\frac{x}{d_s})} = \frac{St_{d_s}}{v_{ph}} \tag{3-5}$$

Sur cette figure sont également représentées les droites issues de la relation 3-5 où la vitesse de phase est prise égale à la vitesse du son $a_\infty = 340.3\,\mathrm{m/s}$ (droite sonique), la vitesse du jet primaire $U_p = 404.5\,\mathrm{m/s}$ et la vitesse de convection globale définie par

$$U_{conv} = 0.60\left(\frac{U_s + U_p}{2}\right) = 213.4\,\mathrm{m/s}\,. \tag{3-6}$$

Une telle définition de la vitesse de convection globale est issue des travaux de Tinney et Jordan [2008]. Cette vitesse de convection globale représente une vitesse de convection de structures dans un jet simple présentant une vitesse en sortie de tuyère qui serait la moyenne des vitesses des jets primaire et secondaire que nous étudions. Elle est alors représentative de la vitesse de convection de structures évoluant dans la couche de mélange d'un tel jet, soit, dans le cas des jets

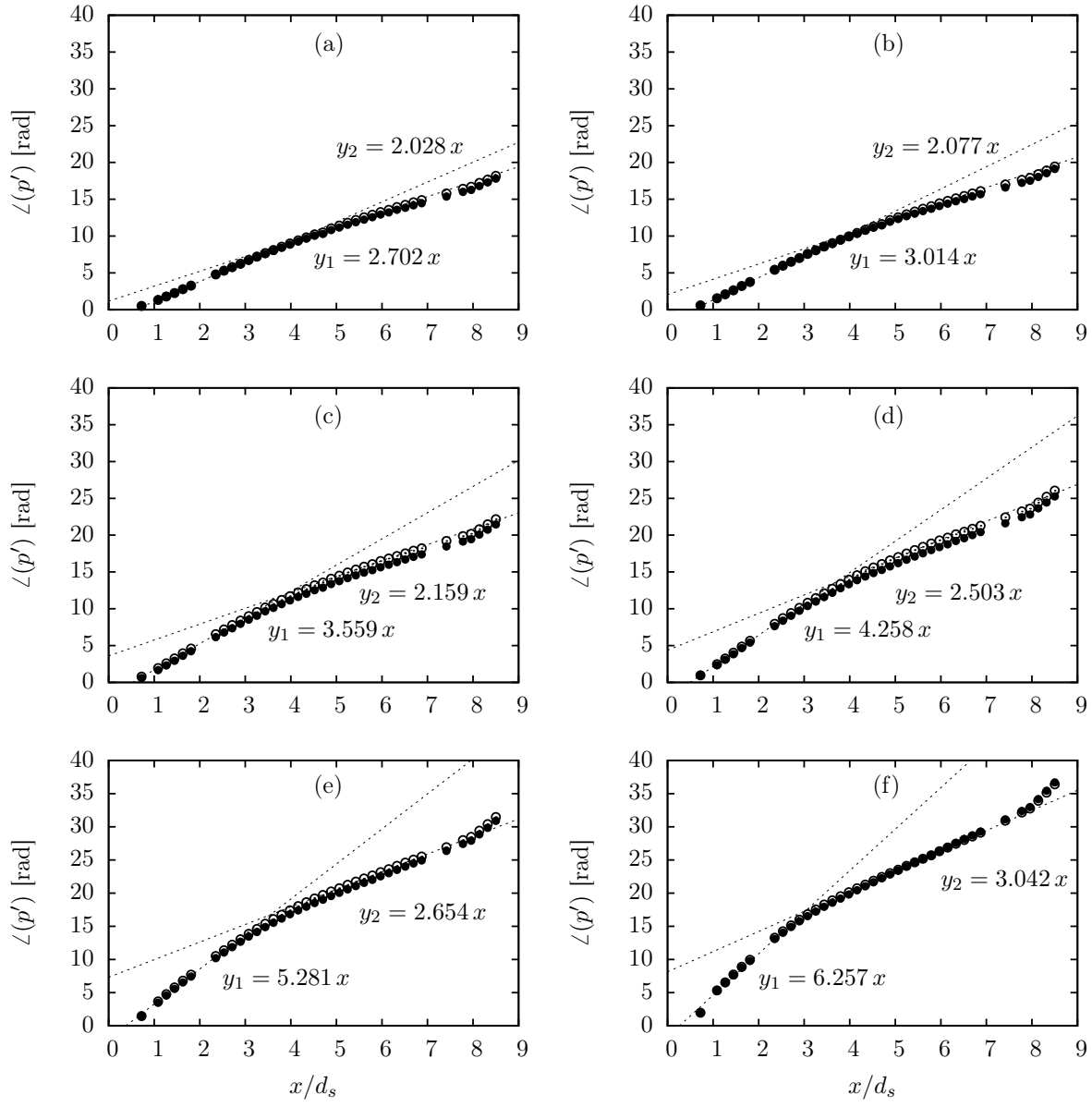


Figure III.8 – *Évolutions axiales de la phase des fluctuations de pression dans les configurations SCTP2 (○) et SCTP3 (●) aux fréquences suivantes : (a) $St = 0.223$; (b) $St = 0.281$; (c) $St = 0.356$; (d) $St = 0.446$; (e) $St = 0.561$; (f) $St = 0.713$.*

double-flux que nous étudions, de structures principalement pilotées par la couche de mélange externe.

La partie inférieure à la droite sonique représente une zone à vitesses de phase supersoniques. Dans cette figure, les vitesses de phase mesurées sur les premiers diamètres du jet suivent raisonnablement bien la droite issue de la vitesse de convection globale U_{conv}. Les structures dominant cette première région du champ proche du jet sont donc subsoniques et préférentiellement pilotées par la couche de mélange externe. Concernant les vitesses de phase mesurées plus en aval, elles sont soniques ou supersoniques pour $St_{d_s} > 0.35$, en accord avec l'analyse spectrale menée précédemment. Suivant les observations de Tinney et Jordan [2008] sur ce même jet, le jet primaire peut être en partie responsable de ce rayonnement acoustique par des effets purement convectifs, si les fluctuations hydrodynamiques associées à la couche de mélange interne atteignent le champ proche du jet. Ceci ne paraît possible que dans cette région aval et l'analyse PSE peut

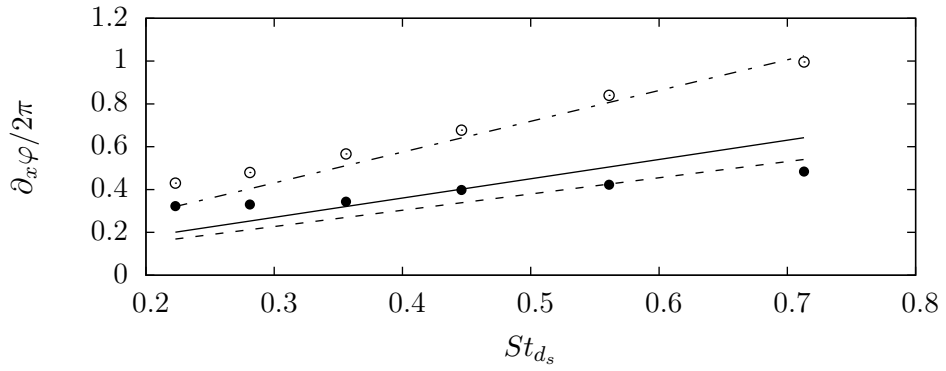


Figure III.9 – *Comparaison des rapports de la fréquence à la vitesse de phase St/v_{ph} mesurés dans la région $x/d_s < 4$ (○) et dans la région aval (•), avec les droites obtenues en considérant la vitesse du son a_∞ (——), la vitesse du jet primaire U_p (- - - -) et la vitesse de convection U_{conv} (-·-·-), sur le cas SCTP2.*

potentiellement apporter des éléments de réponse à cette question.

2.3.4 Amplitudes des composantes fréquentielles

L'analyse précédente étudie les phases des fluctuations de pression les plus corrélées, sur la gamme fréquentielle d'étude. Nous étudions maintenant l'évolution des amplitudes de ces mêmes fluctuations, toujours sur l'antenne linéaire seule. Ainsi, l'amplitude d'un mode fréquentiel est obtenue après évaluation des spectres des microphones par

$$|p'(x_i, f)|^2 = |S_i(f)| \tag{3-7}$$

où $S_i(f)$ est le spectre du microphone i calculé par la méthode des périodogrammes de Welch. Afin d'affiner les résultats, une moyenne sur une bande de 40 Hz est utilisée.

La figure III.10 présente les évolutions axiales des fluctuations de pression aux 6 fréquences et 2 points de fonctionnement étudiés. De manière cohérente avec nos résultats précédents, très peu de différences sont observées sur les 3 premiers diamètres entre les conditions SCTP2 et SCTP3. La croissance des fluctuations dans cette région est très forte, avant d'atteindre un maximum et de décroître. Cette décroissance est généralement suivie par une seconde zone de croissance, plus importante dans le cas SCTP3 que SCTP2. En nous basant sur l'ensemble des observations des sections précédentes, la croissance initiale est d'origine hydrodynamique et cette seconde croissance est vraisemblablement d'origine acoustique. Il apparaît donc que l'augmentation de la vitesse du jet primaire se traduit par une forte contribution acoustique dans la zone de l'antenne linéaire, pour les fréquences d'étude et dans la région aval du jet, par rapport au cas SCTP2.

Suivant les observations de Tinney et Jordan [2008], nous pouvons imaginer deux mécanismes impliqués dans cette signature acoustique observée dans la région aval. Le premier est lié à la modulation d'amplitude de paquets d'ondes subsoniques pouvant engendrer un rayonnement acoustique [Crighton et Huerre, 1990]. De tels paquets d'ondes seraient à trouver parmi les fluctuations issues des couches de mélange du jet double-flux. Cependant, rien ici ne nous permet de conclure quant à leur nature ou leur localisation. La modulation temporelle de tels paquets d'ondes pourrait également jouer un rôle important dans la production de ces composantes acoustiques [Cavalieri *et al.*, 2011]. Le deuxième mécanisme envisagé est directement lié à la propagation supersonique de fluctuations, engendrant une signature acoustique de type onde de Mach. Ce mécanisme est rendu possible par la vitesse et la température importante du jet primaire, dont le nombre de Mach par rapport à l'atmosphère est supersonique ($M_{pa} = U_p/a_\infty = 1.19$ dans le cas SCTP2 et $M_{pa} = 1.41$ dans le cas SCTP3). Comme observé sur la figure III.10, l'augmentation de la vitesse du jet primaire dans le cas SCTP3 se traduit par une augmentation

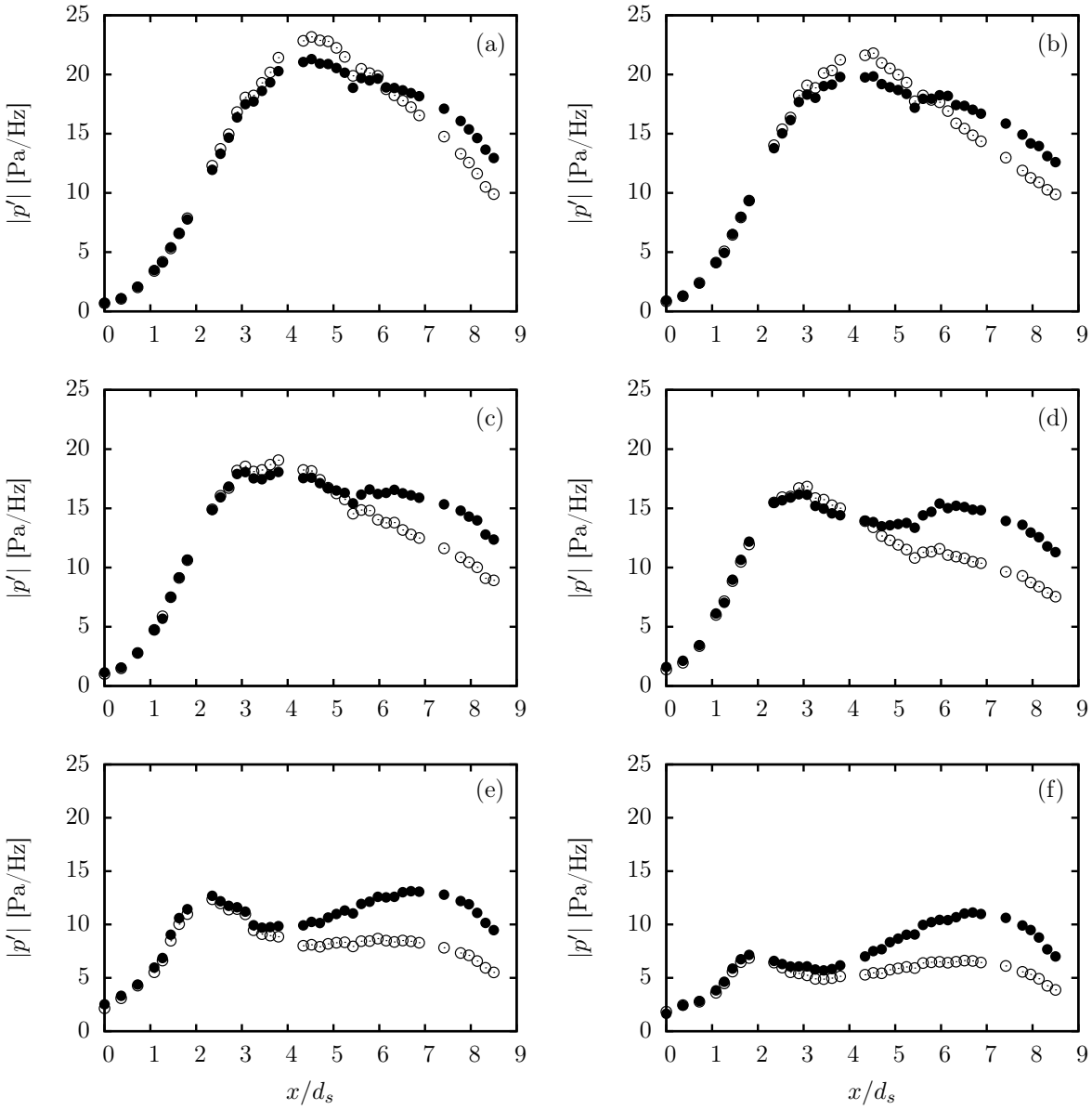


Figure III.10 – *Évolutions axiales des amplitudes des fluctuations de pression ; voir la légende de la figure III.8.*

des amplitudes d'origine acoustique dans la région aval, par rapport au cas SCTP2. Ainsi, par un mécanisme purement convectif, les fluctuations issues de la couche de mélange interne seraient en mesure d'engendrer cette production acoustique, accrue dans le cas SCTP3. Ce mécanisme ne peut être efficace que lorsque les fluctuations de pression associées à ces structures internes atteignent le champ proche hydrodynamique linéaire leur permettant de rayonner dans le milieu ambiant. Ces observations suggèrent que, pour les fréquences étudiées, cela n'est possible que dans la région aval du jet.

2.4 Décomposition des fluctuations de pression de l'antenne azimutale

L'analyse fréquentielle précédente des fluctuations de pression mesurées sur l'antenne linéaire nous a permis d'identifier leurs natures hydrodynamique ou acoustique. Cependant, une décomposition azimutale de ces fluctuations est également nécessaire afin de réaliser une comparaison pertinente avec les résultats d'une analyse PSE. Cette section a donc pour objectif d'évaluer les

caractéristiques des principaux modes azimutaux au moyen des mesures réalisées sur l'antenne azimutale. Pour cela, nous disposons de ces mesures réalisées à 9 positions axiales spécifiées précédemment dans la figure III.3.

2.4.1 Spectre des microphones et recalibrage

Lors du traitement des mesures issues de l'antenne azimutale sur le cas SCTP3, nous avons observé un écart non négligeable des niveaux entre les microphones de l'antenne azimutale et le microphone de référence de l'antenne linéaire. Cette différence, sûrement due à une erreur de calibration, est visible sur la figure III.11 et a été relevée sur plusieurs positions axiales. Après vérification que tous les spectres issus des microphones de l'antenne azimutale avaient des enveloppes identiques, un simple facteur correctif a été appliqué sur ces microphones afin d'ajuster les niveaux à celui du microphone de référence, situé sur l'antenne linéaire.

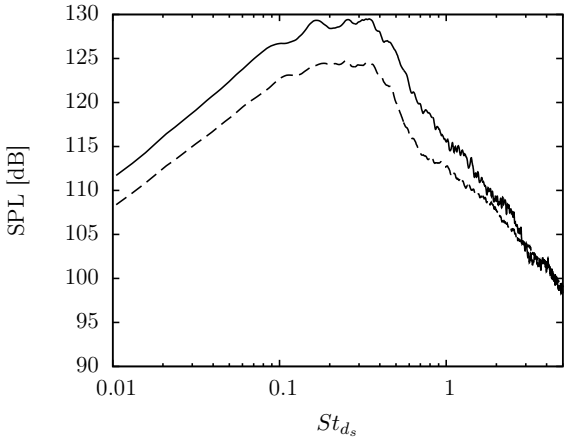


Figure III.11 – *Spectre d'un microphone de l'antenne azimutale (- - - -) dont les niveaux sont inférieurs à ceux du microphone de référence situé sur l'antenne linéaire (——).*

2.4.2 Répartition énergétique des modes azimutaux

La densité spectrale de puissance des modes azimutaux s'exprime sous la forme suivante, avec $C_{j,k}(f)$ l'interspectre des signaux obtenus sur les microphones j et k :

$$|p'_m(f)|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{j,k} C_{j,k}(f)\, e^{im(\theta_j - \theta_k)} \tag{3-8a}$$

L'énergie contenue dans un mode azimutal est alors évaluée par intégration de cette densité spectrale modale. Ainsi, la figure III.12 représente l'évolution axiale de l'énergie contenue dans chaque mode azimutal m, en pourcentage de l'énergie totale obtenue à chaque abscisse. Le mode axisymétrique $m = 0$ ainsi que les 3 premiers modes azimutaux positifs et négatifs y sont présentés pour les configurations SCTP2 et SCTP3.

On observe tout d'abord que la répartition énergétique entre les modes azimutaux opposés est quasiment symétrique, témoignant du caractère axisymétrique des jets double-flux étudiés. Nous avons également vérifié que les caractéristiques spectrales de ces modes sont similaires, et qu'aucune différence significative n'est à noter. Par la suite, nous nous concentrons donc uniquement sur les modes à nombre d'onde azimutal positif.

Ensuite, sur le premier diamètre du jet $x/d_s < 1$, l'énergie des fluctuations est principalement répartie sur les 4 premiers modes azimutaux. En particulier, près des lèvres de la tuyère, l'énergie des modes $m = \pm 1$ et $m = \pm 2$ est supérieure à l'énergie associée au mode axisymétrique $m = 0$.

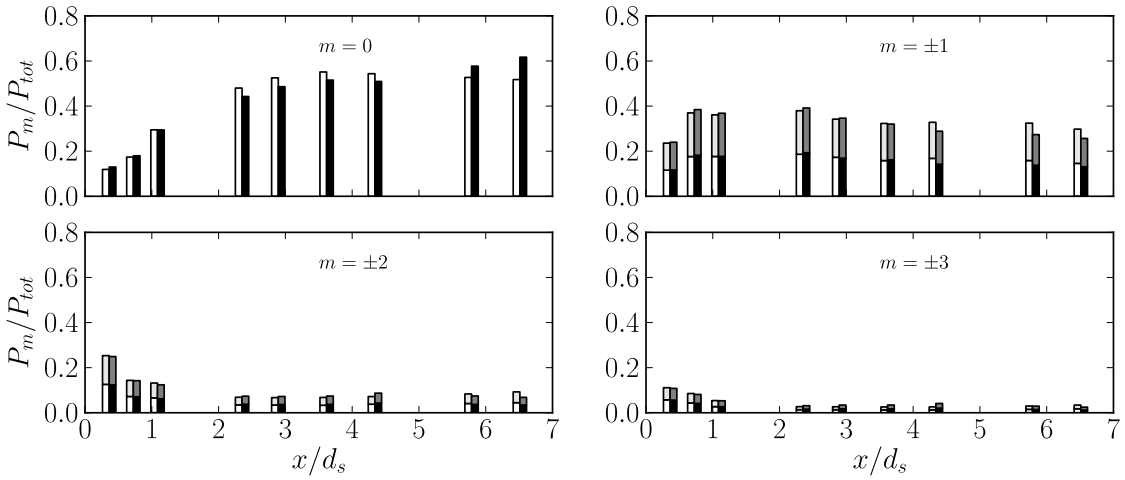


Figure III.12 – *Évolution axiale des énergies des modes azimutaux pour les configurations SCTP2 (▭ pour $m \geq 0$; ▭ pour $m < 0$) et SCTP3 (■ pour $m \geq 0$; ■ pour $m < 0$).*

En aval, le mode axisymétrique $m = 0$ devient rapidement le mode le plus énergétique, dès l'abscisse $x/d_s > 2$, pour atteindre près de 50% de l'énergie totale. Le premier mode hélicoïdal $m = 1$ évolue peu et se maintient autour de 30% de l'énergie totale, en cumulant les modes positif et négatif. Les modes azimutaux supérieurs, quant à eux, voient leurs énergies relatives s'amoindrir avec l'accroissement énergétique du mode axisymétrique. Ainsi, les modes azimutaux dominant énergétiquement la structure du champ proche de pression sont les modes $m = 0$ et $m = \pm 1$, cumulant à eux deux plus de 80% de l'énergie des fluctuations mesurées. Dans la suite de notre étude, nous n'avons donc retenu que les modes azimutaux $m \leq 2$.

Il est cependant important de remarquer que ces résultats traduisent des évolutions *relatives*, qu'il convient de mettre en perspective avec les évolutions absolues de la section suivante. En effet, la décroissance énergétique relative observée sur les modes hélicoïdaux, par exemple, n'implique pas une décroissance énergétique absolue de ces modes.

Enfin, si peu de différences sont observées entre les conditions SCTP2 et SCTP3 sur le premier diamètre du jet, quelques écarts se manifestent plus en aval. Ainsi, l'augmentation de la vitesse du jet primaire dans le cas SCTP3 semble ici légèrement défavoriser le mode axisymétrique jusqu'à l'abscisse $x/d_s = 5$, par rapport au cas SCTP2, pour ensuite le voir dominer. La tendance inverse est observée sur les mode hélicoïdaux.

2.4.3 Amplitudes des modes azimutaux

La décomposition azimutale effectuée au moyen de l'équation 3-8 nous permet également d'étudier l'évolution axiale des modes azimutaux aux fréquences définies dans le tableau III.3 et étudiées dans les sections précédentes.

La figure III.13 met ainsi en évidence l'évolution axiale de l'amplitude des modes azimutaux $|p'_m(f, x)|$ pour les 6 fréquences et les 2 points de fonctionnement. Pour comparaison, les évolutions axiales des fluctuations de pression extraites de l'antenne linéaire, et détaillées précédemment dans la figure III.10, y sont également représentées.

Aux fréquences étudiées, le mode axisymétrique $m = 0$ est le mode présentant la plus forte croissance, dominant les autres modes azimutaux sur l'ensemble des abscisses considérées. Ainsi, l'évolution axiale du mode axisymétrique détermine fortement l'enveloppe des fluctuations totales de pression extraites précédemment de l'antenne linéaire. Cette observation est d'autant plus justifiée dans la région aval du jet $x/d_s > 5$ où les modes hélicoïdaux ont tendance à décroître. Cette zone met également en évidence que le mode axisymétrique est le mode le plus affecté par l'augmentation de la vitesse du jet primaire. Or, cette région du champ proche a précédemment

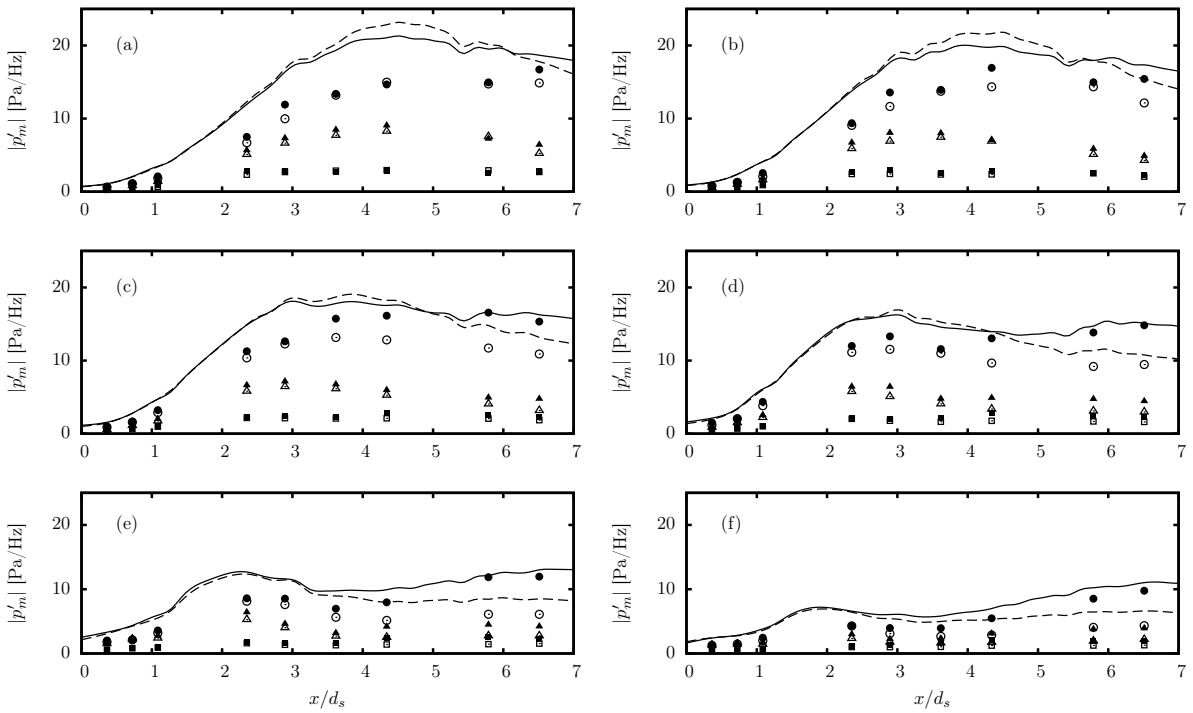


Figure III.13 – *Évolution axiale des modes azimutaux (○,● : $m = 0$; △, ▲ : $m = 1$; □, ■ : $m = 2$) dans les configurations SCTP2 (blanc) et SCTP3 (noir) pour les fréquences de la figure III.8 ; les lignes représentent les évolutions obtenues sur l'antenne linéaire ; - - - - : SCTP2 ; —— : SCTP3.*

été identifiée comme étant en régime acoustique dans cette gamme fréquentielle. Cela suggère alors l'importance acoustique du mode axisymétrique dans cette zone du champ proche de pression, au moins dans le cas SCTP3.

Alternativement, nous pouvons représenter ces décompositions azimutales de manière spatio-fréquentielle comme sur la figure III.14. Ainsi, nous pouvons observer que les modes azimutaux représentés subissent tous un gain énergétique, mais dont le maximum fréquentiel est progressivement déplacé vers les basses fréquences. Cette observation traduit l'amortissement des modes en hautes fréquences, alors que les modes de plus basses fréquences sont amplifiés dans la direction axiale. Cette dynamique est qualitativement la même pour tous les modes ici considérés, soit le mode axisymétrique et les 2 premiers modes hélicoïdaux. De plus, si initialement l'énergie est concentrée sur une bande fréquentielle restreinte, autour de 1000 Hz, les spectres semblent progressivement s'étaler en fréquence alors qu'ils gagnent en énergie dans la direction axiale. Ces dynamiques spatio-fréquentielles des modes azimutaux semblent peu modifiées par le changement de vitesse du jet primaire. On note cependant encore ici que c'est la région aval qui est la plus influencée : pour des abscisses $x/d_s > 4$, les spectres fréquentiels sont plus larges et semblent donc plus énergétiques que dans le cas SCTP2, particulièrement pour le mode axisymétrique.

Une dernière représentation possible de cette répartition énergétique parmi les modes azimutaux est donnée par la figure III.15. Sur cette dernière sont mises en évidence les amplitudes des modes à 3 abscisses en fonction de la fréquence et du nombre d'onde azimutal. Cette figure permet notamment d'apprécier le rôle en champ proche des modes ayant un nombre d'onde azimutal $m > 2$. Dans la région initiale, autour de $x/d_s = 1.09$, l'énergie est ici aussi observée comme très localisée en haute fréquence et sur peu de modes azimutaux, l'échelle étant en décibels. En avançant dans la direction axiale, les modes azimutaux gagnent en énergie, particulièrement en basses fréquences. Ainsi, à une abscisse $x/d_s = 5.79$, les maxima d'amplitude des modes azimutaux sont observés autour d'une fréquence relativement commune de 100 Hz, pour les deux conditions étudiées. Il apparaît ainsi que, tout comme le spectre fréquentiel s'élargit

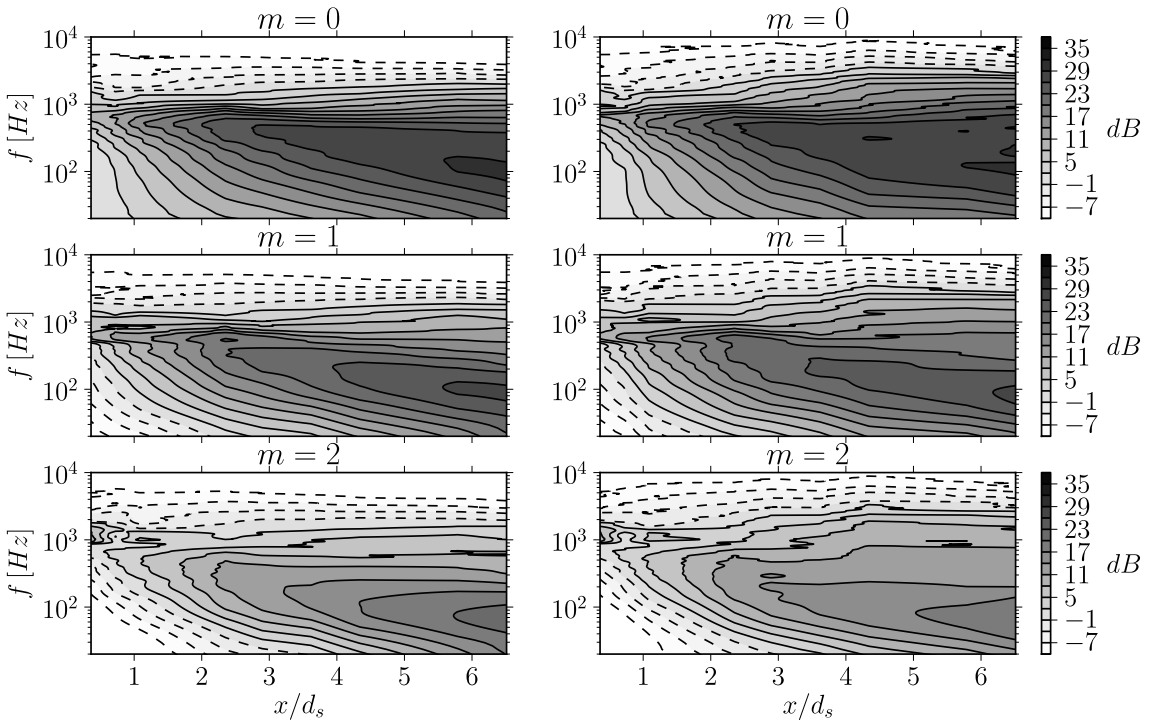


Figure III.14 – *Contours des amplitudes des modes azimutaux $m \leq 2$ en fonction de la fréquence et de l'abscisse pour les cas SCTP2 (gauche) et SCTP3 (droite).*

avec les abscisses croissantes, le spectre des nombres d'onde azimutaux se remplit également progressivement.

Les différences entre les conditions SCTP2 et SCTP3 sont bien plus visibles sur cette figure. En effet, si les états initiaux, à $x/d_s = 1.09$, sont très semblables, les contours obtenus à des abscisses plus avancées font apparaître quelques écarts. Le premier correspond à l'observation effectuée sur la figure précédente : la répartition énergétique est moins importante sur les modes azimutaux en basses fréquences dans le cas SCTP3. Ainsi, le lobe très prononcé dans le cas SCTP2 autour de 100 Hz et pour $x/d_s = 5.79$, l'est légèrement moins dans ce cas. Au contraire, le mode axisymétrique est plus énergétique, avec un spectre fréquentiel plus large. La seconde différence est l'émergence dans le cas SCTP3, dans la région aval, d'un lobe en haute fréquence et surtout visible pour des nombres d'onde azimutaux $m > 2$. Comme évoqué précédemment, à l'abscisse $x/d_s = 5.79$ et aux fréquences considérées, nous pouvons considérer le régime comme étant ici acoustique. Par conséquent, l'augmentation de la vitesse du jet primaire a ici pour effet d'augmenter l'importance acoustique du mode $m = 0$ au détriment des modes azimutaux d'ordres supérieurs, mais également d'augmenter celle des modes à plus hautes fréquences et nombres d'onde azimutaux, par rapport au cas SCTP2 et dans la région de champ proche.

2.4.4 Phase des modes azimutaux

Afin de compléter cette décomposition azimutale des fluctuations de pression mesurées en champ proche, nous pouvons également extraire l'évolution axiale de la phase associée à chaque mode. En effet, malgré le fait que les acquisitions des microphones de l'antenne azimutale effectuées à différentes abscisses n'ont pas été simultanées, les acquisitions sur l'antenne linéaire sont cependant disponibles. Ainsi, en prenant comme référence un microphone de l'antenne linéaire situé à une abscisse intermédiaire des deux abscisses de mesure de l'antenne azimutale, l'évolution axiale de la phase des modes azimutaux peut être indirectement évaluée.

La différence de phase $\Delta\varphi_{j,k}^{(m)}$ d'un mode azimutal m entre les positions axiales x_j et x_k,

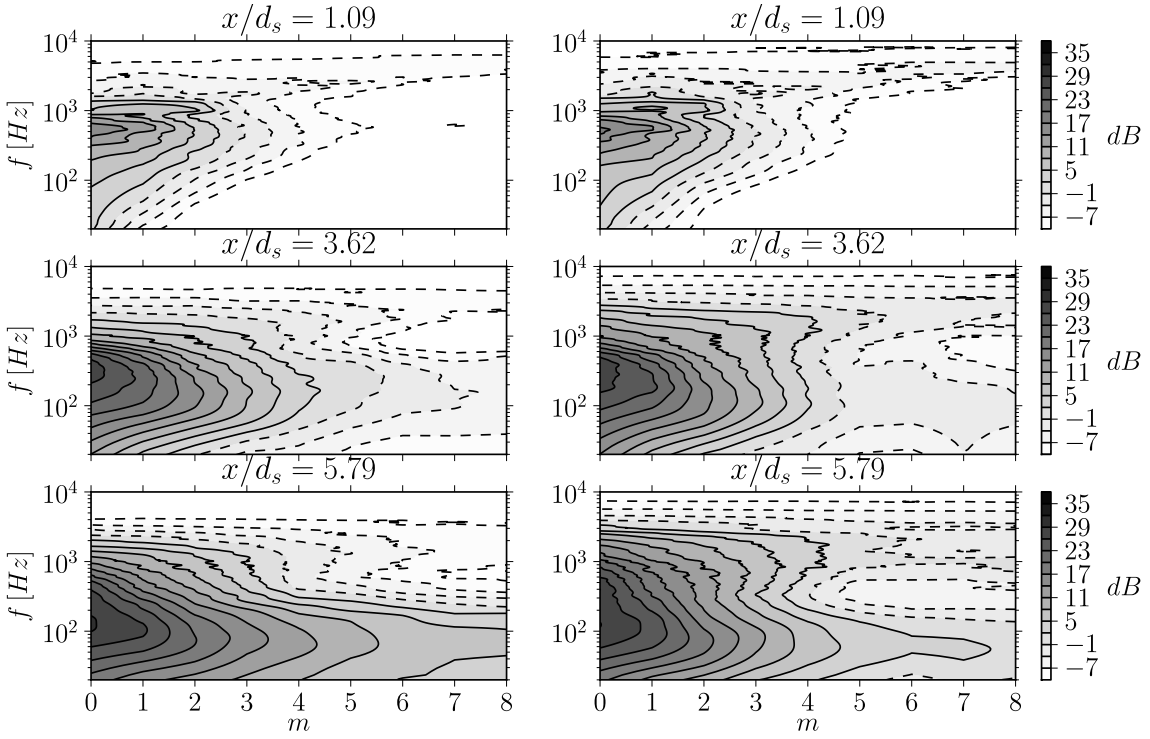


Figure III.15 – *Contours des amplitudes des modes en fonction de la fréquence et du nombre d'onde azimutal m pour les cas SCTP2 (gauche) et SCTP3 (droite).*

pour lesquelles des mesures sur l'antenne azimutale sont disponibles, est obtenue au moyen du microphone de l'antenne linéaire situé à l'abscisse x_p par

$$\Delta\varphi^{(m)}_{j,k}(f) = \Delta\varphi^{(m)}_{j,p}(f) + \Delta\varphi^{(m)}_{p,k}(f) \tag{3-9a}$$

$$= \arg\left(\frac{1}{N}\sum_q C_{(j,q);p}(f)e^{im\theta_q}\right) + \arg\left(\frac{1}{N}\sum_r C_{p;(k,r)}(f)e^{-im\theta_r)}\right), \tag{3-9b}$$

où $C_{(j,q);p}(f)$ est l'interspectre du microphone de l'antenne azimutale à l'abscisse x_j et à l'angle θ_q, avec le microphone de l'antenne linéaire situé à l'abscisse x_p. Pour qu'une telle décomposition soit valable, les signaux mesurés entre les microphones des abscisses x_j et x_p, ainsi que x_p et x_k, doivent être suffisamment corrélés. Comme nous le verrons par la suite, cela est globalement le cas.

La figure III.16 met en évidence l'évolution axiale de la phase du mode axisymétrique $m = 0$ obtenue par cette méthode. Cette évolution axiale est comparée à celle obtenue sur l'antenne linéaire pour les fluctuations les mieux corrélées, présentée sur la figure III.8. Comme nous pouvons l'observer, les phases ici obtenues suivent de manière très satisfaisante l'évolution des phases issues de l'antenne linéaire. Ce résultat est cohérent avec l'observation précédente de la dominance énergétique du mode axisymétrique. Nous observons cependant quelques écarts, les comparaisons n'étant pas parfaites, que nous attribuons à la faible résolution axiale des mesures effectuées au moyen de l'antenne azimutale. Nous jugeons cependant l'approche satisfaisante, nous permettant par la suite d'extraire l'évolution axiale des modes azimutaux.

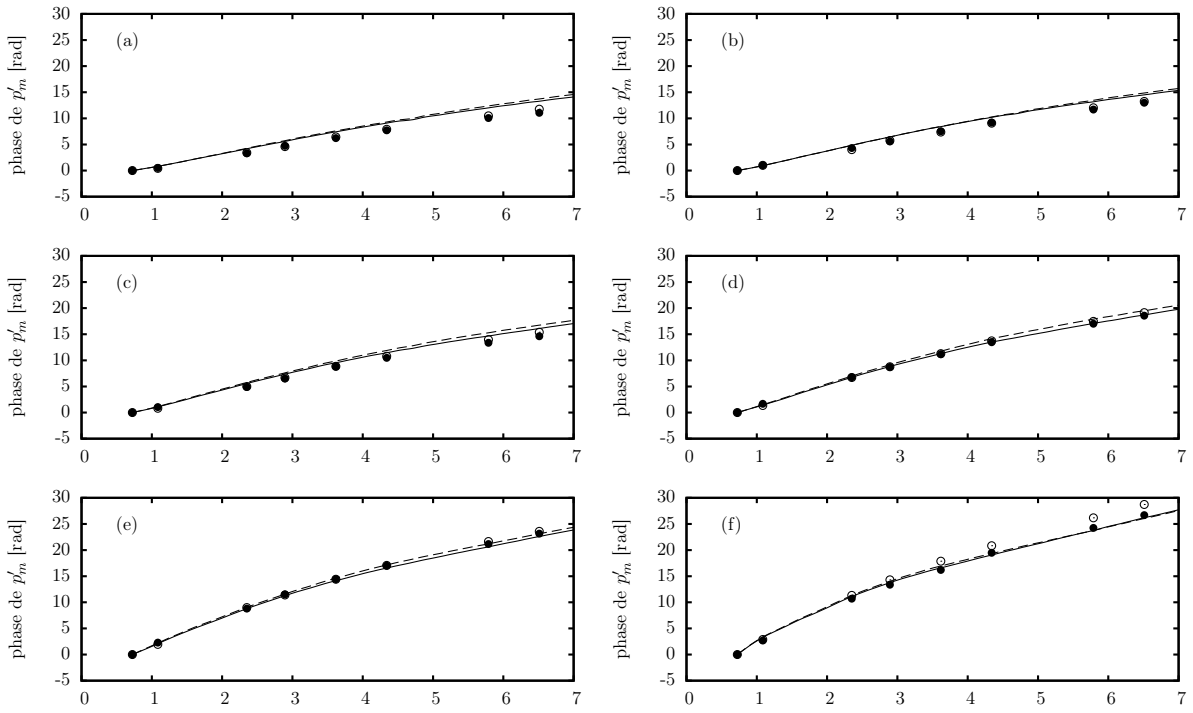


Figure III.16 – *Évolutions axiales des phases du mode axisymétrique $m = 0$ aux fréquences du tableau III.3 obtenues dans les cas SCTP2 (○) et SCTP3 (●), comparées aux évolutions axiales des phases mesurées sur l'antenne linéaire dans le cas SCTP2 (- - - -) et SCTP3 (——).*

III.3 Application de l'analyse PSE linéaire aux jets coaxiaux

Suite à l'analyse détaillée des caractéristiques hydrodynamiques et acoustiques des fluctuations de pression en champ proche du jet, mesurées sur les antennes linéaire et azimutale pour les conditions SCTP2 et SCTP3, nous appliquons ici l'analyse PSE développée dans le chapitre II sur ces mêmes configurations, ainsi que sur la condition COTP2. Pour ce faire, nous construisons les champs de base nécessaires à partir de résultats de calculs LES et de mesures PIV ou LDV. Après sélection des conditions initiales des différents modes à étudier, nous analysons quelques résultats de calcul PSE, en nous intéressant particulièrement à la configuration COTP2. Une analyse détaillée des résultats de l'approche PSE appliquée aux cas SCTP2 et SCTP3 sera effectuée par la suite dans la section III.4.

3.1 Approximation des écoulements porteurs

L'application de notre analyse PSE nécessite la connaissance d'un écoulement porteur constitué des profils de vitesse axiale $\overline{u}_x$, de vitesse radiale $\overline{u}_r$ et de masse volumique $\overline{\rho}$. Comme détaillé précédemment dans la section II.1.2 nous choisissons comme écoulement porteur la moyenne temporelle de l'écoulement turbulent. Afin de construire des champs de base représentatifs des écoulements étudiés, nous disposons de résultats de calculs LES, ainsi que de mesures PIV sur le cas COTP2 [Skeen, 2006] [3] et LDV sur les cas *short-cowl* [Kerhervé et Fitzpatrick, 2011].

Une première approche dans cette évaluation des écoulement porteurs peut se baser uniquement sur les mesures de vitesse : à partir des mesures de $\overline{u}_x$ et de $\overline{u}_r$, il est possible d'approcher le champ de masse volumique $\overline{\rho}$ au moyen de l'équation de continuité. Cependant, il s'avère que les mesures du champ de vitesse radiale $\overline{u}_r$ ne sont pas suffisamment précises et font apparaître des variations sur l'axe du jet incompatibles avec les conditions aux limites utilisées dans notre

3. Des mesures PIV sont également disponibles sur les cas SCTP2 et SCTP3 [Skeen, 2006].

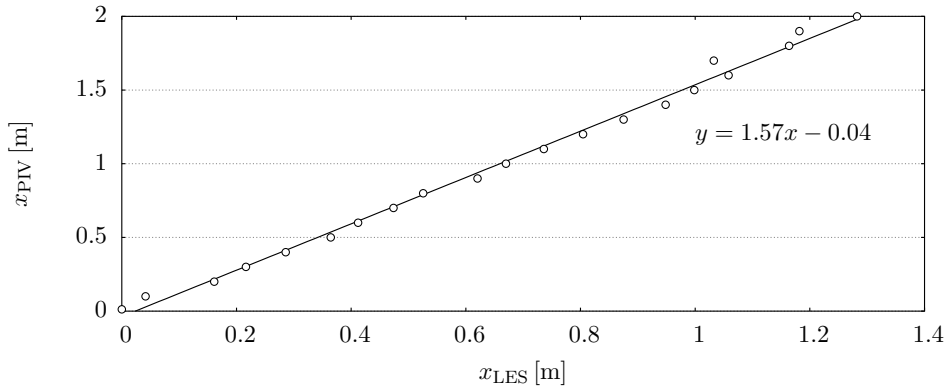


Figure III.17 – *Calibration du champ moyen LES (——) par rapport aux mesures PIV (○) dans la configuration COTP2.*

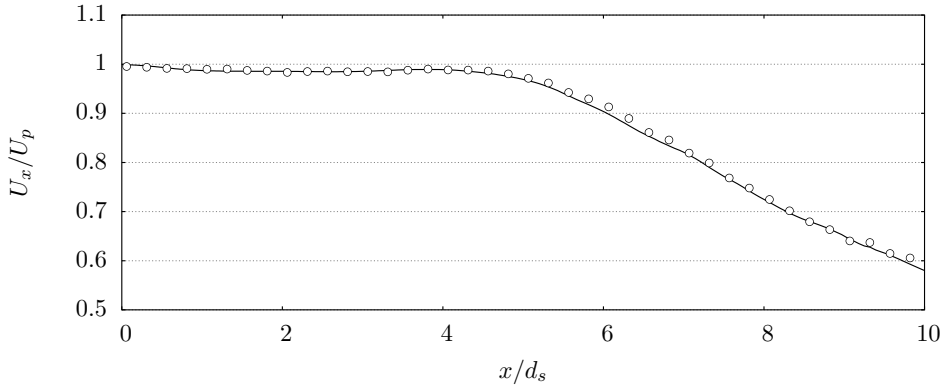


Figure III.18 – *Vitesse axiale sur l'axe du champ moyen LES calibré (——) et des mesures PIV (○) dans la configuration COTP2.*

modélisation PSE.

Nous avons donc utilisé une seconde approche en nous appuyant sur les champs moyens LES obtenus par Vuillot *et al.* [2008]. Les détails de ces simulations peuvent être trouvés dans cette référence. En particulier, les parois des buses ont été intégrées dans ces calculs LES afin d'essayer d'obtenir des niveaux de turbulence réalistes en sortie de tuyère. De plus, aucun forçage n'a été appliqué, les fluctuations se développant librement dans les couches limites. Cependant, pour des raisons de coût numérique, ces couches limites ont été sous-résolues, donnant lieu à des taux de turbulence trop importants en sortie de tuyère, par rapport aux observations expérimentales. Ces écarts se traduisent également par des cônes potentiels invariablement trop courts. Par conséquent, comparés aux mesures PIV ou LDV, les profils moyens de vitesse obtenus ici par LES ne sont pas en accord. Comme observé par Vuillot *et al.* [2008], il est toutefois envisageable de corriger les champs moyens LES afin d'approcher les champs réels mesurés. Ainsi, nous cherchons ici uniquement un moyen de décrire convenablement les écoulements porteurs, en alliant résultats LES et mesures : nous ne cherchons en aucun cas à justifier la validité des simulations instationnaires effectuées, qui ont leurs qualités et leurs défauts.

3.1.1 Tuyère coplanaire

En effet, même si les profils de vitesse issus des calculs LES à une abscisse x_{PIV} ne correspondent pas aux profils mesurés à cette même abscisse, il est possible de rechercher une abscisse x_{LES} à laquelle l'accord est le meilleur au sens des moindres carrés. La figure III.17

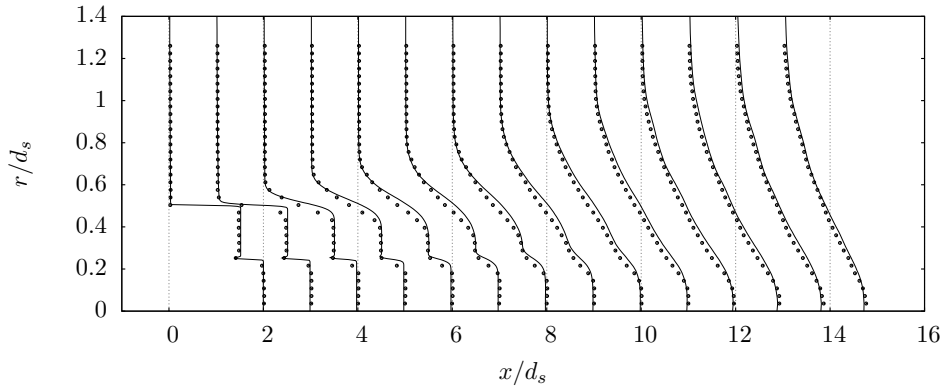


Figure III.19 – *Profils radiaux de vitesse axiale $\overline{u}_x$ du champ moyen LES calibré (——) et des mesures PIV (•) dans la configuration COTP2.*

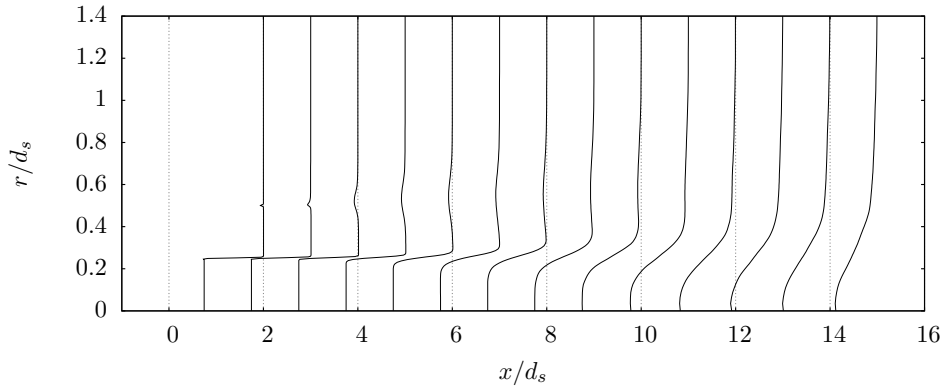


Figure III.20 – *Profils radiaux de masse volumique $\overline{\rho}$ du champ moyen LES calibré (——) dans la configuration COTP2.*

présente ainsi le résultat d'une telle démarche, donnant les abscisses des profils de vitesse issus des calculs LES produisant les meilleures représentations des profils de vitesse mesurés par PIV. Sur l'ensemble des abscisses considérées, la répartition est linéaire, suggérant qu'une simple dilatation des abscisses du champ moyen LES nous permet d'approcher le champ moyen réel de manière satisfaisante.

Ainsi, la figure III.18 représente la vitesse axiale mesurée sur l'axe par PIV, comparée à la vitesse axiale issue des calculs LES corrigés par cette transformation linéaire. La comparaison est excellente dans la région du cône potentiel ainsi que dans la zone développée. Des comparaisons favorables sont également obtenues sur l'ensemble du champ de vitesse axiale, représenté sur la figure III.19. Les profils de vitesse axiale mesurés sont approchés de manière satisfaisante dans tout le plan, quelques écarts étant cependant observés dans les régions des couches de mélange. En effet, notre champ approché surestime les gradients de vitesse axiale. Cette surestimation est non négligeable, surtout dans la couche de mélange externe. À défaut de mieux, nous retenons cette représentation du champ de vitesse axiale moyenne pour décrire l'écoulement porteur du cas COTP2. Mais, comme nous le montrons par la suite, cette surestimation des inflexions des profils de vitesse introduit potentiellement des tendances incohérentes sur l'évolution des perturbations de pression.

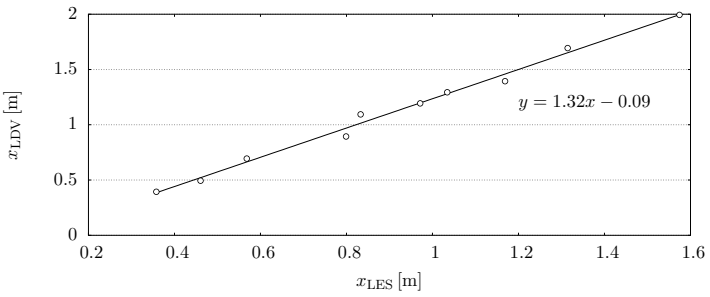
Enfin, le champ de masse volumique associé est représenté sur la figure III.20 et met en évidence une particularité de notre approche : les profils de vitesse et de masse volumique sont approchés par des B-splines cubiques. Cette approche nous permet d'obtenir une représentation fidèle des profils, mais également d'appliquer un maillage raffiné adapté à nos analyses de stabilité,

tout en assurant leur dérivabilité radiale (fonctions C^2). Les spécificités des couches de mélange sont ainsi bien reproduites (voir par exemple la présence des sillages dans les profils de vitesse et de masse volumique), ce qui n'aurait pas été le cas avec une approche plus classique consistant à approcher les profils par des fonctions de type tangente hyperbolique. Le champ de vitesse radiale $\overline{u}_r$ est alors obtenu en résolvant l'équation de continuité, nous permettant d'assurer sa nullité sur l'axe du jet, en accord avec les conditions aux limites utilisées dans notre approche PSE.

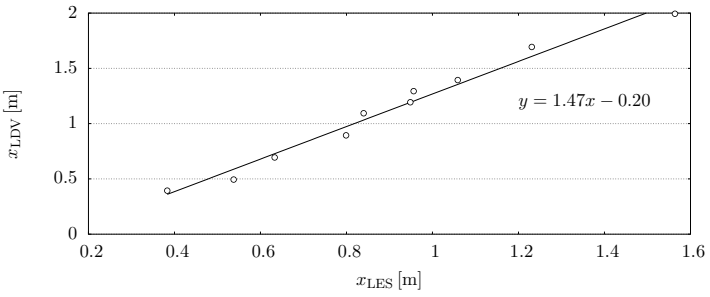
3.1.2 Tuyère *short-cowl*

Une approche identique a été utilisée dans la construction des écoulements porteurs pour les conditions SCTP2 et SCTP3. Cependant, pour des raisons de qualité et de disponibilité de données, nous avons utilisé ici comme référence des profils de vitesse issus de mesures LDV [Kerhervé et Fitzpatrick, 2011]. Ces mesures étant locales, seule une dizaine de profils de vitesse est disponible.

De manière similaire au cas de la tuyère coplanaire, les figures III.21(a) et III.21(b) mettent toutes deux en évidence des relations linéaires entre les abscisses optimales de correspondance des profils moyens LES et LDV. Ces relations sont spécifiques à chaque cas, avec une dilatation plus importante pour la condition SCTP3. Ainsi, après application de ces transformations linéaires, les figures III.22(a) et III.22(b) permettent de comparer l'ensemble des profils moyens de vitesse axiale des champs LES corrigés avec leurs équivalents LDV, pour les deux conditions SCTP2 et SCTP3. Les accords sont globalement très satisfaisants, montrant la pertinence de l'optimisation effectuée. Les écarts les plus notables sont observés au niveau des couches de mélange, mais également sur l'axe. En effet, la présence du corps central de révolution dans la configuration *short-cowl* induit un déficit de vitesse sur l'axe et une zone supplémentaire de mélange que les profils LES reproduisent de manière moins satisfaisante, tout en restant raisonnable. Étant donné la complexité de l'écoulement, nous considérons ici aussi que nos écoulements porteurs

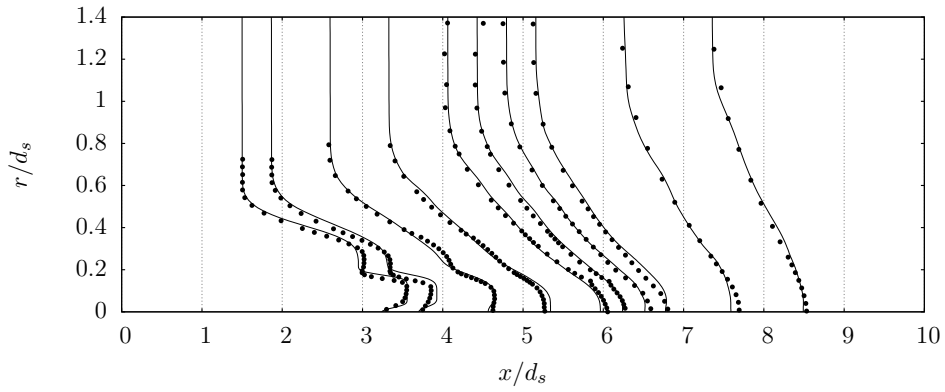


(a) SCTP2

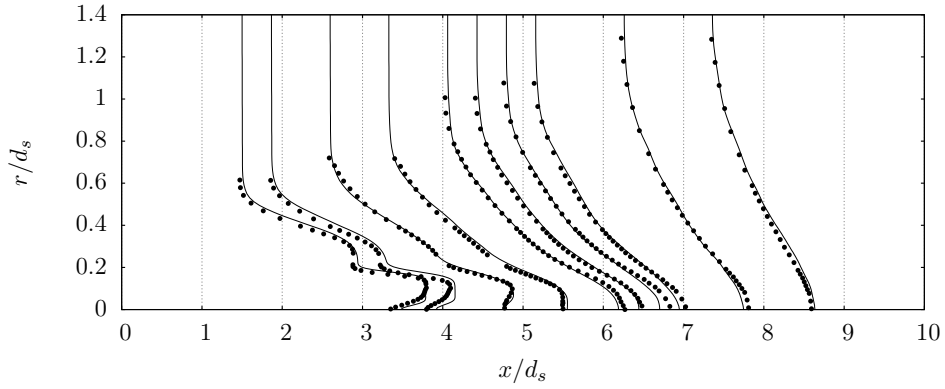


(b) SCTP3

Figure III.21 – *Calibration du champ moyen LES (——) par rapport aux mesures LDV (○) dans la configuration (a) SCTP2 et (b) SCTP3.*



(a) SCTP2



(b) SCTP3

Figure III.22 – *Profils radiaux de vitesse axiale $\overline{u}_x$ du champ moyen LES calibré (——) et des mesures LDV (•) dans la configuration (a) SCTP2 et (b) SCTP3.*

reconstruits sont suffisamment représentatifs des mesures. Les inflexions des profils de vitesse sont notamment correctement reproduites, de manière beaucoup plus satisfaisante que dans le cas d'étude COTP2.

3.2 Identification des modes hydrodynamiques

Une fois l'écoulement de base défini, nous cherchons à identifier les conditions initiales à imposer à notre système PSE. Pour cela, nous effectuons une analyse de stabilité locale à l'abscisse initiale x_0 (voir la section II.1.4).

La figure III.23(a) présente ainsi un spectre de stabilité obtenu dans le cas COTP2 à l'abscisse $x/d_s = 0$, pour un nombre de Strouhal $St_{d_s} = 0.26$ et pour un nombre d'onde azimutal $m = 0$. Un tel spectre est représentatif de l'ensemble des spectres obtenus pour toutes les conditions étudiées par la suite. On identifie ainsi deux modes hydrodynamiques associés aux couches de mélange interne et externe, que l'on désigne ensuite respectivement par KH_i et KH_o (KH pour Kelvin-Helmholtz). Seuls ces deux modes hydrodynamiques instables apparaissent dans l'ensemble de notre étude, définissant ainsi deux conditions initiales possibles pour nos analyses PSE. À la fréquence et pour mode azimutal ici présentés, le mode de la couche de mélange externe KH_o est nettement plus instable que le mode de la couche de mélange interne KH_i.

À ces valeurs propres sont associées des fonctions propres $(\hat{u}_x, \hat{u}_r, \hat{u}_\phi, \hat{\rho}, \hat{p})$ caractérisant ainsi complètement le mode issu de l'analyse de stabilité locale. Sur la figure III.23(b) sont représentées les amplitudes des fonctions propres de pression associées aux deux modes hydrodynamiques précédents. Le mode KH_i atteint un maximum de pression à une position radiale $r/d_s = 0.25$,

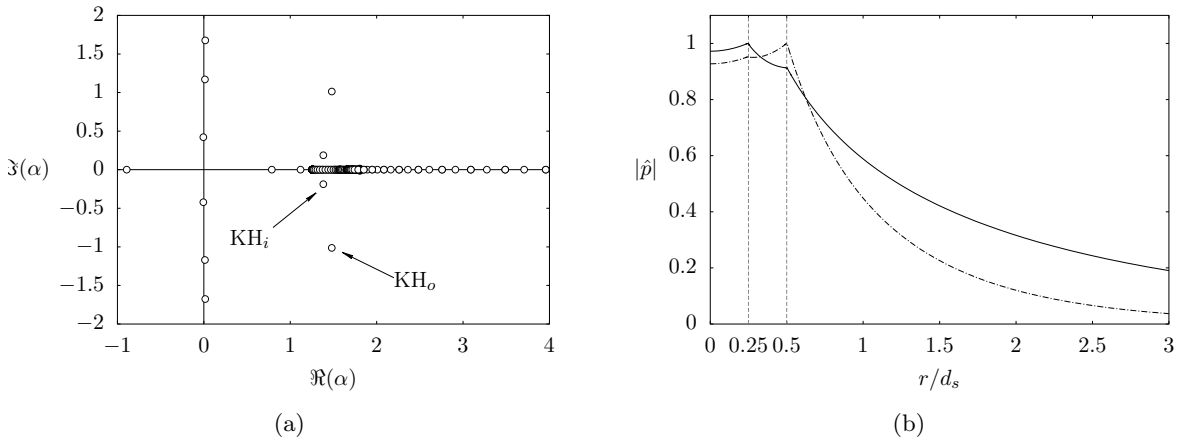


Figure III.23 – *Résultats de l'analyse de stabilité locale effectuée sur le jet COTP2 à l'abscisse $x/d_s = 0$, pour un nombre de Strouhal $St_{d_s} = 0.26$ et un nombre d'onde azimutal $m = 0$, montrant (a) le spectre de stabilité et (b) les amplitudes normalisées des fonctions propres de pression associées aux modes hydrodynamiques KH$_i$ (——) et KH$_o$ (- · - · -).*

soit dans la couche de mélange interne, alors que le mode KH$_o$ atteint un maximum de pression à $r/d_s = 0.50$, soit dans la couche de mélange externe.

On remarque ici que l'analyse de stabilité locale suggère que le mode de la couche de mélange interne KH$_i$ ne se trouve pas confiné dans le jet, mais présente une fonction propre de pression s'étendant au delà de la couche de mélange externe. Ce résultat n'est pas trivial et peut sembler aller à l'encontre des observations précédemment effectuées dans la section 2.3, où les fluctuations de la couche de mélange externe ont été identifiées comme dominant le champ hydrodynamique proche pour des abscisses $x/d_s < 4$. De plus, les travaux de Tinney et Jordan [2008], ou encore ceux de Ko et Kwan [1976] pour des jets double-flux ayant des rapports de vitesse équivalents à ceux des jets ici étudiés, suggèrent également la dominance hydrodynamique des fluctuations de la couche de mélange externe dans cette région initiale du jet. Comme illustré sur la figure III.23(a), le mode KH$_i$ est bien moins instable que le mode KH$_o$ sur cette gamme de basses fréquences. Ainsi, même si le mode KH$_i$ s'étend en champ proche, le mode KH$_o$ paraît prépondérant, en accord avec nos observations.

Enfin, une analyse de stabilité locale plus détaillée est donnée en annexe dans la section VII.1, effectuée à une abscisse $x/d_s = 3.0$ en fin du cône potentiel du jet secondaire. Cette analyse de stabilité locale met en évidence quelques caractéristiques fréquentielles des modes étudiés.

3.3 Approche PSE appliquée au cas coplanaire

Une première application de notre approche PSE linéaire est ici réalisée sur le cas de la tuyère coplanaire au point de fonctionnement TP2. Ne disposant pas de mesures en champ hydrodynamique proche comme pour les cas SCTP2 et SCTP3, nous ne pouvons pas comparer les évolutions axiales des fluctuations de pression. Ce cas d'étude a cependant un intérêt différent : la simplicité de sa géométrie nous permet d'effectuer un calcul PSE débutant immédiatement en sortie de tuyère, contrairement au cas de la tuyère *short-cowl* où les calculs PSE ne peuvent débuter, avec notre modélisation, qu'à l'abscisse où le corps central de révolution prend fin. Ainsi, une hypothèse couramment effectuée, dans une analyse de stabilité visant à comparer les amplitudes relatives des différents modes d'un jet, consiste à supposer que ces derniers sont initialement excités à la même amplitude. Le spectre des fluctuations est donc supposé initialement équivalent à un bruit blanc. L'étude du cas coplanaire nous permet d'explorer cette hypothèse et de tenter d'en apprécier la validité sur la gamme fréquentielle d'étude.

Les amplitudes des modes des couches de mélange interne (modes KH$_i$) et externe (modes

KH_o) sont donc initialement identiques et fixées à l'unité par linéarité du modèle PSE. Nous étudions ici les modes internes et externes du jet COTP2 aux fréquences présentées dans le tableau III.3 et pour les nombres d'onde azimutaux $m = 0$ et $m = 1$. Suite à la résolution pas à pas du système, nous obtenons des champs de perturbations $(u'_x, u'_r, u'_\phi, \rho', p')_m$.

Afin d'évaluer la cohérence des résultats, il est intéressant d'étudier les évolutions axiales des amplitudes de perturbations de pression $|p'_m|$ dans une zone du champ hydrodynamique proche, équivalent à celui étudié dans la section III.2 au moyen des antennes linéaire et azimutale sur les cas *short-cowl*. Nous définissons donc, dans le cas coplanaire, une antenne linéaire fictive identique, telle que l'ordonnée à l'origine soit également $r_0/d_s = 0.738$, et l'angle formé avec l'axe des abscisses de 8.5°. Nous vérifions également que dans cette configuration l'antenne est située en dehors du jet (ici dans une région où la vitesse axiale moyenne du jet est $\overline{u}_x/U_j < 0.01$) et suit correctement la divergence axiale du jet.

Enfin, nous vérifions que l'antenne est située dans une zone hydrodynamique, et non acoustique, pour les perturbations considérées. En effet, les résultats de stabilité ne sont valables que dans une telle région, explicitée dans la section I.2.3 et mise en évidence sur la figure I.12. Pour s'en assurer, nous utilisons un critère *ad hoc* développé par Arndt *et al.* [1997] dans le cas d'un jet simple, définissant la zone à dominance hydrodynamique de telle manière que $\alpha_r\, r^* < 2$, avec r^* la position radiale définie à partir de la couche de mélange. Nos résultats de calculs PSE nous montrent que, pour que l'antenne linéaire soit localisée dans une région hydrodynamique pour les modes aux 6 fréquences étudiées, et selon ce critère, le mode à plus haute fréquence est limitant. En effet, les modes azimutaux à $St_{d_s} = 0.522$ présentent les plus grandes valeurs de α_r. Ainsi, à l'abscisse initiale $x/d_s = 0$, la séparation entre régime hydrodynamique et acoustique, à cette fréquence, est située autour de $r/d_s = 1.0$. Le positionnement de notre antenne linéaire à $r/d_s = 0.738$ à l'abscisse initiale est donc satisfaisant. Le nombre d'onde axial des modes étudiés évolue, mais l'inclinaison de l'antenne, suivant au mieux la divergence du jet, suit correctement cette évolution et nous assure un positionnement continu dans cette région hydrodynamique linéaire, pour l'ensemble des modes étudiés.

Nous pouvons alors comparer les évolutions axiales des perturbations de pression des différents modes azimutaux obtenus sur cette antenne linéaire. Sur la figure III.24 sont représentées les évolutions des deux premiers modes azimutaux $m = 0$ et $m = 1$ issus de la couche de mélange externe (modes KH_o), aux 6 fréquences d'étude. Nous ne représentons pas les modes de la couche de mélange interne (modes KH_i) pour deux raisons : la première est que le champ hydrodynamique proche des jets double-flux étudiés est normalement dominé par les modes de la couche de mélange externe [Tinney et Jordan, 2008, Ko et Kwan, 1976, Kwan et Ko, 1977]. La seconde est que notre approche PSE semble ici avoir des difficultés à isoler l'évolution des modes KH_i.

Cette limitation de notre analyse PSE semble en effet pouvoir apparaître lorsque plusieurs modes instables existent, avec l'un plus instable que les autres. L'initialisation des modes semble alors critique. En effet, celle-ci est effectuée avec des modes issus de la stabilité locale, qui ne sont donc pas exactement solution des équations PSE. Lors de l'initialisation d'un mode beaucoup moins instable qu'un second, ici le mode KH_i, cette erreur semble pouvoir exciter le mode KH_o. La solution PSE est alors une combinaison de modes. Cette particularité apparaît singulièrement dans le cas d'étude COTP2, mais n'est pas observée dans les résultats PSE des conditions SCTP2 et SCTP3. Une étude plus détaillée de ce mécanisme est donnée en annexe dans la section VII.2. Il est intéressant de noter que cette ambigüité disparaît lorsque le calcul PSE est effectué à partir d'une abscisse plus en aval, lorsque le mode KH_o est moins instable.

Par la méthode ici adoptée, c'est à dire l'extraction des perturbations de pression sur une antenne linéaire fictive équivalente à l'antenne utilisée pour les observations expérimentales de la section III.2, cette figure III.24 doit être mise en perspective avec la figure III.13. En effet, même si les géométries sont différentes entre les configurations coplanaire et *short-cowl*, les mécanismes hydrodynamiques ne doivent pas être très différents, puisque le point de fonctionne-

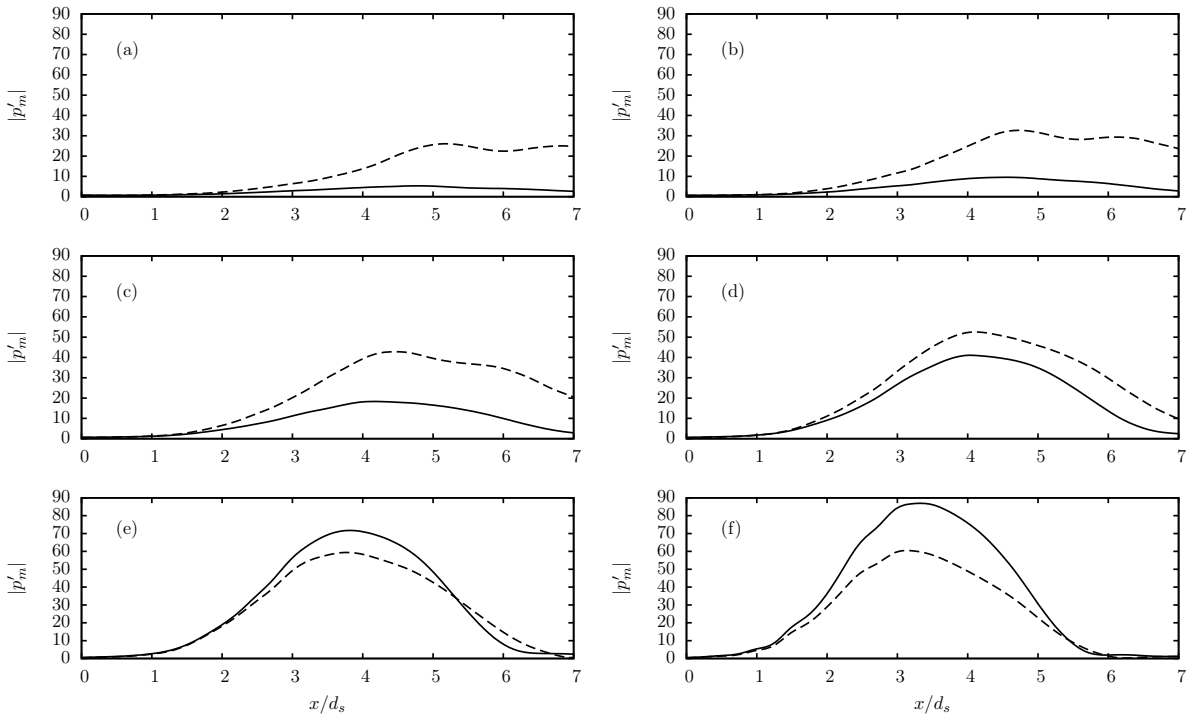


Figure III.24 – *Évolution axiale des amplitudes de perturbations de pression de la couche de mélange externe KH_o, dans le cas COTP2 aux fréquences définies dans le tableau III.3, des modes $m = 0$ (——) et $m = 1$ (- - - -), obtenues avec l'hypothèse d'amplitudes initiales unitaires.*

ment (TP2) et les rapports surfaciques sont identiques. Or, les observations expérimentales de la figure III.13 ne montrent pas les même tendances en terme d'amplitudes : là où les résultats expérimentaux montrent une décroissance du maximum d'amplitude des modes $m = 0$ et $m = 1$ avec l'augmentation du nombre de Strouhal, les résultats PSE montrent ici le résultat opposé. En effet, l'augmentation en fréquence se traduit ici par un accroissement relatif des amplitudes de perturbation de pression. De plus, les résultats PSE prévoient ici, à certaines fréquences, une amplitude du mode hélicoïdal supérieure à celle du mode axisymétrique, allant là aussi à l'encontre des mesures.

Nous identifions deux causes potentielles au désaccord qualitatif observé. Tout d'abord, cette incohérence pourrait avoir pour origine l'hypothèse émise sur l'uniformité des amplitudes initiales. En effet, la réceptivité en sortie de tuyère est vraisemblablement plus complexe qu'un simple bruit blanc ; cependant, la gamme de fréquence étudiée étant restreinte, cette approximation peut paraître raisonnable. Cette hypothèse a notamment été utilisée dans les travaux de Dahl et Morris [1997a,b], les résultats semblant concluants. Au vu de nos résultats, il semble cependant qu'une telle hypothèse est ici à prendre avec précautions. Ensuite, le fait que les hautes fréquences sont indiscutablement privilégiées dans notre analyse PSE pourrait être la conséquence d'un écoulement porteur inadapté. Les comparaisons des profils de vitesse axiale moyenne entre mesures PIV et résultats LES à l'abscisse initiale $x = 0$ (figure III.19) vont indubitablement dans ce sens, puisque les couches de mélange sont initialement bien trop fines, permettant le développement de perturbations à haute fréquence irréalistes.

Par conséquent, ces observations nous amènent à conclure qu'il paraît discutable d'utiliser directement ces résultats de calculs PSE linéaires, sans calibration, dans l'optique de comparer les amplitudes de différents modes et d'en identifier les principaux. Enfin, nous estimons que l'ensemble de ces résultats ne permet pas d'envisager la propagation acoustique de ces perturbations en champ lointain dans le chapitre IV. En effet, l'écoulement porteur semble inadéquat, les modes internes ne peuvent pas être calculés correctement et nous ne pouvons pas calibrer les

amplitudes des perturbations par rapport aux mesures en champ proche. Ce cas d'étude COTP2 nous permet avant tout de mettre en évidence quelques limites de l'analyse PSE, qu'il convenait d'identifier avant d'étudier les cas SCTP2 et SCTP3.

3.4 Approche PSE appliquée aux cas *short-cowl*

Contrairement au cas COTP2, les ressources expérimentales de la section III.2 nous permettent d'envisager une analyse PSE plus approfondie des cas SCTP2 et SCTP3. En effet, nous disposons pour ces cas des amplitudes des fluctuations de pression en champ hydrodynamique proche, nous permettant de calibrer nos résultats PSE. L'hypothèse précédente de réceptivité uniforme n'est pas nécessaire. Elle est de plus inapplicable : en effet, la géométrie de la tuyère est telle que les buses interne et externe ne sont pas coplanaires, et un corps central de révolution est présent en sortie de tuyère (figure III.1(b)). Ainsi, avec notre modélisation PSE, nous ne sommes pas en mesure de débuter le calcul aux lèvres des tuyères, la prise en compte des parois n'étant pas prévue. Nous débutons alors nos calculs à l'abscisse de fin du corps central, soit à $x/d_s = 0.9$. Or, à cette abscisse, les perturbations ont déjà eu l'espace de se développer. Supposer des amplitudes uniformes à une telle abscisse n'a donc physiquement aucun sens.

Ensuite, il est important de remarquer que la limitation observée précédemment dans le calcul de l'évolution axiale des modes KH_i n'apparaît pas dans ces cas d'étude. En effet, la couche de mélange externe est relativement épaisse, rendant les modes KH_o raisonnablement instables pour ne pas apparaître spontanément dans la résolution PSE des modes KH_i. Nos calculs PSE permettent donc de suivre les modes KH_o et KH_i de manière indépendante sur les cas SCTP2 et SCTP3, contrairement au cas COTP2.

Enfin, les inflexions des couches de mélange des écoulements porteurs employés (figures III.22) sont plus réalistes que dans le cas COTP2 et reproduisent de manière plus satisfaisante les mesures. Cette bonne description des couches de mélange nous permet d'envisager une reproduction correcte de l'évolution axiale des modes.

Les résultats issus de l'analyse PSE des cas SCTP2 et SCTP3 sont présentés dans la section suivante, et sont mis en perspective avec les mesures de fluctuation de pression réalisées en champ proche et post-traitées dans la section III.2.

III.4 Comparaison entre mesures et résultats de l'analyse PSE sur les cas *short-cowl*

4.1 Évolution axiale des phases

Nous comparons ici, dans un premier temps, les évolutions axiales des phases des perturbations extraites des mesures dans la section 2.4 avec celles des modes de stabilité évalués au moyen de notre analyse PSE linéaire. Nous étudions ici les modes instables des couches de mélange externe (modes KH_o) et interne (modes KH_i) aux 6 fréquences définies dans le tableau III.3 et pour les modes azimutaux $m \in \{0, 1, 2\}$. Les figures III.25, III.26 et III.27 comparent ainsi respectivement les évolutions axiales des phases des modes $m = 0$, $m = 1$ et $m = 2$. Dans l'ensemble de ces figures, les phases issues des calculs PSE ont été ajustées verticalement par une méthode de moindres carrés ciblée sur certaines zones afin de suivre au mieux les mesures. En effet, les phases sont définies à une constante additive près, ne modifiant en rien la nature des résultats. Enfin, sur ces figures, nous n'avons pas distingué les résultats PSE des cas SCTP2 et SCTP3 : les phases des modes des couches de mélange externes (internes) ont des tendances très similaires sur la première moitié (seconde moitié) des abscisses considérées. Ainsi, pour des raisons de lisibilité, les évolutions axiales des phases des modes KH_o (respectivement KH_i) des cas SCTP2 et SCTP3 sont représentées par une même ligne continue (respectivement discontinue).

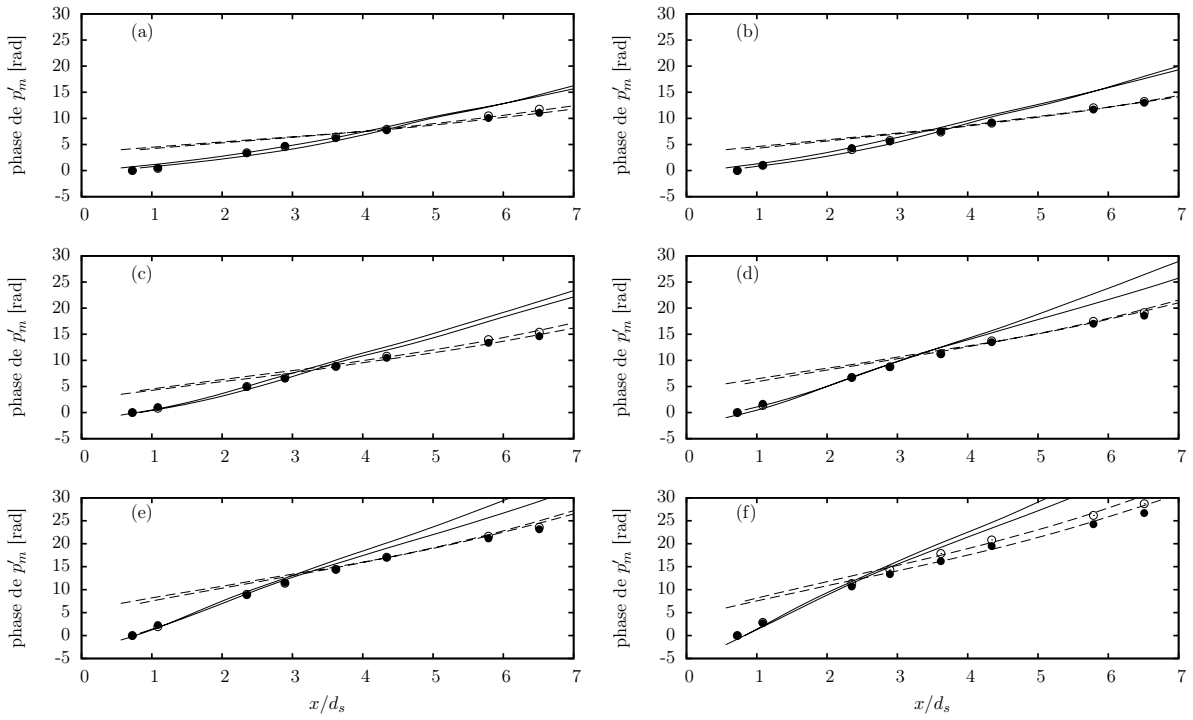


Figure III.25 – *Évolutions axiales des phases des fluctuations des modes $m = 0$ extraites des mesures sur les cas SCTP2 (○) et SCTP3 (●), comparées à celles des modes KH_o (——) et KH_i (- - -) issues de calculs PSE linéaires aux nombres de Strouhal définis dans le tableau III.3.*

Les tendances observées sont similaires pour l'ensemble des modes azimutaux considérés. Pour les 6 fréquences étudiées, les évolutions axiales des phases sur les premiers diamètres ($x/d_s < 3$ ou 4 selon la fréquence, voire plus selon le nombre d'onde azimutal m) sont correctement reproduites par les modes de la couche de mélange externe (modes KH_o) pour les 2 conditions SCTP2 et SCTP3. Pour les abscisses supérieures, ce sont les modes de la couche de mélange interne (modes KH_i) qui reproduisent le plus fidèlement ces évolutions axiales. L'identification de ces deux signatures distinctes, induisant une nette rupture de pente dans l'évolution axiale des phases, est visible sur l'ensemble des modes azimutaux et des fréquences étudiées, montrant la cohérence des résultats et suggérant la validité de notre approche.

Comme observé précédemment dans la section 2.3, cette rupture de pente traduit un changement de régime hydro-acoustique des structures dominantes. En nous basant sur les vitesses de phase des structures mesurées, nous avons suggéré dans la section 2.3 que les premières abscisses étaient dominées par des structures associées à la couche de mélange externe, et les structures plus en aval en partie liées à la couche de mélange interne et produisant une signature sonique ou supersonique. Ces résultats PSE vont dans le sens de ces observations, au moins du point de vue des phases obtenues. Ainsi, le champ proche du jet semble effectivement piloté par les instabilités de la couche de mélange externe sur les premiers diamètres, alors que les instabilités de la couche de mélange interne sont en phase avec les mesures dans les régions identifiées en régime acoustique. Par conséquent, ces observations suggèrent que les modes KH_i peuvent effectivement être responsables de ces signatures soniques ou supersoniques dans la région aval en champ proche du jet, préférentiellement par effet convectif. Mais cela n'exclut en aucun cas une contribution possible des modes KH_o dans cette signature acoustique par un mécanisme de modulation d'amplitude.

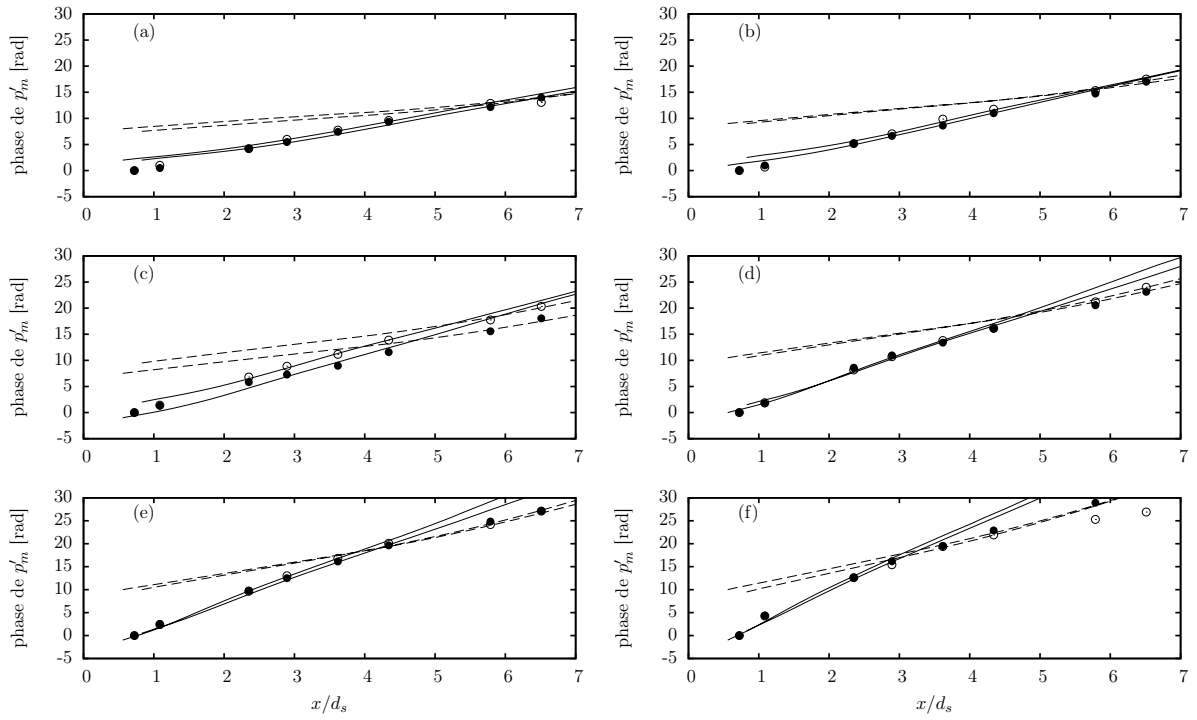


Figure III.26 – *Évolutions axiales des phases des fluctuations des modes $m = 1$, se reporter à la légende de la figure III.25.*

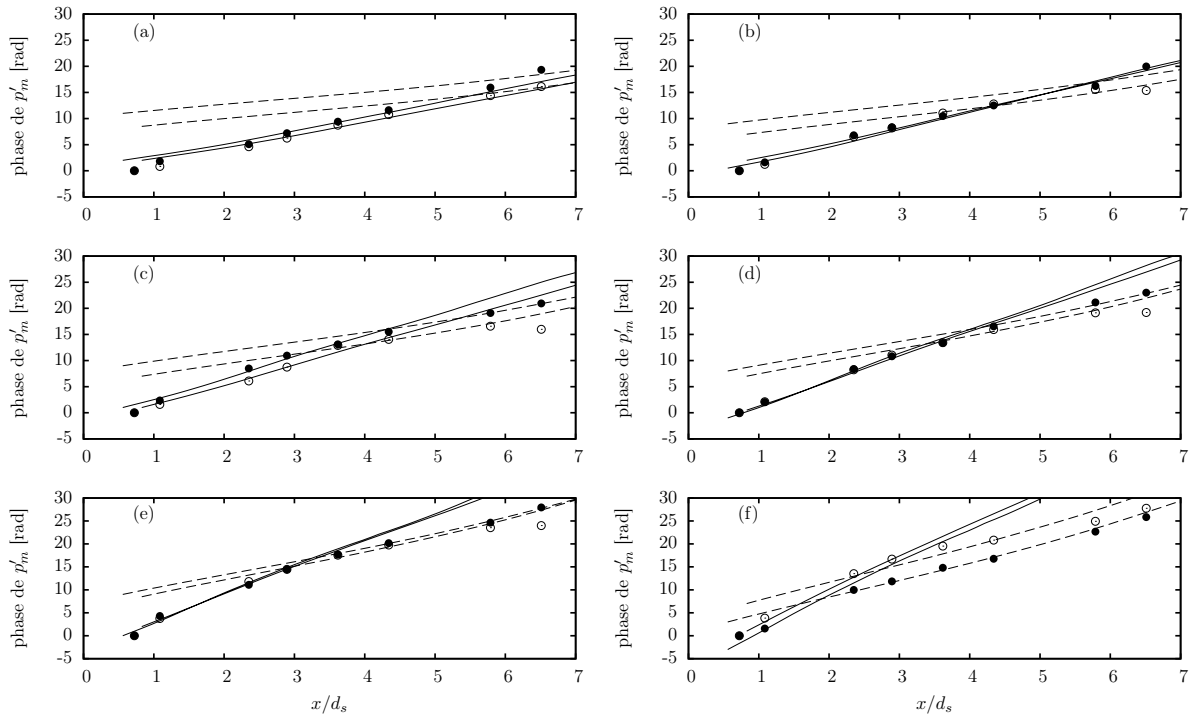


Figure III.27 – *Évolutions axiales des phases des fluctuations des modes $m = 2$, se reporter à la légende de la figure III.25.*

4.2 Évolution axiale des amplitudes

Suite à la comparaison des évolutions axiales des phases entre les mesures et les résultats PSE sur l'ensemble des modes étudiés, nous nous intéressons, dans un second temps, aux amplitudes des modes azimutaux. L'analyse précédente nous a permis de mettre en évidence des éléments suggérant l'origine des fluctuations de pression observées en champ proche de jets double-flux. Nous cherchons donc ici à étayer ou à infirmer les hypothèse émises lors de cette analyse. Pour cela, nous représentons sur les figures III.28, III.29 et III.30 les évolutions axiales des amplitudes des perturbations de pression en champ proche issues des mesures et de notre modélisation PSE, respectivement pour les nombres d'onde azimutaux $m = 0$, $m = 1$ et $m = 2$, et uniquement pour la condition SCTP2. Les figures III.31, III.32 et III.33 présentent ces mêmes résultats pour la condition SCTP3.

Pour chaque couple de nombre d'onde azimutal m et nombre de Strouhal St_{d_s}, nous avons les évolutions axiales des amplitudes issues des mesures, ainsi que celles des modes KH_o et KH_i issues des calculs PSE. Or, les amplitudes des modes calculés sont arbitraires, le système PSE étant linéaire. De plus, nous ne savons pas quelles sont les amplitudes relatives des modes KH_o et KH_i, ni même si ces modes sont effectivement représentatifs des fluctuations mesurées. Par conséquent, ce dernier point étant un objectif de cette section, nous ajustons les amplitudes des modes KH_o et KH_i par une méthode des moindres carrés sur des zones spécifiques, identifiées lors de l'analyse précédente des phases (une région amont pour le mode KH_o et une région aval pour le mode KH_i), dans le but de comparer les enveloppes de ces modes avec les amplitudes mesurées.

Globalement, par cette approche, nous observons que les modes KH_o de la couche de mélange externe reproduisent de manière particulièrement satisfaisante la croissance initiale des fluctuations de pression mesurées en champ hydrodynamique proche du jet pour quasiment l'ensemble des modes étudiés (6 fréquences, 3 modes azimutaux et 2 points de fonctionnement). Une exception apparaît pour le mode axisymétrique $m = 0$ en basses fréquences (particulièrement $St = 0.223$) où la croissance n'est pas correctement calculée pour les 2 conditions SCTP2 et SCTP3. Un tel désaccord entre mesures et résultats PSE pour les fréquences les plus basses et pour le mode axisymétrique est également retrouvé dans les travaux de Gudmundsson et Colonius [2011] et Rodríguez *et al.* [2011]. Une explication possible, également avancée dans les travaux de Piot [2005], est à trouver dans les longueurs d'onde des modes PSE qui sont de l'ordre de grandeur du cône potentiel pour de faibles nombres de Strouhal. Ainsi, l'hypothèse d'une faible variation axiale du champ moyen peut être remise en question. Cependant, il est intéressant d'observer que cette limitation apparaît essentiellement pour les modes axisymétriques ($m = 0$), les modes hélicoïdaux ($m = 1$ et 2) aux mêmes basses fréquences reproduisant remarquablement la croissance des perturbations mesurées, malgré des longueurs d'onde très comparables. Cet argument est donc sensible au nombre d'onde azimutal m considéré. Gudmundsson et Colonius [2011] avancent alors que les conditions aux limites des modes jouent ici un rôle, puisque seul le mode axisymétrique ne s'annule pas sur l'axe du jet. Ainsi, les modes $m = 0$ ont pour ordre de grandeur de variation plutôt le diamètre du jet, là où les modes hélicoïdaux sont plutôt dépendants de l'épaisseur de la couche de mélange δ_ω. Par conséquent, en reprenant l'argument initial des longueurs d'onde, les modes axisymétriques seraient effectivement plus sensibles aux effets non parallèles, l'échelle caractéristique de variation étant plus importante.

L'excellent accord observé sur l'ensemble de ces données est un élément particulièrement probant allant dans le sens des hypothèses émises auparavant. Tout d'abord, les fluctuations de pression mesurées en champ hydrodynamique proche dans la région initiale de ces jets semblent effectivement avoir pour origine principale les modes d'instabilité de la couche de mélange externe. De plus, la croissance initiale de ces perturbations de pression est fidèlement reproduite au moyen d'une modélisation PSE linéaire, suggérant donc la linéarité des mécanismes mis en jeu dans leur dynamique, au moins dans cette région amont. Enfin, ces résultats témoignent de la présence de

structures cohérentes équivalentes à des ondes d'instabilité dans ces jets à double-flux *libres*, soit pour lesquels aucun forçage n'est appliqué en sortie de tuyère.

Les modes KH_i de la couche de mélange interne, quant à eux, atteignent leur maximum sensiblement plus en aval, par rapport aux modes KH_o. Les évolutions axiales des amplitudes de ces modes semblent globalement bien compenser la décroissance des modes KH_o, permettant de reproduire qualitativement les enveloppes issues des mesures dans une région relativement restreinte et médiane aux abscisses considérées. Les comparaisons semblent ici plus délicates et moins flagrantes, mais en accord avec l'hypothèse précédente d'une dominance hydrodynamique des modes KH_o suivie d'une dominance des modes KH_i. Particulièrement en hautes fréquences, les modes de la couche de mélange interne semblent dominer une large partie des abscisses, en accord avec nos analyses des phases menées par exemple sur la figure III.25.

Cette difficulté à clairement identifier le rôle des modes de la couche de mélange interne dans la région aval tient au fait que cette zone n'est pas reproduite de manière satisfaisante : au lieu de présenter la décroissance suggérée par les modes KH_i, les mesures font apparaître des niveaux plus importants ou croissants. Nous avons identifié deux raisons pouvant expliquer un tel désaccord. La première a pour origine l'écoulement porteur. En effet, comme détaillé dans la section II.1.2, notre choix de l'écoulement de base n'est pas rigoureux, en particulier dans la région pleinement développée où les effets non linéaires sont importants pour l'écoulement instationnaire. Par conséquent, les résultats de notre analyse de stabilité peuvent ici ne pas être représentatifs de l'évolution des amplitudes des perturbations des couches de mélange externe et interne. Les travaux de Gudmundsson et Colonius [2011] semblent cependant suggérer que cette difficulté n'est pas la principale source de désaccord (voir la section I.4.2.2) pour les structures ici étudiées. En effet, une seconde explication est à trouver dans la séparation hydro-acoustique effectuée précédemment. Nos analyses de stabilité ne mettent ici en évidence que l'évolution hydrodynamique des instabilités, leur production acoustique n'étant pas rendue pour des raisons détaillées par la suite dans le chapitre IV. Or, les fluctuations dans la région aval ont été identifiées comme étant de nature acoustique (section 2.3). Par conséquent, nos résultats PSE ne sont effectivement pas en mesure de reproduire convenablement l'évolution des perturbations de pression dans cette région aval du champ proche.

Une dernière question est alors de savoir quels modes sont responsables de cette excroissance acoustique dans la région aval. En effet, nous avons auparavant cité deux mécanismes envisageables dans la génération d'une signature acoustique : la modulation d'amplitude des modes KH_o ou la convection supersonique des modes KH_i. Nous tenterons de répondre à cette question dans le chapitre IV, mais nous pouvons ici observer que le mode de la couche de mélange externe est effectivement en mesure d'atteindre la région de champ proche en aval du jet. De plus, l'augmentation de la vitesse du jet primaire a pour principal effet d'augmenter l'amplitude de ces composantes acoustiques. Ainsi, le mode KH_i a vraisemblablement un rôle prépondérant dans la production de ces dernières.

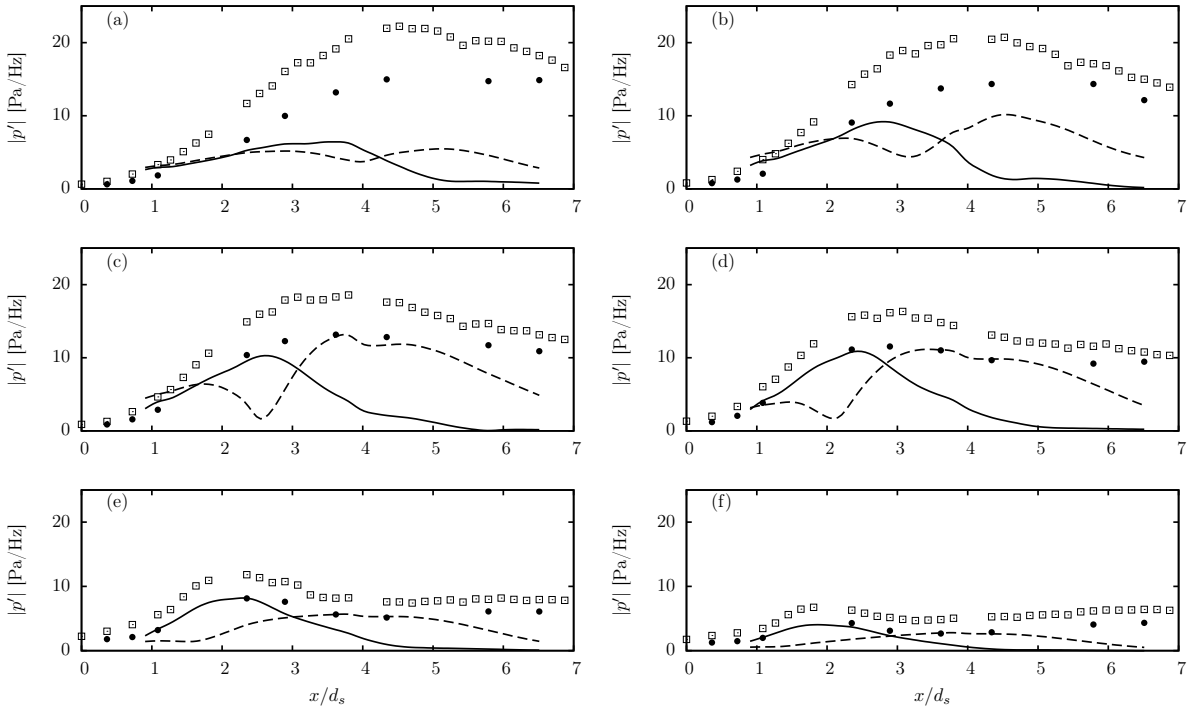


Figure III.28 – *Évolutions axiales des amplitudes des perturbations de pression du mode $m = 0$ aux fréquences (a) $St = 0.223$; (b) $St = 0.281$; (c) $St = 0.356$; (d) $St = 0.446$; (e) $St = 0.561$; (f) $St = 0.713$; issues des mesures sur l'antenne azimutale (•), ainsi que des calculs PSE des modes KH_o (——) et KH_i (- - - -), pour la condition SCTP2. Sont également représentées les amplitudes issues des mesures de l'antenne linéaire (□).*

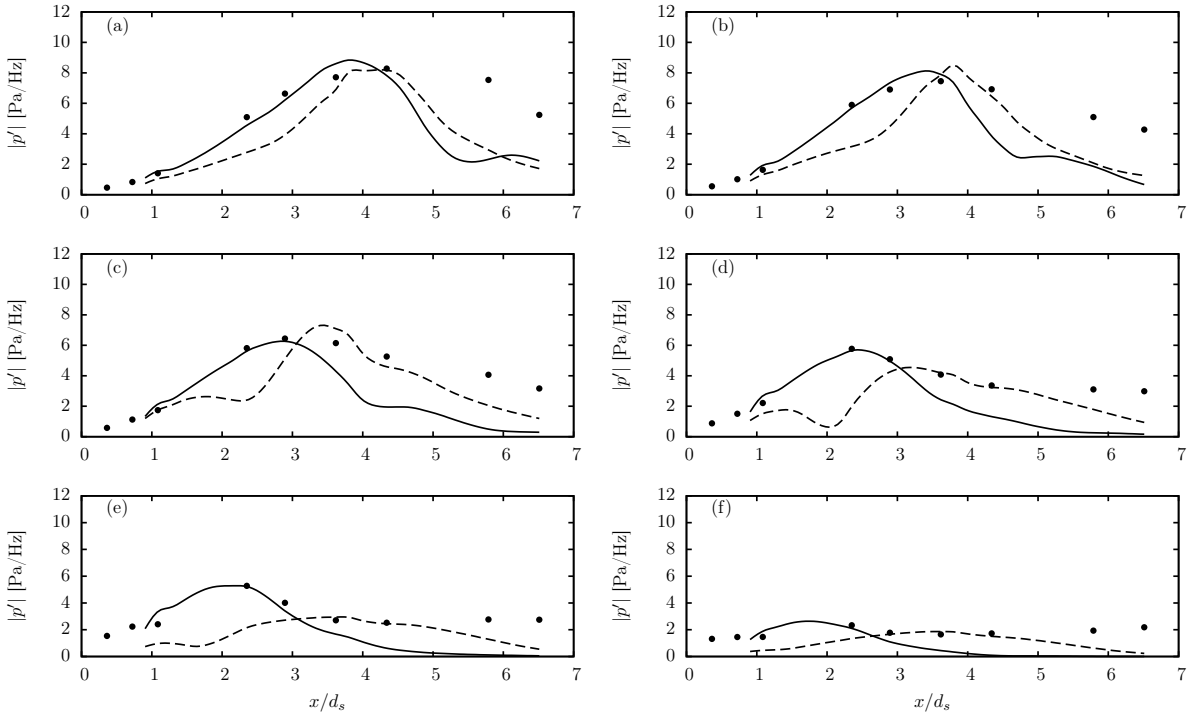


Figure III.29 – *Évolutions axiales des amplitudes des perturbations de pression du mode $m = 1$, condition SCTP2 ; se reporter à la légende de la figure III.28.*

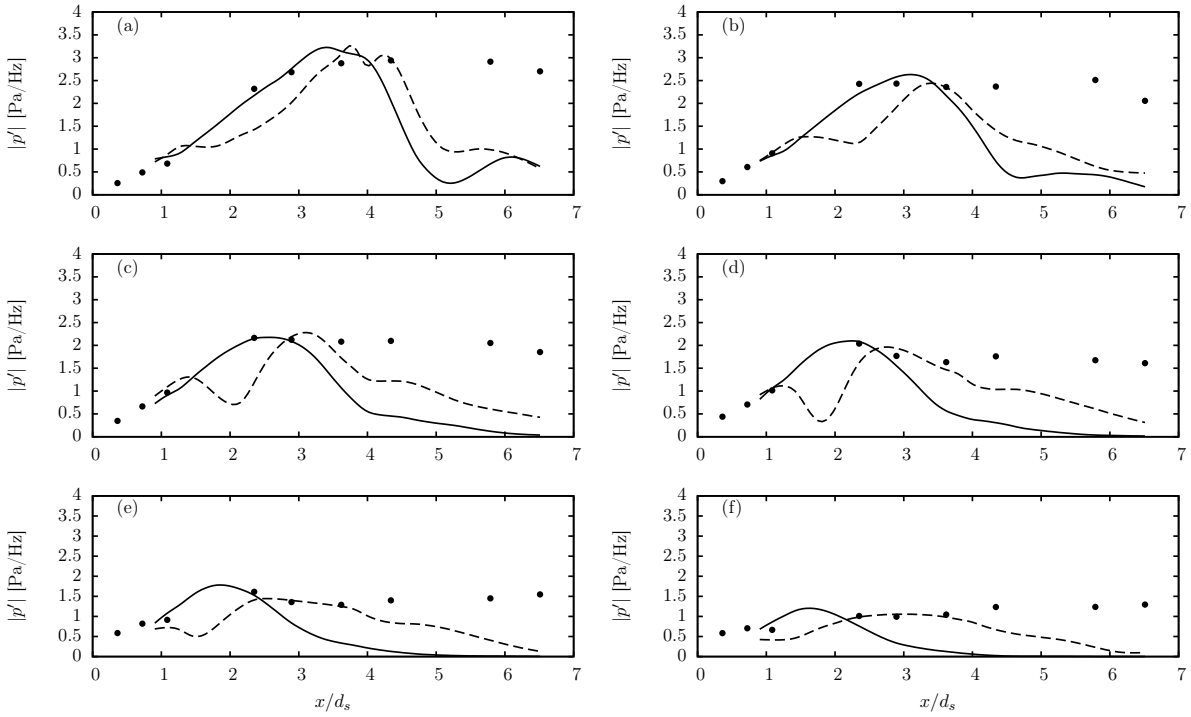


Figure III.30 – *Évolutions axiales des amplitudes des perturbations de pression du mode $m = 2$, condition SCTP2 ; se reporter à la légende de la figure III.28.*

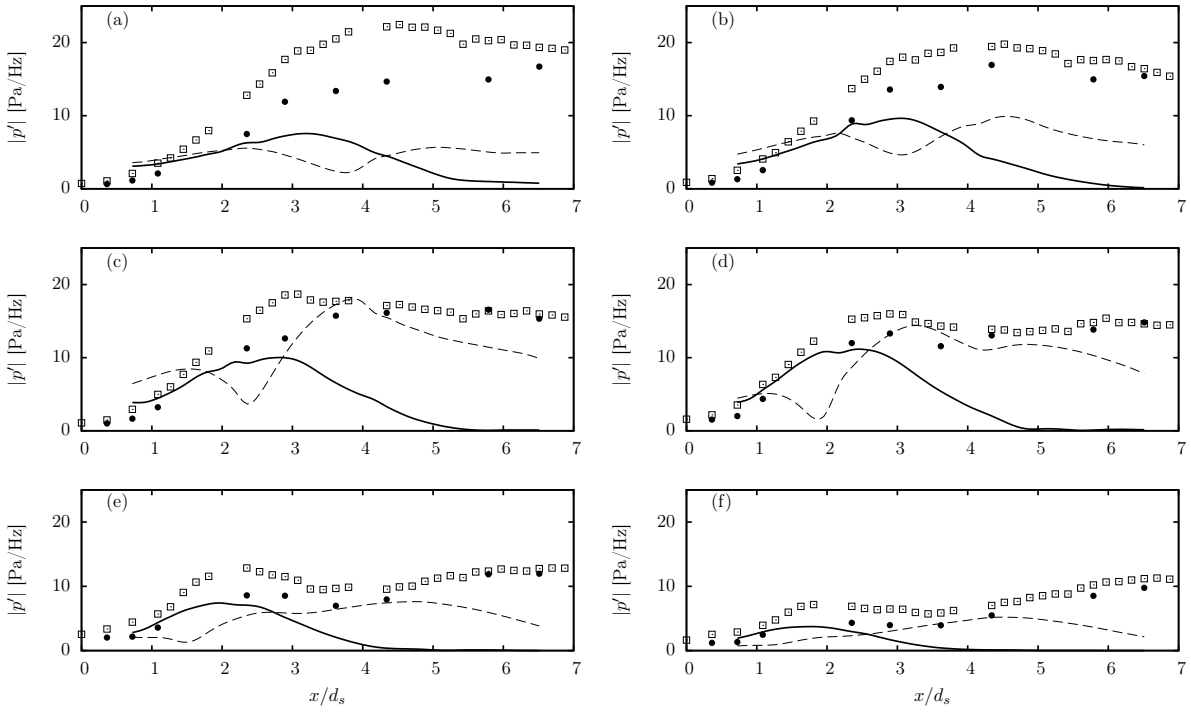


Figure III.31 – *Évolutions axiales des amplitudes des perturbations de pression du mode $m = 0$, condition SCTP3 ; se reporter à la légende de la figure III.28.*

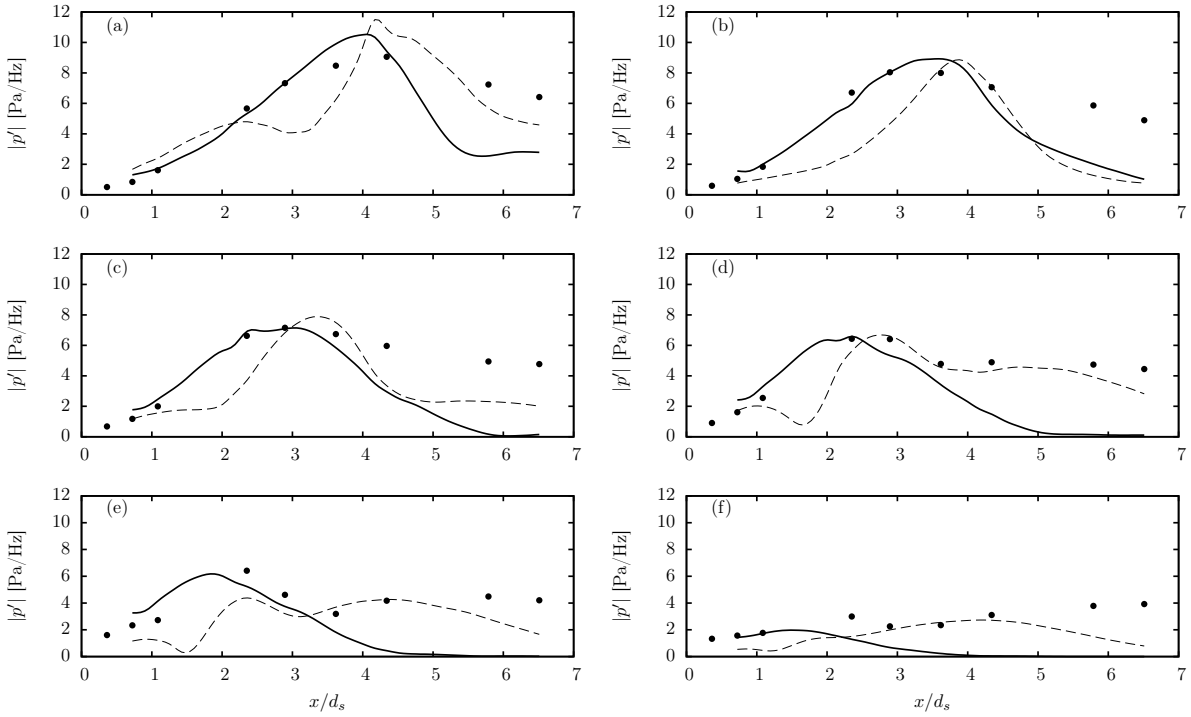


Figure III.32 – *Évolutions axiales des amplitudes des perturbations de pression du mode $m = 1$, condition SCTP3 ; se reporter à la légende de la figure III.28.*

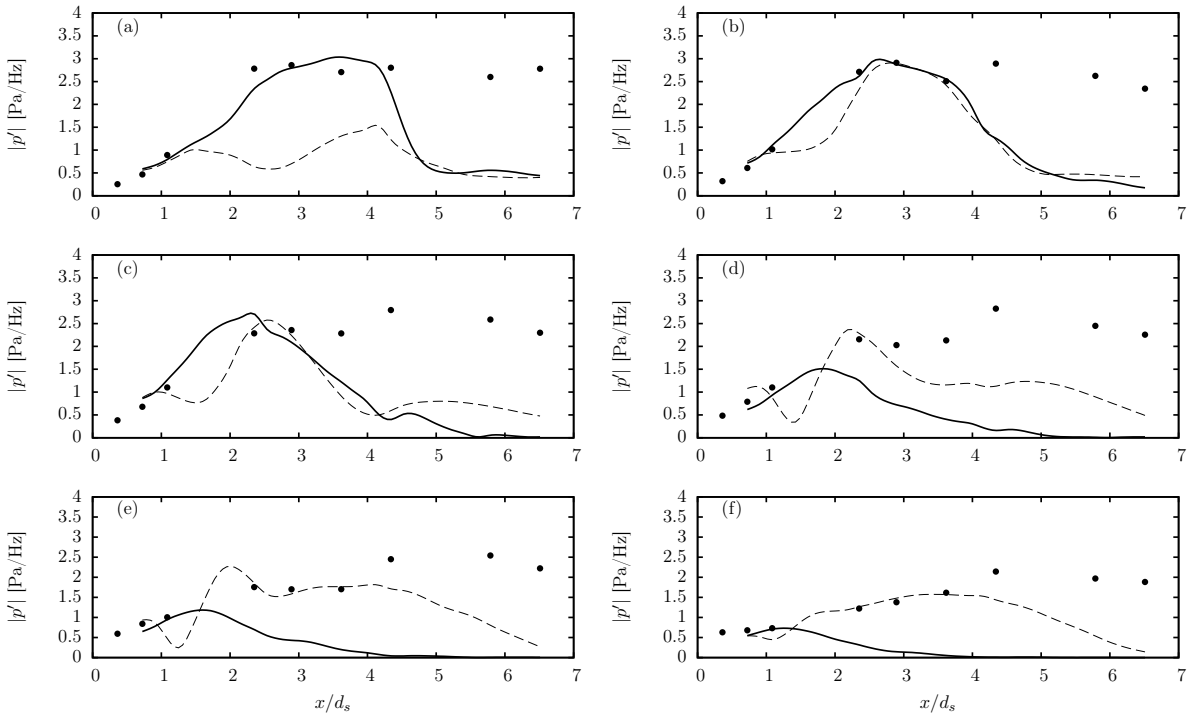


Figure III.33 – *Évolutions axiales des amplitudes des perturbations de pression du mode $m = 2$, condition SCTP3 ; se reporter à la légende de la figure III.28.*

III.5 Conclusions

Ce chapitre est constitué de deux grandes parties. Dans la première, nous avons mis en évidence les caractéristiques hydrodynamiques et acoustiques de fluctuations de pression mesurées en champ proche de jets double-flux sur des antennes linéaire et azimutale. Si les fluctuations de pression aux fréquences considérées, dans la région initiale du jet, sont d'origine hydrodynamique, la région plus aval est dominée par des fluctuations en régime acoustique.
Dans la seconde partie, nous avons appliqué notre modélisation PSE linéaire à ces jets double-flux. L'ensemble des résultats suggère ainsi que, sur la gamme fréquentielle d'étude, les modes d'instabilité KH_o de la couche de mélange externe pilotent principalement la région initiale du champ hydrodynamique proche. La dynamique initiale de ces modes semble linéaire et décrite de manière satisfaisante par notre modèle, montrant également que les structures cohérentes observées dans ces jets double-flux libres sont effectivement associées à ces instabilités. Les modes KH_i de la couche de mélange interne semblent quant à eux responsables de la présence des fluctuations acoustiques observées dans la région aval du jet.

Chapitre IV

Analyse du lien entre les fluctuations hydrodynamiques obtenues par analyse PSE linéaire et l'acoustique observée en champ lointain

Sommaire

IV.1 Modélisation du rayonnement acoustique associé aux fluctuations de pression du champ proche hydrodynamique-linéaire . . . 116
1.1 Étude de la solution PSE dans la région acoustique . . . 116
1.2 Méthodes de propagation acoustique par surface de Kirchhoff . . . 120
IV.2 Validation des méthodes de propagation acoustique par surface de Kirchhoff sur un cas analytique . . . 124
2.1 Modèle analytique de paquet d'ondes . . . 124
2.2 Comparaison des directivités acoustiques entre solutions analytiques et résultats de propagation par surfaces de Kirchhoff . . . 125
IV.3 Propagation acoustique des perturbations de pression issues des calculs PSE linéaires . 129
3.1 Forme analytique approchée des perturbations de pression PSE . . . 129
3.2 Propagation acoustique des résultats PSE sur le cas *short-cowl* à partir de l'antenne linéaire . . . 133
3.3 Propagation acoustique à partir d'une surface cylindrique . . . 143
3.4 Composantes supersoniques des ondes d'instabilité . . . 149
IV.4 Conclusions . . . 151

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en évidence la pertinence d'une description hydrodynamique des fluctuations de pression en champ proche de jets double-flux, et sur une gamme de basses fréquences, au moyen d'un modèle PSE linéaire. Nous nous intéressons maintenant à l'étude acoustique de ces ondes d'instabilité. Ainsi, dans ce chapitre, nous mettons tout d'abord en évidence l'incapacité des approches PSE à modéliser directement le rayonnement acoustique des fluctuations de pression calculées. Des modèles de propagation acoustique complémentaires, et nécessaires, sont alors présentés. Dans un second temps, ces méthodes de propagation acoustique en champ lointain sont validées sur un cas analytique de paquets d'ondes. Enfin, ces approches sont appliquées à la propagation acoustique des ondes d'instabilité des jets double-flux étudiés. L'amplitude de ces ondes ayant été auparavant calibrée, nous pouvons comparer les niveaux des directivités obtenues aux mesures réalisées en champ lointain dans le cadre du projet CoJeN. Nous pouvons alors conclure quant à la contribution de ces ondes au rayonnement acoustique de ces jets en basses fréquences et à de faibles angles en direction aval.

IV.1 Modélisation du rayonnement acoustique associé aux fluctuations de pression du champ proche hydrodynamique-linéaire

1.1 Étude de la solution PSE dans la région acoustique

Jusqu'à présent, nous avons mis en avant la validité de l'approche PSE dans l'évaluation des caractéristiques hydrodynamiques des perturbations de pression associées aux ondes d'instabilité. En effet, par construction, l'analyse PSE est en mesure de reproduire fidèlement l'évolution spatiale de ces paquets d'ondes, la direction axiale étant naturellement privilégiée par l'écoulement, rendant les équations quasiment paraboliques. Cependant, à l'extérieur du jet, la propagation acoustique de ces paquets d'ondes n'est pas soumise aux mêmes contraintes, aucune direction n'étant a priori à privilégier. Nous nous posons donc la question de la validité des approches PSE dans la modélisation du rayonnement acoustique de paquets d'ondes convectés dans un jet subsonique. Nous effectuons cette analyse sur un cas d'étude simplifié mais représentatif des mécanismes de production acoustique dans des jets subsoniques.

1.1.1 Modélisation bidimensionnelle simplifiée du champ acoustique proche d'un paquet d'ondes

Nous cherchons à étudier le champ de pression proche d'un paquet d'ondes présentant une vitesse de phase subsonique. Pour cela, nous nous basons sur la modélisation d'une fluctuation de pression modulée en amplitude similaire à celle de Crighton et Huerre [1990]. Nous considérons donc une fluctuation de pression dans un milieu compressible au repos, pour lequel l'équation de propagation bidimensionnelle s'écrit

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + M_c^2 p' = 0\,, \tag{4-1a}$$

$$p'(x, y=0) = A(\varepsilon x)\,\exp(i\alpha x)\,, \tag{4-1b}$$

avec $M_c = U_c/a_0$ le nombre de Mach convectif, U_c la vitesse de convection du front d'onde, a_0 la vitesse du son, α le nombre d'onde axial, A une fonction d'amplitude lentement variable dans la direction axiale et $\varepsilon \ll 1$ un petit paramètre. En utilisant le formalisme du chapitre II, nous pouvons également écrire $M_c = \overline{\rho} M^2 \omega^2$.

Pour des enveloppes gaussiennes $A(\varepsilon x)$, Crighton et Huerre [1990] ont montré la création d'un rayonnement acoustique "super-directif", orienté dans la direction aval du jet, en accord avec les observations expérimentales rapportées. Cette production sonore, induite par la modulation de paquets d'ondes subsoniques, a également été étudiée plus récemment par Sandham *et al.* [2006b] et Cavalieri *et al.* [2011]. Ces derniers ont particulièrement mis en avant, en plus de la modulation spatiale, l'importance de la modulation temporelle de tels paquets d'ondes sur l'intensité de leur rayonnement acoustique. Ces paquets d'ondes peuvent alors être considérés comme des sources acoustiques non compactes, comme illustré sur la figure IV.1 par la répartition axiale d'une perturbation de pression produisant le rayonnement acoustique présenté sur la figure IV.2. Nous partons ici de l'hypothèse que, si les paquets d'ondes subsoniques obtenus par une analyse PSE rayonnent effectivement en champ lointain, le mécanisme acoustique principal est à trouver dans cette modulation spatio-temporelle.

La solution générale à l'équation 4-1a s'exprime, après résolution dans l'espace spectral des nombres d'onde axiaux k,

$$p'(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} B\left(\frac{k-\alpha}{\varepsilon}\right) \exp i(kx + \lambda y)\,\mathrm{d}k\,, \tag{4-2}$$

où $\lambda^2 = M_c^2 - k^2$ avec $\Im(\lambda) > 0$. On pose par la suite $X = \varepsilon x$ et $K = \frac{k-\alpha}{\varepsilon}$. Par simplicité, on impose de plus $\alpha = 1$. Nous avons alors l'expression suivante pour B, la transformée de Fourier

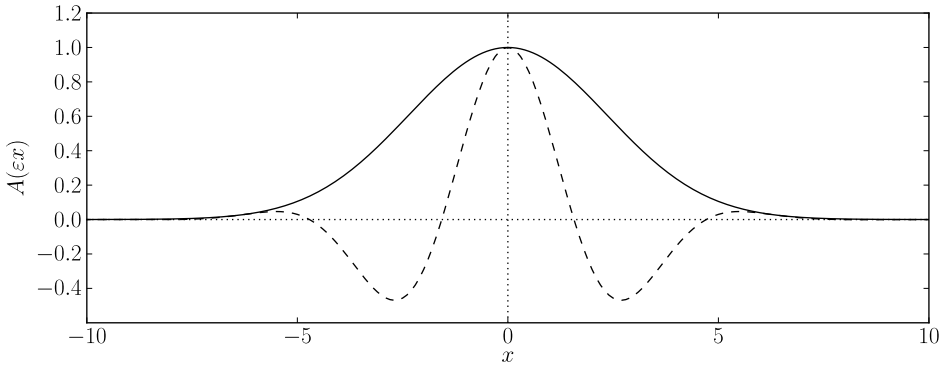


Figure IV.1 – *Enveloppe gaussienne $A(\varepsilon x)$ (——) d'une perturbation de pression $p'(x, y = 0)$ (- - - -) obtenue pour $\varepsilon = 0.3$.*

de la perturbation de pression sur la frontière $y = 0$ imposant la forme de l'enveloppe du paquet d'ondes,

$$B(K) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} A(X) \exp(-iKX)\, \mathrm{d}X\,. \tag{4-3}$$

Dans le cas d'une enveloppe gaussienne, illustrée sur la figure IV.1, nous avons alors

$$A(X) = \exp(-X^2)\,, \tag{4-4a}$$

$$B(K) = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{K^2}{4}\right)\,. \tag{4-4b}$$

Ce formalisme, strictement identique à celui développé par Crighton et Huerre [1990], nous permet d'étudier le champ de pression proche associé à un paquet d'ondes modulé spatialement présenté sur la figure IV.1. En particulier, un rayonnement acoustique super-directif est obtenu lorsque

$$\frac{M_c}{2\varepsilon^2} = O(1)\,. \tag{4-5}$$

Ainsi, nous prenons l'exemple d'un jet ayant un nombre de Mach de sortie $M_j = 0.6$, soit un nombre de Mach convectif de l'ordre de $M_c = 0.3$. Afin de satisfaire le critère (4-5), nous prenons $\varepsilon = 0.3$. Le champ proche de pression ainsi obtenu est représenté sur la figure IV.2. Sur cette figure, un rayonnement acoustique super-directif est clairement mis en évidence. Ce rayonnement en forme de lobe orienté dans la direction aval du jet est qualitativement représentatif du rayonnement acoustique observé dans des jets et associé aux structures de grande échelle. En comparaison, les champs proches de pression obtenus par la suite dans l'étude de la propagation acoustique d'ondes d'instabilité et illustrés, par exemple, sur la figure IV.30, sont similaires en forme. Le mécanisme ici présent de modulation d'amplitude permet alors, par un système d'interférences des fluctuations de pression, d'engendrer une région à décroissance algébrique (caractérisant une région acoustique) à partir d'un signal initialement à décroissance exponentielle (représentatif de fluctuations "hydrodynamiques"). Ces régions distinctes peuvent être observées sur la figure IV.4.

1.1.2 Limites de l'approche PSE dans la modélisation du rayonnement acoustique d'un paquet d'ondes subsonique

En reprenant ce cas d'étude simplifié, nous étudions maintenant les conséquences de l'application d'un modèle PSE linéaire sur l'étude du champ acoustique proche engendré par ce même

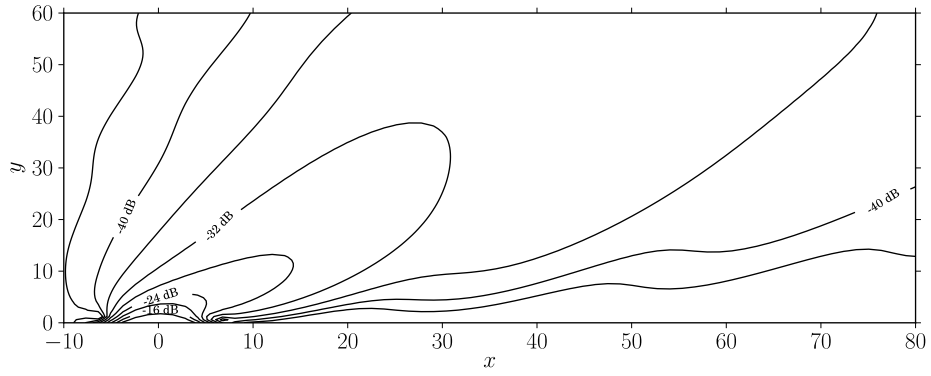


Figure IV.2 – *Amplitude (dB) du champ proche de pression associé au paquet d'ondes d'enveloppe gaussienne, avec* $M_c = 0.3$ *et* $\varepsilon = 0.3$.

paquet d'ondes. La perturbation de pression p' est séparée en une amplitude $\hat{p}$ lentement variable dans la direction axiale et un terme ondulatoire E (se référer à la section II.1.3). Ainsi, l'équation de propagation 4-1a s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \hat{p}}{\partial X^2} + 2i\alpha\varepsilon \frac{\partial \hat{p}}{\partial X} + \left(M_c^2 + i\frac{d\alpha}{dx} - \alpha^2 \right) \hat{p} = 0\,. \tag{4-6}$$

Cependant, comme nous avons pu le voir dans la section II.2.2, les termes en ε^2 et $\partial_x \hat{p}$ sont négligés lors de la résolution PSE afin de garantir le caractère quasi-parabolique du système d'équations. De plus, par simplicité et de manière cohérente avec le modèle précédent, nous considérons ici un nombre d'onde axial α constant et unitaire. La solution à cette équation est alors

$$p'(x, y) = A(\varepsilon x) \exp i(x + \lambda y)\,, \tag{4-7}$$

avec $\lambda^2 = M_c^2 - 1$ et $\Im(\lambda) > 0$. Il apparaît alors que, avec cette modélisation PSE privilégiant la direction axiale, la décroissance radiale de la solution ne peut être qu'exponentielle, soit suivant une loi en $\exp -\sqrt{(1 - M^2)}y$. Ce résultat est également abordé dans les travaux de Rodríguez *et al.* [2011], lesquels indiquent alors que pour des jets présentant des nombres de Mach faibles les résultats PSE en dehors du jet décroissent trop rapidement et sont alors trop sensibles aux erreurs numériques. Ces erreurs empêchent alors l'utilisation des méthodes de propagation mises en place dans la suite de notre étude. Dans nos cas, nous ne sommes pas confrontés à cette limite, les nombres de Mach considérés étant suffisamment élevés (supérieurs à $M = 0.8$). Ainsi, la décroissance ne pouvant être qu'exponentielle, un tel modèle n'est pas en mesure de reproduire le mécanisme de transition d'une décroissance exponentielle en une décroissance algébrique en champ acoustique proche. En effet, en négligeant la contribution des dérivées axiales de l'équation 4-6 par la modélisation PSE, la création d'interférences acoustiques n'est plus permise. L'émergence d'une super-directivité acoustique précédemment observée devient alors impossible avec de tels modèles.

Appliquant ce résultat à l'exemple précédent, la figure IV.3 met en évidence le champ de pression proche obtenu par cette approche PSE simplifiée. Le champ de pression proche est radicalement différent du champ exact de la figure IV.2, et le lobe de directivité est, comme attendu, totalement absent.

La figure IV.4 compare ainsi l'évolution radiale de l'amplitude de perturbation de pression p' entre la solution exacte et la solution obtenue au moyen de ce modèle PSE simplifié, l'échelle des ordonnées étant logarithmique. Plusieurs remarques peuvent ici être faites. Tout d'abord, il existe une région relativement restreinte, proche de la frontière $y = 0$ où une condition aux limites a été imposée, où la solution PSE reproduit correctement la décroissance de la solution exacte. En effet,

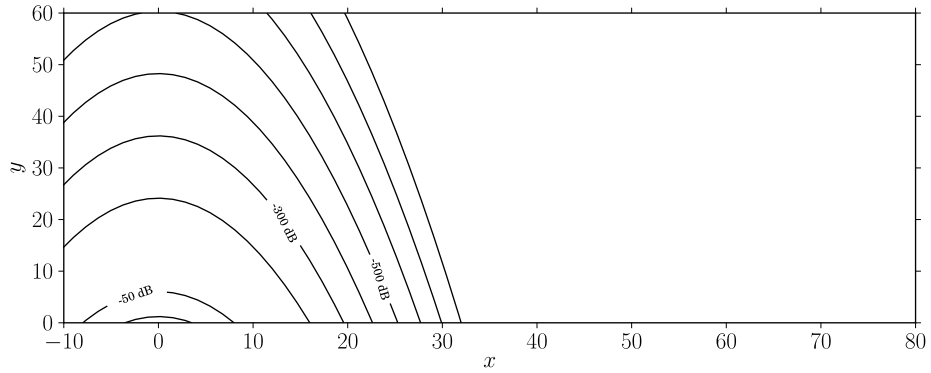


Figure IV.3 – *Amplitude (dB) du champ de pression calculé au moyen du modèle PSE simplifié sur le même cas d'étude d'un paquet d'onde avec* $M_c = 0.3$ *et* $\varepsilon = 0.3$.

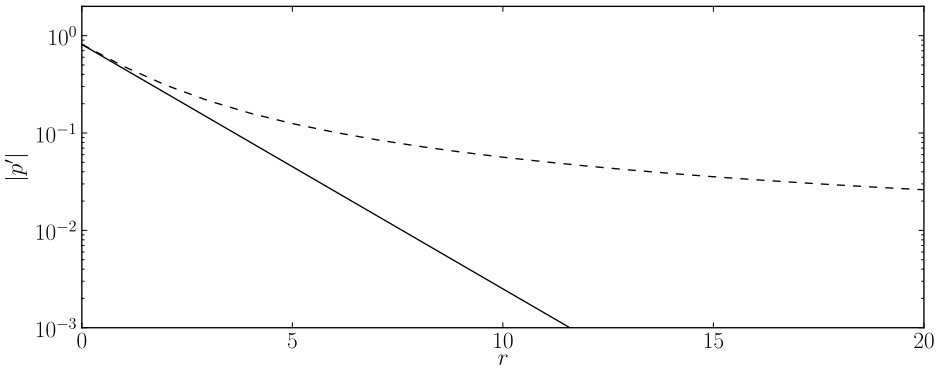


Figure IV.4 – *Comparaison radiale de l'amplitude de perturbation de pression à* $x = 0$ *entre la solution exacte (- - - -) et le calcul PSE simplifié (——).*

cette zone est la zone de transition exponentielle avant la décroissance algébrique, et s'étend sur une distance d'environ $\varepsilon^{-1} \approx 3$ [Crighton et Huerre, 1990]. Par conséquent, nous retrouvons ici que la solution hydrodynamique PSE à l'extérieur d'un jet est encore valable dans une zone restreinte de transition, où les caractéristiques hydrodynamiques des paquets d'ondes prévalent encore sur l'acoustique. Cette zone a déjà été explicitée auparavant dans les sections I.4.2.2 et III.2.3.1, et correspond à la zone hydrodynamique linéaire observée expérimentalement (figure I.12).

Ensuite, il est intéressant de remarquer que notre modèle bidimensionnel simplifié produit des résultats qualitativement très comparables aux résultats de Cheung *et al.* [2007] présentés sur la figure IV.5. Ces derniers se sont intéressés à l'étude hydrodynamique et acoustique de jets laminaires forcés à bas nombre de Reynolds ($Re \approx 1000$) au moyen d'une modélisation PSE non linéaire similaire à celle employée par Day *et al.* [2001]. Leurs travaux rapportent l'observation faite précédemment de l'incapacité des modèles PSE à évaluer correctement le rayonnement acoustique des ondes d'instabilité dans le cas de jets subsoniques, sans en étudier la cause. La figure IV.5 reproduit un de leurs résultats, illustrant la décroissance radiale de la perturbation de pression associée au mode principal forcé, calculée à la fois au moyen d'une modélisation PSE non linéaire et d'une approche DNS. Ainsi, la décroissance radiale des perturbations de pression obtenue par une modélisation PSE est ici aussi exponentielle. La solution exacte issue d'une DNS présente quant à elle un plateau entre $8 < r/d < 20$, d'origine acoustique, que la solution PSE ne reproduit pas. Malgré la complexité du système ici présenté, un jet subsonique froid laminaire, ces observations sont similaires à celles effectuées sur la figure IV.4, suggérant la pertinence de notre analyse bidimensionnelle simplifiée.

Par la suite, dans notre étude, cette incapacité à résoudre le champ acoustique est effectivement

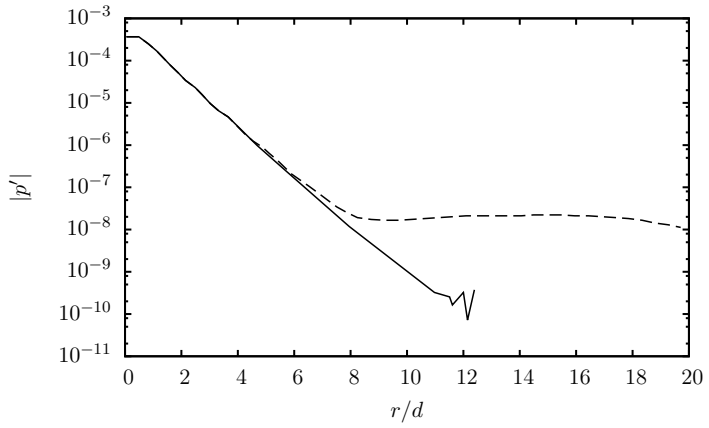


Figure IV.5 – *Amplitude de perturbation de pression dans la direction radiale issue d'un calcul PSE non linéaire (——) et d'un calcul DNS (- - - -) réalisés sur un jet subsonique froid laminaire à* $Re = 1000$*, extrait des travaux de Cheung* et al. *[2007].*

observée avec notre modélisation PSE. L'étude du rayonnement acoustique des ondes d'instabilité se développant dans un jet subsonique ne peut donc pas être menée au moyen d'une analyse PSE seule. Il est par conséquent nécessaire de coupler la solution hydrodynamique PSE à une méthode de propagation acoustique.

1.2 Méthodes de propagation acoustique par surface de Kirchhoff

Une première approche permettant la reconstruction du champ acoustique à partir de la solution hydrodynamique issue d'une analyse PSE se base sur la propagation de fluctuations de pression calculées sur une surface de Kirchhoff en champ proche du jet. En effet, comme observé précédemment au moyen de notre modèle bidimensionnel simplifié, ou expérimentalement par Suzuki et Colonius [2006], et vérifié dans les travaux de Gudmundsson et Colonius [2009] ainsi que par nos résultats présentés dans le chapitre précédent, les modes hydrodynamiques PSE restent valables et dominants en dehors de la couche de mélange, sur une plage radiale restreinte, appelée la zone hydrodynamique linéaire (voir la figure I.12). Cette zone de transition entre fluctuations hydrodynamiques et acoustiques est quasiment irrotationnelle et uniforme. Une surface de Kirchhoff placée dans une telle région peut alors permettre la reconstruction du rayonnement acoustique associé aux fluctuations hydrodynamiques.

1.2.1 Surface de Kirchhoff cylindrique

L'emploi d'une surface de Kirchhoff cylindrique est une solution relativement aisée. Elle a précédemment été appliquée par Balakumar [1998] dans l'étude du rayonnement acoustique d'ondes d'instabilité se développant dans des jets supersoniques, calculées par un modèle PSE linéaire. Cette approche est basée sur les travaux de Tam et Burton [1984a,b].

On considère l'équation de propagation des ondes en coordonnées cylindriques dans un milieu au repos, se réduisant pour les fluctuations de pression issues de notre modélisation PSE, et pour le mode azimutal m, à

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}_m}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}_m}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{p}_m}{\partial r} + \left(\rho_\infty M^2 \omega^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)\tilde{p}_m = 0\,, \tag{4-8}$$

avec $\tilde{p}_m(x,r) = \hat{p}_m(x,r)\,\exp i(\int \alpha(\xi)d\xi)$ la perturbation spatiale. Afin de résoudre cette équation

différentielle, nous imposons les conditions aux limites suivantes :

$$\lim_{r\to\infty} \tilde{p}_m = 0\,, \tag{4-9a}$$

$$\tilde{p}_m(x, r_0) = \tilde{p}_m^{(0)}(x)\,, \tag{4-9b}$$

traduisant respectivement la décroissance des fluctuations de pression en champ lointain, ainsi que le raccord du champ acoustique propagé à la solution hydrodynamique PSE obtenue, a priori, dans la région hydrodynamique linéaire du jet étudié, à la position radiale $r = r_0$.

La transformée de Fourier dans la direction axiale x conduit à une équation différentielle de Bessel, dont les solutions sont conditionnées par les relations 4-9. Nous exprimons ainsi la solution physique au moyen des fonctions de Hankel du premier type $H_m^{(1)}$, après application des conditions aux limites et de la transformée de Fourier inverse, par

$$\tilde{p}_m(x, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}_m^{(0)}(\eta) \frac{H_m^{(1)}(ir\lambda)}{H_m^{(1)}(ir_0\lambda)} e^{i\eta x}\,\mathrm{d}\eta\,, \tag{4-10a}$$

$$\lambda^2 = \rho_\infty M^2\omega^2 - \eta^2 \text{ avec } \Re(\lambda) > 0\,, \tag{4-10b}$$

où $\tilde{p}_m^{(0)}(\eta)$ est la transformée de Fourier axiale de la condition 4-9b. Cette solution nous permet donc de reconstruire aisément les champs acoustiques proche et lointain associés aux fluctuations de pression calculées par un modèle PSE.

Nous pouvons également remarquer que la solution en champ lointain peut être évaluée asymptotiquement à partir de l'expression 4-10a par la méthode de la phase stationnaire, donnant alors une évaluation de la directivité acoustique en fonction de l'angle d'observation θ, telle que

$$\tilde{p}_m(R, \theta) \propto \frac{\tilde{p}_m^{(0)}\left(\sqrt{\rho_\infty} M\omega\cos\theta\right)}{H_m^{(1)}\left(r_0\sqrt{\rho_\infty} M\omega\sin\theta\right)}\,. \tag{4-11}$$

1.2.2 Surface de Kirchhoff conique

Une limite de l'approche précédente réside dans la forme cylindrique de la surface utilisée. En effet, cette surface doit être positionnée dans la région hydrodynamique linéaire, où les fluctuations hydrodynamiques prévalent sur l'acoustique. Si la surface est placée à une position radiale trop importante, la solution PSE n'est plus valable et s'éloigne rapidement (exponentiellement) de la solution réelle. Si la surface est trop proche de la couche de mélange, le milieu considéré n'est plus uniforme et au repos, et la méthode de propagation n'est plus valable. Or, le jet diverge dans la direction axiale : une surface cylindrique ne peut donc a priori pas être parfaitement située dans cette région hydrodynamique linéaire et une surface conique suivant la divergence du jet semble mieux adaptée.

De plus, comme nous avons pu le voir dans la section III.2.1, les mesures en champ proche de jets sont réalisées sur une antenne linéaire inclinée, définissant une surface conique entourant l'écoulement et suivant la divergence du jet. Par souci de cohérence, les fluctuations PSE ayant été comparées et calibrées sur cette antenne, nous estimons nécessaire de réaliser la propagation acoustique à partir de cette même antenne.

Nous présentons ici une méthode de propagation acoustique basée sur la mesure de fluctuations de pression sur une telle surface conique et développée par Reba *et al.* [2010]. Le but de cette approche est de trouver une fonction de Green permettant la résolution du problème de propagation acoustique, dans un milieu au repos, de fluctuations de pression mesurées sur une surface conique définie dans un repère sphérique, et ne nécessitant pas la connaissance des dérivées angulaires des fluctuations de pression. En effet, l'objectif premier de cette approche est de pouvoir propager des fluctuations de pression obtenues de manière expérimentale, notamment au moyen de microphones placés sur une antenne linéaire, pour lesquelles les dérivées par rapport

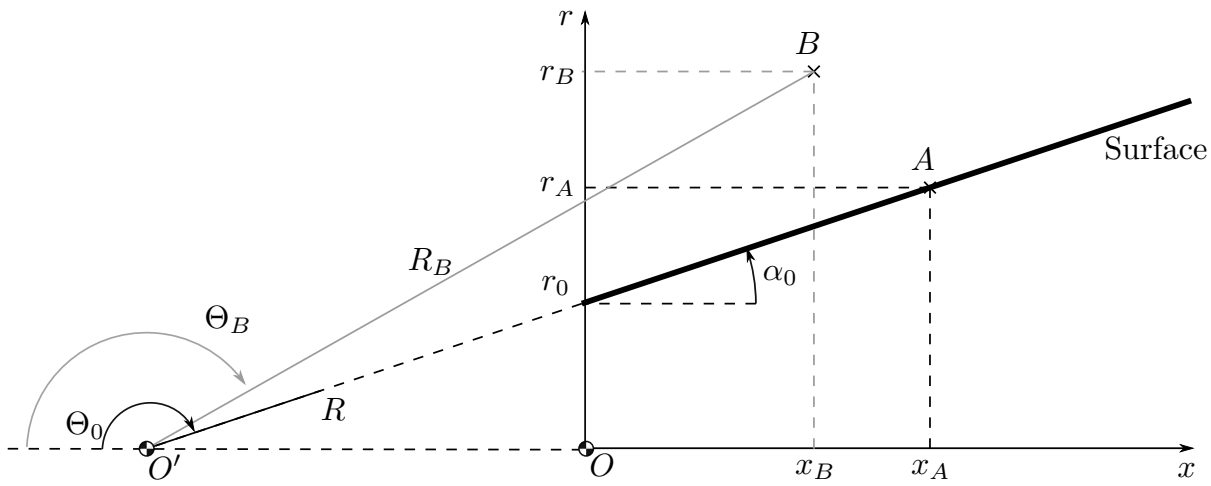


Figure IV.6 – *Repères cylindrique et sphérique, respectivement associés à l'étude hydrodynamique du jet et à la méthode de propagation acoustique au moyen d'une surface conique.*

à la normale à la surface ne sont pas accessibles. De plus amples détails mathématiques peuvent être trouvés dans cette référence et nous ne faisons que développer les grandes lignes. Nous cherchons donc à appliquer cette méthode dans un cadre quelque peu différent, soit la propagation acoustique de résultats numériques issus de calculs PSE. Enfin, nous notons qu'une approche différente, mais propageant également le champ acoustique à partir d'une surface conique, a été développée par Tam *et al.* [2010].

Géométrie et repères On se place dans un repère différent du repère utilisé dans l'analyse PSE (repère cylindrique (x, r, φ)), et on utilise un repère sphérique (R, Θ, φ) centré sur le sommet du cône défini par la surface de Kirchhoff, comme illustré sur la figure IV.6. Le demi-angle au sommet du cône est noté α_0 et correspond à l'angle d'inclinaison de la surface (ou de l'antenne) par rapport à l'axe du jet. Il est important de noter que Θ est mesuré par rapport à la direction amont du jet et que la surface de Kirchhoff est définie par $\Theta = \Theta_0 = \pi - \alpha_0$. Cet angle Θ est différent de l'angle d'observation θ, mesuré par rapport à la direction aval du jet. Nous obtenons alors les relations géométriques suivantes entre les deux repères ici utilisés :

– Pour un point A sur la surface de Kirchhoff :

$$R_A = \frac{r_0}{\sin\alpha_0} + \frac{x_A}{\cos\alpha_0} \tag{4-12a}$$

$$\Theta_A = \Theta_0 \tag{4-12b}$$

– De manière plus générale, pour tout point B dans l'espace en dehors du jet :

$$R_B = \sqrt{\left(\frac{r_0}{\tan\alpha_0} + x_B\right)^2 + r_B^2} \tag{4-13a}$$

$$\Theta_B = \pi - \arctan\left(\frac{r_B}{\frac{r_0}{\tan\alpha_0} + x_B}\right) \tag{4-13b}$$

Solution du champ acoustique propagé La fonction de Green recherchée satisfait l'équation d'onde réduite suivante, où $k = \omega/c$ est le nombre d'onde,

$$\nabla^2_{\underline{x}} G + k^2 G = \delta(\underline{x} - \underline{x}') \,. \tag{4-14}$$

Les détails de la résolution de cette équation sont rapportés par Reba *et al.* [2010]. Les fluctuations de pression $\tilde{p}_m$ d'un mode azimutal m évaluées à la position (R', Θ') dans le repère sphérique sont alors données par

$$\tilde{p}_m(R', \Theta', \omega) = 2\pi \sin\alpha_0 \int_0^\infty \tilde{p}_m(R, \Theta_0, \omega)\, \frac{\partial g_m}{\partial \Theta}(R, \Theta_0; R', \Theta')\, \mathrm{d}R\,, \tag{4-15a}$$

$$g_m(R, \Theta; R', \Theta') = \frac{i}{4\pi\sqrt{RR'}} \sum_\mu \frac{1}{A_\mu} H^{(1)}_{\mu+1/2}(kR') J_{\mu+1/2}(kR) P^{(m)}_\mu(\cos\Theta') P^{(m)}_\mu(\cos\Theta)\,, \tag{4-15b}$$

$$A_\mu = \int_0^{\Theta_0} |P^{(m)}_\mu(\cos\Theta)|^2 \sin\Theta\, \mathrm{d}\Theta\,. \tag{4-15c}$$

Dans l'équation 4-15a, les coordonnées (R', Θ') sont celles du point d'évaluation des fluctuations de pression propagées (observateur), alors que les coordonnées (R, Θ_0) sont celles des sources sur la surface conique. Ainsi, les perturbations $\tilde{p}_m(R, \Theta_0)$ sont les fluctuations de pression obtenues sur la surface conique, soit, dans notre cas d'étude PSE,

$$\tilde{p}_m(R, \Theta_0, \omega) = \hat{p}_m(x, r, \omega) \exp i \left(\int \alpha(\xi) d\xi \right) \tag{4-16}$$

évaluées sur l'antenne linéaire. L'expression de la fonction de Green g_m fait intervenir les fonctions de Bessel J, de Hankel du premier type $H^{(1)}$, ainsi que les fonctions associées de Legendre $P^{(m)}_\mu$. Enfin, l'expression 4-15a donne la fluctuation de pression réelle au point d'observation (R', Θ') : la densité spectrale de puissance acoustique à ce point d'observation est alors obtenue par

$$\begin{aligned} |\tilde{p}_m(R', \Theta', \omega)|^2 = 4\pi^2 \sin^2\alpha_0 \iint C_m(R_1, R_2, \omega) \left[\frac{\partial g_m}{\partial \Theta}(R_1, \Theta_0; R', \Theta') \right] \times \\ \left[\frac{\partial g_m}{\partial \Theta}(R_2, \Theta_0; R', \Theta') \right]^\dagger \mathrm{d}R_1\, \mathrm{d}R_2\,, \end{aligned} \tag{4-17}$$

avec le symbole † désignant le complexe conjugué et le terme $C_m(R_1, R_2, \omega)$ l'équivalent de la densité interspectrale du signal de l'antenne linéaire, soit encore dans notre cas d'étude

$$C_m(R_1, R_2, \omega) = \tilde{p}^\dagger_m(R_1, \Theta_0, \omega)\, \tilde{p}_m(R_2, \Theta_0, \omega)\,. \tag{4-18}$$

La densité spectrale de puissance au point d'observation est alors évaluée en décibels en prenant comme référence la pression $p_{ref} = 20 \times 10^{-6}$ Pa par

$$SPL = 20\ \log\left(\frac{|\tilde{p}_m(R', \Theta', \omega)|}{p_{ref}} \right). \tag{4-19}$$

Évaluation numérique des fonctions associées de Legendre Les fonctions mises en jeu dans la solution obtenue ne sont pas triviales et peuvent poser des difficultés lors de leur évaluation numérique, particulièrement lorsque les degrés ou les arguments deviennent grands. Ainsi, nous évaluons les fonctions associées de Legendre $P^{(m)}_\mu$ au moyen d'autres fonctions spéciales. En effet, pour des arguments réels tels que $-1 < x < 1$, les fonctions associées de Legendre peuvent s'exprimer au moyen des fonctions Γ et des fonctions de Gauss hypergéométriques ${}_2F_1$ [Abramowitz et Stegun, 1964] :

$$\begin{aligned} P^{(m)}_\mu(x) = \frac{(-1)^m}{2^m} \frac{\Gamma(\mu + m + 1)}{\Gamma(\mu - m + 1)\Gamma(m + 1)} (1 - x^2)^{m/2} \times \\ {}_2F_1\left(\mu + m + 1, m - \mu; m + 1; \frac{1 - x}{2} \right) \end{aligned} \tag{4-20}$$

IV.2 Validation des méthodes de propagation acoustique par surface de Kirchhoff sur un cas analytique

Avant d'appliquer les méthodes précédentes de propagation acoustique par surfaces de Kirchhoff cylindrique et conique, il est nécessaire d'en valider les résultats. Pour cela, nous choisissons d'étudier un cas analytique, pour lequel nous pouvons évaluer les fluctuations de pression en tout point de l'espace.

2.1 Modèle analytique de paquet d'ondes

Nos travaux traitant du rayonnement acoustique d'ondes d'instabilité représentatives de structures cohérentes se développant dans des jets, il est intéressant de valider ces outils sur un cas analytique établi dans une optique similaire. Ainsi, nous utilisons le modèle développé par Cavalieri *et al.* [2011] dans le cadre de l'étude de la production acoustique de paquets d'ondes convectés dans des jets subsoniques. En effet, ces auteurs ont développé un modèle analytique de paquets d'ondes simplifiés leur permettant d'explorer la pertinence des mécanismes de rayonnement acoustique par modulation spatio-temporelle. Pour cela, ils se basent sur l'analogie acoustique de Lighthill (voir la section I.3.1) et modélisent uniquement le terme T_{11} du tenseur de Lighthill, aligné dans la direction principale de rayonnement et supposé dominant aux faibles angles d'étude (θ autour de 30°). Le champ acoustique est alors donné par

$$p'(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi}\iiint \left[\frac{1}{|\underline{x}-\underline{y}|}\frac{\partial^2 T_{11}}{\partial y_1 \partial y_1}(\underline{y},\tau)\right]_{\tau=t-|\underline{x}-\underline{y}|/c} d\underline{y}\,. \tag{4-21}$$

Le terme source T_{11} modélisant un paquet d'ondes modulé axialement, ici dans la direction y_1, est donné par

$$T_{11}(\underline{y},\tau) = 2\,\overline{\rho}\,\overline{u}_x\tilde{u}\frac{\pi d^2}{4}\delta(y_2)\delta(y_3)e^{i(\omega\tau-ky_1)}e^{-y_1^2/L^2}\,, \tag{4-22}$$

où $\tilde{u}$ est l'amplitude maximale des perturbations de vitesse dans le paquet d'ondes, $\delta(.)$ la fonction de Dirac. La vitesse de convection du paquet d'ondes est définie par $u_c = \omega/k$, avec ω la pulsation temporelle et k le nombre d'onde axial. Enfin, la modulation spatiale est contrôlée par le paramètre L. Nous ne considérons pas ici de modulation temporelle, cette dernière n'étant pas étudiée dans nos travaux. Un tel modèle nous permet alors d'obtenir une fluctuation temporelle périodique en tout point de l'espace.

Plus particulièrement, nous choisissons un cas d'étude représentatif des jets ici étudiés afin de valider nos méthodes de propagation par surfaces de Kirchhoff cylindrique et conique. Nous prenons le cas de paquets d'ondes convectés à un nombre de Mach subsonique $M = 0.9$ dans un jet dont le diamètre de référence est $d = 0.1$ m. Nous localisons la source à une abscisse $x = 4\,d$ et nous imposons sa fréquence à $St = 0.3$. Ainsi, la figure IV.7 illustre le champ de pression réel résultant observé à un instant t. La zone source est ainsi visible entre les abscisses $0 < x < 1$, et la direction privilégiée de propagation acoustique peut clairement être observée dans la direction aval, conformément à ce qui est attendu du modèle.

Nous plaçons ensuite deux surfaces d'acquisition de fluctuations de pression définissant nos deux surfaces de Kirchhoff. La première est cylindrique avec un rayon $r = 4\,d$ et s'étend entre les abscisses $-2 < x < 15$, l'axe de symétrie étant aligné avec l'axe des abscisses. La position de cette surface est partiellement représentée dans le demi-plan supérieur xy sur la figure IV.7 par une ligne discontinue. De plus, le signal de fluctuation de pression à l'instant t obtenu sur cette surface y est également mis en évidence. La seconde surface est conique avec un demi-angle au sommet $\alpha = 9°$, et sa position radiale à l'origine est $r_0 = 4\,d$. Cette surface est représentée sur la figure IV.7 par une ligne continue, mettant également en évidence la fluctuation de pression qui

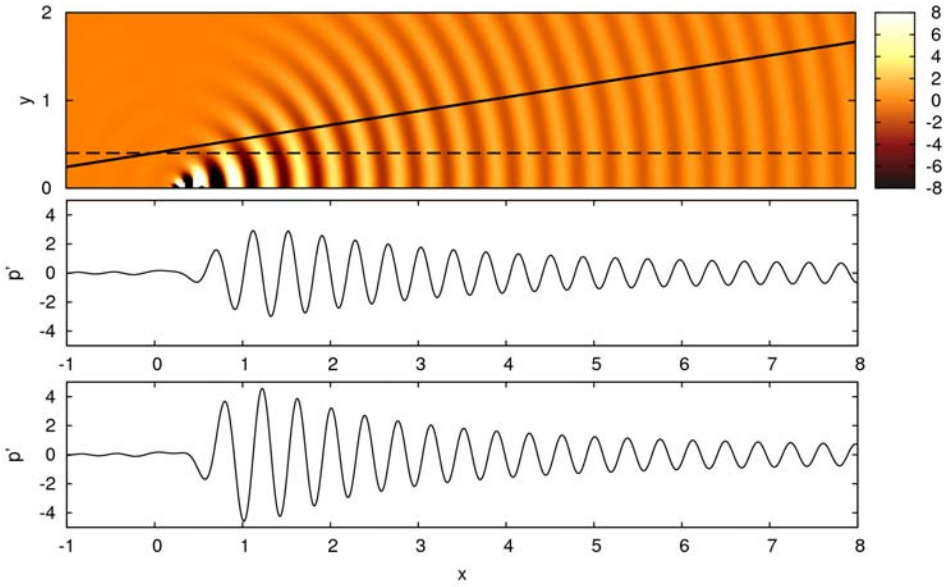


Figure IV.7 – *Champ de fluctuations de pression à un instant t issu du modèle de paquet d'ondes de Cavalieri* et al. *[2011], dans lequel sont placés une surface d'acquisition conique (——) et une surface d'acquisition cylindrique (- - - -) ; les signaux calculés sur ces surfaces sont respectivement représentés sur la figure centrale et la figure inférieure.*

y est acquise à l'instant t. Ce signal est similaire à celui obtenu sur la surface cylindrique mais présente une amplitude moins importante du fait de l'évasement de la surface conique, les maxima de pression étant obtenus sur l'axe des abscisses d'après le modèle. Ces signaux temporels calculés de manière exacte sur ces deux surfaces nous servent alors de signaux à propager en champ lointain au moyen des deux méthodes de propagation définies précédemment. L'objectif est alors de comparer ces résultats de propagation aux calculs exacts obtenus par ce même modèle.

Ainsi, nous cherchons à effectuer de telles comparaisons à divers endroits de l'espace afin d'évaluer la validité des deux approches. Pour cela, nous définissons trois arcs de cercles centrés à l'origine dans le plan xy, dont les rayons sont $R = 10\,d$, $R = 30\,d$ et $R = 50\,d$, et couvrant des angles d'observation θ compris entre 15° et 85°. Ces arcs de cercles sont représentatifs d'antennes circulaires disposées en champ lointain lors de l'étude aéroacoustique de jets. La figure IV.8 met ainsi en évidence les positions de ces arcs de cercle dans le champ acoustique étudié, arcs de cercle sur lesquels nous calculons alors les fluctuations de pression exactes issues du modèle analytique de paquet d'ondes. La densité spectrale d'énergie à la fréquence d'étude est alors obtenue, servant par la suite de référence.

2.2 Comparaison des directivités acoustiques entre solutions analytiques et résultats de propagation par surfaces de Kirchhoff

Les fluctuations temporelles de pression calculées au moyen du modèle analytique de paquet d'ondes sur les surfaces cylindrique et conique sont ici propagées dans le domaine d'étude, et plus particulièrement aux positions définies par les trois arcs de cercle précédents.

Pour cela, nous effectuons une transformée de Fourier temporelle des signaux, les deux méthodes de propagation acoustique précédemment mises en place étant des approches purement fréquentielles. Nous sélectionnons alors les composantes fréquentielles à $St = 0.3$ afin d'extraire la fonction d'amplitude complexe $\tilde{p}_m^{(0)}(x, \omega)$ dans le cas de la propagation par la surface cylindrique (voir l'équation 4-10), et l'interspectre du signal dans le cas de la surface conique. Ces données d'entrée peuvent alors être propagées dans le domaine d'étude.

La figure IV.9 représente ainsi les résultats de la propagation des fluctuations de pression

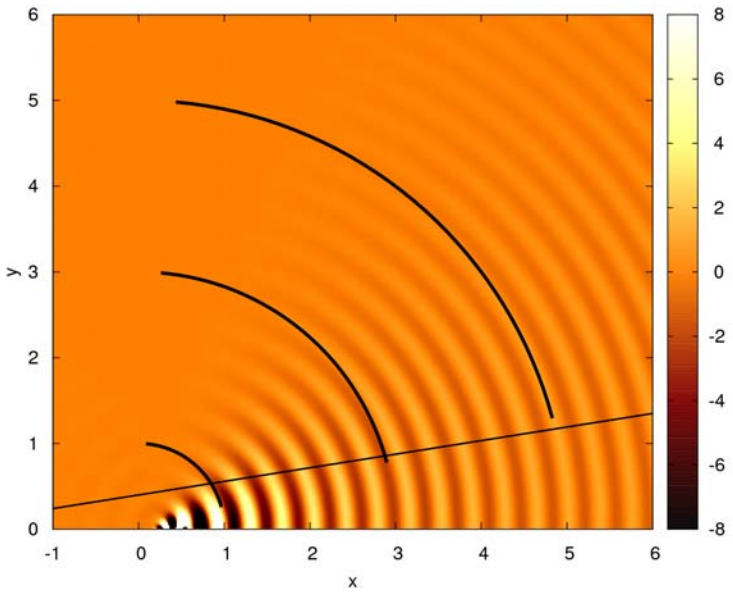


Figure IV.8 – *Arcs de cercle définissant les points de l'espace permettant de comparer les résultats de propagation acoustique par surfaces de Kirchhoff avec les résultats analytiques issus du modèle de paquet d'ondes ; ces arcs de cercles ont les rayons* $R = 10\,d$*,* $R = 30\,d$ *et* $R = 50\,d$*, avec* $\theta \in [15°, 85°]$.

à partir de la surface cylindrique, aux positions définies par les trois arcs de cercle. Sur cette figure, les densités spectrales de puissance acoustique théoriques (en décibels) sont représentées par des lignes continues, obtenues au moyen du modèle analytique de paquet d'ondes, tandis que celles obtenues après propagation sont représentées par des symboles. Un excellent accord est observé sur le premier arc de cercle, défini par $R = 10\,d$, pour l'ensemble des angles d'observation considérés, montrant la validité de l'approche. Pour des arcs de cercle présentant des rayons plus importants ($R = 30\,d$ et $R = 50\,d$), un excellent accord entre le modèle analytique et les résultats de propagation acoustique est toujours observé aux faibles angles d'observations, soit pour $\theta < 50°$, pour lesquels les densités spectrales de puissance sont maximales. Pour des angles d'observation supérieurs, des écarts sont observables, plus importants à mesure que le rayon augmente. Ces erreurs sont attribuées à la méthode de résolution de la propagation acoustique par transformée de Fourier axiale. En effet, avec une telle approche, les composantes spectrales de l'intégrande de l'équation 4-10a sont progressivement tronquées selon le nombre d'onde axial η maximum utilisé, l'intégrale numérique étant nécessairement finie. La transformée de Fourier inverse fait alors apparaître des oscillations de type Gibbs par effet de bord. Un fenêtrage peut permettre de lisser ces résultats aux angles d'observation élevés. Nous n'avons cependant pas jugé utile d'en appliquer un, les amplitudes aux faibles angles d'observation auxquels nous nous intéressons étant correctement reproduites. Globalement, les résultats de propagation acoustique par cette méthode utilisant une surface de contrôle cylindrique sont très satisfaisants, ces comparaisons nous permettant de valider cette approche.

De manière similaire, nous considérons ensuite la propagation acoustique des fluctuations de pression calculées sur la surface conique. Avant d'effectuer une telle propagation, il est intéressant d'évaluer la robustesse de cette approche, sensiblement plus complexe d'un point de vue théorique et numérique que la méthode de propagation à partir d'une surface cylindrique. En particulier, nous évaluons ici la précision d'une telle propagation en fonction du nombre de points de discrétisation du signal par longueur d'onde et du nombre de valeurs propres μ considérées dans l'évaluation de l'équation 4-15a.

Ainsi, la figure IV.10 met en évidence les résultats de propagation acoustique sur les arcs de cercle précédents, lorsque le signal calculé sur la surface conique est décrit au moyen de 5 et

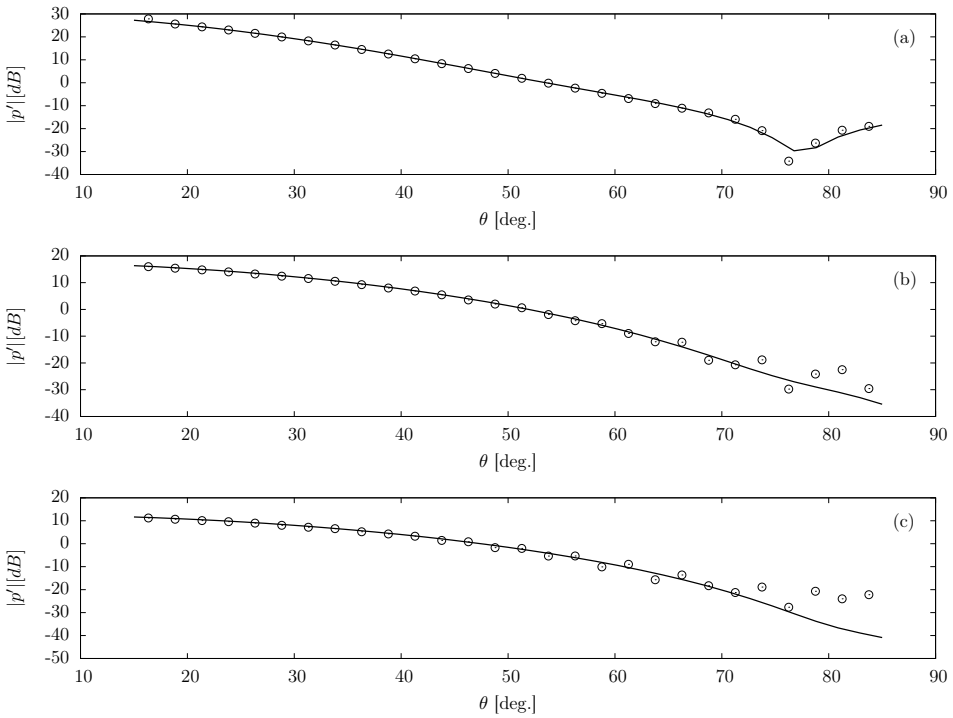


Figure IV.9 – *Densités spectrales de puissance acoustique (en dB) issues du modèle analytique de paquet d'ondes (——) et de la propagation acoustique au moyen d'une surface de Kirchhoff cylindrique (○) en fonction de l'angle d'observation θ sur les arcs de cercle centrés à l'origine et de rayons (a) $R = 10\,d$, (b) $R = 30\,d$ et (c) $R = 50\,d$, à la fréquence $St = 0.3$.*

10 points par longueur d'onde. Un nombre inférieur de points par longueur d'onde n'est pas en mesure de décrire suffisamment précisément le signal. Sur cette figure, les densités spectrales de puissance acoustique analytiques sont décrites par une ligne continue, alors que les résultats de propagation sont décrits par des symboles. Nous pouvons remarquer que pour l'arc de cercle de rayon $R = 10\,d$, les résultats de propagation ne couvrent pas les angles d'observation $\theta < 30°$. En effet, comme cela peut être observé sur la figure IV.8, cette zone correspond à une région située à l'intérieur de la surface de contrôle conique. L'implémentation du modèle ne permet pas le calcul dans cette zone.

Sur l'ensemble des arcs de cercle considérés, l'accord est excellent aux angles d'observation $\theta < 70°$. Des écarts peuvent être observés pour des angles supérieurs, où les amplitudes sont très faibles, les erreurs restant inférieures à 5 dB. Ces erreurs sont cependant confinées dans cette seule région, dans la direction perpendiculaire à l'axe du jet, que nous ne cherchons pas à reproduire précisément et pour laquelle les amplitudes sont très faibles. Ainsi, ces résultats suggèrent là aussi la validité de cette deuxième méthode de propagation de paquets d'ondes, bien mise en évidence aux faibles angles d'observation. De plus, ces observations montrent qu'une description des fluctuations de pression sur la surface conique avec relativement peu de points, autour de 10 points par longueur d'onde, est suffisante pour évaluer la propagation acoustique d'un tel paquet d'ondes en champ lointain. Les perturbations de pression calculées au moyen de notre approche PSE dans la section III.3 sont en général décrites par une dizaine de points par longueur d'onde. Ainsi, ces observations suggèrent qu'une propagation directe des résultats PSE obtenus sur la surface conique, et donc sur l'antenne linéaire présentée dans la section III.2.1, est envisageable.

Enfin, la figure IV.11 présente les résultats de propagation obtenus sur le dernier arc de cercle ($R = 50\,d$) en considérant 100 et 140 valeurs propres μ dans l'évaluation de l'équation 4-15b. En effet, ce nombre de valeurs propres est déterminant puisqu'il définit le nombre de fonctions

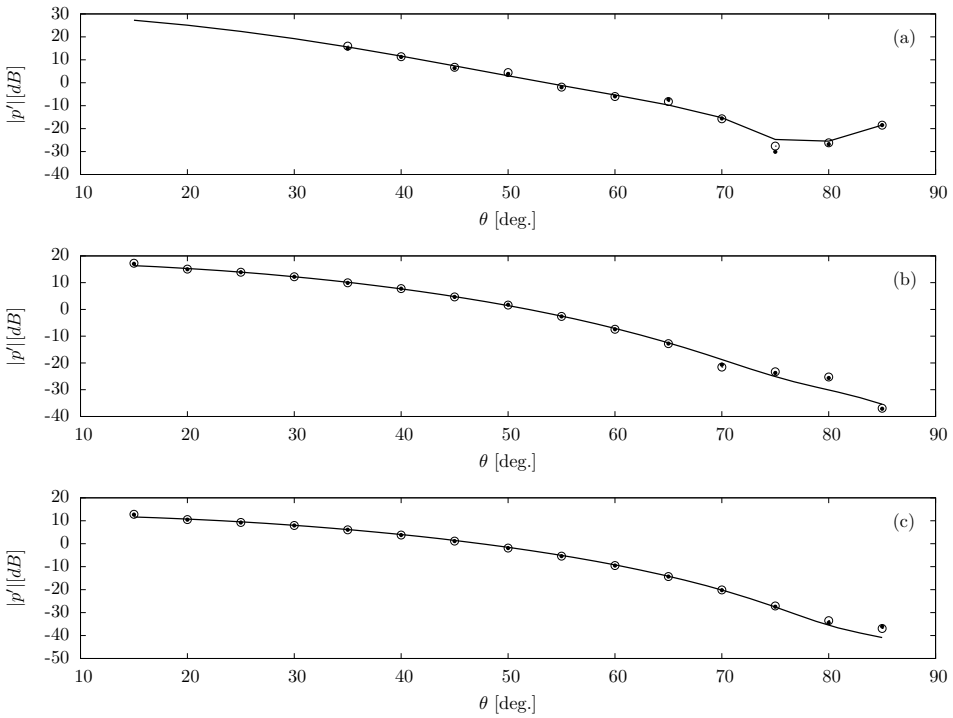


Figure IV.10 – *Densités spectrales de puissance acoustique (en dB) issues du modèle analytique de paquet d'ondes (——) et de la propagation acoustique au moyen d'une surface conique (symboles) en fonction de l'angle d'observation θ sur les arcs de cercle centrés à l'origine et de rayons (a) $R = 10\,d$, (b) $R = 30\,d$ et (c) $R = 50\,d$, à la fréquence $St = 0.3$; Les fluctuations de pression sur la surface conique sont décrites au moyen de 5 points par longueur d'onde (○) et 10 points par longueur d'onde (●).*

propres $P_\mu^{(m)}$ servant de base dans la description de la solution. Nous pouvons ainsi observer une diminution des écarts absolus de puissance acoustique lorsque le nombre de valeurs propres augmente, entre les résultats de propagation et la solution analytique. Dans ce cas d'étude, et comme mis en évidence sur la figure IV.11(b), une centaine de valeurs propres est considérée comme suffisante afin d'assurer la convergence de la solution pour des angles d'observation $\theta < 70°$, les erreurs absolues sur les densités spectrales de puissance acoustique ne dépassant pas 0.5 dB en moyenne. Nous avons observé lors de nos tests qu'un tel nombre de valeurs propres permet d'assurer la convergence des solutions sur les cas d'études issus des analyses PSE.

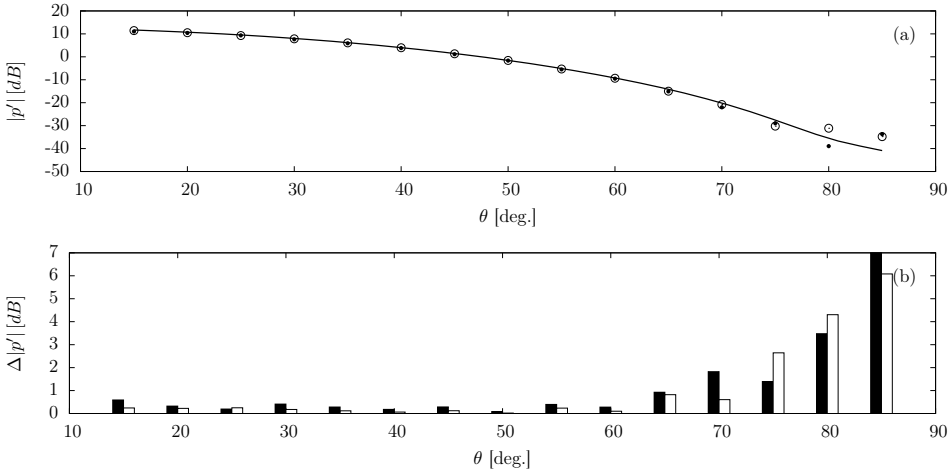


Figure IV.11 – *Figure (a), voir la légende de la figure IV.10 pour $R = 50\,d$; dans le calcul de propagation acoustique au moyen d'une surface conique (équation 4-17), 100 valeurs propres μ (•) et 140 valeurs propres μ (○) sont considérées ; La figure (b) représente les écarts absolus entre les résultats de propagation et la solution analytique pour 100 valeurs propres (■) et 140 valeurs propres (▭).*

IV.3 Propagation acoustique des perturbations de pression issues des calculs PSE linéaires

Suite au développement et à la validation des deux méthodes de propagation acoustique à partir de surfaces de Kirchhoff cylindrique et conique, nous appliquons ici ces approches à la propagation des fluctuations de pression issues des analyses PSE linéaires réalisées dans la section III.4. En effet, dans cette dernière, nous avons montré la pertinence de la description des fluctuations de pression mesurées en champ hydrodynamique proche le long d'une antenne linéaire. Nous avons ainsi calibré en amplitude les perturbations de pression issues des calculs PSE linéaires afin de reproduire au mieux les mesures sur la gamme fréquentielle d'étude (tableau III.3). L'objectif est alors ici de propager ces mêmes perturbations, calibrées en champ proche du jet, afin d'en évaluer la contribution au rayonnement acoustique observé en champ lointain, ainsi que l'importance acoustique relative des différents modes.

3.1 Forme analytique approchée des perturbations de pression PSE

La propagation acoustique des perturbations PSE calibrées nécessite une description complète des fluctuations de pression sur la surface de contrôle. Cependant, dans les cas d'étude ici présents, sur la géométrie à configuration *short-cowl*, nous n'avons pu débuter nos calculs PSE qu'à la pointe du corps de révolution situé au centre de la tuyère (voir la section III.3.4). Par conséquent, il manque la partie amont entre la lèvre de la tuyère et l'abscisse de début du calcul PSE. Nous cherchons donc ici à reconstruire une partie des signaux manquants, afin d'en évaluer par la suite l'influence sur le champ acoustique rayonné. En effet, comme représenté dans les figures IV.12 et IV.13 dans le cas d'étude SCTP2 et pour le mode axisymétrique $m = 0$, cette portion du signal peut sembler qualitativement significative pour la plupart des fluctuations de pression.

Pour cela, nous utilisons une approche similaire à celle retenue dans les travaux de Reba *et al.* [2010] ou Rodríguez *et al.* [2011]. Ces derniers ont en effet approché l'enveloppe de paquets d'ondes obtenus par une approche PSE au moyen d'une fonction analytique exponentielle de la forme

$$A(x) = C \exp\left[-\left(\frac{x - x_c}{ax + L}\right)^2\right] . \tag{4-23}$$

Nous reprenons ici cette forme exponentielle afin de décrire analytiquement les perturbations PSE que nous avons obtenues dans la section III.4. Cependant, nous avons jugé utile dans certains cas de considérer une somme de deux fonctions exponentielles afin de décrire de manière satisfaisante nos perturbations de pression, soit

$$A(x) = C_1 \exp\left[-\left(\frac{x - x_{c1}}{a_1 x + L_1}\right)^2\right] + C_2 \exp\left[-\left(\frac{x - x_{c2}}{a_2 x + L_2}\right)^2\right] . \tag{4-24}$$

Les différents paramètres intervenant dans cette fonction d'amplitude (C_i, x_{ci}, a_i et L_i) sont évalués au moyen d'une optimisation non linéaire visant à reproduire les enveloppes des perturbations PSE de référence. La phase des perturbations est quant à elle évaluée au moyen d'une interpolation cubique à l'intérieur du domaine de calcul PSE, et au moyen d'une régression linéaire en dehors des bornes axiales.

Les résultats de cette approximation analytique des perturbations de pression issues des calculs PSE sont présentés dans les figures IV.12 et IV.13 pour les perturbations axisymétriques du cas SCTP2, respectivement pour les modes de la couche de mélange externe et interne, ainsi que dans les figures IV.14 et IV.15 pour le cas SCTP3. Ces figures mettent en évidence les parties réelles des perturbations, issues des calculs PSE bruts et des approximations analytiques, pour différentes fréquences. Ainsi, l'approche retenue nous permet de reproduire de manière remarquable l'ensemble des fluctuations directement issues des analyses PSE. Cependant, étant donné la simplicité du modèle analytique, de légers écarts sont parfois observables, en majeure partie dans la description des perturbations de la couche de mélange interne (modes KH_i). Ces erreurs nous paraissent cependant mineures, comme nous le verrons dans la section 3.2.1.

De plus, en plus d'être en mesure de reproduire fidèlement les perturbations de pression PSE, cette approche nous permet d'extrapoler de manière semble-t-il réaliste l'évolution axiale de ces perturbations en amont des résultats de calcul PSE. Nous obtenons alors des signaux continus là où les perturbations PSE sont tronquées.

Enfin, il est également intéressant de remarquer que les paquets d'ondes calculés au moyen des PSE sur l'antenne linéaire sont très peu modifiés entre les conditions SCTP2 et SCTP3. Plus particulièrement, les perturbations axisymétriques KH_o sont quasiment identiques, en termes de forme et d'amplitude, sur l'ensemble des fréquences considérées. Les perturbations axisymétriques KH_i sont quant à elles quasiment identiques en termes de forme : seules les amplitudes sont modifiées par l'augmentation de la vitesse d'éjection du jet primaire. Ce changement de condition du jet primaire ne semble donc pas avoir modifié la structure fondamentale des fluctuations de pression en champ proche du jet, tout au moins sur la gamme fréquentielle étudiée.

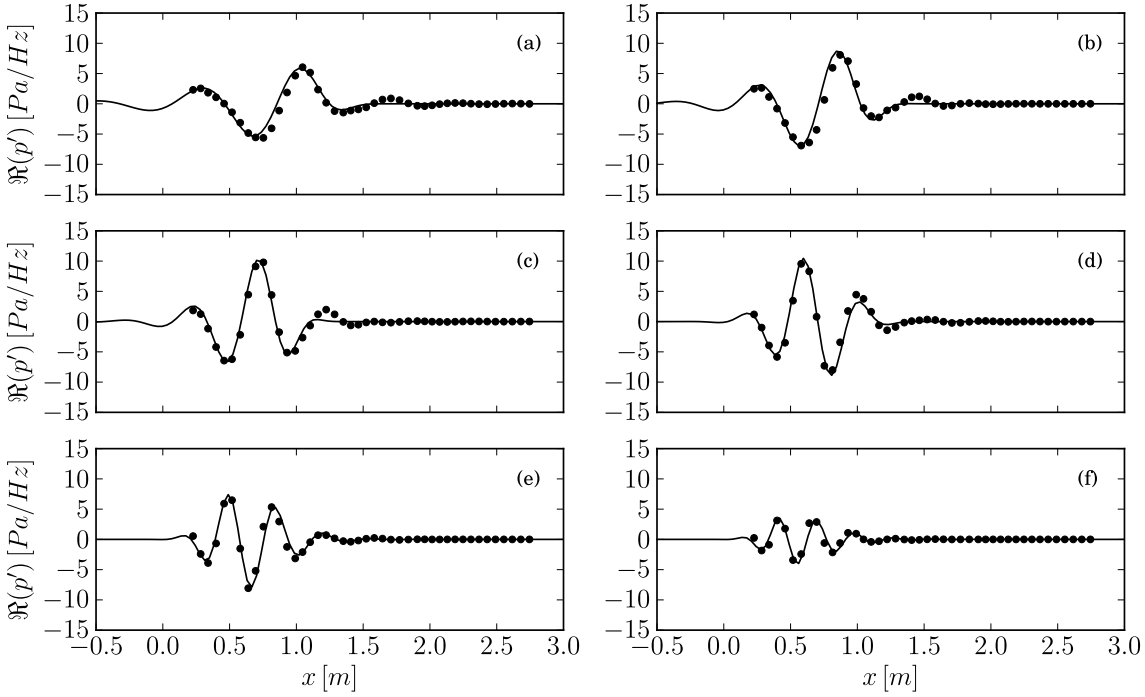


Figure IV.12 – *Parties réelles des perturbations de pression issues des calculs PSE (•) et approchées par la forme analytique exponentielle (——) pour les modes KH_o axisymétriques ($m = 0$) de la condition SCTP2 aux fréquences d'étude du tableau III.3.*

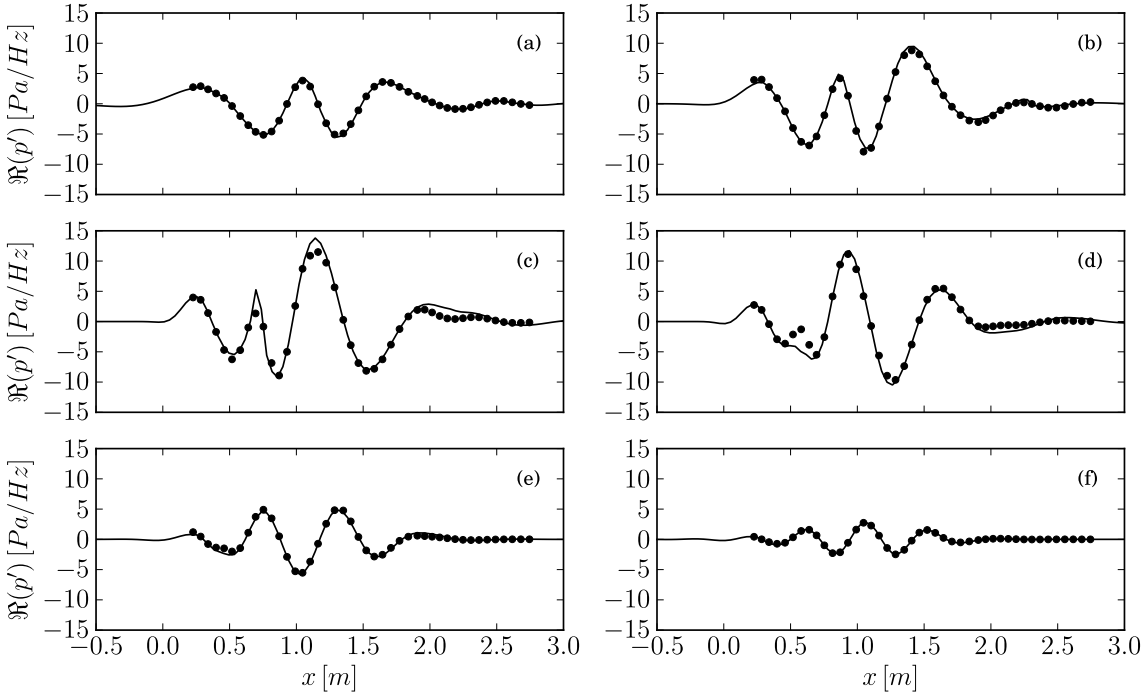


Figure IV.13 – *Voir la légende de la figure IV.12 ; résultats pour les modes KH_i axisymétriques ($m = 0$) de la condition SCTP2.*

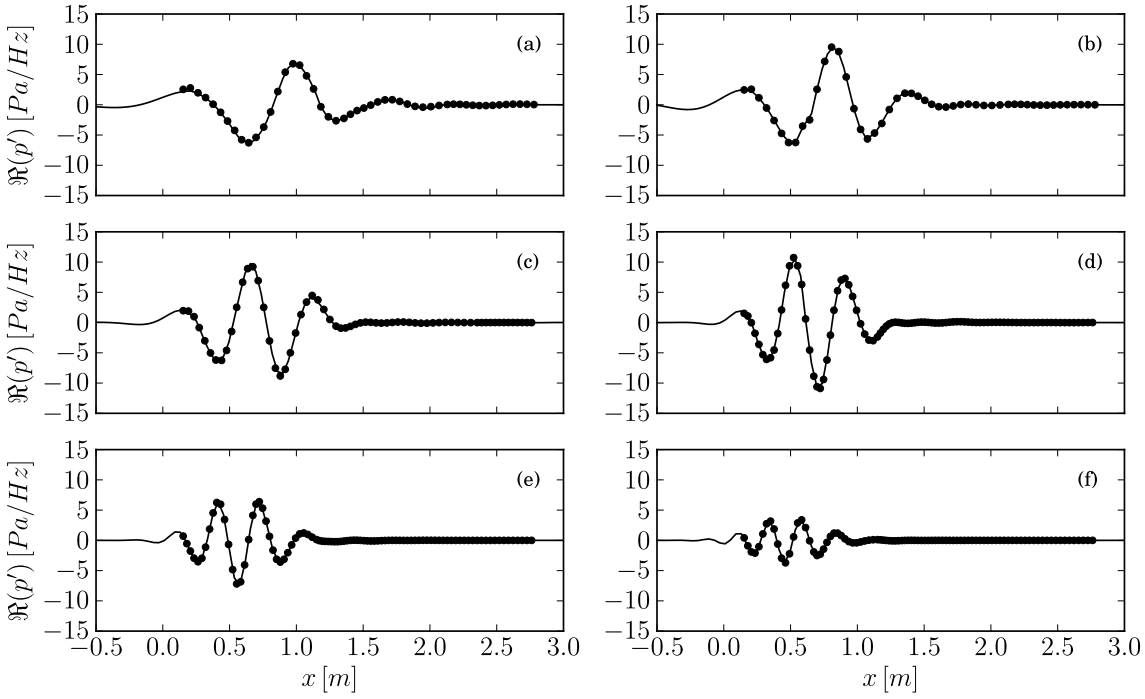


Figure IV.14 – *Voir la légende de la figure IV.12 ; résultats pour les modes KH_o axisymétriques ($m = 0$) de la condition SCTP3.*

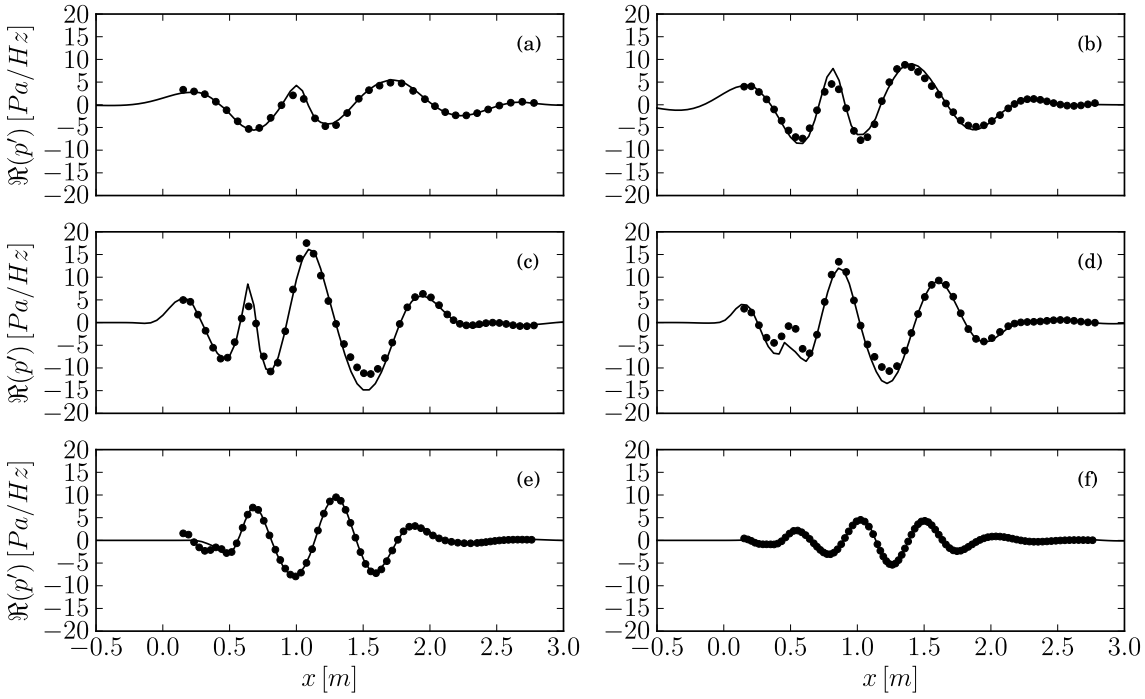


Figure IV.15 – *Voir la légende de la figure IV.12 ; résultats pour les modes KH_i axisymétriques ($m = 0$) de la condition SCTP3.*

3.2 Propagation acoustique des résultats PSE sur le cas *short-cowl* à partir de l'antenne linéaire

Nous disposons de deux méthodes de propagation acoustique, l'une basée sur des perturbations décrites sur une surface conique, l'autre sur une surface cylindrique. Les mesures de fluctuation de pression ayant été effectuées sur une antenne linéaire inclinée, modélisable par une surface conique, et les perturbations de pression PSE ayant été calibrées sur cette même antenne, il est naturel d'évaluer dans un premier temps le champ acoustique propagé au moyen de la première méthode.

Nous considérons donc une surface conique représentative de l'antenne linéaire décrite dans la section III.2.1, présentant donc un demi-angle au sommet $\alpha_0 = 8.5°$. Les perturbations de pression considérées sur cette surface sont alors, d'une part, les perturbations PSE calibrées et présentées dans la section III.4, ainsi que, d'autre part, ces mêmes perturbations approchées analytiquement dans la section 3.1. Ces paquets d'ondes sont donc propagés en champ lointain, au moyen de la méthode présentée dans la section 1.2.2, aux positions mises en évidence sur la figure IV.16, où θ est l'angle d'observation mesuré par rapport à l'axe du jet dans la direction de l'écoulement. Ces positions correspondent aux emplacements des microphones utilisés lors des mesures des directivités acoustiques des jets étudiés dans le cadre du projet CoJeN par QinetiQ au NTF à Farnborough, UK.

Comme cela est visible sur la figure IV.16, ces mesures de densité spectrale de puissance acoustique ont été réalisées sur des arcs de cercle de rayon $R = 13\,\mathrm{m}$ environ, soit une distance de $45\,d_s$ dans le cas des tuyères *short-cowl*, couvrant des angles d'observation $\theta \in [30°, 120°]$. Ces mesures nous donnent ainsi accès au contenu fréquentiel en champ lointain. Il est cependant important de remarquer qu'aucune décomposition azimutale de ces dernières mesures n'est réalisable, aucune antenne azimutale en champ lointain n'ayant été employée. Ainsi, par la suite, nous ne sommes en mesure de comparer que les résultats de propagation des perturbations azimutales PSE calibrées, avec les amplitudes "totales" mesurées, sans filtrage azimutal, aux fréquences étudiées.

Les mesures réalisées sur ces microphones en champ lointain par QinetiQ sont exprimées en décibels, alors que nos perturbations PSE sont calibrées en Pa/Hz. Afin d'évaluer la densité spectrale de puissance acoustique associée à la propagation des perturbations PSE, de manière

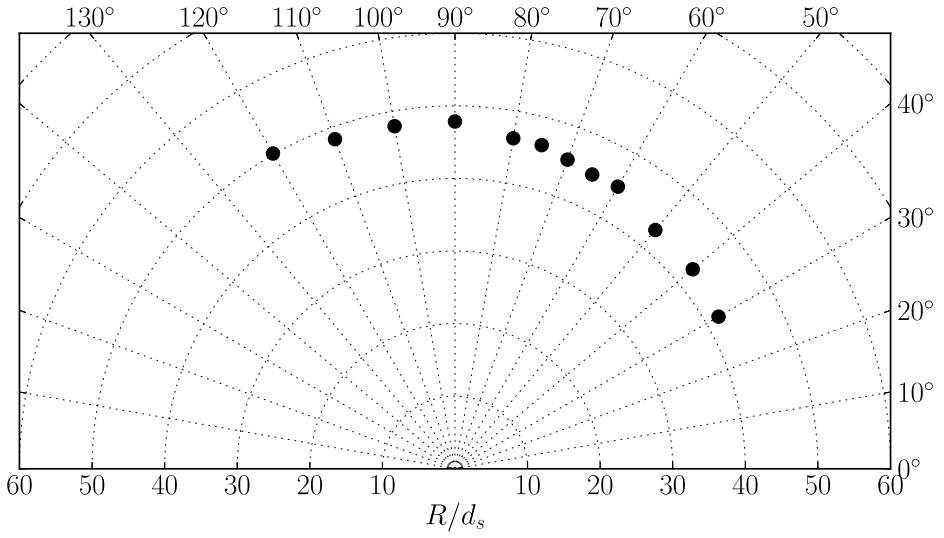


Figure IV.16 – *Positions des microphones en champ lointain (•) employés dans l'acquisition des densités spectrales de puissance acoustique au NTF par QinetiQ, représentées dans le repère polaire* $(R/d_s, \theta)$.

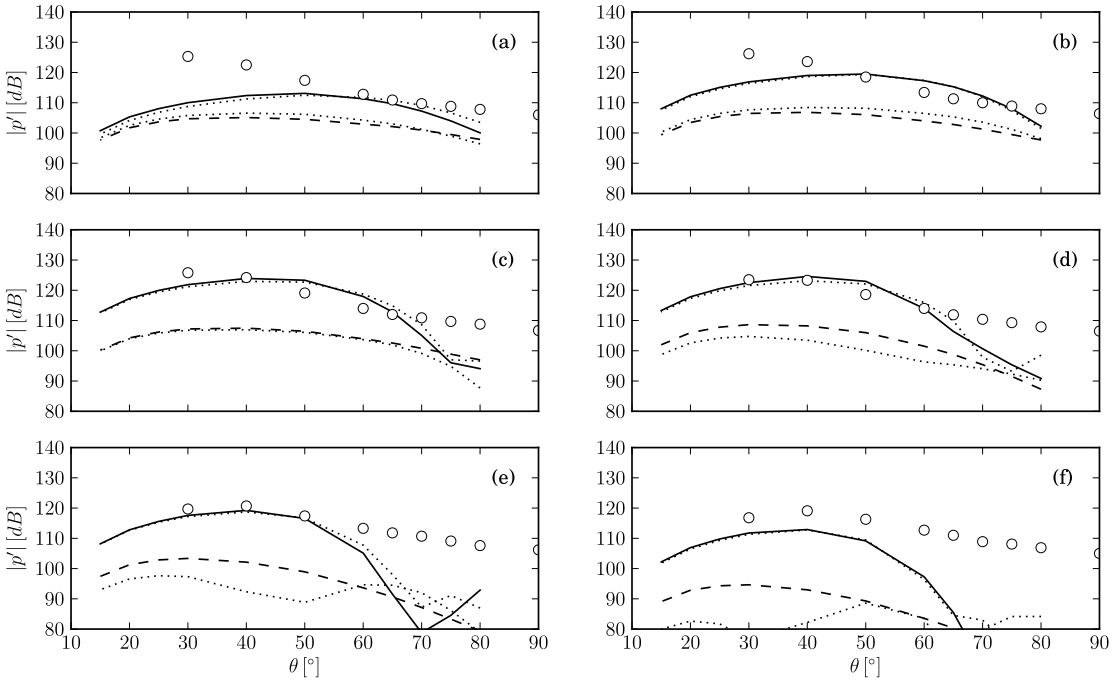


Figure IV.17 – *Directivités acoustiques obtenues par propagation des perturbations de pression axisymétriques $m = 0$ des modes KH_i (——) et KH_o (- - - -) reconstruites analytiquement, ainsi que les directivités issues de la propagation des résultats PSE bruts (·····), pour le cas SCTP2 et aux fréquences d'étude du tableau III.3 ; les mesures (○) sont également représentées.*

équivalente aux mesures, il est alors nécessaire de les multiplier par le même pas de discrétisation fréquentiel que celui utilisé lors des expérience, soit $\delta f = 50\,\text{Hz}$. Nous obtenons alors une densité spectrale de puissance acoustique au moyen de l'expression (4-19). Nous insistons donc sur le fait qu'aucune calibration n'est réalisée sur les résultats de propagation acoustique : les fluctuations de pression calibrées en champ proche sur les amplitudes des mesures issues de l'antenne linéaire sont directement propagées et comparées aux mesures issues des microphones en champ lointain.

3.2.1 Propagations acoustiques des perturbations PSE brutes et du modèle analytique approché

Nous étudions dans un premier temps la sensibilité des résultats de propagation acoustique à la description des perturbations de pression sur l'antenne linéaire. En effet, comme évoqué précédemment, notre modélisation PSE n'est pas en mesure de débuter aux lèvres des tuyères à cause de leurs géométries. L'évolution des perturbations de pression est donc tronquée dans la région initiale du jet. Cependant, nous avons extrapolé ces fluctuations au moyen d'un modèle analytique dans la section 3.1. Nous évaluons ici l'effet de cette reconstitution sur le champ rayonné. Nous tentons ainsi de répondre aux questions suivantes : la description PSE obtenue dans ces cas d'étude de tuyères *short-cowl* est-elle suffisante pour obtenir des résultats de propagation acoustique cohérents ? Ou encore, la reconstruction analytique des perturbations de pression, particulièrement en région amont, est-elle nécessaire ?

Les figures IV.17 et IV.18 mettent ainsi en évidence les directivités acoustiques obtenues par propagation des modes axisymétriques $m = 0$ dans l'étude, respectivement, des cas SCTP2 et SCTP3. Sur ces figures, les traits continus et interrompus représentent les directivités issues des perturbations de pression reconstruites analytiquement, tandis que les pointillés illustrent les directivités issues des perturbations PSE brutes. Nous nous concentrons ici sur les différences

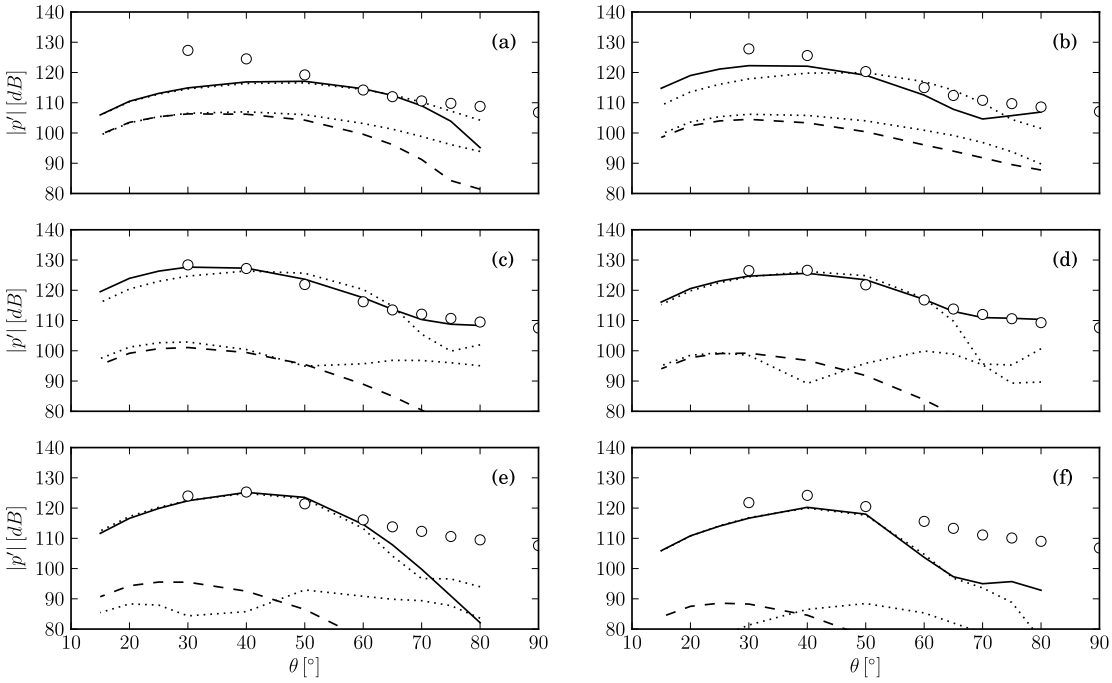


Figure IV.18 – *Directivités acoustiques pour le cas SCTP3 et $m = 0$; voir la légende de la figure IV.17.*

entre ces directivités calculées : les comparaisons de ces directivités avec les mesures, représentées sur ces figures par les symboles, sont réalisées dans la section suivante.

Nous observons tout d'abord peu de différences sur les directivités des modes KH_i aux faibles angles d'observation $\theta < 60°$, entre celles issues des perturbations approchées analytiquement et celles directement issues des calculs PSE. Il semble alors que, pour les modes de la couche de mélange interne, la description des perturbations de pression PSE soit suffisante et les directivités acoustiques obtenues soient correctement représentées pour de faibles angles d'observation. La reconstruction analytique des paquets d'ondes correspondants réalisée dans la section 3.1 semble donc cohérente et ne dégrade pas la solution de propagation acoustique. Ainsi, l'extrapolation des perturbations en région amont pour ces modes KH_i n'a que très peu d'effet sur le champ acoustique lointain.

Dans un second temps, nous observons des différences bien plus importantes pour les modes de la couche de mélange externe. Si les directivités restent cohérentes aux plus basses fréquences (a) et (b), entre celles issues de la modélisation analytique et celles directement issues des calculs PSE, d'importants écarts sont ensuite visibles, dès les figures (c) dans le cas SCTP3. Les directivités issues des perturbations de pression reconstruites par un modèle analytique semblent dans l'ensemble beaucoup plus cohérentes que les directivités directement issues des perturbations PSE : ces dernières ont des enveloppes très discutables, ne présentant pas de lobe directionnel aux fréquences les plus élevées, contrairement aux directivités issues des reconstructions analytiques. Or, comme nous l'avons montré dans la section 3.1, et comme nous pouvons l'observer sur les figures IV.12 et IV.14, la reconstruction des perturbations de pression PSE au moyen du modèle analytique est excellente sur l'ensemble des fréquences étudiées. Les différences majeures entre les perturbations PSE brutes et leurs reconstructions analytiques se situent dans l'extrapolation des signaux en région amont. Cette observation suggère donc que la description brute de ces modes PSE de la couche de mélange externe (dans l'étude des cas *short-cowl*) n'est pas suffisante pour effectuer une propagation acoustique fiable. La reconstruction analytique semble au contraire permettre d'obtenir des résultats bien plus représentatifs et conformes à la physique du rayonnement de paquets d'ondes subsoniques (voir par exemple Cavalieri *et al.* [2011]).

Nous avançons l'hypothèse suivante afin d'expliquer ce résultat : les modes KH_o sont subsoniques et rayonnent ici en champ lointain par un mécanisme de modulation d'amplitude (nous ne prenons pas en compte ici la modulation temporelle) [Crighton et Huerre, 1990]. Par conséquent, une description complète des enveloppes des paquets d'ondes est nécessaire. L'importante troncature initiale des perturbations PSE brutes pourrait donc altérer ce mécanisme. Au contraire, l'extrapolation du signal dans la région amont manquante devrait permettre à ce mécanisme de mieux s'exprimer. L'accord très satisfaisant observé sur les modes KH_i, sur l'ensemble des fréquences étudiées, entre les directivités issues des perturbations PSE et celles issues des perturbations décrites analytiquement, nous conforte dans la pertinence d'une telle approche. Dans la suite, nous choisissons par conséquent de ne considérer que les propagations acoustiques des perturbations de pression reconstruites par un modèle analytique.

3.2.2 Comparaisons avec les directivités mesurées

Nous comparons maintenant les directivités calculées aux mesures. Pour cela, les résultats des figures IV.17 et IV.18 sont reproduits sur les figures IV.19 et IV.20 pour le cas SCTP2, respectivement pour les modes KH_i et KH_o, ainsi que sur les figures IV.21 et IV.22 pour le cas SCTP3. Ces figures mettent également en évidence les directivités issues des perturbations de pression des modes hélicoïdaux $m = 1$ et 2. Enfin, avant d'effectuer toute comparaison par rapport aux mesures en champ lointain, nous rappelons que ces dernières ne sont pas filtrées azimutalement, mais sont le résultat du rayonnement acoustique d'un ensemble de modes azimutaux. Les amplitudes relatives de ces différents modes azimutaux ne peuvent pas être quantifiées au moyen de ces seules mesures. Un accès à une telle décomposition en champ lointain aurait été très intéressant puisque, par notre approche, nous estimons être en mesure de pouvoir comparer les amplitudes absolues des directivités associées à chaque mode étudié (soit

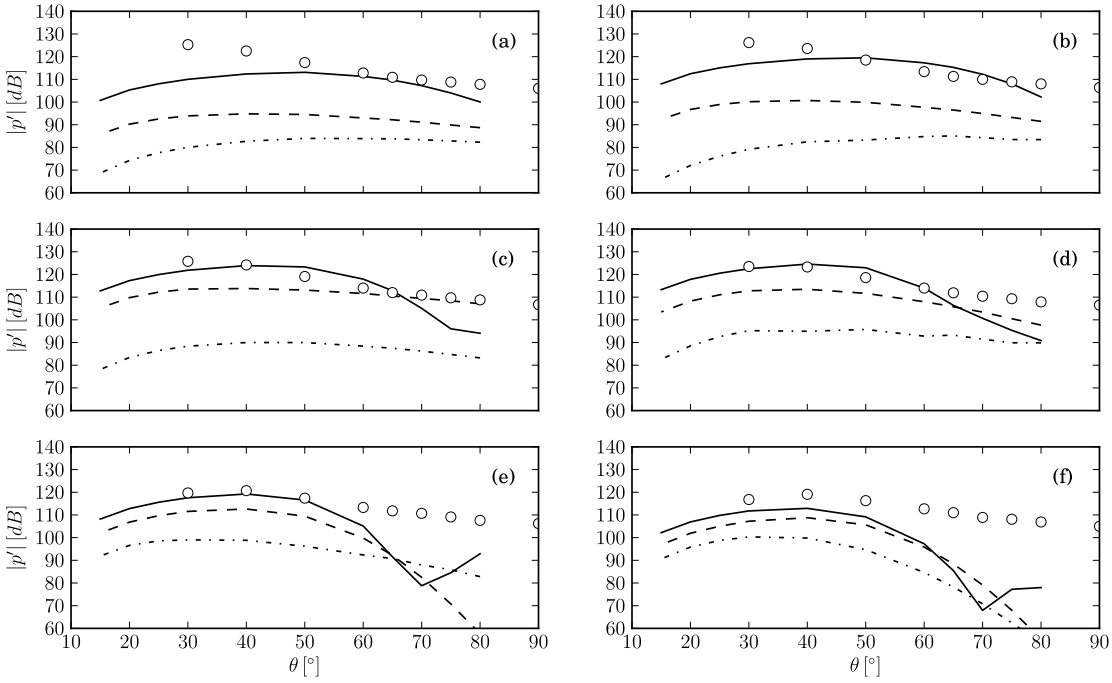


Figure IV.19 – *Directivités acoustiques issues de la propagation des perturbations de pression de la couche de mélange interne (modes KH_i) sur le cas SCTP2 pour les nombres d'onde azimutaux $m = 0$ (——) ; $m = 1$ (- - - -) ; $m = 2$ (-·-·-) ; comparées aux mesures (○) pour les fréquences définies dans le tableau III.3.*

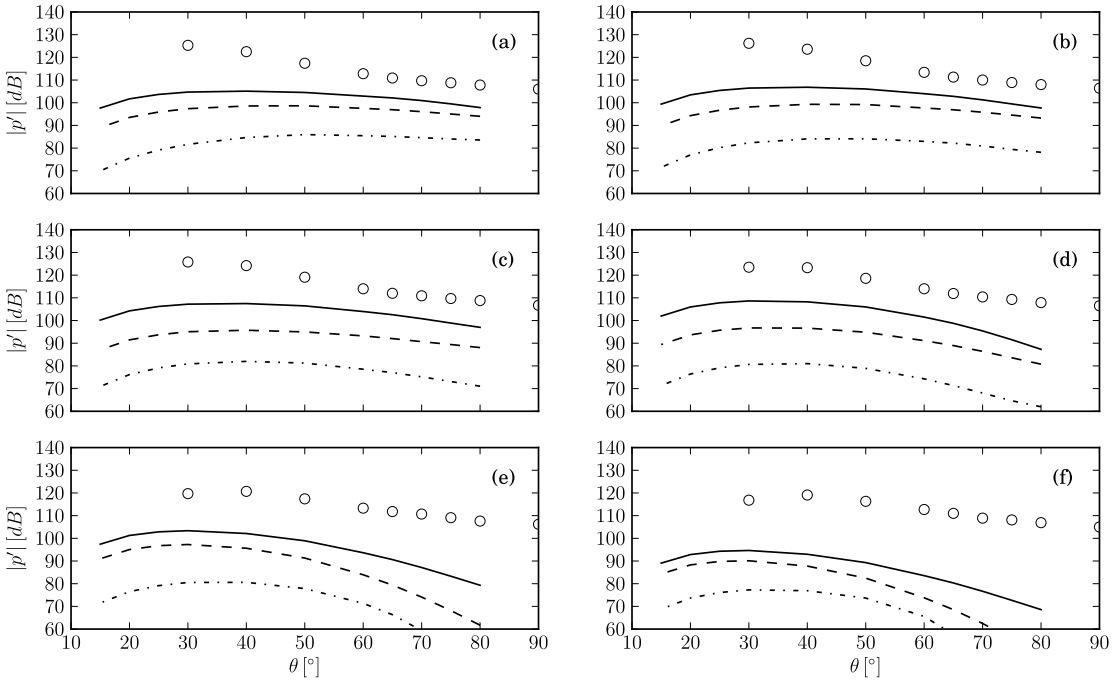


Figure IV.20 – *Directivités acoustiques issues de la propagation des perturbations de pression de la couche de mélange externe (modes KH_o) sur le cas SCTP2 ; voir la légende de la figure IV.19.*

en fréquence, nombre d'onde azimutal et mode KH). En effet, nous rappelons qu'une fois les amplitudes des modes PSE calibrées en champ proche, aucun facteur d'ajustement n'est appliqué aux résultats de propagation acoustique.

Nous observons ainsi sur les figures IV.19 et IV.21 que, pour l'ensemble des fréquences étudiées, les ordres de grandeur des niveaux acoustiques associés aux modes KH_i axisymétriques propagés sont en très bon accord avec les niveaux mesurés. En particulier, les directivités obtenues aux fréquences des figures (c), (d) et (e) et (f) reproduisent bien les observations expérimentales, de manière très remarquable pour le cas SCTP3. Aux plus basses fréquences, soit les figures (a) et (b), les directivités de ces modes sont moins représentatives, même si les amplitudes restent dans la gamme des niveaux mesurés. Nous attribuons cela aux solutions hydrodynamiques PSE obtenues pour ces fréquences (voir les figures III.28 et III.31 de la section III.4.2), qui, comme nous l'avons mentionné dans l'étude du champ proche, ne sont pas valables pour de si faibles nombres de Strouhal. Il est alors logique d'observer ici de larges écarts sur ces directivités. Nous considérons donc ces fréquences, et en particulier la fréquence (a), comme non adéquatement modélisées par notre approche. Enfin, à la plus haute fréquence étudiée, soit sur la figure (f), les enveloppes des directivités des deux cas SCTP2 et SCTP3 sont cohérentes, mais les niveaux un peu faibles comparés aux mesures.

L'ensemble de ces observations suggère ainsi une très forte corrélation entre le rayonnement acoustique des modes axisymétriques de la couche de mélange interne et l'acoustique mesurée en champ lointain, pour de faibles angles d'observation θ et de basses fréquences $St_{d_s} < 1$. Il est notamment remarquable d'observer sur le cas SCTP3 que l'angle de directivité maximum mesuré évolue de 30° à 40° entre les fréquences (c) et (f). Cette tendance est correctement reproduite par nos calculs.

Les modes axisymétriques de la couche de mélange externe, soit les modes KH_o, présentent également des directivité maximales à des angles voisins de $\theta = 30°$, mais à des amplitudes bien inférieures, autour de 100 dB, visibles sur les figures IV.20 et IV.22. Le rayonnement acoustique de ces modes est donc globalement inférieur de 20 dB à celui des modes KH_i axisymétriques, soit un

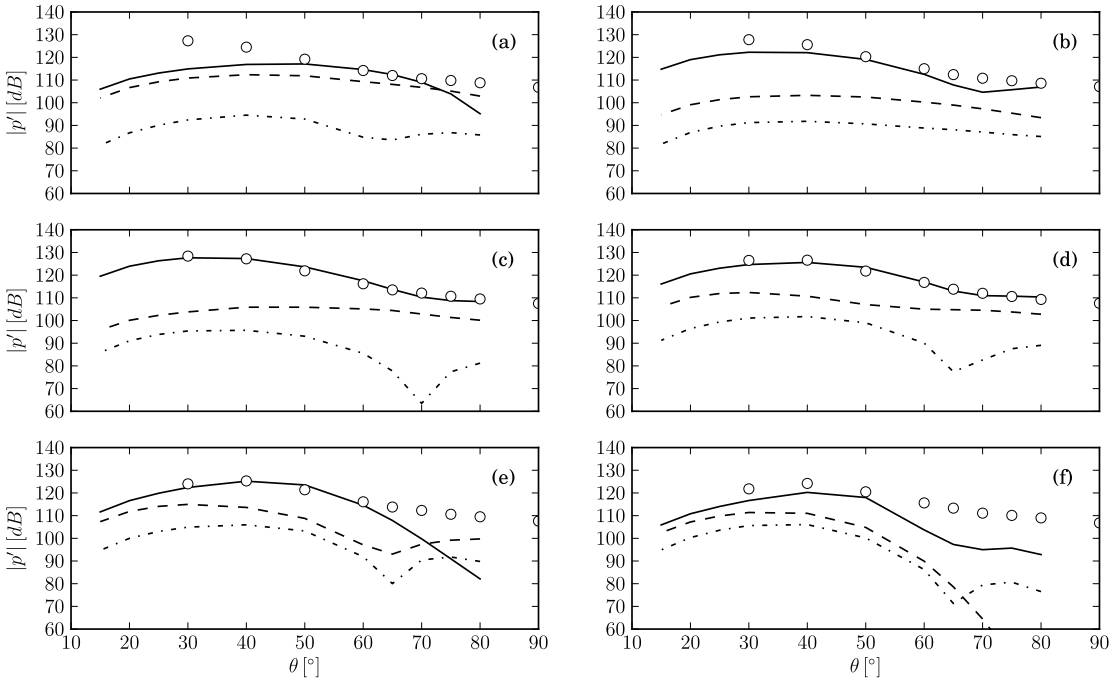


Figure IV.21 – *Directivités acoustiques issues de la propagation des perturbations de pression de la couche de mélange interne (modes KH_i) sur le cas SCTP3 ; voir la légende de la figure IV.19.*

ordre de grandeur d'écart sur les amplitudes absolues (en Pa). Cette observation n'exclut pas leur contribution possible à l'acoustique mesurée en champ lointain. En effet, en supposant de manière très simplificatrice que les amplitudes absolues des modes KH_i et KH_o s'additionnent, cet ordre de grandeur d'écart se traduit par l'addition en échelle logarithmique de $20\,\log(1.1) = 0.83\,\mathrm{dB}$ aux densités spectrales de puissance acoustique des modes KH_i. De plus, nous n'avons ici considéré que des sources périodiques en temps, aucune modulation temporelle n'ayant été modélisée dans notre approche. Or, les travaux de Cavalieri *et al.* [2011] mettent en évidence l'importance de cette modulation temporelle dans la puissance acoustique rayonnée par des paquets d'ondes subsoniques. [1] Dans leur cas d'étude se rapprochant le plus de nos travaux, soit un jet subsonique à $M = 0.9$ et $Re = 4 \times 10^5$, un gain d'environ 8 dB est rapporté, à la fréquence $0.3 < St < 0.5$, entre un paquet d'ondes périodique et modulé en temps. Nos modes KH_o, qui présentent des vitesses de phase subsoniques, peuvent donc potentiellement, au moyen d'un tel mécanisme, avoir une importance acoustique plus grande que celle que nous présentons ici. Cependant, la justesse des amplitudes obtenues par la propagation acoustique des modes KH_i axisymétriques, ainsi que la forme de leur directivité, nous permet de suggérer la dominance acoustique de ces derniers sur les cas d'étude SCTP2 et SCTP3.

Jusqu'à présent, nous nous sommes uniquement intéressés aux modes axisymétriques $m = 0$ des deux couches de mélange. Les figures précédentes mettent également en évidence les directivités associées aux modes hélicoïdaux. Nous observons ainsi que, dans l'ensemble, pour les deux cas d'étude SCTP2 et SCTP3, les directivités des modes azimutaux des deux couches de mélange présentent des maximums de puissance acoustique décroissants à m croissant. Ce résultat suggère la dominance acoustique des modes KH_i axisymétriques sur les modes hélicoïdaux, pour ces cas d'étude et aux fréquences retenues.

Si les modes axisymétriques de la couche de mélange interne semblent dominer, nous n'excluons pas l'importance acoustique des modes hélicoïdaux. En effet, l'écart de maximum de puissance

1. Ce mécanisme semble cependant avoir peu d'importance pour des paquets d'ondes supersoniques, tels que les modes KH_i.

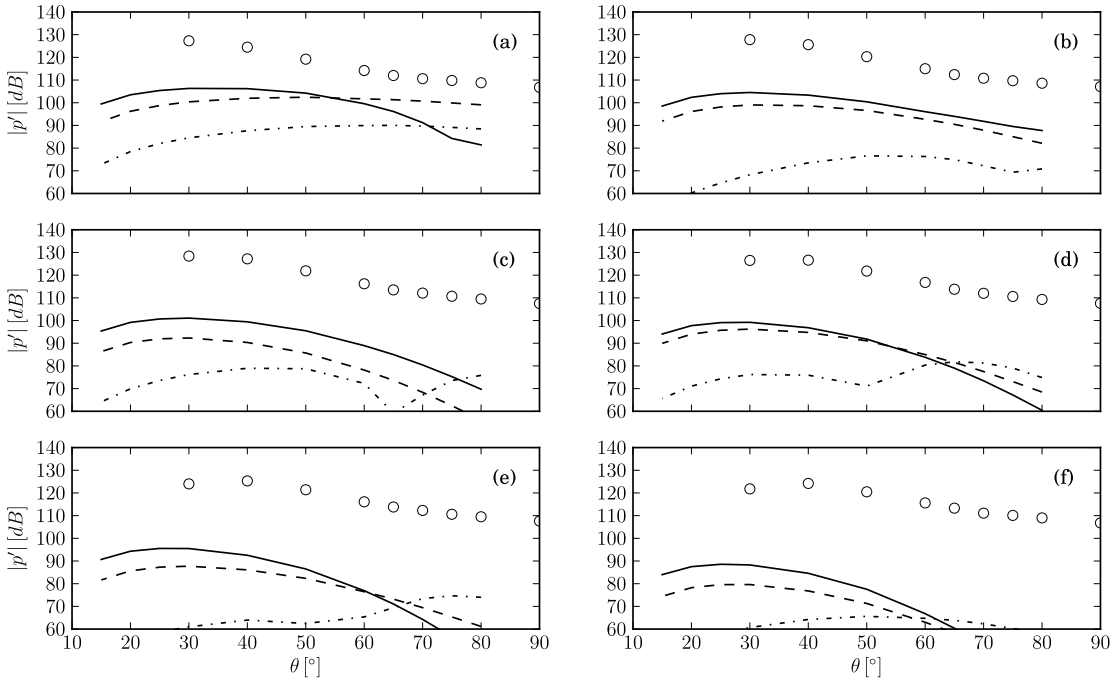


Figure IV.22 – *Directivités acoustiques issues de la propagation des perturbations de pression de la couche de mélange externe (modes KH_o) sur le cas SCTP3 ; voir la légende de la figure IV.19.*

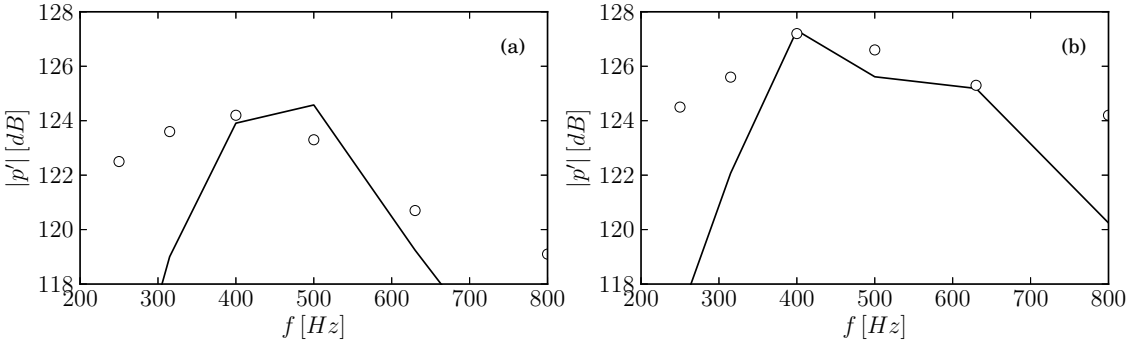


Figure IV.23 – *Puissances acoustiques en champ lointain sur le domaine fréquentiel d'étude, mesurées à l'angle d'observation $\theta = 40°$ (○), et obtenues après propagation des modes d'instabilité KH_i axisymétriques $m = 0$ (——), pour les cas (a) SCTP2 et (b) SCTP3.*

acoustique entre les modes $m = 0$ et $m = 1$ de la couche de mélange interne est d'une dizaine de décibels et semble se réduire avec l'augmentation de la fréquence. Nous n'avons cependant pas suffisamment de résultats pour conclure quant à la part de rayonnement acoustique due à ces modes hélicoïdaux. Néanmoins, il est intéressant de remarquer que le gain de puissance des modes hélicoïdaux à plus hautes fréquences a précédemment été observé dans la section III.2.4.3, lors de l'étude du champ hydrodynamique proche. Enfin, nous estimons délicat de chercher à conclure quant à la prépondérance de ces modes hélicoïdaux de la couche de mélange interne sur les modes de la couche de mélange externe. En effet, les niveaux des premiers modes hélicoïdaux ($m = 1$) de la couche de mélange interne (KH_i) sont ici supérieurs d'une dizaine de décibels aux niveaux des modes KH_o axisymétriques, suggérant la dominance des premiers. Cependant, là encore, nous n'avons pas considéré la modulation temporelle des modes KH_o subsoniques.

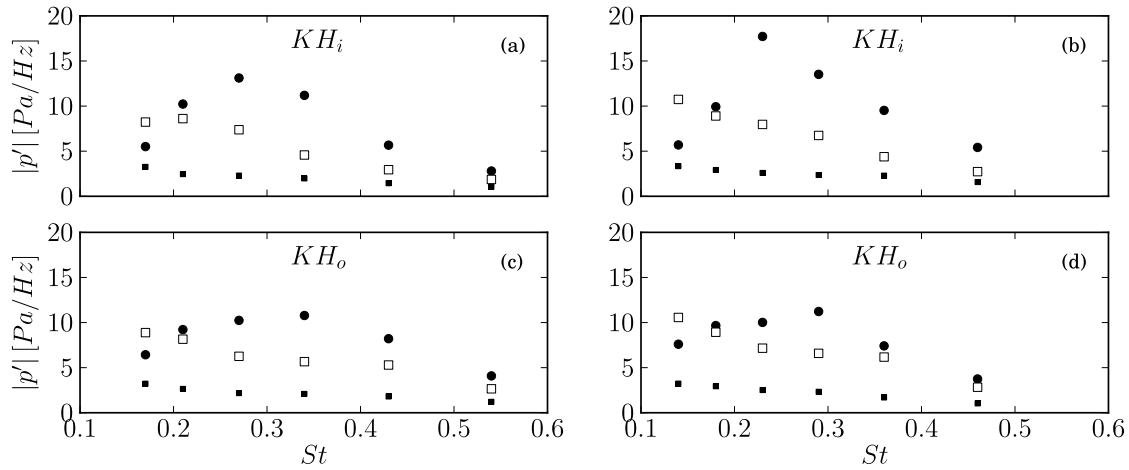


Figure IV.24 – *Répartition fréquentielle des amplitudes maximales des perturbations de pression des modes (a,b) KH_i et (c,d) KH_o pour les nombres d'onde azimutaux $m = 0$: ● ; $m = 1$: □ ; $m = 2$: ■ ; et pour les conditions (a,c) SCTP2 et (b,d) SCTP3, calibrées sur les mesures de l'antenne azimutale.*

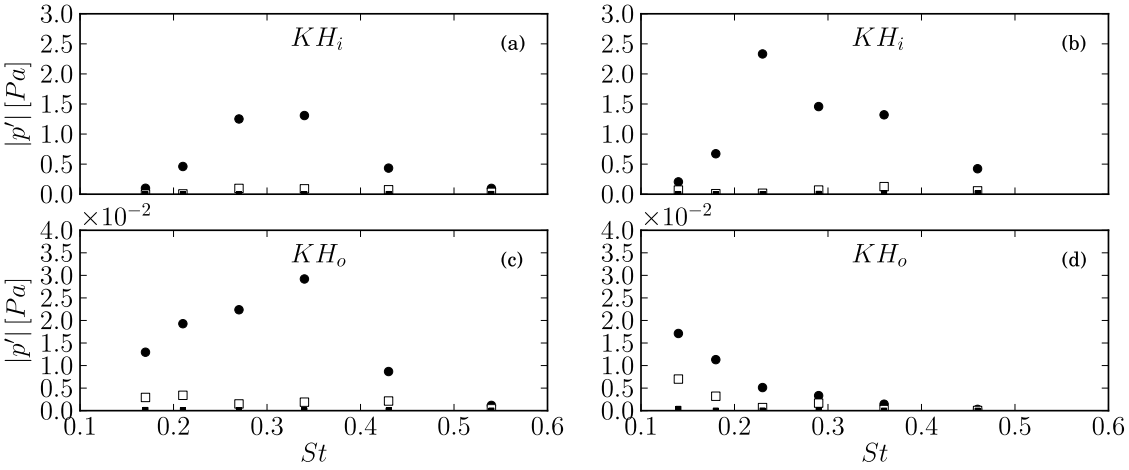


Figure IV.25 – *Amplitudes maximales des perturbations de pression des modes de la figure IV.24 propagées en champ lointain.*

L'ensemble de ces observations nous permet de conclure sur la forte dominance du rayonnement acoustique des modes axisymétriques de la couche de mélange interne aux fréquences étudiées, pour les cas d'étude SCTP2 et SCTP3. Les modes hélicoïdaux de la couche de mélange interne, ainsi que les modes de la couche de mélange externe semblent bien moins puissants d'un point de vue acoustique, mais peuvent cependant avoir une contribution non négligeable au champ rayonné total. Les modes axisymétriques KH_i propagés reproduisent correctement les niveaux ainsi que les formes des directivités mesurées. De plus, nous retrouvons ici l'observation effectuée dans le chapitre III sur l'augmentation de la puissance du rayonnement acoustique avec l'augmentation de la vitesse du jet primaire. En effet, l'augmentation de la vitesse du jet primaire entre les conditions SCTP2 et SCTP3 se traduit sur les mesures par un accroissement significatif des niveaux sonores aux fréquences étudiées. La figure IV.23 illustre cette observation en mettant en évidence les niveaux mesurés à un angle d'observation $\theta = 40°$ pour les conditions SCTP2 et SCTP3. En comparaison, nous y représentons également les niveaux calculés par propagation des ondes d'instabilité axisymétriques de la couche de mélange interne. Nous observons alors que les niveaux calculés par propagation de ces seuls modes reproduisent effectivement cette hausse de niveaux sonores dans des proportions très similaires, avoisinant 4 dB. De plus, nous

pouvons remarquer que nos résultats mettent en évidence une zone fréquentielle de maximum de puissance acoustique, autour des fréquences $f = 400\,\text{Hz}$ et $500\,\text{Hz}$. Cette zone de maxima de puissance acoustique est également observable sur les mesures, ce qui a par ailleurs initialement motivé le choix de cette bande fréquentielle d'étude. Nous validons donc ici ce choix effectué dans la section III.2.2 et confirmons la pertinence de l'étude des ondes d'instabilité pour l'analyse et la compréhension du bruit de jet des configurations complexes étudiées. Il existe cependant de larges différences visibles à des fréquences plus basses et plus élevées, suggérant que ce rayonnement acoustique observé est plus complexe que le simple rayonnement des perturbations axisymétriques KH_i, comme évoqué précédemment.

Enfin, d'un point de vue plus qualitatif, il est intéressant de mettre en évidence une certaine notion d'efficacité acoustique des différents modes étudiés. En effet, il est important de remarquer que l'amplitude des modes instables en champ proche du jet n'est pas le seul paramètre conditionnant leur puissance acoustique observée en champ lointain. Ainsi, la figure IV.24 illustre les amplitudes maximum des modes obtenus en champ proche des jets pour les deux conditions SCTP2 et SCTP3, en fonction de la fréquence. La figure IV.25, quant à elle, présente les amplitudes maximales du champ acoustique rayonné par ces même modes, donc observées en champ lointain. Nous cherchons ici à comparer les rapports des amplitudes entre modes. Ainsi, globalement, nous observons sur la figure IV.24 que les amplitudes maximales des modes axisymétriques ($m = 0$) sur chacune des quatre figures est environ le double des amplitudes maximales des premiers modes hélicoïdaux ($m = 1$). Cet ordre de grandeur est ainsi homogène pour les modes des deux couches de mélange et pour les deux conditions d'utilisation. Maintenant, sur la figure IV.25, les maximums de puissance acoustique observés en champ lointain présentent globalement des ordres de grandeur bien différents sur ces mêmes rapports. Ainsi, les maximums d'amplitude des modes axisymétriques sont parfois supérieurs d'un facteur 10 aux maximums d'amplitude des premiers modes hélicoïdaux, particulièrement pour les modes de la couche de mélange interne. Cette "efficacité" acoustique des modes axisymétriques de la couche de mélange interne par rapport aux modes hélicoïdaux est donc nettement visible. Un tel résultat s'explique par le fait que, outre l'amplitude absolue, la forme même des fonctions d'amplitude des modes est importante : comme nous le détaillons dans la section 3.4, le rayonnement acoustique des ondes étudiées est conditionné par les composantes supersoniques de leurs spectres de nombre d'onde axial.

3.2.3 Raccord en champ proche entre solution hydrodynamique et rayonnement acoustique

La validité des résultats de propagation acoustique présentés dans la section précédente dépend d'une part de la validité de la méthode mise en place, ce que nous avons vérifié dans la section 3.2, et, d'autre part, du fait que la surface conique considérée soit placée dans une région uniforme à l'extérieur du jet et sur laquelle les perturbations de pression sont correctement décrites, ce qui a été vérifié dans la section III.2.3.1. Les comparaisons très favorables en champ lointain des directivités calculées par rapport aux mesures disponibles vont dans le sens de la validité de cette approche. Il nous semble maintenant intéressant de revenir au champ proche du jet afin d'étudier le champ de pression obtenu par la méthode de propagation acoustique.

La figure IV.26 illustre ainsi deux champs de pression dans l'étude du mode axisymétrique KH_i à la fréquence $f = 500\,\text{Hz}$ pour le cas SCTP3. Le premier champ présente l'amplitude des perturbations issues du calcul PSE dans tout le domaine considéré. Comme attendu, aucun lobe super-directif n'est observé à l'extérieur du jet, où seules des composantes hydrodynamiques décroissant exponentiellement sont observées. Cette observation rejoint les résultats précédents détaillés dans la section 1.1.1, mettant en évidence l'incapacité des modèles PSE à reproduire le rayonnement acoustique des ondes d'instabilité des jets. Le second champ fait apparaître la position de l'antenne linéaire, définissant la surface conique utilisée pour la propagation

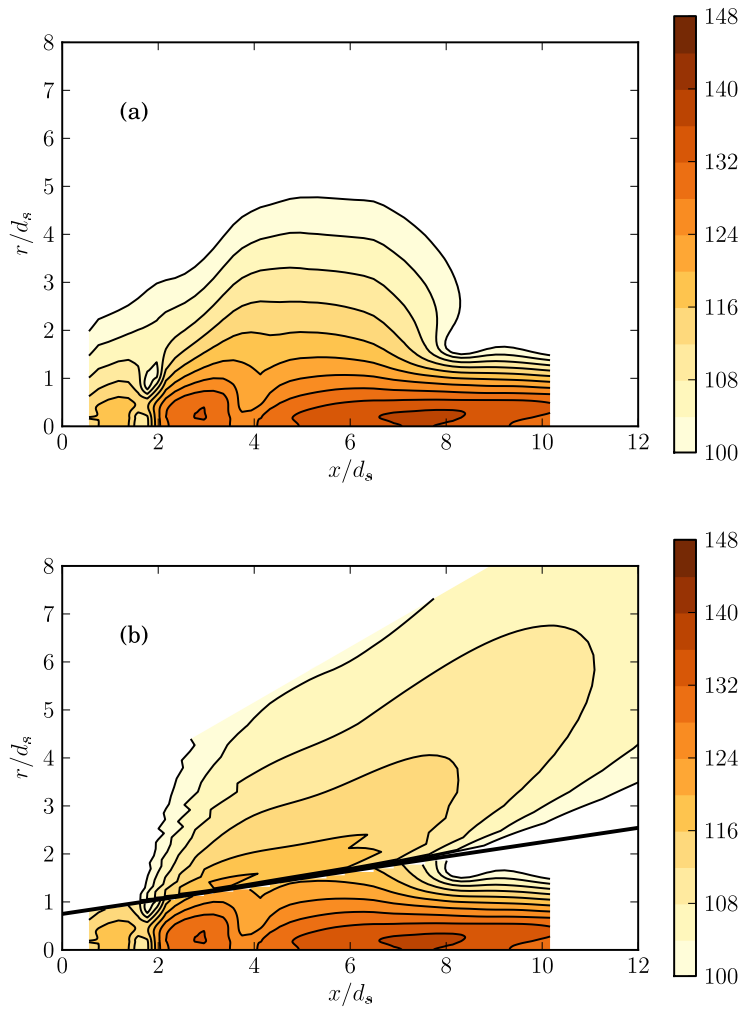


Figure IV.26 – *Champs d'amplitude de perturbations de pression (dB/Hz) illustrant (a) le résultat de calcul PSE $|\tilde{p}_m|$ et (b) le résultat de ce même calcul couplé à une propagation acoustique à partir de la surface conique, dans l'étude du mode KH_i axisymétrique $m = 0$ à la fréquence $St_{d_s} = 0.29$ pour le cas SCTP3.*

acoustique. Au dessus de cette surface est alors illustré le champ acoustique proche, associé au mode étudié, obtenu au moyen de cette propagation acoustique.

Ce second champ de perturbation de pression nous permet alors de mettre en évidence deux éléments. Tout d'abord, la propagation acoustique fait effectivement apparaître un lobe super-directif, orienté dans la direction aval. Ensuite, nous pouvons observer que notre implémentation de cette méthode de propagation au moyen d'une surface conique semble avoir des difficultés à évaluer le champ de pression propagé pour des angles d'observation θ trop faibles. Ainsi, près de la surface conique de propagation, le raccord du champ de pression propagé avec le champ de pression PSE semble correct, mais n'est pas excellent. Par conséquent, nous n'avons pas réalisé d'étude plus approfondie sur le raccord entre ces deux champs de pression, la méthode de propagation acoustique ici employée ne s'y prêtant pas. Cependant, la méthode de propagation acoustique à partir d'une surface cylindrique étant plus adaptée, une telle étude est réalisée par la suite dans la section 3.3.

Enfin, de manière plus qualitative, la figure IV.26 illustre graphiquement l'approche retenue

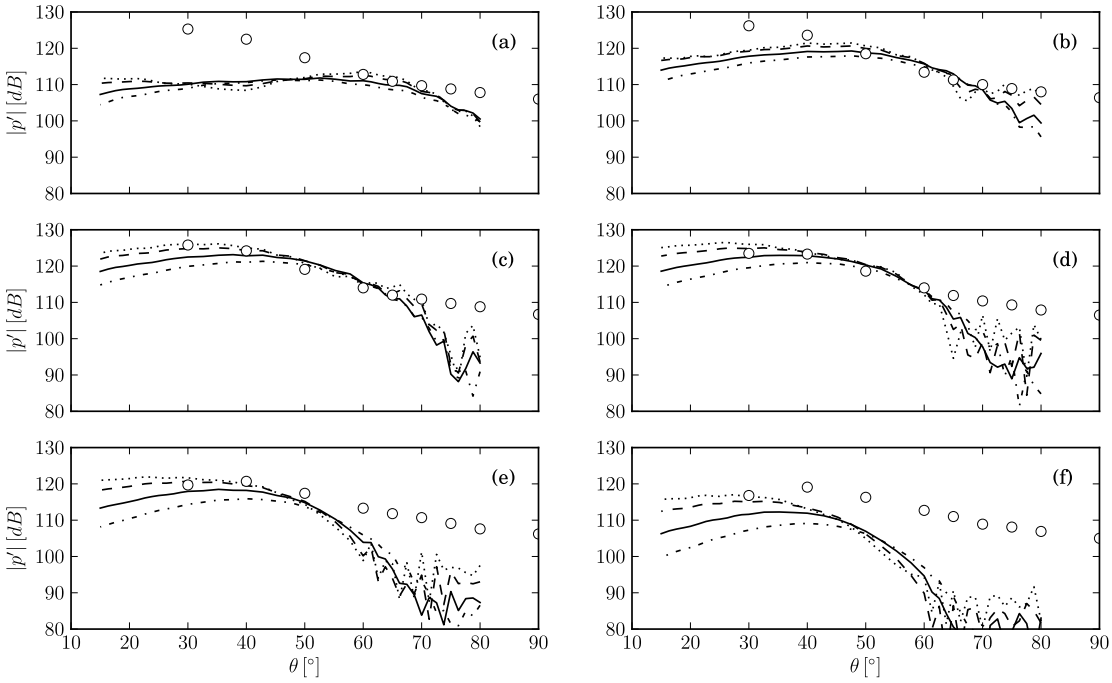


Figure IV.27 – *Directivités acoustiques issues de la propagation des perturbations de pression axisymétriques ($m = 0$) de la couche de mélange interne (modes KH_i) sur le cas SCTP2, obtenues au moyen d'une surface de Kirchhoff cylindrique de rayon $r/d_s = 0.7$: ·····; $r/d_s = 1.0$: - - - -; $r/d_s = 1.5$: ——; $r/d_s = 2.0$: -·-·- ; comparées aux mesures (◯) aux fréquences définies dans le tableau III.3.*

dans nos travaux : à partir d'une solution PSE de perturbation de pression évaluée sur une antenne linéaire placée à l'extérieur du jet dans une région uniforme, nous propageons la solution afin de reconstruire les champs acoustiques proche et lointain, absents du calcul de stabilité PSE où seules les composantes hydrodynamiques sont observées.

3.3 Propagation acoustique à partir d'une surface cylindrique

Dans la section précédente, nous avons réalisé la propagation acoustique des ondes d'instabilité calculées au moyen d'un modèle PSE sur la surface conique utilisée au cours des expériences. Cette démarche nous a permis de calibrer l'amplitude des différentes perturbations sur les mesures avant de les propager au moyen d'une méthode adaptée. En effet, l'utilisation d'une surface de mesure conique nous permet de suivre précisément la divergence du jet et de nous placer dans la région hydrodynamique linéaire, en champ proche du jet. Nous assurons ainsi la validité des résultats hydrodynamiques PSE ainsi que le placement de la surface de Kirchhoff dans un milieu quasiment au repos. Une approche a priori moins rigoureuse est de considérer une surface de Kirchhoff cylindrique, dont la méthode de propagation associée est détaillée dans la section 1.2.1. En effet, une telle surface semble moins adaptée à nos travaux : placée trop loin de la couche de mélange afin de s'assurer que l'ensemble de la surface soit dans un milieu quasiment au repos, la solution PSE se trouve dégradée, car rapidement invalide en dehors du jet (voir la section 1.1.1) ; placée trop près de la couche de mélange afin d'assurer la validité de la solution PSE, la surface se trouve alors partiellement dans une zone non uniforme à cause de la divergence du jet. Nous cherchons ici à évaluer si une telle approche est en mesure de reproduire les résultats de propagation obtenus à partir de la surface conique, présentés dans la section 3.2, et donc de valider ces derniers résultats. De plus, cette méthode de propagation à partir d'une surface cylindrique a l'avantage d'être très simple à mettre en oeuvre, les calculs nécessaires étant

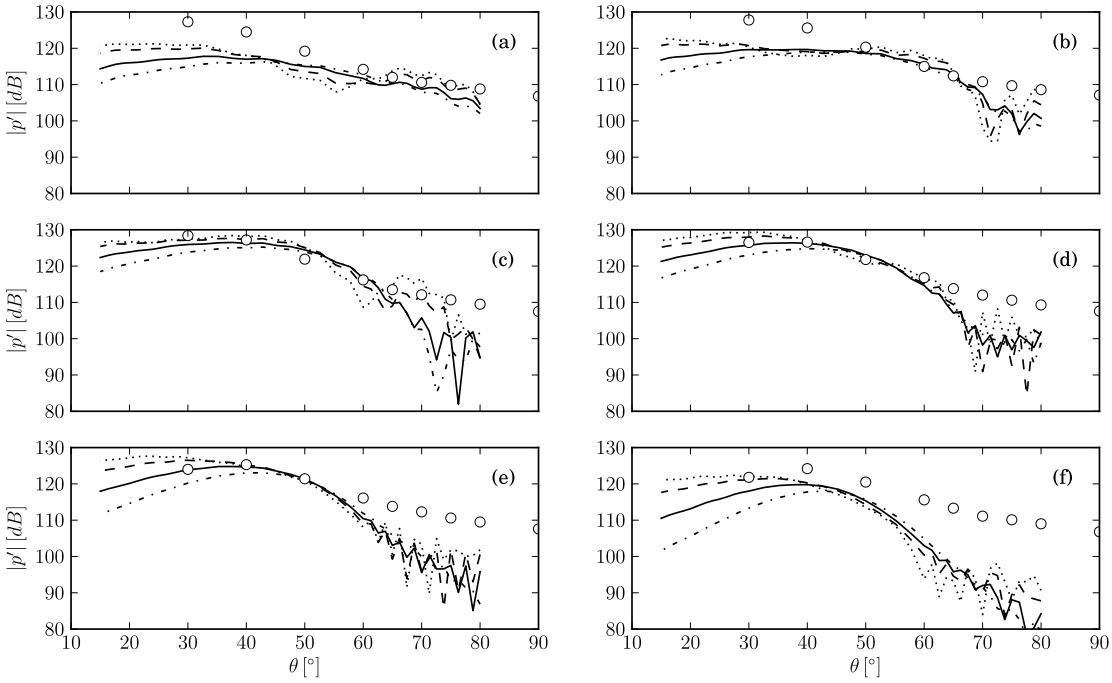


Figure IV.28 – *Directivités acoustiques issues de la propagation des perturbations de pression axisymétriques ($m = 0$) de la couche de mélange interne (modes KH_i) sur le cas SCTP3 ; voir la légende de la figure IV.27.*

immédiats.

Pour cela, nous considérons quatre surfaces cylindriques de rayons $r/d_s = 0.7$, 1.0, 1.5 et 2.0. Les figures IV.27 et IV.28 présentent les résultats de propagation acoustique des modes axisymétriques KH_i, respectivement pour les cas SCTP2 et SCTP3, obtenus au moyen de ces quatre surfaces cylindriques. Ces résultats ont été obtenus directement à partir des perturbations PSE calculées, aucune forme analytique approchée n'a donc été ici utilisée. Les directivités obtenues sont dans l'ensemble très comparables aux résultats de propagation acoustique obtenus au moyen de la surface conique (voir les figures IV.17 et IV.18), étayant la validité des résultats et des conclusions apportés jusqu'à présent.

Nous observons cependant une sensibilité non négligeable des directivités acoustiques au rayon de la surface de Kirchhoff cylindrique, très marquée aux faibles angles d'observation $\theta < 40°$. Ainsi, pour de tels angles, et en prenant comme référence les résultats de propagation obtenus au moyen de la surface conique, un rayon trop restreint conduit à une surestimation des niveaux sonores. Au contraire, un rayon trop important conduit à des niveaux trop faibles. Ces écarts semblent de plus amplifiés avec la fréquence considérée. Il apparaît alors que, sur les cas ici considérés et aux fréquences étudiées, une surface cylindrique d'un rayon compris entre $1.0 < r/d_s < 2.0$ permette de reproduire de manière adéquate les mesures, ainsi donc que les résultats obtenus au moyen de la surface conique.

Afin d'étudier cette dépendance du champ de pression rayonné au rayon de la surface cylindrique de référence, la figure IV.29 met en évidence la décroissance radiale des amplitudes des perturbations de pression issues des différents champs à plusieurs abscisses, pour le mode axisymétrique KH_i à la fréquence $f = 500\,\mathrm{Hz}$ sur le cas SCTP3. Plus particulièrement, nous représentons sur ces figures la décroissance radiale des solutions hydrodynamiques PSE (lignes noires), à partir desquelles sont calculés les champs acoustiques propagés pour les quatre surfaces considérées (lignes colorées), aux quatre abscisses $x/d_s = 3.15$, 4.13, 5.14 et 6.08. Ces abscisses ont été sélectionnées car elles se situent dans la région où les perturbations de pression atteignent leur

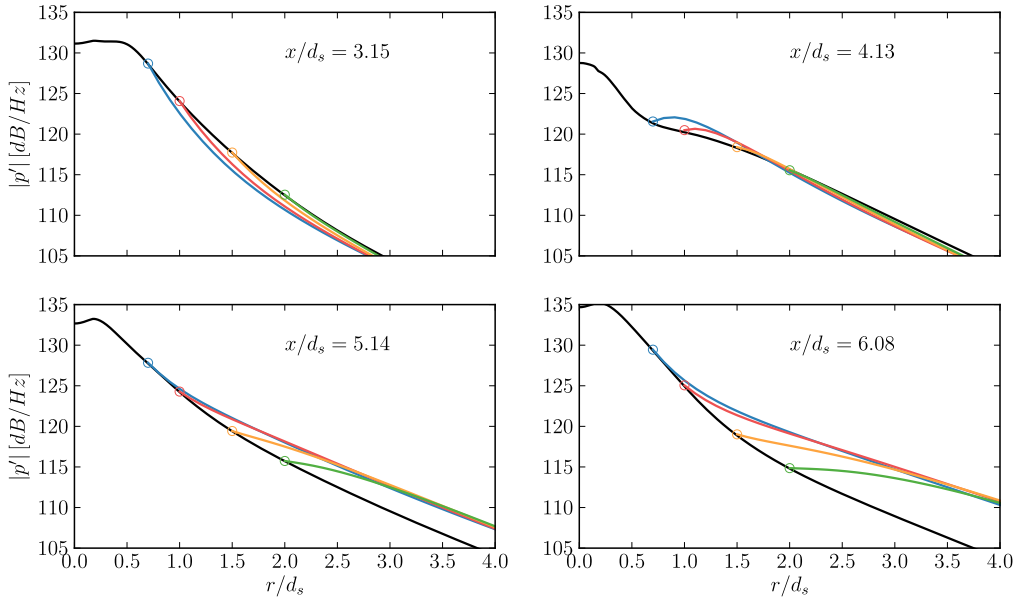


Figure IV.29 – *Profils radiaux des amplitudes des perturbations de pression issues :* ——— *: de la solution PSE ; et de la propagation acoustique à partir d'une surface cylindrique d'un rayon :* ——— *:* $r/d_s = 0.7$ *;* ——— *:* $r/d_s = 1.0$ *;* ——— *:* $r/d_s = 1.5$ *;* ——— *:* $r/d_s = 2.0$ *; dans l'étude du mode* KH_i *axisymétrique* $m = 0$ *à la fréquence* $f = 500Hz$ *pour le cas SCTP3.*

amplitude maximum. Comme nous pouvons l'observer sur les figures IV.30 et IV.31, cette région est également la région principalement responsable de la production du rayonnement acoustique observé en champ lointain. Il est par conséquent important de s'assurer que le placement d'une surface de Kirchhoff dans cette région assure une bonne modélisation de la décroissance radiale des perturbations de pression.

La figure IV.29 nous permet ainsi d'effectuer plusieurs remarques. Tout d'abord, nous observons que selon le rayon de la surface cylindrique et l'abscisse des profils radiaux considérés, des raccords entre la solution hydrodynamique PSE et la solution acoustique propagée existent. Par exemple, aux deux premières abscisses considérées, soit $x/d_s = 3.15$ et 4.13, les solutions de propagation obtenues avec les rayons de la surface cylindrique $r/d_s = 1.5$ et 2.0 prolongent correctement la solution PSE, alors que les solutions de propagation obtenues avec $r/d_s = 0.7$ et 1.0 prévoient une décroissance trop importante ou trop faible. Cependant, à l'abscisse $x/d_s = 6.08$, ce sont ces deux dernières surfaces qui donnent le meilleur raccord entre les solutions PSE et les solutions propagées, les pentes initiales étant parfaitement dans la continuité de la solution PSE. Cette continuité des solutions propagées par rapport aux solutions hydrodynamiques PSE est nécessaire et gage du bon placement de la surface de propagation. En effet, une surface de propagation correctement située doit être en mesure de reproduire et de prolonger une partie du champ hydrodynamique PSE, celui-ci étant valable dans la région de transition hydrodynamique linéaire. Nous pouvons donc apercevoir sur ce cas particulier, mais généralisable à l'ensemble des cas ici étudiés, qu'une surface cylindrique ne permet effectivement pas d'obtenir une continuité parfaite entre la solution PSE et la solution propagée, pour les raisons détaillées en début de section.

Cependant, il est intéressant d'observer qu'un compromis peut être trouvé. En effet, comme nous avons pu l'observer sur les directivités en champ lointain des figures IV.27 et IV.28, une surface cylindrique d'un rayon $r/d_s \approx 1.5$ permet de reproduire convenablement les résultats issus de la propagation à partir d'une surface conique, ainsi que les mesures. Sur les profils radiaux de la figure IV.29, la propagation à partir de cette surface cylindrique semble être un bon

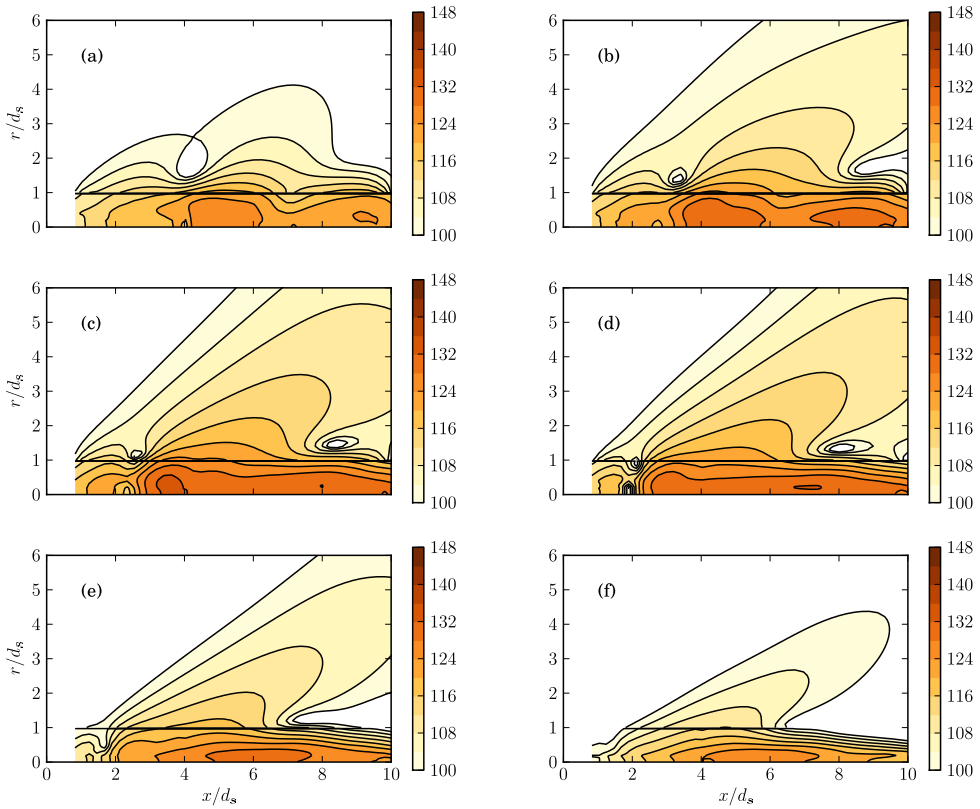


Figure IV.30 – *Champs proches de pression (en décibels) issus de calculs PSE dans la région* $0 < r/d_s < 1.0$*, et de la propagation à partir d'une surface cylindrique de rayon* $r/d_s = 1.0$ *dans la région* $r/d_s > 1.0$*, des perturbations de pression des modes* KH_i *axisymétriques* $m = 0$ *pour le cas SCTP2 et aux fréquences du tableau III.3.*

compromis en terme de continuité de la solution PSE aux abscisses cruciales pour la production acoustique de la perturbation considérée. Cette observation reste qualitative et le placement d'une telle surface cylindrique optimale semble également varier selon la fréquence considérée. En effet, comme montré dans les travaux de Arndt *et al.* [1997], la position radiale de transition entre régime hydrodynamique et acoustique peut être approximativement décrite par un critère sur kr, où k est le nombre d'onde axial.

Le placement d'une telle surface cylindrique doit donc être effectué avec précaution : la forte sensibilité des directivités au rayon de la surface, particulièrement pour de faibles angles d'observation, demande de s'assurer du bon raccord en champ proche entre les solutions PSE et propagée. Conclure sur les niveaux et les angles de maximum de rayonnement acoustique au moyen de cette méthode semble donc relativement délicat, mais reste envisageable, au moins dans une première phase d'analyse. Nous considérons néanmoins que ces résultats nous permettent d'étayer la validité des résultats de propagation réalisés à partir de la surface conique : les niveaux et les directivités retrouvés au moyen de cette méthode, quelque peu différente de celle utilisant une surface conique, sont parfaitement cohérents.

Cette méthode nous permet de mettre aisément en évidence les champs proches acoustiques associés à la propagation des ondes d'instabilité calculées par le modèle PSE. Les figures IV.30 et IV.31 illustrent ainsi les champs hydrodynamiques PSE dans la région $0 < r/d_s < 1.0$ et les champs acoustiques proches dans la région $r/d_s \geq 1.0$ pour l'ensemble des modes axisymétriques KH_i étudiés aux fréquences du tableau III.3, respectivement pour les cas SCTP2 et SCTP3. Tout d'abord, nous pouvons observer que sur l'ensemble des figures ici présentées, le raccord entre

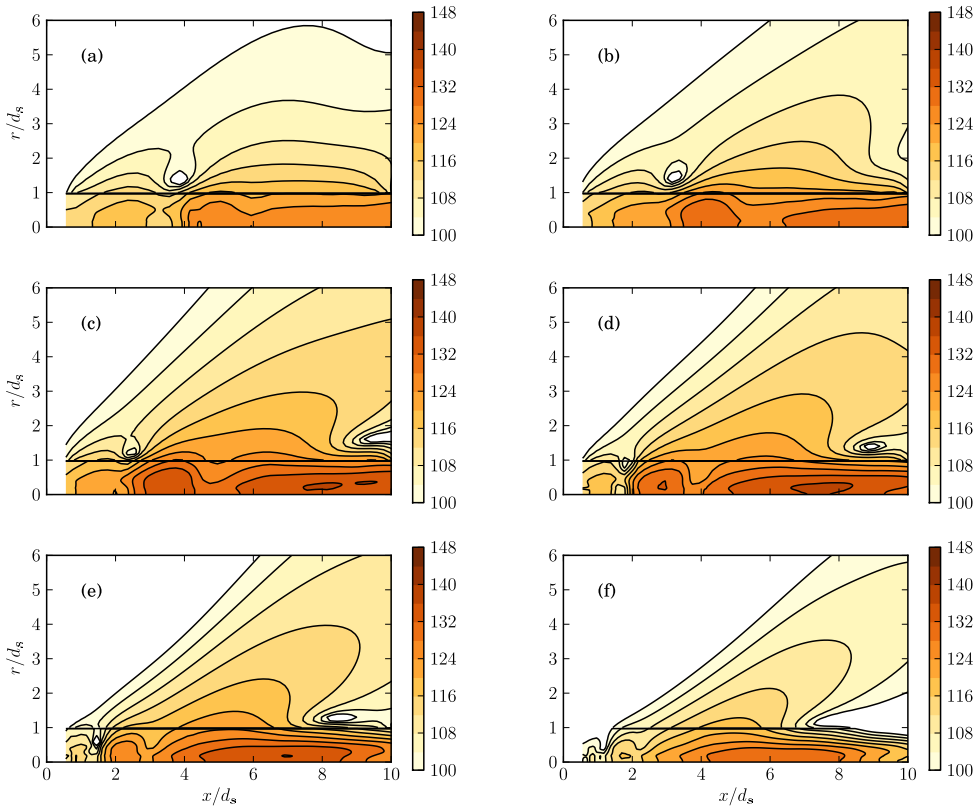


Figure IV.31 – *Champs proches de pression pour le cas SCTP3 ; voir la légende de la figure IV.30.*

la solution PSE et la solution de propagation est qualitativement excellent, les isocontours de pression (en décibels) se prolongeant correctement, et ce quelle que soit la fréquence considérée. De plus, nous observons que l'ensemble des champs proches acoustiques présentent des lobes super-directifs, comme attendu au vu des résultats précédents, plus ou moins intenses selon la fréquence. En accord avec les observations issues de la figure IV.23, les champs acoustiques les plus intenses sont observés aux fréquences (c) et (d), soit $f = 400$ Hz et 500 Hz.

Ces lobes mettent également en évidence, de manière approximative, les origines du rayonnement acoustique. Ainsi, nous pouvons évaluer que ces lobes acoustiques naissent autour d'une abscisse $x/d_s \approx 4.0$ en périphérie du jet. Cette observation rejoint particulièrement celles de Tinney et Jordan [2008], qui évaluent, au moyen d'un traitement hydro-acoustique des mesures de fluctuation de pression sur l'antenne linéaire de la section III.2 pour les mêmes cas *short-cowl*, l'origine des composantes acoustiques issues de structures cohérentes comme émanant d'une région comprise entre $3.0 < x/d_s < 5.0$. Nous pouvons donc émettre l'hypothèse, à la vue de ces dernières observations ainsi que de l'ensemble de nos travaux, que ces composantes acoustiques cohérentes observées par ces auteurs ont pour origine le développement des ondes d'instabilité de la couche de mélange interne.

Enfin, de manière plus anecdotique, nous pouvons observer sur l'ensemble de ces figures des points particuliers pour lesquels les amplitudes de perturbation de pression semblent s'annuler, formant des "bulles" très caractéristiques. Ces points apparaissent par paires à certaines fréquences, et ne résultent pas d'une erreur numérique : nous les retrouvons aussi bien dans les champs PSE que dans les champs acoustiques propagés, quelle que soit la position de la surface de Kirchhoff. Ces points semblent être le résultat d'une interférence destructive entre les perturbations de pression, alors que les lobes acoustiques super-directifs sont le résultat d'une interférence constructive (voir la section 1.1.1). Ces points particuliers peuvent être rapprochés de la notion de points

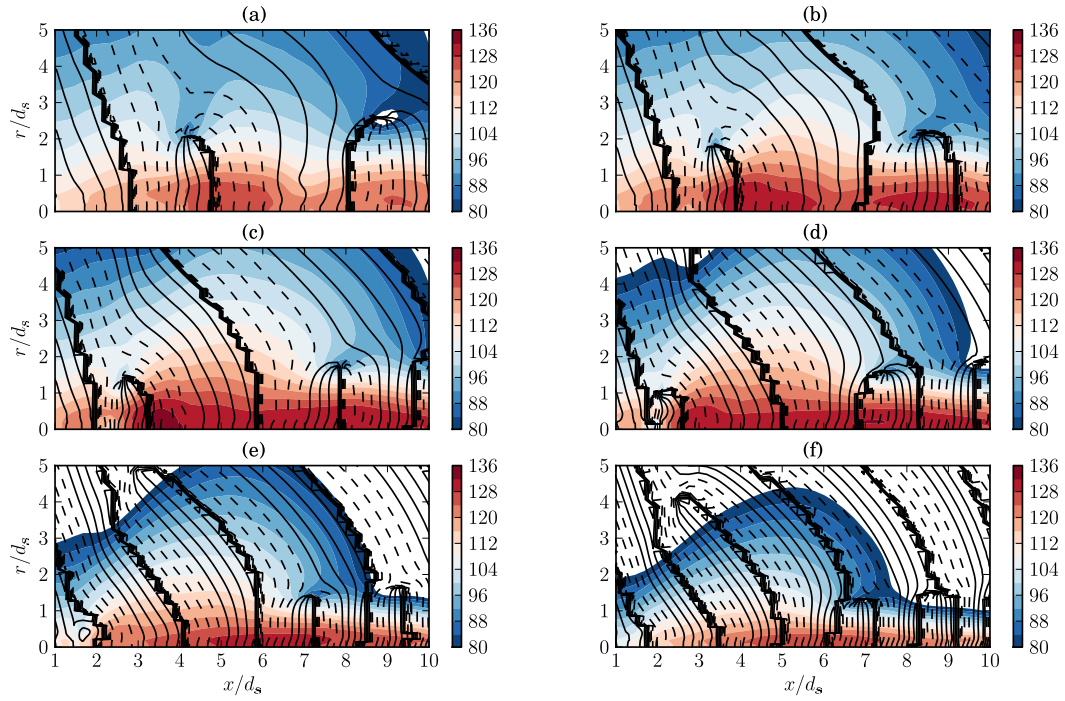


Figure IV.32 – *Amplitude (en décibels) et isophases des champs de pression issus des calculs PSE pour les modes KH_i axisymétriques $m = 0$ sur le cas SCTP2 et aux fréquences du tableau III.3 ; les traits continus (——) représentent des isophases positives, les traits discontinus (- - - -) des isophases négatives.*

amphidromiques existant dans les systèmes de marées. Ainsi, la figure IV.32 met en évidence les isocontours de phase issus des champs PSE de perturbation de pression. Les sauts de phase sont rendus clairement visibles par une accumulation des isocontours. De tels sauts résultent uniquement de notre méthode de calcul des phases, qui sont ici nécessairement comprises dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Nous observons qu'aux points d'amplitude nulle identifiés précédemment, la phase est indéfinie : en effet, autour de ces points la phase prend l'ensemble des valeurs et un saut confiné dans la région interne du jet apparaît. Ainsi, les lignes d'isophases se rejoignent sur ces points amphidromiques.

De tels points sont potentiellement à rapprocher des résultats expérimentaux de Coiffet *et al.* [2006] et de Guitton *et al.* [2007]. En effet, ces derniers ont mis en évidence l'existence de points très localisés dans un plan spatio-fréquentiel, en périphérie immédiate de jets subsoniques, pour lesquels la cohérence des perturbations de pression mesurées est nulle. Les auteurs attribuent l'existence de ces points particuliers à la création d'interférences destructives entre des ondes hydrodynamiques convectées et des ondes acoustiques. Ces observations vont dans le sens de nos résultats, ce qui mériterait un approfondissement.

En conclusion, l'application de cette méthode de projection acoustique à partir d'une surface de Kirchhoff cylindrique nous permet de valider les résultats obtenus au moyen de la projection à partir de la surface conique. Les champs propagés en périphérie immédiate du jet sont de bien meilleur qualité que ceux obtenus au moyen de la surface conique. Ce résultat semble être principalement dû à la difficulté de calcul des fonctions de Legendre à proximité immédiate de cette dernière. Cependent, malgré l'apparente meilleure qualité de reconstruction du champ de pression proche au moyen d'une surface cylindrique, il est important de rappeler que le rayon de celle-ci reste un paramètre délicat, la géométrie de cette surface ne prenant pas en compte la divergence du jet. En toute rigueur et afin de rester cohérent avec l'approche développée, les résultats de référence sont ceux obtenus par projection de la surface conique, pour lesquels aucun paramètre supplémtentaire n'est introduit.

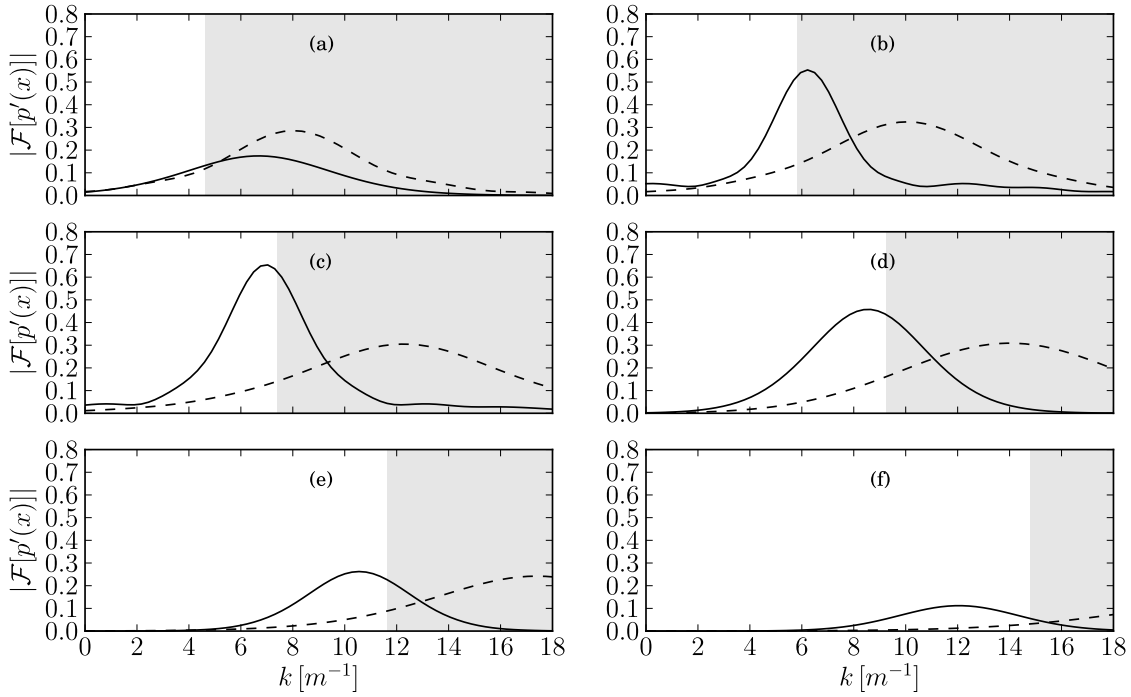


Figure IV.33 – *Spectres de nombre d'onde axial des perturbations de pression PSE axisymétriques ($m = 0$) des modes KH_i (——) et KH_o (- - - -), calculées sur l'antenne linéaire pour le cas SCTP2 et aux fréquences du tableau III.3 ; sont mises en évidence les régions à composantes spectrales supersoniques (▭) et subsoniques (▬).*

3.4 Composantes supersoniques des ondes d'instabilité

Nous avons observé dans les sections précédentes le rayonnement acoustique des modes KH_i et KH_o, pour plusieurs nombres d'onde azimutaux. Les modes de la couche de mélange interne ont été identifiés dans la section III.2.3.3 comme possédant des vitesses de phase supersoniques par rapport à la vitesse du son dans l'atmosphère. Les modes de la couche de mélange externe, quant à eux, ont été identifiés comme subsoniques. S'il est clair que les premiers sont en mesure de rayonner par leur vitesse de phase supersonique, le rayonnement acoustique des seconds est moins évident. Nous avons présenté le mécanisme de rayonnement acoustique de paquets d'ondes subsoniques par modulation d'amplitude dans les sections I.4.2.2 et 1.1.1. Les figures IV.33 et IV.34 mettent ainsi en évidence les spectres de nombre d'onde des perturbations de pression PSE, issus de la transformée de Fourier axiale des modes axisymétriques KH_i et KH_o, calculés sur la surface conique de Kirchhoff utilisée pour la propagation acoustique dans la section 3.2. Ces deux figures illustrent respectivement les cas d'étude SCTP2 et SCTP3. Sur ces figures sont identifiées deux régions distinctes : une zone dont les nombres d'onde axiaux correspondent à des vitesses de phase supersoniques et une zone à composantes subsoniques. En effet, nous identifions le nombre d'onde de "coupure" par

$$k_c = \frac{2\pi f}{c}\,. \tag{4-25}$$

Pour des nombres d'onde $k < k_c$, les vitesses de phase sont alors supérieures à la vitesse du son c, et inversement.

Ces figures nous permettent de mettre en lumière les mécanismes mis en jeu dans le rayonnement acoustique des ondes d'instabilité axisymétriques des deux couches de mélange. Tout d'abord, concernant les perturbations de la couche de mélange interne, nous observons aisément que les figures (c) et (d) présentent les spectres ayant les plus grandes proportions de

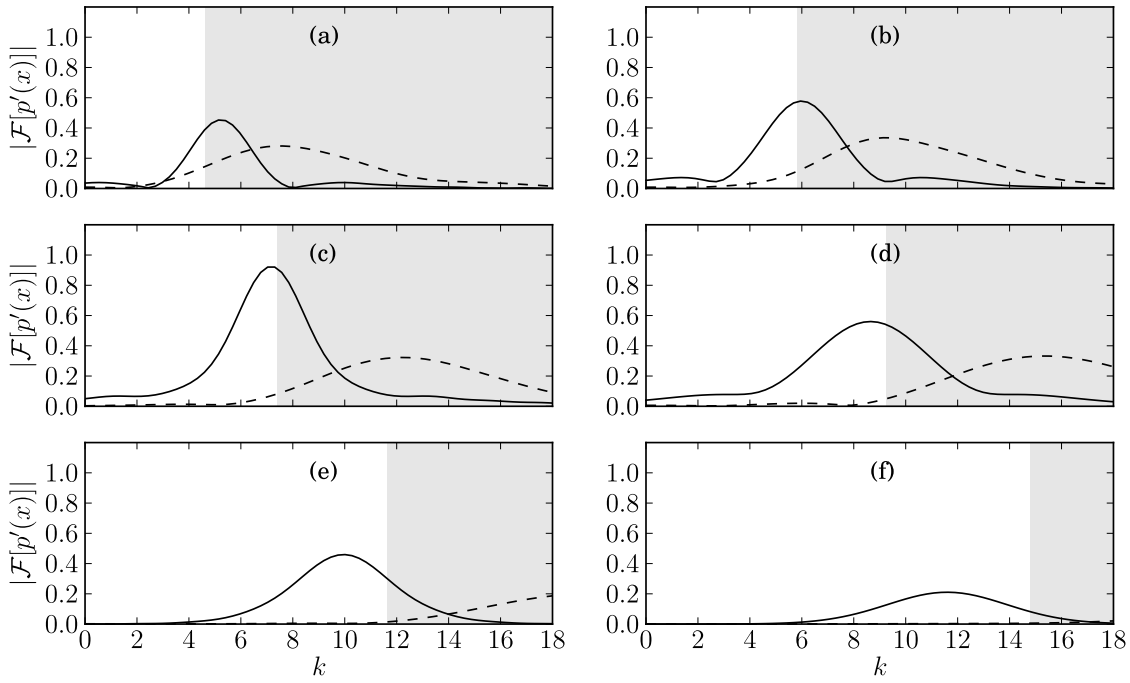


Figure IV.34 – *Voir la légende de la figure IV.33 ; Spectres de nombre d'onde axial des perturbations de pression PSE axisymétriques ($m = 0$) pour le cas SCTP3.*

composantes supersoniques. Ces modes (KH_i axisymétriques) sont effectivement ceux que nous avons observés dans la section 3.2.2, et plus particulièrement sur la figure IV.23, comme acoustiquement dominants. Ensuite, concernant les modes de la couche de mélange externe, nous pouvons observer qu'une large partie des spectres associés sont effectivement situés dans une zone subsonique, leurs vitesses de phase étant subsoniques. Cependant, ces spectres de nombre d'onde sont remarquablement plus étalés que ceux associés aux modes KH_i. Cet étalement spectral est le résultat de la modulation spatiale de ces ondes d'instabilité subsoniques : ces composantes de nombre d'onde situées dans la zone supersonique permettent alors à ces perturbations de rayonner acoustiquement en champ lointain, comme nous avons pu l'observer dans les résultats de la section 3.2. À cette modulation spatiale, modélisée par notre approche PSE, peut s'ajouter une modulation temporelle [Cavalieri *et al.*, 2011] non prise en compte dans nos travaux et pouvant renforcer les composantes supersoniques de ces ondes subsoniques.

IV.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord développé un modèle analytique bidimensionnel simplifié afin de montrer l'incapacité des PSE reproduire le rayonnement acoustique produit par des paquets d'ondes modulés spatialement. En effet, la parabolicité des équations mises en jeu se trouve être limitante et une méthode complémentaire est alors nécessaire si nous nous intéressons à l'acoustique des ondes d'instabilité. En effet, en région proche du jet, dans la zone hydrodynamique linéaire, la solution hydrodynamique PSE est valable et peut alors servir de base à une reconstruction du champ acoustique correspondant. Dans ce but, nous avons présenté deux méthodes de propagation acoustique possibles basées sur des surfaces de Kirchhoff cylindrique et conique. Suite à ces développements théoriques, nous avons dans un deuxième temps étudié la validité de ces deux méthodes de propagation acoustique sur le cas analytique d'un modèle de paquets d'ondes similaires à ceux observés dans des jets subsoniques. Enfin, une fois ces méthodes validées, nous les avons appliquées à l'étude du rayonnement acoustique des ondes d'instabilité calculées sur les cas SCTP2 et SCTP3 dans le chapitre précédent. Nous avons ainsi mis en évidence l'apparente dominance acoustique en champ lointain des modes axisymétriques de la couche de mélange interne, soit les modes KH_i avec un nombre d'onde azimutal $m = 0$. Ces derniers reproduisent de manière remarquable les niveaux mesurés ainsi que les formes des directivités aux fréquences pour lesquelles les perturbations PSE sont les mieux reproduites sur l'antenne linéaire (soit les 4 dernières fréquences étudiées). Les modes hélicoïdaux présentent quant à eux des niveaux plus faibles, mais potentiellement non négligeables. Le rayonnement acoustique des modes de la couche de mélange externe est également relativement moins important. En effet, contrairement aux modes instables KH_i, les modes KH_o sont subsoniques par rapport au milieu ambiant et ne rayonnent en champ lointain que par le mécanisme ici considéré de modulation spatiale. Un mécanisme de modulation temporelle pourrait cependant accroître le rayonnement acoustique de ces modes, sans toutefois ôter aux modes KH_i axisymétriques leur dominance acoustique.

Chapitre V

Modélisation des fluctuations hydrodynamiques d'un jet dans un contexte faiblement non linéaire au moyen des PSE

Sommaire

V.1 Développement des équations PSE dans un contexte faiblement non linéaire 154
1.1 La modélisation PSE faiblement non linéaire 154
1.2 Cadre d'application de notre approche PSE non linéaire et simplifications du problème 157
V.2 Résolution du système PSE non linéaire 159
2.1 Conditions initiales des modes principaux et résonants 159
2.2 Méthodes de calcul des termes non linéaires 160
2.3 Méthode de convergence pour la résolution du système PSE non linéaire 162
V.3 Applications simples du modèle PSE non linéaire 163
3.1 Interactions d'harmoniques fréquentielles dans un écoulement parallèle incompressible 164
3.2 Interactions d'harmoniques fréquentielles dans un jet simple incompressible . . . 169
V.4 Conclusions 173

Les chapitres précédents ont mis en évidence que la description des instabilités se développant dans des jets double-flux libres au moyen d'une modélisation PSE linéaire basée sur les équations d'Euler semble adaptée. Cette pertinence du modèle suggère alors que le mécanisme contrôlant le développement des structures étudiées peut être modélisé relativement simplement malgré la complexité des écoulements considérés. Néanmoins, il est intéressant de tirer partie des avantages de l'approche PSE afin d'explorer l'importance de la prise en compte de mécanismes faiblement non linéaires. En effet, une des particularités de la modélisation PSE est la relative aisance avec laquelle nous pouvons inclure les effets d'interactions modales. Ainsi, dans ce chapitre, nous développons la modélisation PSE dans un contexte faiblement non linéaire permettant la prise en compte de résonances modales, fréquentielles ou azimutales, pour l'étude des jets. Nous présentons ensuite les principales difficultés associées à un tel modèle, concernant par exemple la déformation du champ stationnaire ou l'initialisation des modes. Enfin, nous appliquons cette modélisation PSE non linéaire à deux cas d'étude simples, permettant une première appréhension de ces interactions modales dans le développement des instabilités précédemment étudiées pour des jets libres.

V.1 Développement des équations PSE dans un contexte faiblement non linéaire

La modélisation PSE dans un contexte faiblement non linéaire a initialement été développée dans l'étude des instabilités de couches limites [Herbert, 1994, 1997, Airiau, 1994, Salinas, 1998], pour ensuite être appliquée à l'étude des couches de mélanges [Day *et al.*, 2001, Cheung et Lele, 2004] et des jets [Malik et Chang, 2000, Cheung *et al.*, 2007, Ray *et al.*, 2009, Rodríguez *et al.*, 2011]. Contrairement à l'ensemble de ces références, qui considèrent les équations de Navier-Stokes perturbées, nous développons ici une modélisation PSE non linéaire basée sur les équations d'Euler compressibles dans un repère cylindrique. Ce modèle est le prolongement direct des équations considérées pour le modèle PSE linéaire développé dans le chapitre II.

Ainsi, dans un premier temps, nous nous appuyons sur la modélisation de ce dernier chapitre afin de développer le système d'équations non linéaires quasi-parabolique autorisant les interactions modales fréquentielles et azimutales. Nous détaillons alors dans un second temps le cadre d'application de ce modèle non linéaire.

1.1 La modélisation PSE faiblement non linéaire

1.1.1 Les équations du mouvement

Afin de développer cette modélisation PSE faiblement non linéaire, nous reprenons les développements du modèle linéaire présentés dans la section II.1.1.4. Nous rappelons que nous nous plaçons en théorie des petites perturbations : nous étudions la stabilité d'un champ de base stationnaire $\underline{\overline{q}}(\underline{x})$ soumis à une perturbation $\underline{q}'(\underline{x},t)$, l'ensemble définissant alors un champ instationnaire $\underline{q}(\underline{x},t)$. Le modèle recherché devant intégrer les interactions modales, nous considérons alors les équations d'Euler perturbées 2-22 où les termes non linéaires issus des produits croisés des perturbations sont conservés. Les expressions de ces termes sont ainsi données par les équations 2-21. Enfin, nous nous plaçons dans un contexte faiblement non linéaire, au sens où seules les interactions entre harmoniques fréquentielles et azimutales sont considérées.

Nous réécrivons alors ce système d'équations dans le repère cylindrique (x,r,ϕ) en regroupant les termes non linéaires $\mathrm{TNL}^{(i)}$ dans les membres de droite des équations 5-1. Les membres de gauche restent inchangés par rapport au système d'équations linéaires 2-26. Nous obtenons alors les équations

$$\frac{\overline{d}\rho'}{\overline{dt}} + \overline{\rho}\left(\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(ru'_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u'_\phi}{\partial \phi}\right) + \rho'\left(\frac{\partial \overline{u}_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\overline{u}_r\right)}{\partial r}\right) + \left(u'_x\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x} + u'_r\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial r}\right) = \mathrm{TNL}^{(1)}, \tag{5-1a}$$

$$\overline{\rho}\left(\frac{\overline{d}u'_x}{\overline{dt}} + u'_x\frac{\partial\overline{u}_x}{\partial x} + u'_r\frac{\partial\overline{u}_x}{\partial r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial x} = \mathrm{TNL}^{(2)}, \tag{5-1b}$$

$$\overline{\rho}\left(\frac{\overline{d}u'_r}{\overline{dt}} + u'_x\frac{\partial\overline{u}_r}{\partial x} + u'_r\frac{\partial\overline{u}_r}{\partial r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial r} = \mathrm{TNL}^{(3)}, \tag{5-1c}$$

$$\overline{\rho}\left(\frac{\overline{d}u'_\phi}{\overline{dt}} + \frac{u'_\phi\overline{u}_r}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial p'}{\partial \phi} = \mathrm{TNL}^{(4)}, \tag{5-1d}$$

$$\overline{\rho}M^2\frac{\overline{d}p'}{\overline{dt}} - \frac{\overline{d}\rho'}{\overline{dt}} - u'_x\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x} - u'_r\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial r} = \mathrm{TNL}^{(5)}, \tag{5-1e}$$

soit, respectivement, l'équation de continuité, de quantité de mouvement projetée selon x, r et ϕ, ainsi que l'équation de l'énergie pour l'évolution des perturbations $\underline{q}'(\underline{x},t)$. Les termes non

linéaires s'expriment alors dans un tel repère par

$$\mathrm{TNL}^{(1)} = u'_x\frac{\partial\rho'}{\partial x} + \rho'\frac{\partial u'_x}{\partial x} + u'_r\frac{\partial\rho'}{\partial r} + \rho'\frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{u'_r\rho'}{r} + \frac{u'_\phi}{r}\frac{\partial\rho'}{\partial\phi} + \frac{\rho'}{r}\frac{\partial u'_\phi}{\partial\phi}\,, \tag{5-2a}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{TNL}^{(2)} &= \overline{\rho}\Big(u'_x\frac{\partial u'_x}{\partial x} + u'_r\frac{\partial u'_x}{\partial r} + \frac{u'_\phi}{r}\frac{\partial u'_x}{\partial\phi}\Big)\\ &+ \rho'\Big(\frac{\partial u'_x}{\partial t} + \overline{u}_x\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \overline{u}_r\frac{\partial u'_x}{\partial r} + u'_x\frac{\partial\overline{u}_x}{\partial x} + u'_r\frac{\partial\overline{u}_x}{\partial r}\Big)\\ &+ \rho'\Big(u'_x\frac{\partial u'_x}{\partial x} + u'_r\frac{\partial u'_x}{\partial r} + \frac{u'_\phi}{r}\frac{\partial u'_x}{\partial\phi}\Big)\,,\end{aligned} \tag{5-2b}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{TNL}^{(3)} &= \overline{\rho}\Big(u'_x\frac{\partial u'_r}{\partial x} + u'_r\frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{u'_\phi}{r}\frac{\partial u'_r}{\partial\phi} - \frac{{u'_\phi}^2}{r}\Big)\\ &+ \rho'\Big(\frac{\partial u'_r}{\partial t} + \overline{u}_x\frac{\partial u'_r}{\partial x} + \overline{u}_r\frac{\partial u'_r}{\partial r} + u'_x\frac{\partial\overline{u}_r}{\partial x} + u'_r\frac{\partial\overline{u}_r}{\partial r}\Big)\\ &+ \rho'\Big(u'_x\frac{\partial u'_r}{\partial x} + u'_r\frac{\partial u'_r}{\partial r} + \frac{u'_\phi}{r}\frac{\partial u'_r}{\partial\phi} - \frac{{u'_\phi}^2}{r}\Big)\,,\end{aligned} \tag{5-2c}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{TNL}^{(4)} &= \overline{\rho}\Big(u'_x\frac{\partial u'_\phi}{\partial x} + u'_r\frac{\partial u'_\phi}{\partial r} + \frac{u'_\phi}{r}\frac{\partial u'_\phi}{\partial\phi} - \frac{u'_r u'_\phi}{r}\Big)\\ &+ \rho'\Big(\frac{\partial u'_\phi}{\partial t} + \overline{u}_x\frac{\partial u'_\phi}{\partial x} + \overline{u}_r\frac{\partial u'_\phi}{\partial r} + \frac{u'_\phi\overline{u}_r}{r}\Big)\\ &+ \rho'\Big(u'_x\frac{\partial u'_\phi}{\partial x} + u'_r\frac{\partial u'_\phi}{\partial r} + \frac{u'_\phi}{r}\frac{\partial u'_\phi}{\partial\phi} + \frac{u'_r u'_\phi}{r}\Big)\,,\end{aligned} \tag{5-2d}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{TNL}^{(5)} &= \overline{\rho}M^2\Big(u'_x\frac{\partial p'}{\partial x} + u'_r\frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{u'_\phi}{r}\frac{\partial p'}{\partial\phi}\Big)\\ &- \Big(u'_x\frac{\partial\rho'}{\partial x} + u'_r\frac{\partial\rho'}{\partial r} + \frac{u'_\phi}{r}\frac{\partial\rho'}{\partial\phi}\Big)\\ &+ \frac{\rho'}{\overline{\rho}}\Big(u'_x\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x} + u'_r\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial r}\Big)\,.\end{aligned} \tag{5-2e}$$

Ces expressions des termes non linéaires regroupent donc les produits doubles et triples des perturbations, soit des termes d'ordre δ^2 et δ^3 selon la convention prise dans l'analyse dimensionnelle de la section II.1.1.4.

1.1.2 Le système PSE non linéaire

Nous cherchons à modéliser les interactions entre modes normaux, qu'ils soient azimutaux ou fréquentiels, tout en gardant le formalisme présenté dans la section II.1.3. En conséquence, les perturbations $\underline{q}'(\underline{x},t)$ considérées sont écrites sous la forme d'une double série de Fourier dans la direction azimutale et temporelle. Cette double série s'écrit alors comme une double somme infinie sur l'indice des harmoniques temporelles n et sur le nombre d'onde azimutal m, soit

$$\underline{q}'(x,r,\phi,t) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\tilde{\underline{q}}_{m,n}(x,r)\,\exp i\,(m\phi - n\omega t)\,, \tag{5-3}$$

avec la perturbation spatiale, dans le plan (x,r), notée $\tilde{\underline{q}}_{m,n}(x,r)$ et le terme d'amplitude $\mathscr{A}_{m,n}(x)$ de chaque mode donnés par

$$\tilde{\underline{q}}_{m,n}(x,r) = \hat{\underline{q}}_{m,n}(x,r)\,\mathscr{A}_{m,n}\,, \tag{5-4}$$

$$\mathscr{A}_{m,n}(x) = \varepsilon_{m,n}\;\exp i\left(\int_{x_0}^{x}\alpha_{m,n}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right), \tag{5-5}$$

où $\varepsilon_{m,n}$ est l'amplitude du mode (m,n) à sa première station de calcul. De manière identique au modèle linéaire, les fonctions d'amplitudes du mode (m,n) sont définies par le vecteur

$$\underline{\hat{q}}_{m,n} = (\hat{u}_x,\, \hat{u}_r,\, \hat{u}_\phi,\, \hat{\rho},\, \hat{p})^T_{m,n}\,. \tag{5-6}$$

L'introduction de ces perturbations développées en séries de Fourier dans le système d'équations 5-1, ainsi que le développement des termes non linéaires sur cette même base de modes normaux, nous permet alors de considérer un ensemble de systèmes d'équations linéaires non homogènes, que nous écrivons de manière simplifiée pour le mode (m,n)

$$(\mathcal{A}_{m,n} + \mathcal{B})\,\underline{\hat{q}}_{m,n} + \mathcal{C}\frac{\partial \underline{\hat{q}}_{m,n}}{\partial x} + \mathcal{D}\frac{\partial \underline{\hat{q}}_{m,n}}{\partial r} = -\frac{\underline{r}_{m,n}}{\mathscr{A}_{m,n}}\,. \tag{5-7}$$

Ce système d'équations est une version non homogène du système PSE linéaire. Nous supposerons ici que ce système non homogène conserve un caractère axial quasi-parabolique, permettant l'utilisation des hypothèses et des méthodes de résolution précédemment utilisées pour le système linéaire. Cela est a priori justifié, les termes non linéaires ne présentant pas de dérivées axiales secondes. Les termes non linéaires, constituant le membre non homogène de droite $\underline{r}_{m,n}$, jouent ici le rôle de termes de forçage des équations linéaires. Par conséquent, la matrice $\mathcal{A}_{m,n}$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{A}_{m,n} = \alpha_{m,n}\mathcal{A}_0 + n\mathcal{A}_1 + m\mathcal{A}_2 \tag{5-8}$$

où les termes $\mathcal{A}_i$ sont identiques à ceux présentés par les équations 2-35 et où $\alpha_{m,n}$ est le nombre d'onde axial complexe du mode (m,n). De même, les matrices $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ restent inchangées et sont respectivement définies par les équations 2-35e, 2-35f et 2-35g. Enfin, les termes de forçage $\underline{r}_{m,n}$ sont les coefficients de Fourier des termes non linéaires donnés par les équations 5-2, soit encore

$$\{\underline{r}_{m,n}\}_i = \mathrm{TNL}^{(i)}_{m,n} \tag{5-9}$$

avec

$$\mathrm{TNL}^{(i)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathrm{TNL}^{(i)}_{m,n} \exp i(m\phi - n\omega t)\,. \tag{5-10}$$

Le calcul de ces termes de forçage $\underline{r}_{m,n}$ issus des interactions modales non linéaires peut être réalisé au moins par deux approches, comme nous le détaillons dans la section 2.2.

1.1.3 Condition de normalisation

De manière similaire à la modélisation PSE linéaire, une relation supplémentaire de solvabilité du système 5-7 est nécessaire, le nombre d'inconnues étant supérieur au nombre d'équations. Nous imposons alors, de manière individuelle sur chaque mode (m,n), une condition de normalisation permettant la détermination du nombre d'onde axial $\alpha_{m,n}$ tout en s'assurant du caractère algébrique de la croissance axiale des fonctions d'amplitude $\underline{\hat{q}}_{m,n}$ (voir la section II.1.3.4 pour de plus amples détails). Cette condition de normalisation s'écrit alors

$$N_{m,n} = \int_0^\infty \underline{\hat{q}}^\dagger_{m,n}\frac{\partial \underline{\hat{q}}_{m,n}}{\partial x}\mu_k\, dr = 0\,. \tag{5-11}$$

1.1.4 Conditions aux limites

Enfin, la résolution du système d'équations PSE non linéaires 5-7 demande d'imposer des conditions aux limites adéquates. Ainsi, les conditions sur l'axe et à l'infini utilisées pour la résolution du système PSE linéaire restent adaptées à la résolution des modes (m, n), à l'exception, a priori, des modes stationnaires $n = 0$. Outre ces derniers modes, l'introduction des termes non homogènes dans les équations non linéaires ne modifie ni les caractéristiques des singularités sur l'axe, ni la décroissance des fluctuations en champ lointain. Les conditions définies dans la section II.1.5 sont donc appliquées.

Concernant les modes stationnaires $n = 0$ issus des interactions modales, la condition en champ lointain pourrait être à modifier afin d'éviter l'apparition de difficultés numériques liées à la conservation de la masse, l'écoulement porteur étant modifié. Pour cela, nous pouvons nous référer aux études PSE non linéaires appliquées à la couche limite [Herbert, 1994, Airiau, 1994]. Comme détaillé par la suite dans la section 1.2.1, cette déformation de l'écoulement porteur ne rentre cependant pas dans notre cadre d'application. Par conséquent, nous n'avons pas cherché à la modéliser et à étudier les conditions aux limites adéquates permettant une bonne convergence des solutions.

1.2 Cadre d'application de notre approche PSE non linéaire et simplifications du problème

Nous pouvons distinguer deux contextes d'application du modèle PSE non linéaire pour l'étude des instabilités de jets : les jets forcés et les jets libres. Dans le premier cas, un tel modèle permet d'analyser des interactions modales spécifiques, comme dans les travaux de Malik et Chang [2000], Cheung *et al.* [2007], pouvant également permettre l'étude du contrôle des instabilités des jets par résonances modales. Dans le second cas, l'objectif est d'évaluer l'importance des non linéarités dans le développement des ondes d'instabilité se développant naturellement dans les jets libres, comme dans les récents travaux de Rodríguez *et al.* [2011]. En effet, même si les énergies des modes considérés sont relativement faibles par rapport aux énergies turbulentes mises en jeu dans l'écoulement, cela n'implique pas nécessairement que les interactions non linéaires entre modes sont négligeables.

Nos études sont à placer dans ce dernier cadre d'application. En conséquence, d'importantes simplifications dans la résolution du problème peuvent être effectuées.

1.2.1 Déformation du champ de base par le mode $(0, 0)$

Comme évoqué dans la section 1.1.4, les interactions modales engendrent des modes stationnaires, obtenus pour $n = 0$, et plus particulièrement le mode $(0, 0)$, les écoulements stationnaires étudiés étant supposés axisymétriques. Ce mode stationnaire axisymétrique $(0, 0)$ vient alors s'ajouter au champ de base $\underline{\overline{q}}(\underline{x})$. La prise en compte de cette déformation de l'écoulement porteur n'a de sens que si elle n'est pas déjà présente dans le choix initial du champ de base étudié. Or, dans l'ensemble de nos travaux, nous avons pris comme écoulement porteur une forme approchée du champ de vitesse moyenne (mesuré ou calculé). Par conséquent, le résultat stationnaire des interactions modales est en principe déjà inclus dans l'ensemble des écoulements porteurs étudiés : en effet, le champ de vitesse moyenné temporellement est la superposition de l'écoulement de base, solution stationnaire des équations de Navier-Stokes non linéaires discutée dans la section II.1.2, et de la déformation stationnaire engendrée par les non linéarités de l'écoulement. Dans notre cadre d'étude, visant à étudier le développement des instabilités hydrodynamiques dans des jets libres, la prise en compte de cette déformation du champ de base serait donc redondante. Ainsi, nous écartons la contribution de ce champ stationnaire supplémentaire lors de la résolution de notre système PSE non linéaire. Cette même démarche se retrouve également dans les travaux de Gudmundsson et Colonius [2011] et de Rodríguez *et al.* [2011], nous confortant dans ce choix.

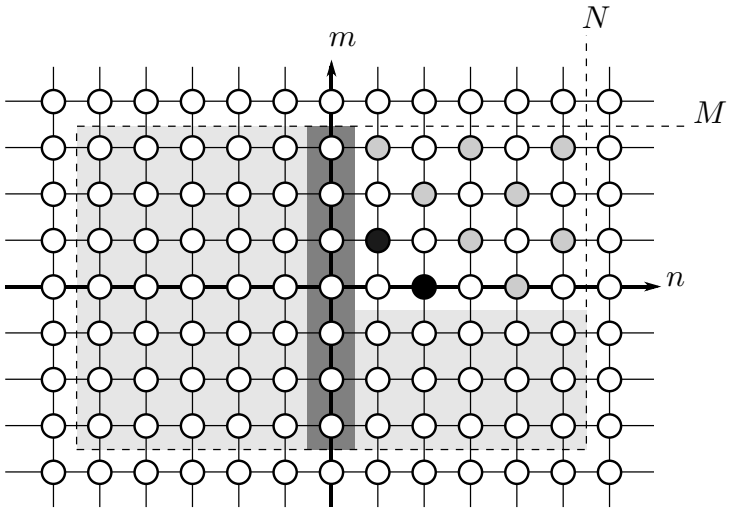


Figure V.1 – *Domaine de calcul de la modélisation PSE non linéaire pour $M \times N$ modes, mettant en évidence les modes stationnaires (■), ainsi que les zones pour lesquelles les modes sont calculés au moyen des conditions de symétrie (▭) ; de manière illustrative, les modes principaux $(1,1)$ et $(0,2)$ sont représentés (●), ainsi que les modes résonants issus des interactions modales associées (◯).*

Il est important de remarquer que dans un cadre d'application différent, comme pour l'étude d'un forçage spécifique de l'écoulement pour lequel le champ de base utilisé n'est pas adapté, ou encore lorsque l'écoulement porteur étudié est effectivement une solution d'équilibre stationnaire des équations du mouvement, la prise en compte de cette déformation serait nécessaire. Nous retrouvons par exemple cette déformation de l'écoulement porteur dans l'étude des couches limites, pour lesquelles le champ de base est issu des profils laminaires de Blasius [Airiau, 1994].

1.2.2 Symétries du problème

Notre étude se focalisant sur le développement d'instabilités dans des jets libres, nous pouvons supposer qu'aucune direction azimutale n'est privilégiée (horaire ou anti-horaire). Cette hypothèse se trouve vérifiée dans l'analyse des mesures de pression en champ proche des jets double-flux étudiés dans la section III.2.4.2, où les puissances des modes azimutaux sont réparties de manière symétrique entre les directions positives et négatives. Par conséquent, nous supposons que les modes azimutaux se propagent par paires symétriques en ϕ, soit

$$\underline{\hat{q}}_{-m,n} = (\hat{u}_x,\, \hat{u}_r,\, -\hat{u}_\phi,\, \hat{\rho},\, \hat{p})^T_{m,n}\,. \tag{5-12}$$

Là encore, dans un cadre d'application différent, visant par exemple à étudier l'influence du forçage d'un mode azimutal donné sur la dynamique des autres modes, cette restriction peut être levée.

Enfin, même si dans la double série de Fourier de l'équation 5-3 nous considérons les modes $n < 0$, les perturbations étudiées sont réelles. Nous imposons donc la condition

$$\underline{\tilde{q}}_{-n,-m} = \underline{\tilde{q}}^{\dagger}_{m,n}\,. \tag{5-13}$$

L'application de ces symétries, ainsi que l'omission des perturbations stationnaires, nous permettent de réduire l'effort de calcul, puisque seuls les modes $m \geq 0$ et $n > 0$ doivent alors être résolus au moyen des équations PSE non linéaires, comme illustré sur le schéma V.1, inspiré des travaux de Herbert [1997]. Sur ce dernier, le domaine de calcul modal est mis en évidence au moyen des axes n et m, les différents modes étant représentés par des cercles. Le mode $(0,0)$ est ainsi situé au centre. La zone en gris foncé représente l'ensemble des modes stationnaires, ne faisant pas partie du calcul. La zone en gris clair, quant à elle, représente l'ensemble des modes

qui sont obtenus au moyen des symétries précédentes. Seuls les modes du quart supérieur droit sont ainsi explicitement calculés. À titre d'exemple, nous avons porté sur ce schéma les modes $(1,1)$ et $(0,2)$. Les modes résonants associés aux interactions modales résultantes sont représentés par des cercles grisés.

V.2 Résolution du système PSE non linéaire

La résolution du système PSE non linéaire emprunte largement aux méthodes employées pour la résolution numérique du modèle PSE linéaire, présentées dans la section II.2. En particulier, les méthodes numériques telles que les discrétisations radiale et axiale, ainsi que les méthodes de convergence sur les nombres d'onde axiaux $\alpha_{m,n}$, sont identiques et donc non explicitées dans cette section. Cependant, la résolution d'un tel système présente certains aspects bien particuliers que nous détaillons ici, tels que l'initialisation des modes, l'évaluation des termes non linéaires et la méthode de convergence globale retenue.

2.1 Conditions initiales des modes principaux et résonants

L'initialisation des modes dans la résolution du système PSE non linéaire peut intervenir à différentes abscisses. En effet, dans un premier temps, seuls le ou les modes principaux sont initialisés à l'abscisse x_0. Ces modes sont par exemple représentés par les symboles noirs sur la figure V.1 et correspondent aux modes que nous cherchons principalement à étudier. Leur initialisation est relativement simple et suit la démarche précédemment retenue dans la section II.1.4 pour l'initialisation du système PSE linéaire : nous utilisons ainsi la solution de stabilité locale définie à une amplitude initiale $\varepsilon_{m,n}$. Cette approche est également celle retenue dans les travaux de Day *et al.* [2001] et Rodríguez *et al.* [2011] et ne semble pas engendrer de phases transitoires trop importantes, n'empêchant donc pas la convergence de la solution sur les premières abscisses.

Cependant, aux abscisses suivantes, les modes issus des interactions entre modes principaux émergent. En effet, à l'abscisse initiale x_0, seuls les modes principaux sont initialisés, les modes résonants n'étant pas pris en compte : les interactions modales des modes existants produisent alors des termes de forçage nous amenant à devoir prendre en compte l'apparition des modes résonants. Ces modes sont par exemple représentés par les symboles gris sur la figure V.1. L'initialisation de ces modes résonants est plus délicate. Nous avons choisi d'employer une méthode similaire à celle proposée par Day *et al.* [2001], modifiée afin de tirer parti au maximum des résultats de l'analyse PSE linéaire. L'objectif est ici de chercher à évaluer l'amplitude des modes résonants non encore pris en compte dans le calcul à partir du terme de forçage connu $\underline{r}_{m,n}$. Ainsi, à l'abscisse d'initialisation d'un mode résonant, nous utilisons le nombre d'onde axial $\alpha(x)$ obtenu à cette même abscisse au moyen d'un calcul PSE linéaire. Ce nombre d'onde axial est supposé être une forme approchée du nombre d'onde axial $\alpha_{m,n}(x)$ recherché. Nous résolvons alors l'équation non homogène suivante,

$$\left(\mathcal{A}_{m,n} + \mathcal{B}\right) \underline{\hat{q}}_{m,n} + \mathcal{D} \frac{\partial \underline{\hat{q}}_{m,n}}{\partial r} = -\underline{r}_{m,n} \,, \tag{5-14}$$

similaire à l'équation 5-7 définissant notre système PSE non linéaire, mais où les dérivées axiales ont été négligées. Nous obtenons alors une fonction d'amplitude $\underline{\hat{q}}_{m,n}(x,r)$ a priori suffisamment représentative de la fonction recherchée. Le couple $(\alpha_{m,n}, \underline{\hat{q}}_{m,n})$ sert alors de condition initiale approchée pour le calcul de l'évolution axiale de ce mode résonant (m,n).

Enfin, il est important d'observer que la prise en compte des modes résonants présentant des amplitudes largement inférieures à celles des modes principaux tend à considérablement déstabiliser la résolution du système PSE non linéaire. Nous utilisons donc un critère de prise en

compte de ces modes résonants basé sur leurs amplitudes, soit

$$|\hat{\underline{q}}_{m,n}| > C_r \,. \tag{5-15}$$

Ainsi, suite à la résolution du système 5-14, si l'amplitude du mode (m, n) suivant la norme choisie ne satisfait pas ce critère, ce mode résonant (m, n) n'est pas pris en compte à l'abscisse courante. Il faudra alors attendre que l'amplitude de ce mode soit suffisamment élevée afin qu'il soit considéré comme un mode significatif, alors initialisé et inclus dans le calcul des termes non linéaires. Nous utilisons classiquement le critère selon lequel l'amplitude maximale de la fluctuation de vitesse axiale du mode résonant est supérieure à 0.1% de l'amplitude initiale des modes principaux.

2.2 Méthodes de calcul des termes non linéaires

À chaque couple (m, n) correspond une équation 5-7, pour laquelle nous devons évaluer le terme $\underline{r}_{m,n}$ issu des interactions modales. Ce terme est donné par les coefficients de Fourier de l'équation 5-10, que nous considérons donc comme définis dans un espace spectral, ainsi que par les expressions 5-2 de TNL, définis dans un espace physique.

2.2.1 Limitation du nombre de modes résonants

L'évaluation numérique de ces termes de forçage $\underline{r}_{m,n}$ nous impose de définir une limite sur le nombre de modes résonants que nous pouvons considérer. La double série de Fourier de l'équation 5-10 est alors tronquée en considérant $M \times N$ modes, comme illustré sur la figure V.1, et les perturbations s'écrivent alors

$$\underline{q}'(x, r, \phi, t) = \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-M}^{M} \underline{\tilde{q}}_{m,n}(x, r) \, \exp i \, (m\phi - n\omega t) \,. \tag{5-16}$$

De cette manière, l'espace de calcul des modes résonants est restreint, réduisant l'effort de calcul nécessaire. Rodríguez *et al.* [2011] se sont intéressés à l'importance de cette troncature du nombre de modes considérés sur la solution du système PSE non linéaire. Ces auteurs observent relativement peu de différences en modifiant le nombre de modes fréquentiels considérés (supérieur à 6 dans leurs travaux), à condition que les modes à très basses fréquences soient exclus des calculs PSE. En effet, les modes tels que $St < 0.1$ sont généralement mal résolus au moyen d'une modélisation PSE, comme nous avons également pu le voir sur nos résultats dans le chapitre précédent : les hypothèses PSE ne semblent plus vérifiées lorsque les longueurs d'onde des modes à basse fréquence sont de l'ordre de grandeur du cône potentiel, auquel cas l'évolution de l'écoulement porteur ne peut plus être considérée comme lente dans la direction axiale.

2.2.2 Développement analytique

Afin de valider l'évaluation des termes non linéaires nécessaires à la résolution des équations PSE non linéaires 5-7, nous présentons deux méthodes de calcul de ces termes. Une première approche consiste à substituer directement dans les expressions 5-2 les perturbations écrites sous forme de double série de Fourier 5-10. En supposant que les séries de Fourier sont absolument convergentes (en réalité, comme nous le verrons par la suite, nos séries sont à termes nuls à partir d'un certain rang, assurant l'égalité suivante), nous identifions les produits de séries à des produits de Cauchy, soit tels que

$$\left(\sum_i a_i\right) \cdot \left(\sum_j b_j\right) = \sum_n c_n \tag{5-17a}$$

$$\text{avec} \quad c_n = \sum_k a_k b_{n-k} \tag{5-17b}$$

Après application de cette formule de distributivité aux produits des doubles séries, nous sommes alors en mesure d'obtenir une forme analytique des termes de forçage d'un mode (m,n) en regroupant les termes en $\exp i(m\phi - n\omega t)$. Cependant, nous n'effectuons cette évaluation analytique que pour les termes d'ordre δ^2, issus des produits doubles des séries, et non au-delà, pour les produits triples des séries donnant les termes en δ^3, les développements étant fastidieux.

Ainsi, nous obtenons les expressions 5-18, donnant respectivement les termes $\{\underline{r}_{m,n}\}_i$ pour les équations de continuité, de quantité de mouvement selon x, r et ϕ, ainsi que pour l'équation de l'énergie. Par souci de lisibilité, nous avons remplacé dans ces expressions les termes $\hat{u}_x$, $\hat{u}_r$ et $\hat{u}_\phi$ respectivement par $\hat{u}$, $\hat{v}$ et $\hat{w}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TNL}^{(1)}_{m,n} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\Bigg[& \hat{u}_{m-p,n-q}\left(\frac{\partial\hat{\rho}_{p,q}}{\partial x} + i\alpha_{p,q}\hat{\rho}_{p,q}\right) \\
& + \hat{\rho}_{m-p,n-q}\left(\frac{\partial\hat{u}_{p,q}}{\partial x} + i\alpha_{p,q}\hat{u}_{p,q}\right) \\
& + \hat{v}_{m-p,n-q}\frac{\partial\hat{\rho}_{p,q}}{\partial r} + \hat{\rho}_{m-p,n-q}\frac{\partial\hat{v}_{p,q}}{\partial r} + \frac{\hat{\rho}_{m-p,n-q}\hat{v}_{p,q}}{r} \\
& + im\frac{\hat{w}_{m-p,n-q}\hat{\rho}_{p,q}}{r}\Bigg]\mathscr{A}_{m-p,n-q}\mathscr{A}_{p,q}
\end{aligned}
\tag{5-18a}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TNL}^{(2)}_{m,n} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\Bigg[& \overline{\rho}\Big(\hat{u}_{m-p,n-q}\left\{\frac{\partial\hat{u}_{p,q}}{\partial x} + i\alpha_{p,q}\hat{u}_{p,q}\right\} \\
& + \hat{v}_{m-p,n-q}\frac{\partial\hat{u}_{p,q}}{\partial r} + \frac{ip}{r}\hat{w}_{m-p,n-q}\hat{u}_{p,q}\Big) \\
& + \hat{\rho}_{m-p,n-q}\Big(-iq\omega\hat{u}_{p,q} + \overline{u}\left\{\frac{\partial\hat{u}_{p,q}}{\partial x} + i\alpha_{p,q}\hat{u}_{p,q}\right\} \\
& + \overline{v}\frac{\partial\hat{u}_{p,q}}{\partial r} + \frac{\partial\overline{u}}{\partial x}\hat{u}_{p,q} + \frac{\partial\overline{u}}{\partial r}\hat{v}_{p,q}\Big) + o(\delta^2)\Bigg]\mathcal{A}_{m-p,n-q}\mathcal{A}_{p,q}
\end{aligned}
\tag{5-18b}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TNL}^{(3)}_{m,n} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\Bigg[& \overline{\rho}\Big(\hat{u}_{m-p,n-q}\left\{\frac{\partial\hat{v}_{p,q}}{\partial x} + i\alpha_{p,q}\hat{v}_{p,q}\right\} \\
& + \hat{v}_{m-p,n-q}\frac{\partial\hat{v}_{p,q}}{\partial r} + \frac{ip}{r}\hat{w}_{m-p,n-q}\hat{v}_{p,q} + \frac{1}{r}\hat{w}_{m-p,n-q}\hat{w}_{p,q}\Big) \\
& + \hat{\rho}_{m-p,n-q}\Big(-iq\omega\hat{v}_{p,q} + \overline{u}\left\{\frac{\partial\hat{v}_{p,q}}{\partial x} + i\alpha_{p,q}\hat{v}_{p,q}\right\} \\
& + \overline{v}\frac{\partial\hat{v}_{p,q}}{\partial r} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial x}\hat{u}_{p,q} + \frac{\partial\overline{v}}{\partial r}\hat{v}_{p,q}\Big) + o(\delta^2)\Bigg]\mathcal{A}_{m-p,n-q}\mathcal{A}_{p,q}
\end{aligned}
\tag{5-18c}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TNL}^{(4)}_{m,n} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\Bigg[& \overline{\rho}\Big(\hat{u}_{m-p,n-q}\left\{\frac{\partial\hat{w}_{p,q}}{\partial x} + i\alpha_{p,q}\hat{w}_{p,q}\right\} \\
& + \hat{v}_{m-p,n-q}\frac{\partial\hat{w}_{p,q}}{\partial r} + \frac{ip}{r}\hat{w}_{m-p,n-q}\hat{w}_{p,q} - \frac{1}{r}\hat{v}_{m-p,n-q}\hat{w}_{p,q}\Big) \\
& + \hat{\rho}_{m-p,n-q}\Big(-iq\omega\hat{w}_{p,q} + \overline{u}\left\{\frac{\partial\hat{w}_{p,q}}{\partial x} + i\alpha_{p,q}\hat{w}_{p,q}\right\} \\
& + \overline{v}\frac{\partial\hat{w}_{p,q}}{\partial r} + \frac{\overline{v}\hat{w}_{p,q}}{r}\Big) + o(\delta^2)\Bigg]\mathcal{A}_{m-p,n-q}\mathcal{A}_{p,q}
\end{aligned}
\tag{5-18d}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{TNL}^{(5)}_{m,n} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty}\sum_{q=-\infty}^{+\infty}\Bigg[& \overline{\rho}M^2\Big(\hat{u}_{m-p,n-q}\left\{\frac{\partial\hat{p}_{p,q}}{\partial x} + i\alpha_{p,q}\hat{p}_{p,q}\right\} \\
& + \hat{v}_{m-p,n-q}\frac{\partial\hat{p}_{p,q}}{\partial r} + \frac{ip}{r}\hat{w}_{m-p,n-q}\hat{p}_{p,q}\Big) \\
& - \Big(\hat{u}_{m-p,n-q}\left\{\frac{\partial\hat{\rho}_{p,q}}{\partial x} + i\alpha_{p,q}\hat{\rho}_{p,q}\right\} + \hat{v}_{m-p,n-q}\frac{\partial\hat{\rho}_{p,q}}{\partial r} \\
& + \frac{ip}{r}\hat{w}_{m-p,n-q}\hat{\rho}_{p,q}\Big) + \frac{\hat{\rho}_{m-p,n-q}}{\overline{\rho}}\Big(\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial x}\hat{u}_{p,q} + \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial r}\hat{v}_{p,q}\Big) + o(\delta^2)\Bigg]\mathcal{A}_{m-p,n-q}\mathcal{A}_{p,q}
\end{aligned}
\tag{5-18e}
$$

2.2.3 Calcul par passage dans l'espace physique

Une seconde approche possible pour l'évaluation de ces termes est de réaliser les produits des perturbations des équations 5-2 dans l'espace physique, tels que donnés par ces équations, contrairement à l'approche précédente où les perturbations physiques ont été substituées par leurs expressions spectrales. Pour ce faire, connaissant les coefficients de Fourier $\underline{\tilde{q}}_{m,n}$ des perturbations générant les termes non linéaires, nous réalisons une transformée de Fourier inverse de ces termes afin d'évaluer la perturbation physique $\underline{q}'$, ainsi que les dérivées axiales (au premier ordre) et les dérivées radiales. Nous effectuons alors les produits des perturbations physiques données par les équations 5-2 afin d'évaluer les termes TNL. Enfin, nous réalisons une transformée de Fourier de ces termes afin d'obtenir les composantes spectrales $\mathrm{TNL}_{m,n}$ recherchées.

Une telle méthode a plusieurs avantages par rapport à la méthode analytique précédente. Tout d'abord, l'ordre des produits considérés (δ^2 précédemment) n'est plus limité par la complexité des développements : dans l'espace physique, les produits sont aisément réalisés. Ensuite, le temps de calcul de ces termes est bien plus court par cette approche, l'utilisation d'un algorithme de transformée de Fourier rapide assurant un gain de vitesse considérable sur l'évaluation des sommes précédentes (expressions 5-18). Cependant, il est important de noter qu'afin d'éviter tout effet de repliement du spectre, il est nécessaire de considérer un nombre de modes double en azimut et en temps pour un tel calcul. Cette approche est celle qui sera privilégiée dans la suite de nos travaux, la première servant à la validation, objet de la section 3.1.

2.3 Méthode de convergence pour la résolution du système PSE non linéaire

La résolution du système PSE non linéaire suit globalement l'organigramme II.6 illustrant la méthode de résolution du système PSE linéaire. La principale différence résulte du calcul des termes non linéaires et de l'initialisation des modes résonants. Ainsi, la résolution du système suit les étapes suivantes :

1. Initialisation à l'abscisse $x_j = x_0$
   (a) Initialisation des modes principaux au moyen d'une analyse de stabilité locale
   (b) Application des symétries (équations 5-12 et 5-13)
   (c) Incrément axial, $j = 1$
2. Résolution du système PSE non linéaire, boucle sur les positions axiales x_j
   (a) Boucle de convergence sur l'ensemble des nombres d'onde axiaux $\alpha_{m,n}$ des modes actifs, c'est à dire des modes principaux et des modes résonants ayant atteint une amplitude satisfaisant le critère 5-15.
      i. Calcul des termes non linéaires $\underline{r}_{m,n}$ issus des interactions entre les modes actifs, au moyen d'une des deux approches présentées dans les sections 2.2.2 (méthode analytique) ou 2.2.3 (méthode par FFT)
      ii. Résolution du système PSE non linéaire 5-7 pour l'ensemble des modes actifs

iii. Application des symétries (équations 5-12 et 5-13)

iv. Application de la condition de normalisation 5-11 et actualisation des nombres d'onde axiaux $\alpha_{m,n}$

v. Si le critère de convergence sur l'ensemble des nombres d'onde axiaux $\alpha_{m,n}$ est satisfait (critère similaire à celui présenté dans la section II.2.4), on sort de la boucle

(b) Initialisation des modes résonants

i. Détermination du nombre d'onde axial approché $\alpha_{m,n}$

ii. Résolution de l'équation 5-14 donnant une condition initiale approchée

iii. Application du critère 5-15 de sélection des modes résonants : s'il n'est pas satisfait, les modes ne sont pas activés

(c) Incrément axial, $j = j + 1$

Plusieurs remarques peuvent être effectuées sur cette méthode de résolution. Tout d'abord, le calcul des termes non linéaires $\underline{r}_{m,n}$ est effectué à chaque actualisation des nombres d'onde axiaux $\alpha_{m,n}$. Une autre possibilité aurait été d'évaluer ces termes de forçage en dehors de la boucle de convergence sur $\alpha_{m,n}$. Une telle solution tend cependant à déstabiliser la convergence de la résolution, comme cela est également rapporté dans les travaux de Herbert [1997] et Airiau [1994] dans l'étude des couches limites. Le grand nombre d'appels nécessaires à l'évaluation de ces termes non linéaires privilégie par conséquent l'utilisation de la méthode de calcul par FFT.

Ensuite, nous faisons ici le choix d'initialiser les modes résonants uniquement une fois qu'une solution convergée est obtenue pour l'ensemble des modes actifs. Une autre possibilité serait de réaliser cette initialisation dans la boucle de convergence des nombres d'onde axiaux $\alpha_{m,n}$. Une telle démarche est a priori plus logique, puisque ainsi les modes résonants seraient créés de manière dynamique et interagiraient alors directement avec les autres modes actifs. Cependant, sur les cas que nous avons étudiés, une telle approche semble trop instable et la robustesse de la résolution du système PSE non linéaire en est fortement amoindrie.

Enfin, nous insistons sur le fait que nous n'avons pas été en mesure de valider notre modélisation PSE non linéaire sur des résultats connus. En effet, nous n'avons pas eu à notre disposition au cours de ces travaux de thèse de résultats numériques (issus de simulations DNS par exemple, comme dans les travaux de Day *et al.* [2001] ou Cheung *et al.* [2007]) ou expérimentaux nous permettant d'affirmer la validité de notre modèle et de cette méthode de résolution. Néanmoins, nous mettons en évidence dans la section suivante, sur des cas relativement simples, la cohérence des résultats obtenus avec ce modèle.

V.3 Applications simples du modèle PSE non linéaire

La modélisation PSE non linéaire développée dans ce chapitre est ici mise en application sur des cas relativement simples. En effet, plutôt que d'appliquer ce modèle aux écoulements complexes des jets double-flux étudiés dans le chapitre III, nous avons préféré considérer son application à un jet simple décrit de manière analytique, afin d'éviter toute complication numérique éventuelle, ainsi que pour limiter le nombre de modes à considérer. Néanmoins, cette application reste porteuse de sens physique dans le contexte de notre étude, puisqu'elle permet de mettre en évidence, d'une part, l'apparente cohérence de la modélisation, mais aussi, d'autre part, une première appréhension de l'effet des interactions modales dans l'étude des jets libres.

Pour cela, nous avons choisi le cas précédemment étudié dans la section II.3.1 d'un jet incompressible issu des travaux de Crow et Champagne [1971], et dont le champ moyen de vitesse axiale est décrit analytiquement par l'équation 2-72b. La figure V.2 illustre ainsi ce champ de vitesse axiale $\overline{u}_x$, ainsi que le champ de vitesse radiale $\overline{u}_r$ obtenu par résolution de l'équation de continuité. Nous rappelons que les vitesses sont adimensionnées par la vitesse axiale du jet en sortie de tuyère et les longueurs par le diamètre de la tuyère.

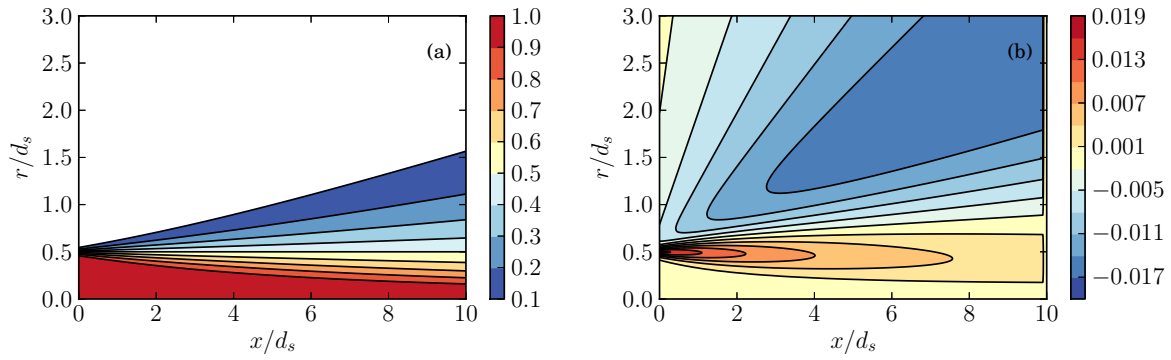


Figure V.2 – *Contours des champs (a) de vitesse axiale $\overline{u}_x$ et (b) de vitesse radiale $\overline{u}_r$ représentatifs du jet étudié par Crow et Champagne [1971].*

3.1 Interactions d'harmoniques fréquentielles dans un écoulement parallèle incompressible

Nous cherchons dans un premier temps à vérifier que notre modèle PSE non linéaire est en mesure de modifier l'évolution d'un mode par un mécanisme de résonance. Pour cela, un cas très simple que nous pouvons étudier est celui d'un écoulement parallèle, dans lequel deux modes fréquentiels interagissent, permettant le forçage d'un troisième mode fréquentiel. En particulier, nous souhaitons montrer ici qu'un mode initialement stable peut se voir amplifié par un mécanisme faiblement non linéaire, en nous inspirant des travaux de Salgado *et al.* [2010].

Pour cela, en considérant le jet présenté sur la figure V.2, nous cherchons une abscisse de l'écoulement porteur pour laquelle nous avons deux modes hydrodynamiques instables amplifiés et un mode stable (mais initialement instable), ces trois modes étant des harmoniques fréquentielles. Nous avons par conséquent réalisé une analyse PSE linéaire afin d'étudier trois modes axisymétriques ($m = 0$) aux fréquences $St = 0.20$, 0.40 et 0.60 ($n = 1$, 2 et 3). Les résultats de cette analyse PSE linéaire sont présentés sur la figure V.3 mettant en évidence l'évolution axiale d'un facteur N basé sur la définition de l'amplitude A_1 (équation 2-74a). Cette dernière représente l'énergie cinétique associée à la perturbation considérée. Ce facteur N est alors défini par

$$N = \ln\left(\frac{A_1(x)}{A_1(x_0)}\right) , \tag{5-19}$$

et nous permet de comparer l'évolution axiale de plusieurs modes initialisés à des amplitudes différentes.

Sur cette figure V.3, nous observons qu'à l'abscisse $x/d = 3.0$, mise en évidence par une ligne pointillée, les modes axisymétriques $St = 0.20$ et 0.40 sont amplifiés, le facteur N de ces modes étant croissant. Le mode $St = 0.60$ est quant à lui amorti, son facteur N ayant atteint son maximum en amont et commençant à décroître. Une analyse de stabilité locale donne bien ce mode comme étant stable à cette abscisse. Nous choisissons donc le profil de vitesse axiale de l'écoulement porteur à cette abscisse, reproduit sur la figure V.4, pour l'étude que nous souhaitons réaliser. En effet, les modes instables $n = 1$ et 2 peuvent ainsi a priori interagir afin de forcer le mode stable $n = 3$. Ce profil de vitesse axiale nous permet alors de construire un écoulement porteur parallèle présentant les caractéristiques voulues.

L'initialisation du calcul PSE non linéaire sur cet écoulement porteur est ici réalisée au moyen des résultats des calculs PSE linéaires : en effet, notamment pour le mode axisymétrique $n = 3$, notre analyse de stabilité locale ne permet pas d'obtenir des conditions initiales appropriées, ce dernier mode étant localement stable. Enfin, toujours concernant l'initialisation, nous définissons l'amplitude initiale $\varepsilon_{m,n}$ des modes (m, n) de manière arbitraire, ici $\varepsilon_{m,n} = 10^{-3}$ pour les

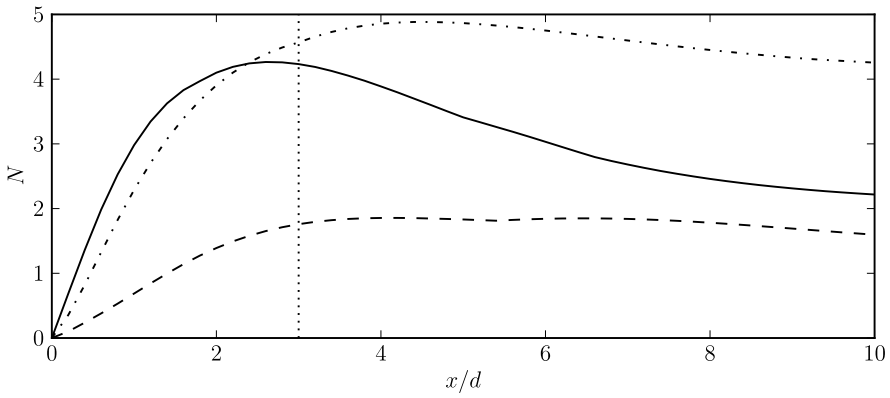


Figure V.3 – *Évolutions axiales de facteurs N (équation 5-19) issues d'une analyse PSE linéaire réalisée sur un jet simple incompressible (section 2-74a), pour les modes axisymétriques ($m = 0$) aux fréquences $St = 0.20$ (- - -), $St = 0.40$ (- · - · -) et $St = 0.60$ (——).*

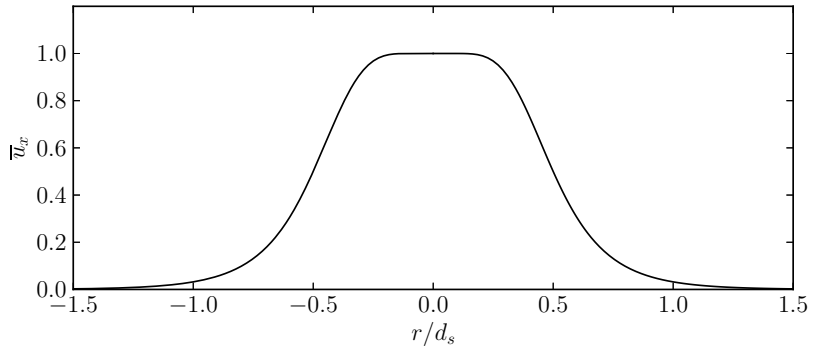


Figure V.4 – *Profil de vitesse axiale définissant un écoulement parallèle.*

trois modes considérés, tout en normalisant les perturbations $\hat{\underline{q}}_{m,n}(x,r)$ de telle manière que l'amplitude maximum de $\{\hat{u}_x\}_{m,n}$ soit unitaire. Nous imposons donc ainsi l'amplitude maximum de la fluctuation de vitesse axiale du mode (m,n) à $\varepsilon_{m,n}$. Nous remarquons alors qu'avec une telle définition de l'amplitude initiale d'un mode (m,n), les amplitudes maximum des autres grandeurs sont généralement inférieures. Plus particulièrement dans ce cas d'étude, l'amplitude maximum initiale de $\hat{p}_{m,n}$ est inférieure d'un ordre de grandeur à $\varepsilon_{m,n}$.

Les résultats produits par notre modèle PSE non linéaire sont présentés sur la figure V.5, faisant apparaître l'évolution axiale des facteurs N (équation 5-19). Ainsi, aux premières abscisses de calcul, jusqu'à environ $x/d \approx 7.5$, les trois modes considérés évoluent indépendamment les uns des autres, suivant les résultats de l'analyse linéaire sur ce profil de vitesse : les modes fréquentiels $n = 1$ et 2 sont amplifiés et le mode $n = 3$ est amorti. Cependant, au-delà de l'abscisse $x/d \approx 7.5$, ce dernier mode voit son évolution axiale modifiée et se trouve amplifié : les interactions entre les modes $n = 1$ et 2 jouent ici le rôle attendu et permettent d'altérer significativement la dynamique du mode $n = 3$. Ce résultat illustre une première application cohérente de notre modélisation PSE non linéaire. Bien entendu, nous le rappelons, cela ne vaut pas validation mais sert d'exemple d'application.

Ce cas d'étude nous permet également de vérifier que le calcul des termes non linéaires $\underline{r}_{m,n}$ est correctement réalisé. En effet, comme nous l'avons détaillé dans la section 2.2, nous disposons de deux approches permettant l'évaluation de ces termes : l'une analytique, l'autre par transformée de Fourier rapide. La figure V.6 présente ainsi la distribution radiale des parties réelle et imaginaire des termes non linéaires forçant le mode $n = 3$ à l'abscisse $x/d = 5.0$, soit les termes

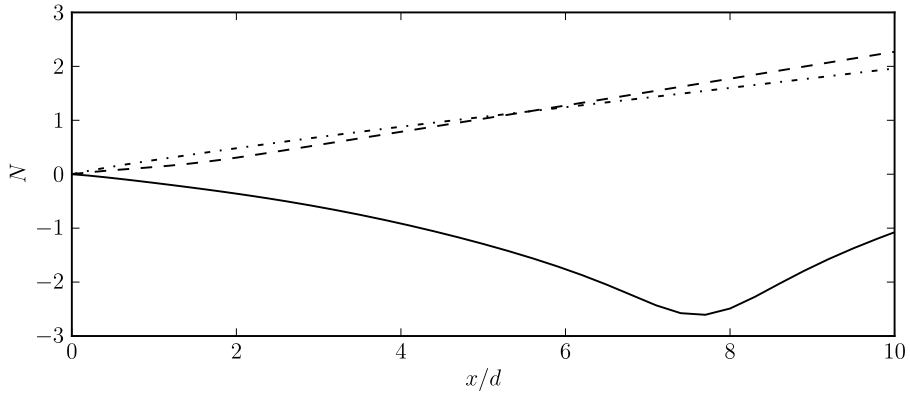


Figure V.5 – *Évolution axiale des facteurs N (équation 5-19) des modes* $(m,n) = (0,1)$ *: - - - - ;* $(0,2)$ *: - · - · - ;* $(0,3)$ *: ——— ; obtenus au moyen du modèle PSE non linéaires sur un écoulement parallèle représenté sur la figure V.4.*

$\mathrm{TNL}_{0,3}^{(2)}$, $\mathrm{TNL}_{0,3}^{(3)}$ et $\mathrm{TNL}_{0,3}^{(4)}$, les deux autres termes $\mathrm{TNL}_{0,3}^{(1)}$ et $\mathrm{TNL}_{0,3}^{(5)}$ étant ici négligeables. Nous y représentons ainsi les termes évalués analytiquement, comme présenté dans la section 2.2.2, ainsi que ces mêmes termes évalués par la méthode de passage dans l'espace physique par FFT, comme décrit dans la section 2.2.3. La correspondance est excellente (les termes d'ordre δ^3 négligés dans la solution analytique étant effectivement négligeables), montrant la validité de l'évaluation des termes non linéaires.

Nous observons cependant des variations radiales brutales sur ces fonctions, qui pourraient typiquement avoir pour origine une discrétisation radiale trop grossière, pouvant introduire ce type d'oscillations. Cependant, dans notre cas d'étude, ces fortes variations radiales sont bien physiques et ne résultent pas d'une discrétisation grossière, un raffinement du maillage ne modifiant que très peu ces fonctions. [1] L'origine de ces fortes variations est à trouver dans l'évaluation de la dérivée radiale des fonctions d'amplitude $\underline{\hat{q}}_{m,n}$ du calcul PSE. Ainsi, sur la figure V.7 sont tracées les fonctions d'amplitude de vitesse axiale $\hat{u}_x$, de vitesse radiale $\hat{u}_r$ et de pression $\hat{p}$, ainsi que leurs dérivées radiales, pour le mode $m = 0$ et $n = 1$, jouant un rôle majeur dans le calcul des termes non linéaires forçant le mode $(0,3)$. Ces fonctions sont continues, ne manifestant pas d'irrégularités représentatives de problèmes de discrétisation. En particulier, l'examen de $\hat{u}_x$ permet de justifier les forts gradients observés sur sa dérivée radiale.

Si sur ce cas d'étude nous n'avons pas de problème numérique lié à la discrétisation radiale, cet exemple met tout de même en évidence la nécessité d'avoir un maillage suffisamment fin permettant un calcul précis des différentes dérivées : l'évaluation des termes non linéaires en dépend fortement.

1. Sur la figure V.6, le nombre de symboles représentés est inférieur d'un facteur 3 au nombre de points de discrétisation radiale utilisés, ce qui pourrait laisser penser à une sous-résolution.

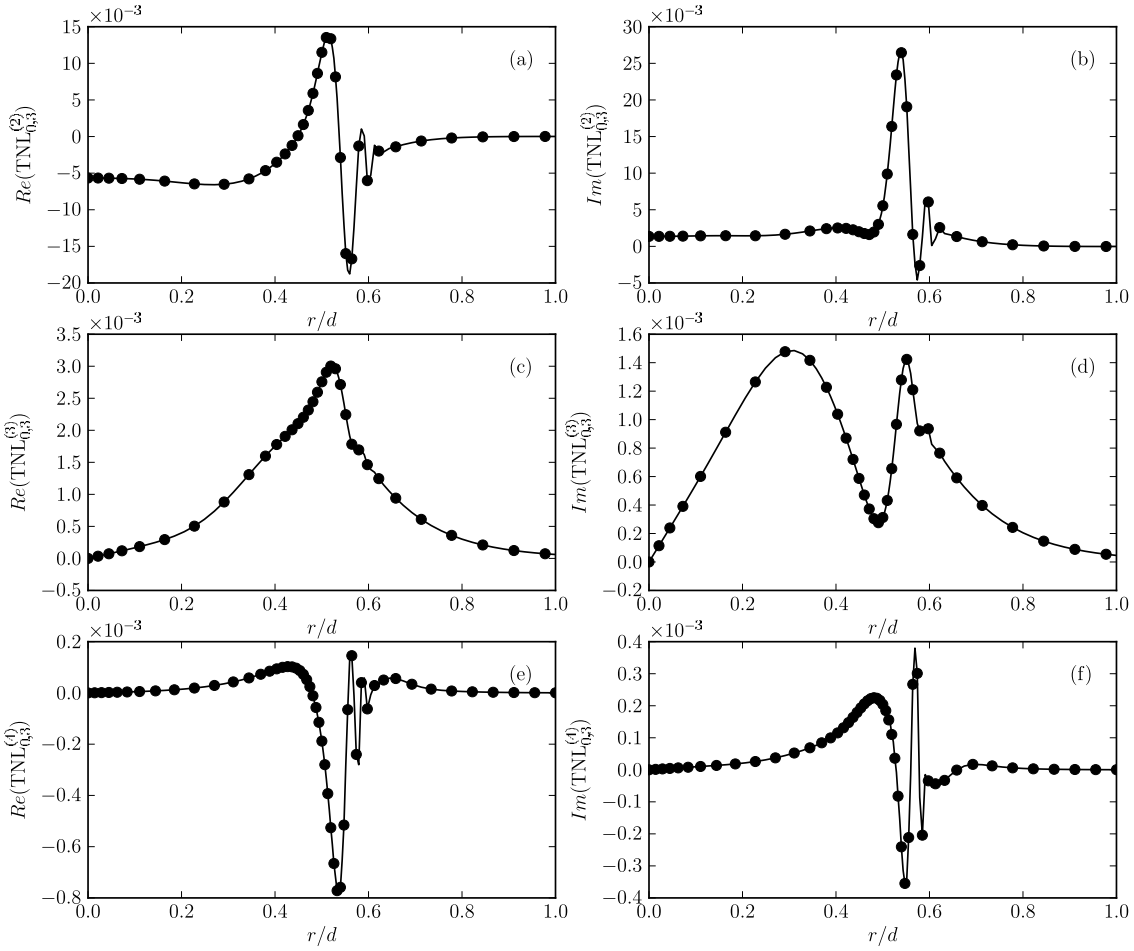


Figure V.6 – *Parties réelle (a, c, e) et imaginaire (b, d, f) des termes non linéaires* $TNL^{(2)}_{0,3}$, $TNL^{(3)}_{0,3}$ *et* $TNL^{(4)}_{0,3}$ *calculés analytiquement (——) et par la méthode de tranformée de Fourier (●).*

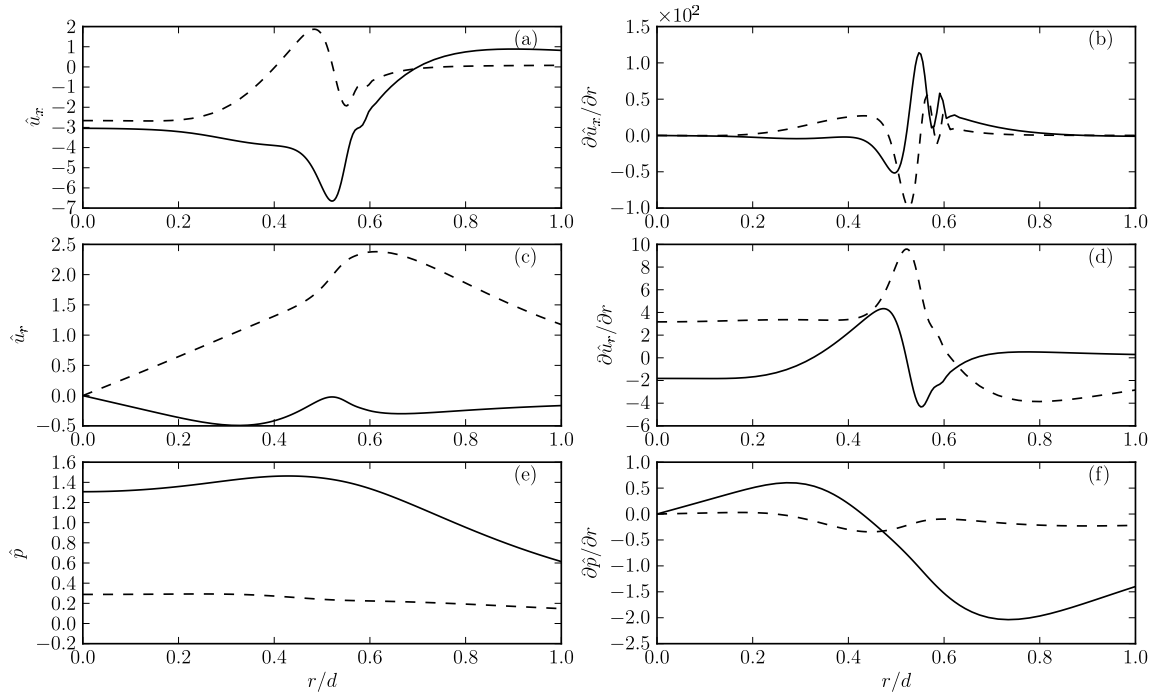


Figure V.7 – *Parties réelle (——) et imaginaire (- - - -) des fonctions d'amplitude (a, c, e) et des dérivées radiales correspondantes (b, d, f) des vitesses axiale $\hat{u}_x$, radiale $\hat{u}_r$ et de pression $\hat{p}$ du mode $(m, n) = (0, 1)$ à l'abscisse $x/d = 5.0$.*

3.2 Interactions d'harmoniques fréquentielles dans un jet simple incompressible

Une seconde application simple de notre modèle PSE non linéaire que nous avons envisagée, dans la continuité du cas précédent, consiste à étudier les interactions fréquentielles sur un écoulement non parallèle, soit le jet simple incompressible présenté dans la section V.3 et illustré sur la figure V.2. Le but est ici d'étudier la dynamique de modes axisymétriques harmoniques initialisés à des amplitudes comparables à celles évaluées auparavant dans l'étude des jets double-flux libres, dans le chapitre III. Ainsi, nous souhaitons avoir une première idée de l'importance de la prise en compte de ces faibles non-linéarités dans la dynamique des modes étudiés se développant dans des jets libres.

Pour cela, nous considérons 6 modes axisymétriques ($m = 0$) tels que la fréquence du mode $n = 1$ soit $St = 0.20$. Le dernier mode considéré, soit le mode $(0, 6)$, a donc la fréquence $St = 1.20$. Afin de réaliser une initialisation des modes à des amplitudes représentatives de celles rencontrées dans les études précédentes de jets libres, il est important d'évaluer l'ordre de grandeur des amplitudes initiales des modes. Dans le cas des jets double-flux étudiés précédemment, nous ne pouvons qu'évaluer de manière très approximative les amplitudes aux lèvres des tuyères (plusieurs difficultés apparaissent : existence de deux modes de couche de mélange dans les mesures, calculs PSE initialisés à des abscisses en aval à cause de la géométrie, mesures acoustiques fortement bruitées au niveau des lèvres, etc.). Nous estimons ainsi grossièrement les amplitudes de pression initiales issues des mesures entre 0.1 et 1 Pa/Hz. En se basant sur les travaux de Rodríguez *et al.* [2011] s'intéressant à un jet froid subsonique à $M = 0.9$, plus représentatif de l'écoulement ici étudié que les jets double-flux précédents, les amplitudes initiales de pression sur l'antenne sont plus faibles, entre 0.01 et 0.1 Pa/Hz. En prenant cette dernière valeur comme référence, et en suivant nos conventions d'adimensionnement, nous obtenons des amplitudes de pression maximales initiales et adimensionnées autour de 10^{-6}. Enfin, comme nous utilisons la même définition de l'amplitude initiale $\varepsilon_{m,n}$ d'un mode (m, n) que celle détaillée dans la section 3.1,

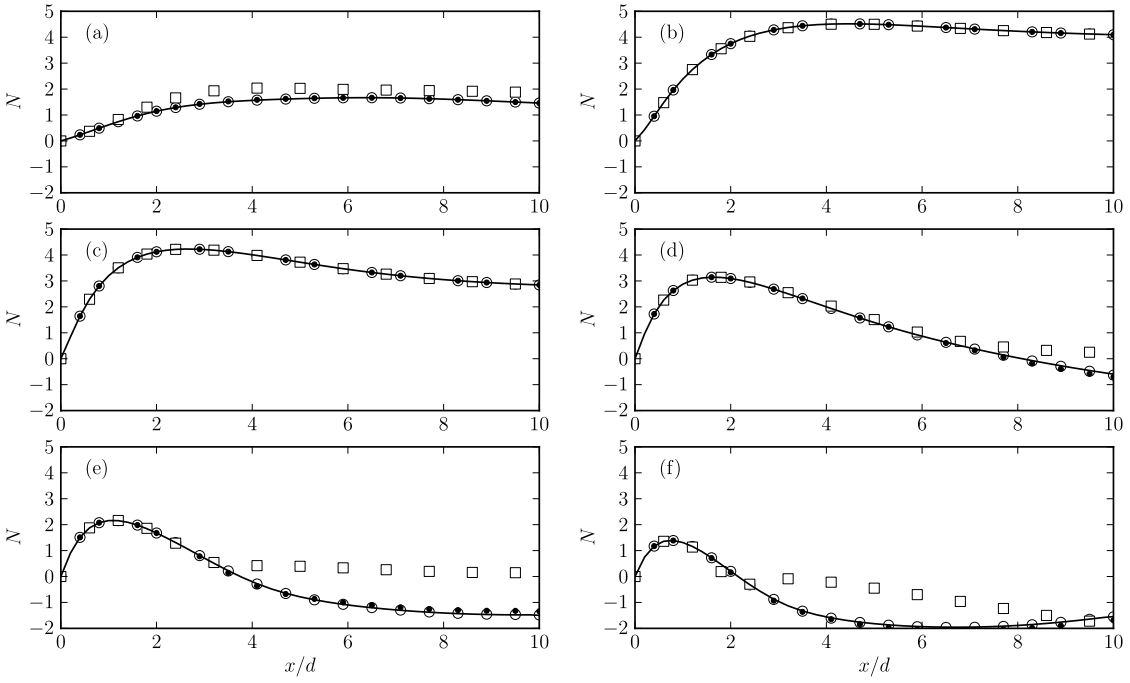


Figure V.8 – *Évolution axiale des facteurs N des modes (a)* $(m, n) = (0, 1)$ *; (b)* $(0, 2)$ *; (c)* $(0, 3)$ *; (d)* $(0, 4)$ *; (e)* $(0, 5)$ *et* $(0, 6)$ *calculés au moyen du modèle PSE non linéaire initialisé avec* $\varepsilon_{m,n} = 10^{-6}$ *(○) ;* 10^{-5} *(●) et* 10^{-4} *(□) ; la ligne continue (——) donne la solution de la modélisation PSE linéaire.*

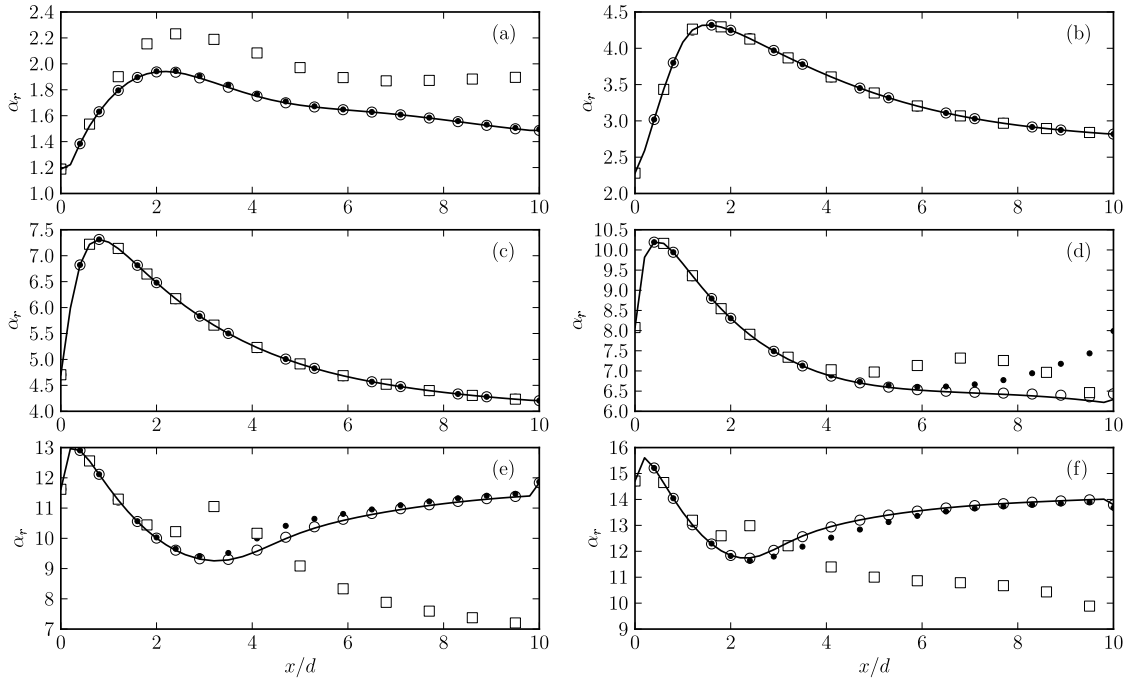


Figure V.9 – *Évolution du nombre d'onde axial α_r des 6 modes axisymétriques harmoniques présentés sur la figure V.8.*

soit l'amplitude du maximum de la fonction d'amplitude de vitesse axiale $\hat{u}_x$, nous évaluons l'amplitude initiale $\varepsilon_{m,n}$ des modes autour de 10^{-5}. Nous étudions donc les interactions entre les 6 modes fréquentiels initialisés à la même amplitude $\varepsilon_{m,n}$, pour les trois cas $\varepsilon_{m,n} = 10^{-6}$, 10^{-5} et 10^{-4}.

La figure V.8 représente les évolutions axiales des facteurs N (équation 5-19) associés aux 6 modes étudiés, initialisés aux trois amplitudes $\varepsilon_{m,n}$ précédentes. Sur cette figure sont aussi représentés les résultats issus d'une analyse PSE linéaire, permettant d'évaluer l'importance de la prise en compte des interactions modales. Nous pouvons ainsi observer que pour les amplitudes initiales $\varepsilon_{m,n} = 10^{-6}$ et 10^{-5}, les solutions linéaires et faiblement non linéaires sont quasiment identiques, les évolutions des facteurs N étant similaires. Ainsi, comme attendu, les résultats PSE linéaires sont retrouvés pour de très petites amplitudes. Pour une amplitude initiale $\varepsilon_{m,n} = 10^{-4}$, des différences apparaissent : si les modes naturellement dominants ne sont pas modifiés, il n'en est pas de même pour les autres modes. Ainsi, par résonance harmonique, les modes $n = 1$ et $n = 4$ sont sensiblement altérés par les modes dominants $n = 2$ et $n = 3$, tandis que les modes $n = 5$ et $n = 6$ sont modifiés de manière plus significative. L'apparition d'effets faiblement non linéaires à partir de $\varepsilon_{m,n} = 10^{-4}$ est retrouvée dans les travaux de Salgado *et al.* [2010], en supposant la définition de l'amplitude initiale $\varepsilon_{m,n}$ identique, c'est-à-dire portant sur le maximum d'amplitude de vitesse axiale $\hat{u}_x$.

Ces observations se retrouvent ainsi sur les figures V.9 et V.10, illustrant respectivement les évolutions des parties réelle et imaginaire des nombres d'onde axiaux $\alpha_{m,n}$. Pour les deux plus basses amplitudes, les évolutions du nombre d'onde α_r et du coefficient d'amplification α_i sont relativement peu modifiées. Pour l'amplitude initiale la plus élevée, d'importants écarts sont observés par rapport à la théorie linéaire, affectant largement le nombre d'onde α_r et plus modérément le coefficient d'amplification α_i. Les modes dominants $n = 2$ et 3 restent quant à eux inchangés.

L'ensemble de ces résultats est trop limité et ne nous permet pas de conclure sur la pertinence d'une modélisation faiblement non linéaire pour l'évaluation des instabilités se développant dans

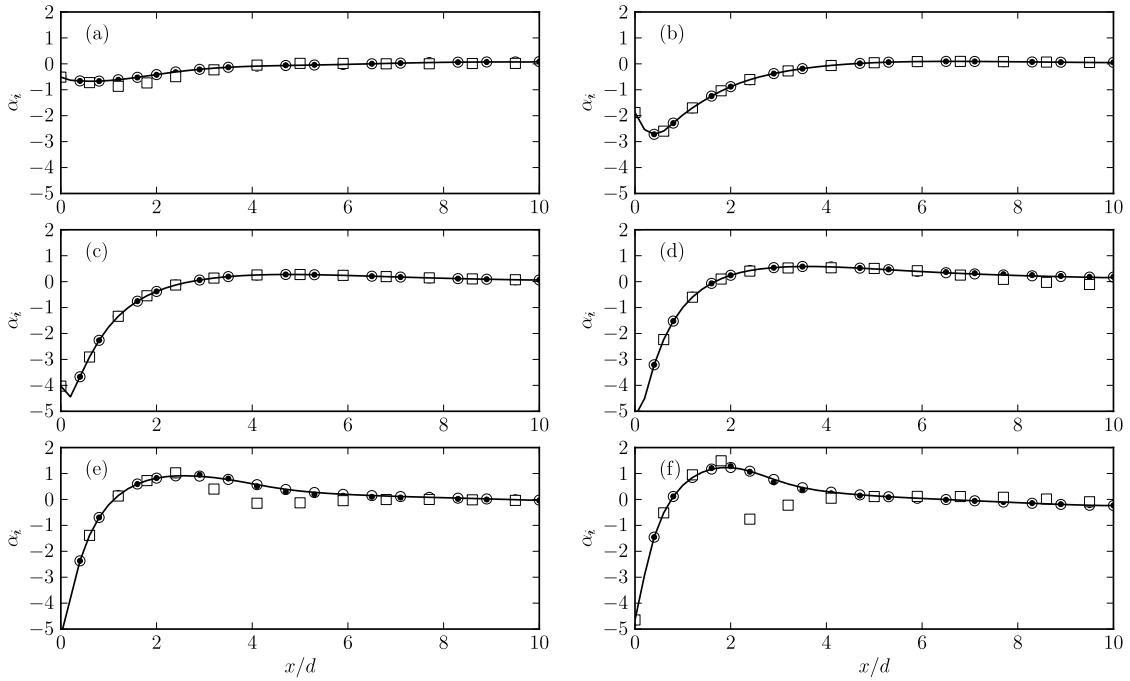


Figure V.10 – *Évolution du coefficient d'amplification α_i des 6 modes axisymétriques harmoniques présentés sur la figure V.8.*

un jet libre, simple ou double-flux. L'analyse menée ici est seulement exploratrice, préparant le terrain pour de futurs travaux. Ces résultats suggèrent cependant que nous ne pouvons pas écarter la possibilité d'un effet faiblement non linéaire sur le développement de ces instabilités pour les amplitudes initiales maximales étudiées ($\varepsilon_{m,n} = 10^{-4}$), surtout sur les modes résonants directement influencés par les modes dominants. Si les amplitudes initiales se révèlent inférieures, il semblerait qu'un modèle linéaire soit amplement suffisant pour la modélisation de ces perturbations. Les travaux de Rodríguez *et al.* [2011] vont dans le sens de cette dernière remarque.

Enfin, en supposant que les interactions faiblement non linéaires ont une importance dans le développement des instabilités, il est intéressant d'étudier l'effet ainsi engendré sur les perturbations de pression en dehors du jet. En effet, nous nous intéressons avant tout à la solution en champ hydrodynamique proche du jet et par conséquent au rayonnement acoustique induit. La figure V.11 illustre ainsi les évolutions axiales des perturbations de pression en dehors du jet, sur une surface cylindrique de rayon $r/d = 1.0$. Nous y comparons les solutions linéaires aux solutions faiblement non linéaires obtenues pour une amplitude initiale des modes $\varepsilon_{m,n} = 10^{-5}$. Conformément aux précédents résultats (mais qui eux portaient sur l'énergie cinétique des paquets d'onde, le facteur N utilisé étant défini au moyen de l'amplitude A_1 par l'équation 5-19), nous observons bien une excellente correspondance entre les différentes solutions, les perturbations issues des calculs linéaires ayant été ajustées en amplitude par $\varepsilon_{m,n}$. En comparaison, la figure V.12 représente ces mêmes grandeurs mais obtenues pour des calculs faiblement non linéaires réalisés pour une amplitude initiale des modes $\varepsilon_{m,n} = 10^{-4}$. Sur cette figure, nous observons que les perturbations de pression des modes dominants sont quasiment inchangées, tandis que celles des modes $n = 1$, 5 et 6 présentent d'importantes modifications. En particulier, ces paquets d'ondes sont plus compacts, et donc potentiellement acoustiquement plus efficaces par le mécanisme de modulation d'amplitude. Bien entendu, ces conclusions restent préliminaires et une étude plus approfondie sera nécessaire dans la continuité de ce qui a pu être mené au cours de ces premiers travaux exploratoires.

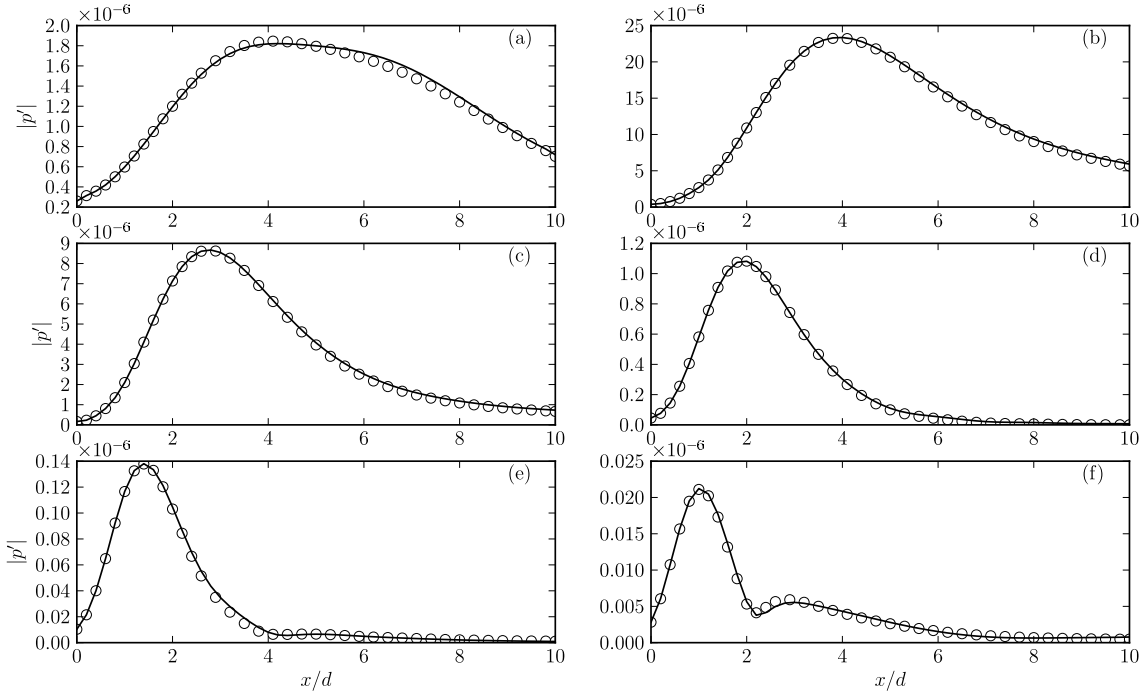


Figure V.11 – *Évolution axiale des amplitudes des perturbations de pression $|p'_{m,n}|$ des 6 modes axisymétriques (a) $St = 0.20$; (b) $St = 0.40$; (c) $St = 0.60$; (d) $St = 0.80$; (e) $St = 1.00$ et (f) $St = 1.20$ évaluées sur une surface cylindrique de rayon $r/d = 1.0$ et obtenues au moyen d'une modélisation PSE non linéaire (○) initialisée avec $\varepsilon_{m,n} = 10^{-5}$, et comparées aux résultats d'une analyse PSE linéaire (——).*

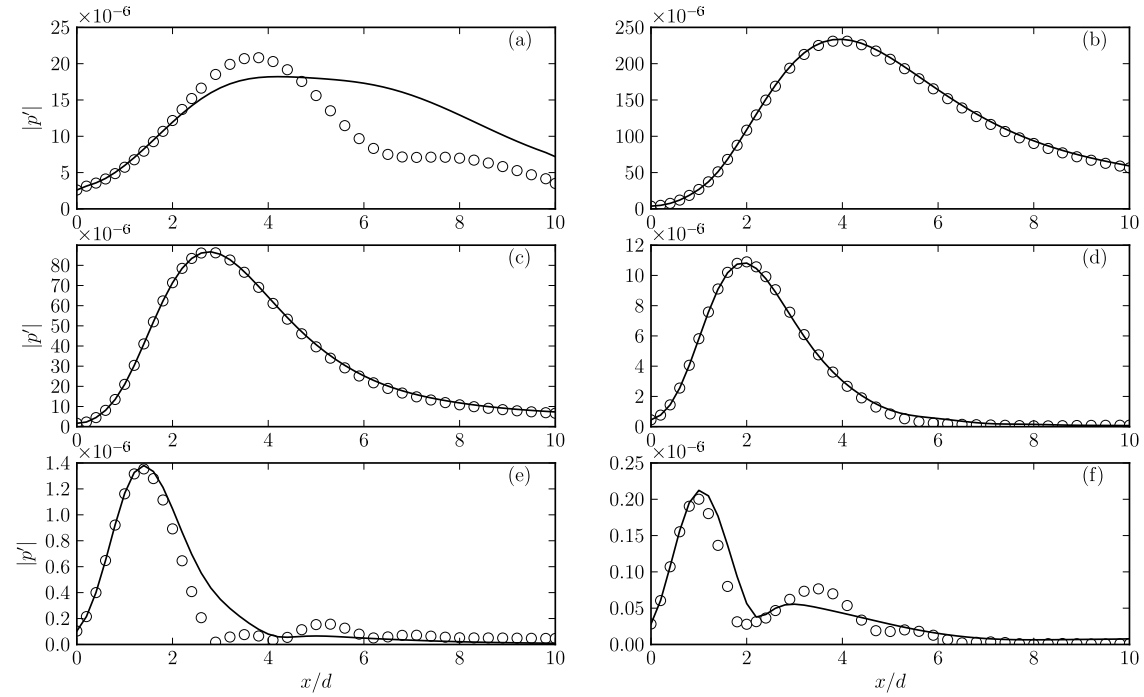


Figure V.12 – *Voir la figure V.11 ; calculs PSE non linéaires réalisés avec $\varepsilon_{m,n} = 10^{-4}$.*

V.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons développé un modèle PSE faiblement non linéaire basé sur les équations d'Euler compressibles. Nous avons restreint l'emploi de cette modélisation à l'étude des instabilités se développant dans des jets libres, en considérant donc comme redondante la prise en compte des modes stationnaires déformant l'écoulement porteur, cette déformation étant déjà présente dans le champ moyen du jet turbulent. Nous avons par la suite exposé les méthodes retenues dans la résolution du système PSE non linéaire, avant de les appliquer à deux cas d'étude très simples. En effet, l'objectif était ici de mettre en évidence la cohérence de notre méthode, sans avoir eu cependant la possibilité de valider les résultats par rapport à des calculs exacts, par exemple obtenus par LES ou DNS. De telles comparaisons sont nécessaires à l'avenir afin d'assurer la qualité de notre modélisation. Nous avons néanmoins appliqué ce modèle au premier cas d'un écoulement parallèle incompressible, mettant en évidence un mécanisme de résonance d'harmoniques fréquentielles pouvant considérablement modifier la dynamique d'un mode. Dans la continuité de ce cas d'étude, nous avons ensuite considéré un jet simple analytique incompressible afin d'aborder l'étude de l'effet d'un tel mécanisme résonant sur la dynamique de modes harmoniques axisymétriques initialisés à des amplitudes comparables à celles retrouvées dans des jets libres. Le caractère très exploratoire de ce dernier cas ne nous permet pas de conclure quant à la pertinence d'une telle modélisation en vue de décrire l'évolution des perturbations dans un jet libre. En comparaison d'autres travaux, il semblerait qu'une modélisation linéaire soit suffisante. Cependant, si ces interactions modales jouent un rôle, l'effet ici observé est négligeable pour les modes dominants, mais modifie significativement la forme des modes résonants, pouvant alors modifier leurs caractéristiques en champ hydrodynamique proche, et donc en champ acoustique lointain. Enfin, le développement de ce modèle PSE non linéaire est une première étape ouvrant la voie vers l'étude du contrôle hydrodynamique ou acoustique des instabilités de jets.

Chapitre VI

Conclusions et perspectives

VI.1 Conclusions de l'étude

Cette étude s'inscrit dans un contexte de modélisation et d'identification de sources aéroacoustiques dans des jets à double flux coaxiaux. Au delà de notre étude, la finalité de telles recherches se situe dans la compréhension des mécanismes générateurs de bruit, en vue, à terme, d'une réduction du rayonnement acoustique des jets. Particulièrement, nous nous sommes intéressés à la description de structures turbulentes cohérentes évoluant dans de tels jets, structures équivalentes à des ondes d'instabilité, dans le but d'apporter des éléments de réponse aux questions directrices suivantes : pouvons-nous modéliser précisément et simplement l'évolution de ces structures, même dans le cas complexe d'un jet double-flux coaxial ? Sommes-nous en mesure de retrouver ces structures dans les mesures réalisées en champ proche de pression ? Ces structures peuvent-elles contribuer au rayonnement acoustique observé en champ lointain, même dans le cas de jets subsoniques ? Et si tel est le cas, quelle est la part du rayonnement acoustique de ces structures dans le champ lointain mesuré ? Enfin, la complexité de la turbulence rend-elle nécessaire l'emploi d'un modèle non linéaire pour décrire de manière satisfaisante l'évolution de telles structures ? Ces questions ont chacune motivé le développement d'un chapitre de cette étude.

Ainsi, dans un premier temps, nous avons développé un modèle PSE linéaire basé sur les équations d'Euler perturbées décrivant la dynamique des ondes d'instabilité hydrodynamiques de type Kelvin-Helmholtz, contrairement aux modèles PSE linéaires rapportés dans la littérature où les équations visqueuses sont employées. L'ensemble de nos résultats suggère qu'un tel modèle est suffisant et adapté à la description des ondes d'instabilité étudiées, la viscosité jouant un rôle mineur. Les méthodes numériques de résolution des systèmes d'équations linéaires homogènes considérés se sont avérées appropriées, même pour l'étude des écoulements complexes de jets à double flux. Notamment, dans la direction radiale, une approche de collocation spectrale multidomaines a été employée. Nous observons cependant que notre approche gagnerait à être plus flexible sur la discrétisation radiale utilisée : en effet, le maillage actuel n'évolue pas dans la direction de l'écoulement, rendant parfois la discrétisation délicate puisque l'écoulement, lui, s'évase. Dans la direction axiale, le choix d'un schéma numérique d'ordre 1 s'est montré adéquat, pourvu que le pas d'avancement axial dans la méthode de marche soit suffisamment fin pour obtenir des solutions convergées. Enfin, le choix de la normalisation modifie les amplitudes absolues des perturbations calculées, mais n'a pas d'influence sur la forme des solutions, et donc sur les amplitudes relatives. Ces quelques limites n'ont pas eu d'impact notable dans nos travaux. Nous avons ainsi validé la modélisation et les méthodes de résolution sur deux cas rapportés dans la littérature, celui d'un jet incompressible et celui d'un jet supersonique. D'excellentes comparaisons ont pu être observées, tant sur les nombres d'onde axiaux complexes que sur les fonctions d'amplitude. Ces cas d'étude nous ont également permis de vérifier qu'une méthode

d'initialisation des calculs PSE au moyen de solutions de stabilité locale est adaptée. L'application de cette modélisation PSE linéaire à des configurations complexes de jets double-flux a mis en évidence la simplicité et la robustesse de l'analyse.

Suite à cette modélisation, nous nous sommes intéressés à l'étude de jets double-flux coaxiaux définis dans le cadre du projet européen CoJeN, représentatifs de jets en condition d'utilisation lors du décollage d'un avion de ligne moderne. Nous avons tout d'abord étudié la nature des fluctuations de pression mesurées en champ de pression proche de deux de ces jets, issus d'une tuyère à géométrie de type *short-cowl*. Nous avons ainsi utilisé des mesures réalisées au moyen d'une antenne linéaire et d'une antenne azimutale, cette dernière ayant été déplacée dans la direction du jet. Sur une gamme de basses fréquences, pour lesquelles un pic de directivité est observé en champ lointain, nous avons ainsi pu mettre en évidence la nature hydrodynamique des fluctuations de pression sur les premiers diamètres du jet, suivie d'une région où des signatures acoustiques ont pu être observées. Une analyse par décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) nous a permis de suggérer la très forte cohérence des perturbations de pression mesurées tout le long de l'antenne linéaire aux fréquences étudiées. Enfin, nous avons été en mesure d'extraire de ces données l'évolution axiale des amplitudes et des phases des perturbations de pression pour des nombres d'onde azimutaux $m \leq 2$, sur la gamme de fréquence étudiée. Nous avons alors pu comparer ces données aux résultats issus de la modélisation PSE linéaire, après avoir obtenu une forme approchée des écoulements moyens mesurés pour ces deux jets. Ces comparaisons ont mis en évidence que, sur la gamme fréquentielle étudiée, les modes instables de la couche de mélange externe (modes KH_o) sont responsables de cette signature hydrodynamique dominant la région initiale du jet. Ainsi, les instabilités de la couche de mélange externe pilotent principalement cette région du champ hydrodynamique proche. En particulier, la croissance de ces modes, ainsi que l'évolution axiale des vitesses de phase, sont décrites de manière très satisfaisante par notre modèle linéaire. Ces perturbations de pression mesurées sont donc identifiées à ces ondes d'instabilité. Les modes de la couche de mélange interne (modes KH_i) se développent plus en aval, pour $x > 3\,d_s$. Ces modes semblent être principalement responsables des signatures acoustiques observées dans cette région. Notamment, nous observons que l'augmentation de la vitesse du jet primaire ne modifie pas la croissance des perturbations de pression dans la région initiale, mais altère considérablement les signatures acoustiques mesurées dans cette zone aval. Or un tel changement affecte principalement la dynamique des modes KH_i. Il est toutefois plus difficile de clairement identifier la contribution de ces derniers modes : en effet, notre modèle PSE n'est pas en mesure de reproduire le rayonnement acoustique engendré par ces ondes d'instabilité. Nous attribuons donc les écarts observés dans cette région entre mesures et résultats de stabilité à cette limite de l'approche PSE, mais également au fait que les mesures utilisées contiennent justement ces composantes acoustiques. Ainsi, un positionnement différent de l'antenne dans cette région pourrait éventuellement permettre de se placer dans une région plus "hydrodynamique", et donc plus adaptée pour effectuer des comparaisons par rapport aux résultats PSE. À défaut, il faudrait envisager un moyen de séparer les signatures hydro-acoustiques des mesures, ce que nous n'avons pas pu réaliser. Malgré cela, tout en reconnaissant ces limites, l'ensemble de nos résultats nous permet de suggérer l'importance de ces modes dans la description des mesures, ainsi que la pertinence de notre analyse de stabilité dans l'identification et la description des mécanismes responsables des signatures hydrodynamiques et acoustiques observées.

Dans un troisième temps, nous nous sommes intéressés au rayonnement acoustique associé à ces ondes d'instabilité. Pour cela, sur un exemple bidimensionnel simplifié, nous avons mis en évidence l'incapacité intrinsèque d'un modèle PSE à modéliser le rayonnement acoustique d'un paquet d'onde. Nous avons alors présenté deux méthodes de propagation acoustique basées sur des surfaces de Kirchhoff cylindrique et conique permettant de reconstruire le champ acoustique rayonné à partir de la solution hydrodynamique PSE. Nous avons validé ces approches sur un cas analytique de paquet d'onde similaire à ceux que nous pouvons rencontrer dans l'étude des jets. Ainsi, après calibrage des solutions PSE sur les mesures précédemment obtenues en

champ proche, nous les avons propagées en champ lointain. Les directivités calculées ont alors été comparées aux mesures. Nous remarquons cependant que ces mesures ne donnent pas accès à la répartition énergétique azimutale : ainsi, nous ne pouvons comparer les directivités calculées pour chaque mode azimutal des deux couches de mélange qu'à ces directivités "totales" mesurées et filtrées fréquentiellement. Malgré cela, nous observons que les modes axisymétriques de la couche de mélange interne (modes KH_i) reproduisent de manière remarquable les amplitudes et la direction principale de rayonnement mesurées. Ce résultat suggère donc la très forte dominance acoustique de ces modes en basses fréquences et pour de faibles angles d'observation. Ces résultats de propagation nous permettent également de comparer de manière quantitative le rayonnement acoustique associé aux différents modes considérés. Ainsi, nous observons, au moyen de notre modélisation, que les modes hélicoïdaux de la couche de mélange interne présentent généralement un maximum de puissance acoustique inférieur d'une dizaine de décibels à celui du mode axisymétrique de cette même couche de mélange. Les modes de la couche de mélange externe (modes KH_o), qui sont subsoniques par rapport au milieu ambiant, rayonnent également en champ lointain par un mécanisme de modulation spatiale. Les puissances acoustiques obtenues sont généralement encore inférieures d'une dizaine de décibels à celles des modes hélicoïdaux KH_i. Nous remarquons cependant que pour ces modes KH_o, notre modélisation ne prend pas en compte les aspects de modulation temporelle, pouvant avoir un impact non négligeable sur leur rayonnement acoustique. Nous pouvons cependant raisonnablement conclure sur la dominance acoustique des modes axisymétriques KH_i. Ainsi, notre approche PSE couplée à une méthode complémentaire de propagation acoustique nous a permis d'identifier l'origine hydrodynamique du pic de rayonnement acoustique observé en champ lointain, dans deux configurations complexes de jets double-flux coaxiaux.

Enfin, dans un dernier temps, nous avons exploré l'effet de la prise en compte de faibles non-linéarités sur la dynamique des ondes d'instabilité se développant dans des jets libres. Pour cela, nous avons développé un modèle PSE faiblement non linéaire prenant en compte les interactions entre harmoniques fréquentielles et azimutales. Parmi les hypothèses de modélisation, nous considérons entre autres que, dans le cadre de notre étude, la déformation du champ de base par le mode stationnaire est déjà présente dans l'écoulement moyen qui nous sert d'écoulement porteur. Cela ne serait pas justifiable dans une étude où un forçage supplémentaire serait étudié. Seuls deux cas très simples ont été étudiés, mettant en évidence la cohérence de la modélisation. Nous n'avons cependant pas été en mesure de valider l'approche développée : pour cela, une étude plus approfondie au moyen de résultats de calculs LES ou DNS sur des jets libres et forcés devrait être envisagée. Les résultats de ce dernier chapitre ne permettent donc pas de conclure quant à la pertinence d'un tel modèle non linéaire pour la description des instabilités dans un jet libre, mais ouvrent la voie à des études plus poussées sur le sujet. Cependant, l'ensemble des résultats suggère qu'un modèle PSE linéaire est suffisamment représentatif pour l'étude et la description de ces ondes d'instabilité dans des jets libres, au moins pour les fréquences dominantes.

En conclusion générale, nous avons montré que l'approche retenue, consistant à modéliser les structures cohérentes de grande échelle au moyen d'une approche PSE linéaire, est adaptée et pertinente pour l'étude du champ hydrodynamique de jets complexes, tels que des jets double-flux coaxiaux. Les signatures de ces ondes d'instabilité sont effectivement bien retrouvées à basse fréquence en champ proche des jets libres analysés. Enfin, ces structures sont responsables du pic de directivité acoustique de ces jets mesuré en champ lointain. Nous avons ainsi été en mesure d'identifier les modes acoustiquement dominants et de quantifier leurs contributions.

VI.2 Perspectives

Nous terminons cette étude en ouvrant sur quelques perspectives. Tout d'abord, au cours de cette étude, nous avons été limités dans la quantité d'information disponible dans les mesures de pression réalisées en champ proche. Une analyse plus poussée des caractéristiques de ces

perturbations en champ proche mériterait d'être réalisée, puisque, comme nous l'avons noté précédemment, nous n'avons pas eu la possibilité de séparer distinctement dans les mesures les évolutions des modes KH_o et KH_i qui présentent pourtant des signatures hydrodynamiques et acoustiques bien différentes. Une telle extraction modale permettrait une identification plus nette des modes que nous avons tenté de mettre en évidence. Une approche possible, utilisée dans les travaux de Gudmundsson et Colonius [2011], repose sur la décomposition orthogonale aux valeurs propres des perturbations mesurées et filtrées azimutalement. Cependant, les mesures dont nous disposons ici ne sont pas suffisantes pour appliquer une telle technique. De futurs travaux expérimentaux doivent donc envisager l'utilisation d'un montage présentant des capacités de mesures plus importantes (antennes azimutales multiples en champ proche, et en champ lointain par exemple), ce qui est aujourd'hui réalisé notamment dans les travaux de Reba *et al.* [2012] et de Suzuki et Colonius [2006].

Ensuite, une alternative à ces contraintes expérimentales se situe dans l'utilisation de résultats de calculs LES. En effet, dans ce cas, la quantité d'information disponible est bien supérieure et permet d'envisager des techniques de diagnostic sophistiquées. De tels travaux basés sur l'analyse de champs instationnaires LES et cherchant à explorer les mécanismes générateurs de bruit dans un jet sont par exemple entrepris par Cavalieri *et al.* [2011]. Des méthodes similaires pourraient être envisagées afin de réaliser des comparaisons plus fines par rapport aux résultats PSE. D'autres approches sont également envisageables : à l'inverse, nous pouvons imaginer utiliser les solutions PSE comme une base de modes sur laquelle nous pouvons décomposer le champ complet des perturbations calculées. Ainsi, en prenant par exemple un jet simple servant de référence et un jet identique, mais soumis à une perturbation visant à modifier la dynamique des structures turbulentes, l'utilisation d'une telle base pourrait éventuellement mettre en évidence précisément de quelle manière ce jet a été altéré.

Nous voyons alors qu'un tel outil peut être envisagé comme un moyen d'explorer le contrôle des jets, comme il a pu auparavant être utilisé pour étudier le contrôle des couches limites. Ainsi, dans la continuité directe de nos travaux, nous pouvons imaginer appliquer ces outils aux autres configurations analysées au cours du projet CoJeN, et pour lesquelles des chevrons ont été placés aux lèvres de la tuyère externe. Une analyse de stabilité de type PSE permettrait de mettre en lumière les effets d'un tel dispositif sur la dynamique des différents modes instables et sur le bruit rayonné en champ lointain, et ce comparativement aux jets nominaux ici étudiés. L'effet précis sur les modes d'instabilité de l'utilisation de chevrons, conduisant à une réduction du bruit de jet observé, pourrait alors être étudié. De tels travaux commencent à être entrepris, notamment par Gudmundsson [2010]. Enfin, toujours dans cette thématique de compréhension des mécanismes générateurs de bruit et de contrôle de l'aéroacoustique des jets, nous pouvons imaginer utiliser les PSE non linéaires afin de définir des stratégies de contrôle des modes similaires à celles développées dans l'étude des couches limites : l'excitation d'un mode acoustiquement inefficace pourrait éventuellement altérer, par résonance, la dynamique d'un mode acoustiquement dominant en vue d'en réduire le rayonnement.

Chapitre VII

Annexes

Sommaire

VII.1 Analyse de stabilité locale sur le cas d'étude COTP2 180
VII.2 Mise en évidence d'une difficulté de calcul de mode par PSE en présence de plusieurs instabilités 184

VII.1 Analyse de stabilité locale sur le cas d'étude COTP2

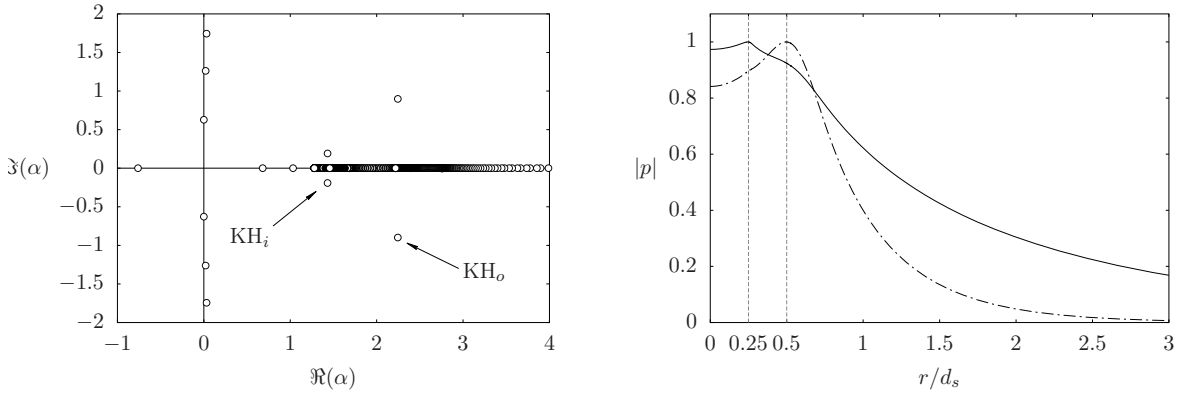
L'analyse PSE réalisée dans la section III.3 sur le cas COTP2 est ici complétée par une analyse de stabilité locale (voir la section I.4.1) permettant de mettre en évidence certaines caractéristiques des modes étudiés.

Nous réalisons ici une analyse de stabilité locale en fin de cône potentiel du jet secondaire, à l'abscisse $x/d_s = 3.0$. En effet, à une telle abscisse les instabilités des deux couches de mélange sont toujours présentes, celles de la couche de mélange externe approchant leurs abscisses de maximum d'amplification. De plus, en se basant sur les travaux de Tinney et Jordan [2008], cette région du jet a été identifiée comme source de rayonnement acoustique. Une étude des caractéristiques des modes instables peut donc être instructive.

Malgré la surestimation des gradients des profils de vitesse du jet COTP2 mentionnée dans la section III.3, nous estimons que l'analyse suivante reste pertinente. En effet, à l'abscisse considérée ci-après, le rapport des épaisseurs de vorticité locale des deux couches de mélange $((\delta_\omega)_i/(\delta_\omega)_o)$ issu des profils mesurés par PIV d'une part, et des profils de l'écoulement porteur analytique reconstruit à partir de calculs LES d'autre part, sont sensiblement équivalents. Ainsi, les ordres de grandeur relatifs entre les modes des couches de mélange interne et externe établis ici et basés sur cette quantité restent représentatifs.

Ainsi, à cette abscisse, pour le mode axisymétrique $m = 0$ et pour $\mathrm{St}_{d_s} = 0.261$, les deux modes hydrodynamiques identifiés dans la section III.3 sont retrouvés sur la figure VII.1(a) présentant le spectre des valeurs propres. À ces deux modes hydrodynamiques KH_o et KH_i sont associés des vecteurs propres, dont les amplitudes de pression sont représentées sur la figure VII.1(b). Le mode KH_o atteint son maximum de pression dans la région de la couche de mélange externe ($r/d_s = 0.5$) et le mode KH_i dans la région de la couche de mélange interne ($r/d_s = 0.25$). Comme pour les résultats de stabilité locale déjà présentés à l'abscisse initiale $x/d_s = 0$, le taux d'amplification $-\Im(\alpha)$ du mode KH_o de la couche de mélange externe est bien plus important que celui du mode KH_i de la couche de mélange interne. Cette continuité suggère la dominance locale des instabilités de la couche de mélange externe à cette fréquence d'étude.

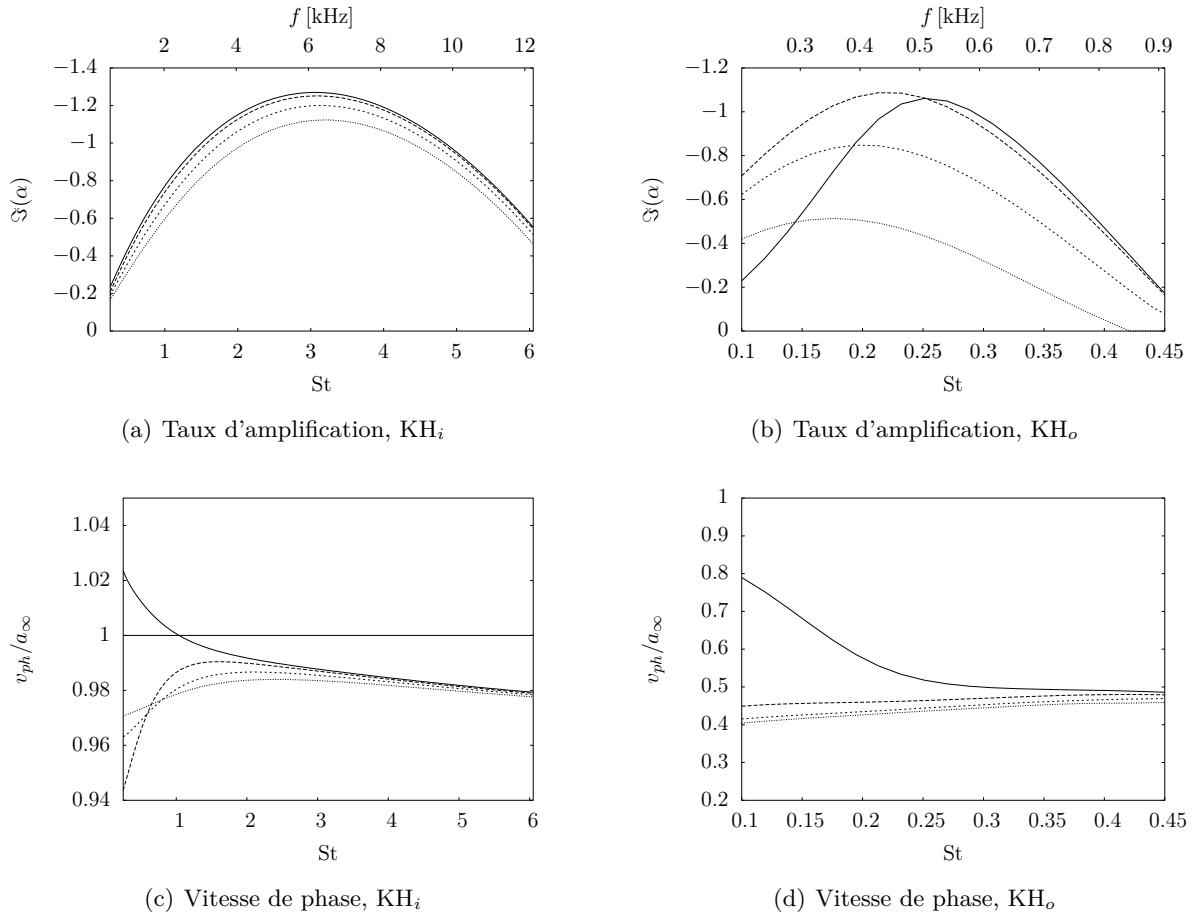
Afin de déterminer les caractéristiques des modes d'instabilité KH_o et KH_i à cette position axiale, nous étudions les dépendances en fréquence des taux d'amplification et des vitesses de phase, illustrées sur la figure VII.2. Ainsi, il apparaît qu'à cette abscisse, le taux d'amplification maximum du mode de la couche de mélange interne est obtenu pour un nombre de Strouhal



(a) Spectre des valeurs propres

(b) Amplitude des vecteurs propres

Figure VII.1 – *Résultats de l'analyse de stabilité locale présentant (a) le spectre des valeurs propres du jet COTP2 à l'abscisse $x/d_s = 3.0$, pour un nombre de Strouhal $St_{d_s} = 0.261$ et un nombre d'onde azimutal $m = 0$, ainsi que (b) l'amplitude des vecteurs propres de pression normalisés associés aux deux modes hydrodynamiques KH_i (——) et KH_o (- · - · -).*



(a) Taux d'amplification, KH_i

(b) Taux d'amplification, KH_o

(c) Vitesse de phase, KH_i

(d) Vitesse de phase, KH_o

Figure VII.2 – *Étude paramétrique du taux d'amplification local α_i et de la vitesse de phase v_{ph} des modes KH_i (figures (a) et (c)) et KH_o (figures (b) et (d)) en fonction du nombre de Strouhal St_{d_s} à l'abscisse $x/d_s = 3.0$ et pour les nombres d'onde azimutaux $m = 0$ (——) ; $m = 1$ (- - - -) ; $m = 2$ (- - -) ; $m = 3$ (·····).*

voisin de $St = 3.0$ (figure VII.2(a)). Le taux d'amplification maximum du mode KH_o, quant à lui, est obtenu pour un nombre de Strouhal d'un ordre de grandeur inférieur, soit $St = 0.25$ (figure VII.2(b)).

Afin d'étudier la validité de ce résultat, nous pouvons établir un parallèle avec les travaux de Monkewitz et Huerre [1982]. Ces derniers ont étudié l'influence des rapports de vitesse de deux écoulements parallèles, formant une couche de mélange bidimensionnelle incompressible, sur la stabilité spatiale du problème. Pour cela, ils définissent un paramètre de rapport de vitesse entre les deux écoulements défini par

$$r_u = 2\,\frac{\overline{u}_1 - \overline{u}_2}{\overline{u}_1 + \overline{u}_2} \tag{7-1}$$

où $\overline{u}_1$ et $\overline{u}_2$ sont les vitesses moyennes des deux écoulements. Pour la couche de mélange interne, nous avons alors $\overline{u}_1 = \overline{u}_i$ la vitesse du jet primaire et $\overline{u}_2 = \overline{u}_o$ la vitesse du jet secondaire ; pour la couche de mélange externe, nous avons $\overline{u}_1 = \overline{u}_o$ et $\overline{u}_2 = 0$. On remarque ici que cette définition est différente de celle du rapport de vitesse $\lambda = \overline{u}_i/\overline{u}_o$ utilisé jusqu'à présent. Dans leurs travaux, ces auteurs définissent également un adimensionnement des fréquences en fonction des caractéristiques de la couche de mélange, soit

$$\omega = \omega^* \left(\frac{\delta_\omega}{4\overline{U}}\right) \tag{7-2}$$

où δ_ω est l'épaisseur de vorticité locale et $\overline{U}$ la vitesse moyenne des deux écoulements formant la couche de mélange considérée (soit $\overline{U}_i = (\overline{u}_i + \overline{u}_o)/2$ pour la couche de mélange interne et $\overline{U}_o = \overline{u}_o/2$ pour la couche de mélange externe). Ainsi, dans ces travaux, Monkewitz et Huerre [1982] montrent que la fréquence adimensionnée ω pour laquelle le taux d'amplification atteint son maximum ($\omega_{\max}$) est relativement peu dépendante du paramètre de rapport de vitesse r_u.

L'application de ce résultat aux deux couches de mélange du jet double-flux que nous étudions à l'abscisse $x/d_s = 3.0$ se traduit par

$$(\omega^*_{\max})_i \left(\frac{\delta_\omega}{\overline{U}}\right)_i \approx (\omega^*_{\max})_o \left(\frac{\delta_\omega}{\overline{U}}\right)_o . \tag{7-3}$$

Nous estimons les paramètres δ_ω à partir des profils de vitesse des deux couches de mélange : des profils en tangente hyperbolique sont localement ajustés au sens des moindres carrés, nous permettant d'évaluer les épaisseurs de vorticité locales $(\delta_\omega)_i = 0.07\, d_s$ et $(\delta_\omega)_o = 0.29\, d_s$. Ainsi, nous obtenons l'ordre de grandeur suivant,

$$(\omega^*_{\max})_i \approx 10\, (\omega^*_{\max})_o \ , \tag{7-4}$$

en accord avec l'observation précédente effectuée sur la figure VII.2. Nos résultats de stabilité locale obtenus sur un jet axisymétrique semblent donc correctement reproduire les tendances observées dans l'étude de la stabilité locale des couches de mélange bidimensionnelles incompressibles.

Ainsi, nous pouvons conclure que sur la bande fréquentielle d'étude (basses fréquences, $St_{d_s} < 0.5$), et dans cette région du jet en fin de cône potentiel secondaire, les modes d'instabilité hydrodynamique de la couche de mélange externe sont localement dominants. Les modes KH_i sont quant à eux dominants à des fréquences significativement plus élevées. Bien entendu, ces résultats ne traduisent que des tendances locales, et ne sont pas nécessairement représentatifs de l'évolution axiale des perturbations. Pour cela, une étude axiale (telle que l'analyse PSE réalisée) est nécessaire pour conclure quant à la dominance des modes. Ces résultats sont cependant localement en accord avec les observations expérimentales effectuées dans nos travaux sur la dominance des modes KH_o dans la région initiale du jet. De observations similaires sont rapportées dans les études expérimentales de Ko et Kwan [1976] réalisées sur jets double-flux ayant des rapports de vitesse λ équivalents aux jets ici étudiés.

De plus, cet ordre de grandeur entre les fréquences de maximum d'amplification des modes KH_o et KH_i fait également écho à nos observations sur les mesures de fluctuation de pression en champ proche de la section III.2.4. En effet, lors de l'analyse spatio-fréquentielle de ces mesures sur les cas *short-cowl*, nous avons observé deux lobes énergétiques sur la figure III.15. Le premier, le plus énergétique, se situe autour d'une fréquence de 100 Hz. Le second, moindre mais amplifié par l'augmentation de vitesse du jet primaire, se situe autour de 1 kHz, soit un ordre de grandeur supérieur. Cette dépendance énergétique aux conditions du jet primaire ainsi que cet ordre de grandeur retrouvé suggèrent fortement un lien entre ces deux lobes à basse et plus haute fréquence, et, respectivement, les modes KH_o et KH_i étudiés.

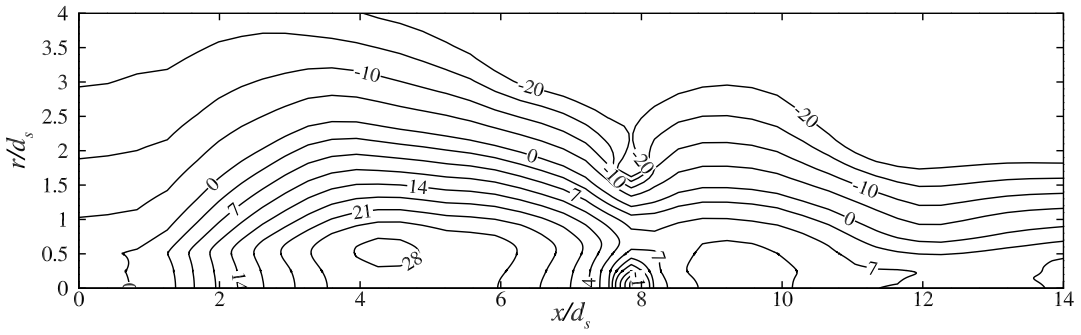
Enfin, cette étude de stabilité locale met également en évidence la dépendance des vitesses de phase locales des modes KH_i et KH_o en fonction de la fréquence, illustrée sur les figures VII.2(c) et VII.2(d). Ainsi, les modes de couche de mélange interne sont quasiment soniques à cette abscisse du jet par rapport à la vitesse du son dans l'atmosphère. Les modes de la couche de mélange externe sont quant à eux subsoniques, avoisinant une vitesse de phase de 0.5 pour l'ensemble des modes pour $St > 0.2$. Ces résultats peuvent être mis en perspective des mesures détaillées dans la section III.2 et obtenues dans l'étude du cas SCTP2. En effet, dans cette section, nous avons suggéré la dominance des modes KH_o dans la région hydrodynamique initiale des jets étudiés, puis la présence d'une signature sonique dans une région plus en aval préférentiellement associée aux modes KH_i. Or, les vitesses de phase rapportées et associées aux deux régions se situaient autour de 0.6 et de 1.0. Encore une fois, ces résultats ne sont que des résultats locaux, mais ils contribuent à établir un lien entre les observations et notre modélisation. L'analyse

PSE de la section III.3 étend ainsi cette approche locale en nous permettant d'étudier aisément l'évolution axiale des modes.

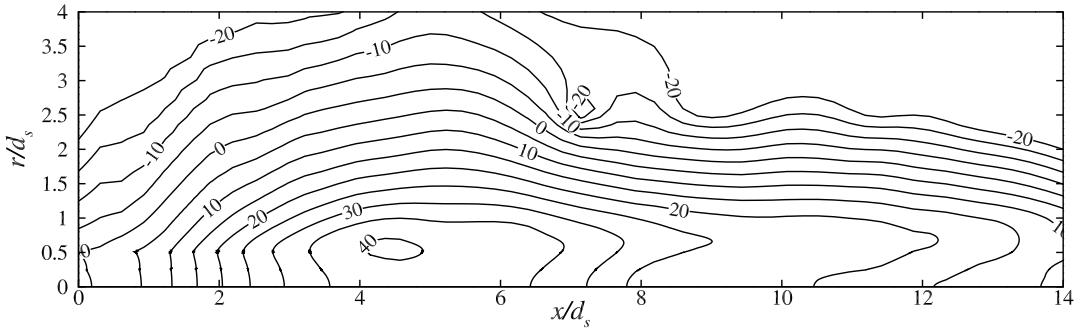
VII.2 Mise en évidence d'une difficulté de calcul de mode par PSE en présence de plusieurs instabilités

Dans la section III.3, nous avons effectué une analyse PSE des modes de la couche de mélange externe (modes KH_o) sur le cas COTP2. Nous étudions ici la résolution PSE des modes de la couche de mélange interne (modes KH_i) pour cette même condition, mettant en évidence une limite de notre approche. L'objectif est ici de montrer qu'en présence de plusieurs fortes instabilités, l'initialisation des calculs PSE est critique, une telle modélisation ne comportant aucun mécanisme de suivi d'un mode spécifique.

En effet, dans ces calculs, sur la gamme fréquentielle étudiée, les modes KH_i initialisés par l'analyse de stabilité locale ne se développent pas dans la couche de mélange interne, comme attendu, mais s'amplifient dans la couche de mélange externe. La figure VII.3(a) met ainsi en évidence ce résultat en présentant le champ de perturbation de pression issu du calcul PSE et initialisé par le mode local KH_i (dont le maximum de pression est situé dans la couche de mélange interne, soit $r/d_s = 0.25$) avec $St_{d_s} = 0.261$ et $m = 0$. Le maximum d'amplification est observé dans la couche de mélange externe, à la position $r/d_s = 0.50$ et $x/d_s = 4.4$. En comparaison, le calcul PSE du mode KH_o avec les mêmes paramètres est représenté sur la figure VII.3(b), le maximum d'amplification étant situé dans une région identique. Ainsi, jusqu'à une abscisse d'environ $x/d_s < 7$, les deux champs de pression ici représentés ont des formes très similaires, semblant donc être associées au développement du mode KH_o. Au delà de cette abscisse, les champs diffèrent et la figure VII.3(a) présente un second maximum local, plus en aval, a priori associé au développement du mode KH_i. La solution PSE associée à l'étude du mode KH_i semble donc "contaminée" par le mode KH_o.



(a) Calculs PSE initialisés avec le mode KH_i local



(b) Calculs PSE initialisés avec le mode KH_o local

Figure VII.3 – *Contours du champ des perturbations de pression $|p'|$ (en dB) issues de calculs PSE initialisés avec le mode de la couche de mélange interne (mode KH_i) et avec celui de la couche de mélange externe (mode KH_o) pour $St_{d_s} = 0.261$ et $m = 0$.*

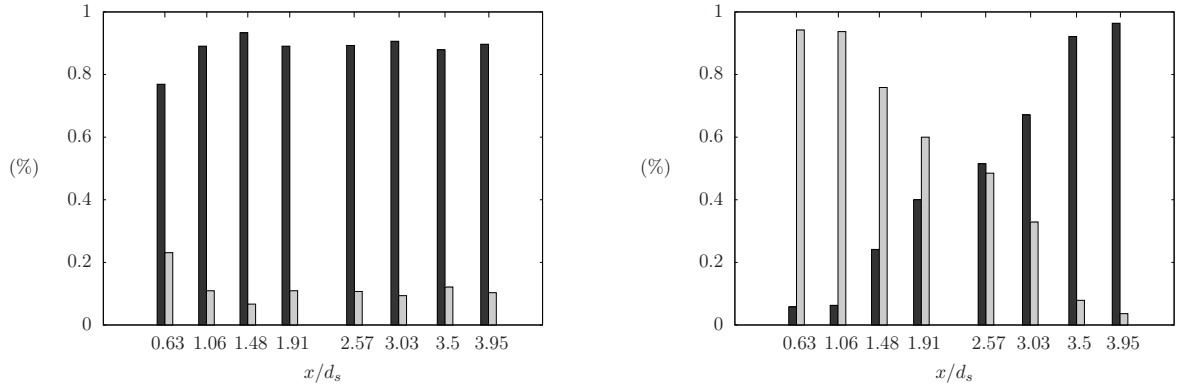


Figure VII.4 – *Contributions approximatives des modes KH_o (: $|c_o|/(|c_o|+|c_i|)$) et KH_i (: $|c_i|/(|c_o|+|c_i|)$) à la solution PSE à différentes abscisses dans les cas où l'initialisation est réalisée (a) avec le mode local KH_o et (b) avec le mode local KH_i, pour $St = 0.261$ et $m = 0$.*

Afin d'explorer cette hypothèse, nous cherchons un moyen d'évaluer les contributions relatives des modes KH_i et KH_o aux solutions PSE obtenues. Une telle démarche n'est pas triviale, puisque nous ne pouvons visiblement pas être certains du contenu des solutions PSE. Nous choisissons donc de comparer les résultats PSE ici obtenus avec les solutions issues d'analyses de stabilité locale réalisées à différentes abscisses. Pour cela, nous faisons l'hypothèse que les fonctions d'amplitude de l'analyse PSE ne sont pas fondamentalement différentes des fonctions propres de l'analyse de stabilité locale. Cette hypothèse semble particulièrement valable pour les fonctions d'amplitude des perturbations de pression, lesquelles présentent des variations radiales bien moins importantes que les fonctions d'amplitude de vitesse ou de masse volumique. Ainsi, afin d'effectuer une telle comparaison, nous considérons une base non orthogonale constituée des fonctions propres de pression normalisées des modes KH_i et KH_o, soit $(\underline{\hat{p}}_i, \underline{\hat{p}}_o)$, et un produit scalaire défini par

$$\underline{\phi}.\underline{\psi} = \int_0^\infty \underline{\phi}^\dagger \underline{\psi}\, \mathrm{d}r\,. \tag{7-5}$$

La projection des fonctions d'amplitude $\underline{\hat{p}}_{PSE}$ issues de l'analyse PSE sur la base précédente au moyen de ce produit scalaire nous permet d'évaluer, de manière approximative, la contribution des modes KH_i et KH_o dans la solution PSE calculée. Bien entendu, cette base étant non complète et non orthogonale, cette analyse est très limitée mais elle permet néanmoins de mettre en évidence des tendances. Nous obtenons alors un couple de coefficients complexes (c_i, c_o) tel que $\underline{\hat{p}}_{PSE} \approx c_i \underline{\hat{p}}_i + c_o \underline{\hat{p}}_o$.

La figure VII.4(a) nous permet d'évaluer la validité de cette démarche. Ainsi, sur cette figure est représentée une évaluation approximative des contributions relatives des modes KH_i et KH_o à la solution PSE obtenue dans l'étude du mode KH_o. L'analyse PSE de ce cas ne posant pas de problème apparent, la contribution du mode KH_i devrait en toute rigueur être nulle. Cependant, les approximations grossières effectuées ici, notamment le fait que les modes de stabilité locale ne soient pas identiques aux modes PSE, se traduisent ici par des valeurs non nulles. Néanmoins, la tendance montrant la dominance du mode KH_o est reproduite de manière très satisfaisante. La figure VII.4(b) présente l'application de cette approche à la solution PSE obtenue dans l'étude du mode KH_i. On observe ici que, si le mode KH_i est effectivement initialement dominant, le mode KH_o s'amplifie et finit par dominer la solution PSE.

Un tel résultat suggère donc que, malgré l'initialisation effectuée au moyen de la solution locale associée au mode KH_i, la solution PSE n'est pas représentative de l'unique développement du mode KH_i, mais fait également intervenir le mode KH_o. La figure VII.5 met ainsi en évidence la fonction propre de pression du mode local KH_i servant à initialiser le calcul PSE à $x/d_s = 0$,

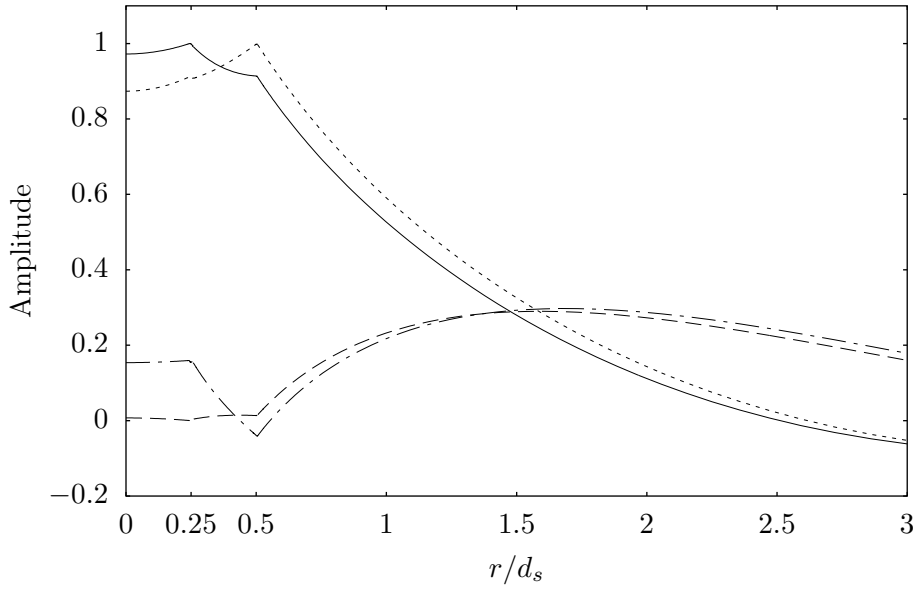


Figure VII.5 – *Parties réelle et imaginaire des fonctions propres de pression normalisées issues de l'analyse de stabilité locale à $x_0 = 0$ du mode KH_i ($\Re(\hat{p})$:——, $\Im(\hat{p})$:- - - -) et issues de l'analyse PSE correspondante à $x_1 = 0.2d_s$ ($\Re(\hat{p})$:·····, $\Im(\hat{p})$:-·-·-) pour $St = 0.261$ et $m = 0$.*

ainsi que la fonction d'amplitude issue du calcul PSE à l'abscisse suivante $x_1 = x_0 + dx$, soit après un seul pas d'avancement axial ($dx = 0.2\,d_s$). Cette dernière présente clairement des composantes représentatives du mode de la couche de mélange externe, le maximum de pression étant observé autour de $r/d_s = 0.5$. Il semble alors que l'incapacité de notre modélisation à isoler la solution PSE du mode KH_i est à trouver dans l'initialisation même de notre méthode. En effet, les conditions d'initialisation de notre système PSE sont obtenues à partir d'une analyse de stabilité locale. Par conséquent, les modes initiaux ne sont que des formes approchées de la solution PSE. Or, dans notre cas d'étude, cette solution approchée permet effectivement d'initialiser le mode KH_i, mais l'erreur associée semble également être en mesure d'initialiser le mode KH_o. Ce dernier étant beaucoup plus instable que le mode KH_i, il en vient à croître et à dominer la solution PSE.

Ce mécanisme met également en évidence qu'en présence de plusieurs modes instables, l'approche PSE ne garantit pas le suivi d'un seul mode : l'initialisation semble ici critique puisqu'aucun mécanisme explicite de sélection de mode n'est présent dans la résolution PSE. Nous n'avons cependant pas jugé utile d'améliorer notre méthode d'initialisation : cette difficulté n'apparaît que dans l'étude du cas COTP2, pour lequel l'analyse détaillée des modes de la couche de mélange interne n'est pas nécessaire. L'étude des cas SCTP2 et SCTP3 n'est pas confrontée à cette limite, nos analyses PSE débutant dans une région aval du jet où le mode KH_o n'est pas aussi instable.

Bibliographie

Abramowitz, M. et Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, New York.

Adamovich, I. V., Lempert, W. R., Rich, J. et Samimy, M. (2008). Plasma assisted ignition and high-speed flow control : Non-thermal and thermal effects. *In 19th Europhysics Conference on the Atomic and Molecular Physics of Ionized Gases*.

Airiau, C. (1994). *Stabilité linéaire et faiblement non linéaire d'une couche limite laminaire incompressible par un système d'équations parabolisées (PSE)*. Thèse de doctorat, ENSAE.

Akervik, E., Brandt, L., Henningson, D., Hoepffner, J., Marxen, O. et Schlatter, P. (2006). Steady solutions of the Navier-Stokes equations by selective frequency damping. *Physics of Fluids*, 18(6):068102.

Andersson, P., Henningson, D. S. et Hanifi, A. (1998). On a stabilization procedure for the parabolic stability equations. *Journal of Engineering Mathematics*, 33(3):311–332.

Arndt, R. E. A., Long, D. F. et Glauser, M. N. (1997). The proper orthogonal decomposition of pressure fluctuations surrounding a turbulent jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 340:1–33.

Bagheri, S., Schlatter, P., Schmid, P. et Henningson, D. (2009). Global stability of a jet in crossflow. *Journal of Fluid Mechanics*, 624(-1):33.

Bailly, C. et Juvé, D. (1999). A stochastic approach to compute subsonic noise using linearized Euler's equations. *AIAA Paper No. 1999-1872*.

Balakumar, P. (1998). Prediction of supersonic jet noise. *AIAA Paper No. 1998-1057*.

Bertolotti, F. et Colonius, T. (2003). Noise radiation from convected disturbances in the exhaust of commercial jet engines. *In APS Division of Fluid Dynamics Meeting Abstracts*.

Bertolotti, F. P. et Herbert, T. (1991). Analysis of the linear stability of compressible boundary layers using the PSE. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 3:117–124.

Bodony, D. J. et Lele, S. K. (2004). Jet noise prediction of cold and hot subsonic jets using large-eddy simulation. *AIAA Paper No. 2004-3022*.

Bogey, C. et Bailly, C. (2007). An analysis of the correlations between the turbulent flow and the sound pressure fields of subsonic jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 583:71–97.

Bogey, C. et Bailly, C. (2009). Turbulence and energy budget in a self-preserving round jet : direct evaluation using large eddy simulation. *Journal of Fluid Mechanics*, 627:129–160.

Bogey, C. et Bailly, C. (2010). Influence of nozzle-exit boundary-layer conditions on the flow and acoustic fields of initially laminar jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 663:507–538.

Bogey, C., Barré, S., Juvé, D. et Bailly, C. (2009). Simulation of a hot coaxial jet : Direct noise prediction and flow-acoustics correlations. *Physics of Fluids*, 21(3):035105.

Bradshaw, P., Ferriss, D. H. et Johnson, R. F. (1964). Turbulence in the noise-producing region of a circular jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 19:591–624.

Brown, G. L. et Roshko, A. (1974). On density effects and large scales in the turbulent mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 64:775–816.

Cavalieri, A., Rodríguez, D., Jordan, P., Colonius, T. et Gervais, Y. (2012). Wavepackets in the velocity field of turbulent jets. *AIAA Paper 2012-2115*.

Cavalieri, A. V., Daviller, G., Comte, P., Jordan, P., Tadmor, G. et Gervais, Y. (2011). Using large eddy simulation to explore sound-source mechanisms in jets. *Journal of Sound and Vibration*, 330(17):4098 – 4113.

Cavalieri, A. V. G., Jordan, P., Agarwal, A. et Gervais, Y. (2011). Jittering wave-packet models for subsonic jet noise. *Journal of Sound Vibration*, 330:4474–4492.

Cheung, L. C., Bodony, D. J. et Lele, S. K. (2007). Noise radiation predictions from jet instability waves using a hybrid nonlinear PSE-acoustic analogy approach. *AIAA Paper No. 2007-3638*.

Cheung, L. C. et Lele, S. K. (2004). Acoustic radiation from subsonic and supersonic mixing layers with nonlinear PSE. *AIAA Paper No. 2004-0363*.

Coiffet, F., Jordan, P., Delville, J., Gervais, Y. et Ricaud, F. (2006). Coherent structures in subsonic jets : a quasi-irrotational source mechanism ? *International Journal of Aeroacoustics*, 5(1):67–89.

Colonius, T. et Lele, S. K. (2004). Computational aeroacoustics : progress on nonlinear problems of sound generation. *Progress in Aerospace Sciences*, 40:345–416.

Colonius, T., Samanta, A. et Gudmundsson, K. (2010). Parabolized stability equation models of large-scale jet mixing noise. *Procedia Engineering*, 6:64–73. IUTAM Symposium on Computational Aero-Acoustics for Aircraft Noise Prediction.

Crighton, D. G. et Gaster, M. (1976). Stability of slowly diverging jet flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 77:397–413.

Crighton, D. G. et Huerre, P. (1990). Shear-layer pressure fluctuations and superdirective acoustic sources. *Journal of Fluid Mechanics*, 220:355–368.

Crow, S. C. et Champagne, F. H. (1971). Orderly structure in jet turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 48:547–591.

Dahl, M. D. et Morris, P. J. (1997a). Noise from supersonic coaxial jets, part 1 : Mean flow predictions. *Journal of Sound and Vibration*, 200(5):643–663.

Dahl, M. D. et Morris, P. J. (1997b). Noise from supersonic coaxial jets, part 2 : Normal velocity profile. *Journal of Sound and Vibration*, 200(5):665–699.

Dahl, M. D. et Morris, P. J. (1997c). Noise from supersonic coaxial jets, part 3 : Inverted velocity profile. *Journal of Sound and Vibration*, 200(5):701 – 719.

Davies, P. O. A. L., Fisher, M. J. et Barratt, M. J. (1963). The characteristics of the turbulence in the mixing region of a round jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 15:337–367.

Day, M. J., Mansour, N. N. et Reynolds, W. C. (2001). Nonlinear stability and structure of compressible reacting mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 446:375–408.

De Almeida, O. (2008). Semi-empirical methods for coaxial jet noise prediction. Technical Report 326, University of Southampton, ISVR.

Fayard, B. (2010). *Étude et contrôle du bruit de jet par simulation numérique*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.

Fisher, M., Preston, G. et Bryce, W. (1998a). A modelling of the noise from simple coaxial jets, part I : with unheated primary flow. *Journal of Sound and Vibration*, 209(3):385 – 403.

Fisher, M., Preston, G. et Mead, C. (1998b). A modelling of the noise from simple coaxial jets, part II : with heated primary flow. *Journal of Sound and Vibration*, 209(3):405 – 417.

Freund, J. B. (2001). Noise sources in a low-Reynolds-number turbulent jet at Mach 0.9. *Journal of Fluid Mechanics*, 438:277–305.

Freund, J. B., Bodony, D. J. et Lele, S. K. (2002). Turbulence interactions leading to far-field jet noise. *In Proceedings of the 2002 Summer Program, Center for Turbulence Research, Stanford University*.

Freund, J. B., Lele, S. K. et Moin, P. (2000). Numerical Simulation of a Mach 1.92 Turbulent Jet and Its Sound Field. *AIAA Journal*, 38:2023–2031.

Gamet, L., Ducros, F., Nicoud, F. et Poinsot, T. (1999). Compact finite difference schemes on non-uniform meshes. Application to direct numerical simulations of compressible flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 29(2):159–191.

Godrèche, C., Manneville, P. et Castaing, B. (2005). *Hydrodynamics And Nonlinear Instabilities*. Aléa-Saclay. Cambridge University Press.

Goldstein, M. E. (1995). Noise from turbulent shear flows. *In* H. H. Hubbard, éditeur : *Aeroacoustics of Flight Vehicles : Theory and Practice. Volume 1 : Noise Sources*, pages 291–310.

Goldstein, M. E. (2003). A generalized acoustic analogy. *Journal of Fluid Mechanics*, 488:315–333.

Gudmundsson, K. (2010). *Instability Wave Models of Turbulent Jets from Round and Serrated Nozzles*. Thèse de doctorat, California Institute of Technology.

Gudmundsson, K. et Colonius, T. (2009). Parabolized stability equation models for turbulent jets and their radiated sound. *AIAA Paper No. 2009-3380*.

Gudmundsson, K. et Colonius, T. (2011). Instability wave models for the near-field fluctuations of turbulent jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 689:97–128.

Guérin, S. et Michel, U. (2006). Circumferential analysis of the near-flow pressure field of a co-axial subsonic jet. *In 10th CEAS-ASC Workshop : Jet Noise Prediction Methodologies, Recent Developments*, Dublin, Ireland.

Guitton, A., Jordan, P., Laurendeau, E. et Delville, J. (2007). Velocity dependence of the near pressure field of subsonic jets : understanding the associated source mechanisms. *AIAA Paper No. 2007-3661*.

Haj-Hariri, H. (1994). Characteristics analysis of the parabolized stability equations. *Studies in Applied Mathematics*, 92:41–53.

Hardy, P. (2012). *Étude et qualification aérothermodynamique et électrique d'un actionneur*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse.

Herbert, T. (1994). Parabolized stability equations. *In AGARD, Special Course on Progress in Transition Modelling*.

Herbert, T. (1997). Parabolized Stability Equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 29:245–283.

Hussain, A. K. M. F. (1983). Coherent structures - Reality and myth. *Physics of Fluids*, 26:2816–2850.

Jordan, P. (2011). Experimental aeroacoustics and noise source identification. *In CISM Courses and Lectures : Noise sources in turbulent shear flow*.

Jordan, P. et Gervais, Y. (2008). Subsonic jet aeroacoustics : associating experiment, modelling and simulation. *Experiments in Fluids*, 44:1–21. 10.1007/s00348-007-0395-y.

Karabasov, S. A., Afsar, M. Z., Hynes, T. P., Dowling, A. P., McMullan, W. A., Pokora, C. D., Page, G. J. et McGuirk, J. J. (2010). Jet noise : Acoustic analogy informed by large eddy simulation. *AIAA Journal*, 48(7):1312–1325.

Kerhervé, F. et Fitzpatrick, J. (2011). Measurement and analysis of the turbulent length scales in jet flows. *Experiments in Fluids*, 50:637–651. 10.1007/s00348-010-0957-2.

Khavaran, A. (1999). Role of Anisotropy in Turbulent Mixing Noise. *AIAA Journal*, 37:832–841.

Khavaran, A., Krejsa, E. A. et Kim, C. M. (1994). Computation of supersonic jet mixing noise for an axisymmetric convergent-divergent nozzle. *Journal of Aircraft*, 31:603–609.

Khorrami, M. R., Ash, R. L. et Malik, M. R. (1989). Application of spectral collocation techniques to the stability of swirling flows. *Journal of Computational Physics*, 81:206–229.

Ko, N. W. M. et Kwan, A. S. H. (1976). The initial region of subsonic coaxial jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 73:305–332.

Koenig, M., Fourment-Cazenave, C., Jordan, P. et Gervais, Y. (2011). Jet noise reduction by fluidic injection from a rotating plug. *AIAA Paper No. 2011-2899*.

Kwan, A. S. H. et Ko, N. W. M. (1977). The initial region of subsonic coaxial jets. Part 2. *Journal of Fluid Mechanics*, 82:273–287.

Lele, S. K. (1992). Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103(1):16–42.

Lesshafft, L., Huerre, P., Sagaut, P. et Terracol, M. (2006). Nonlinear global modes in hot jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 554:393–409.

Li, F. et Malik, M. R. (1996). On the Nature of PSE Approximation. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 8:253–273.

Lighthill, M. J. (1952). On Sound Generated Aerodynamically. I. General Theory. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 211:564–587.

Lighthill, M. J. (1954). On Sound Generated Aerodynamically. II. Turbulence as a Source of Sound. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 222:1–32.

Lilley, G. M. (1974). On the noise from jets. Rapport technique, AGARD CP-131.

Lilley, G. M. (1995). Jet noise classical theory and experiments. *In* H. H. Hubbard, éditeur : *Aeroacoustics of Flight Vehicles : Theory and Practice. Volume 1 : Noise Sources*, pages 211–289.

Lin, R.-S., Reba, R. A., Narayanan, S., Hariharan, N. S. et Bertolotti, F. P. (2004). Parabolized Stability Equation based analysis of noise from an axisymmetric hot jet. *In 2004 ASME Heat Transfer/Fluids Engineering Summer Conference*, Charlotte, North Carolina USA.

Malik, M. R. et Chang, C.-L. (1997). PSE applied to supersonic jet instability. *AIAA Paper No. 1997-0758*.

Malik, M. R. et Chang, C.-L. (2000). Nonparallel and nonlinear stability of supersonic jet flow. *Computers and Fluids*, 29(3):327–365.

Mathis, R. (2006). *Étude expérimentale du contrôle d'une couche de mélange par décollement piloté : analyse de l'actionneur et application sur un jet*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.

Mattingly, G. E. et Chang, C. C. (1974). Unstable waves on an axisymmetric jet column. *Journal of Fluid Mechanics*, 65:541–560.

McLaughlin, D. K., Morrison, G. L. et Troutt, T. R. (1975). Experiments on the instability waves in a supersonic jet and their acoustic radiation. *Journal of Fluid Mechanics*, 69:73–95.

Michalke, A. (1971). Instabilitat eines kompressiblen runden Freistrahls unter Berucksichtigung des Einflusses der Strahlgrenzschichtdicke. *Z. Flugwiss*, 19(8-9):319–328.

Millet, C. (2003). *Rayonnement des ondes d'instabilités dans les jets supersoniques*. Thèse de doctorat, ENSAE.

Mohseni, K., Colonius, T. et Freund, J. B. (2002). An evaluation of linear instability waves as sources of sound in a supersonic turbulent jet. *Physics of Fluids*, 14:3593–3600.

Mollo-Christensen, E. (1967). Jet noise and shear flow instability seen from an experimenter's viewpoint. *Journal of Applied Mechanics*, 34(1):1–7.

Mollo-Christensen, E. L., Kolpin, M. A. et Martuccelli, J. R. (1964). Experiments on jet flows and jet noise far-field spectra and directivity patterns. *Journal of Fluid Mechanics*, 18:285–301.

Monkewitz, P. A. et Huerre, P. (1982). Influence of the velocity ratio on the spatial instability of mixing layers. *Physics of Fluids*, 25(7):1137–1143.

Moore, C. J. (1977). The role of shear-layer instability waves in jet exhaust noise. *Journal of Fluid Mechanics*, 80:321–367.

Morris, P. J. (1981). Stability of a two-dimensional jet. *AIAA Journal*, 19:857–862.

Morris, P. J. (1983). Viscous stability of compressible axisymmetric jets. *AIAA Journal*, 21.

Morris, P. J. et Viswanathan, K. (2011). Jet noise. *In CISM Courses and Lectures : Noise sources in turbulent shear flow*.

Morrison, G. L. et McLaughlin, D. K. (1980). Instability process in low Reynolds number supersonic jets. *AIAA Journal*, 18:793–800.

Muller, F. (2006). *Simulations de jets propulsifs : application à l'identification des mécanismes générateurs de bruit*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.

Nichols, J., Lele, S. et Moin, P. (2010). Global mode decomposition of supersonic jet noise. *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs*.

Oertel, H. (1979). Mach wave radiation of hot supersonic jets. *In* W. K. Blake & L. J. Maga, éditeur : *Mechanics of Sound Generation in Flows*, pages 275–281.

Parekh, D. E., Leonard, A. et Reynolds, W. C. (1988). Bifurcating jets at high Reynolds numbers. *NASA STI/Recon Technical Report N*, 89:23829.

Perrault-Joncas, D. et Maslowe, S. A. (2008). Linear stability of a compressible coaxial jet with continuous velocity and temperature profiles. *Physics of Fluids*, 20(7):074102.

Peyret, R. (2002). *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*. Numéro 148 de Applied Mathematical Sciences. Springer.

Piot, E. (2005). Acoustique intrinsèque d'un jet par une approche de stabilité parabolisée. Mémoire de D.E.A., ENSAE.

Piot, E., Casalis, G., Muller, F. et Bailly, C. (2006). Investigation of the PSE approach for subsonic and supersonic hot jets. Detailed comparisons with LES and Linearized Euler Equations results. *International Journal of Aeroacoustics*, 5(4):361–393.

Plaschko, P. (1979). Helical instabilities of slowly divergent jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 92:209–215.

Ray, P. K., Cheung, L. C. et Lele, S. K. (2009). On the growth and propagation of linear instability waves in compressible turbulent jets. *Physics of Fluids*, 21(5):054106.

Reba, R., Narayanan, S. et Colonius, T. (2010). Wave-packet models for large-scale mixing noise. *International Journal of Aeroacoustics*, 9(4):533–558.

Reba, R. A., Simonich, J. S. et Schlinker, R. H. (2012). Chevron nozzle effects on wavepacket sources in a supersonic jet. *AIAA Paper No. 2012-2253*.

Rodríguez, D., Samanta, A., Cavalieri, A. V. G., Colonius, T. et Jordan, P. (2011). Parabolized stability equation models for predicting large-scale mixing noise of turbulent round jets. *AIAA Paper 2011-2838*.

Ryu, J., Lele, S. K. et Viswanathan, K. (2008). Investigation of the role of instability waves in jet noise radiation. *AIAA Paper No. 2008-0026*.

Salgado, A. M., Agarwal, A., Suponitsky, V. et Sandham, N. D. (2010). A non-linear PSE-based model for jet noise. *AIAA Paper 2010-3969*.

Salinas, H. (1998). *Stabilité linéaire et faiblement non linéaire d'une couche limite laminaire compressible tridimensionnelle par l'approche PSE*. Thèse de doctorat, ENSAE.

Samimy, M., Kim, J.-H., Kastner, J., Adamovich, I. et Utkin, Y. (2007a). Active Control of a Mach 0.9 Jet for Noise Mitigation Using Plasma Actuators. *AIAA Journal*, 45:890–901.

Samimy, M., Kim, J.-H., Kastner, J., Adamovich, I. et Utkin, Y. (2007b). Active control of high-speed and high-Reynolds-number jets using plasma actuators. *Journal of Fluid Mechanics*, 578:305.

Sandham, N. D., Morfey, C. L. et Hu, Z. W. (2006a). Nonlinear mechanisms of sound generation in a perturbed parallel jet flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 565:1–23.

Sandham, N. D., Morfey, C. L. et Hu, Z. W. (2006b). Sound radiation from exponentially growing and decaying surface waves. *Journal of Sound Vibration*, 294:355–361.

Sandham, N. D., Salgado, A. M. et Agarwal, A. (2008). Jet noise from instability mode interactions. *AIAA Paper No. 2008-2987*.

Saric, W. S. et Nayfeh, A. H. (1975). Nonparallel stability of boundary-layer flows. *Physics of Fluids*, 18:945–950.

Seiner, J. M., Bhat, T. R. S. et Ponton, M. K. (1994). Mach wave emission from a high-temperature supersonic jet. *AIAA Journal*, 32:2345–2350.

Seiner, J. M., McLaughlin, D. K. et Liu, C. H. (1982). Supersonic jet noise generated by large scale instabilities. Rapport technique.

Seiner, J. M., Ponton, M. K., Jansen, B. J. et Lagen, N. T. (1992). The effects of temperature on supersonic jet noise emission. *In 14th DGLR/AIAA Aeroacoustics Conference*, pages 295–307.

Sipp, D. et Lebedev, A. (2007). Global stability of base and mean flows : a general approach and its applications to cylinder and open cavity flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 593:333–358.

Skeen, A. (2006). *The development of high-speed PIV techniques and their application to jet noise measurements*. Thèse de doctorat, University of Warwick, UK.

Suponitsky, V., Sandham, N. D. et Morfey, C. L. (2010). Linear and nonlinear mechanisms of sound radiation by instability waves in subsonic jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 658:509–538.

Suzuki, T. et Colonius, T. (2006). Instability waves in a subsonic round jet detected using a near-field phased microphone array. *Journal of Fluid Mechanics*, 565:197–226.

Tam, C. K. W. (1995). Supersonic jet noise. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 27:17–43.

Tam, C. K. W. (1998). Jet Noise : Since 1952. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 10:393–405.

Tam, C. K. W. (2009). Mach Wave Radiation from High-Speed Jets. *AIAA Journal*, 47:2440–2448.

Tam, C. K. W. et Auriault, L. (1998). Mean flow refraction effects on sound radiated from localized sources in a jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 370:149–174.

Tam, C. K. W. et Auriault, L. (1999). Jet mixing noise from fine-scale turbulence. *AIAA Journal*, 37(2):145–153.

Tam, C. K. W. et Burton, D. E. (1984a). Sound generated by instability waves of supersonic flows. Part 1. Two-dimensional mixing layers. *Journal of Fluid Mechanics*, 138:249–271.

Tam, C. K. W. et Burton, D. E. (1984b). Sound generated by instability waves of supersonic flows. Part 2. Axisymmetric jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 138:273–295.

Tam, C. K. W., Golebiowski, M. et Seiner, J. M. (1996). On the two components of turbulent mixing noise from supersonic jets. *AIAA Paper No. 1996-1716*.

Tam, C. K. W. et Hu, F. Q. (1989). On the three families of instability waves of high-speed jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 201:447–483.

Tam, C. K. W. et Morris, P. J. (1980). The radiation of sound by the instability waves of a compressible plane turbulent shear layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 98(2):349–381.

Tam, C. K. W., Pastouchenko, N. N. et Viswanathan, K. (2010). Continuation of the near acoustic field of a jet to the far field. Part I : Theory. *AIAA Paper No. 2010-3728*.

Tam, C. K. W., Viswanathan, K., Ahuja, K. K. et Panda, J. (2008). The sources of jet noise : experimental evidence. *Journal of Fluid Mechanics*, 615:253–292.

Tanna, H. K. (1977). An experimental study of jet noise, part 1 : Turbulent mixing noise. *Journal of Sound and Vibration*, 50:405–428.

Thompson, K. W. (1987). Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 68(1):1 – 24.

Tinney, C., Coiffet, F., Delville, J., Hall, A., Jordan, P. et Glauser, M. (2006). On spectral linear stochastic estimation. *Experiments in Fluids*, 41:763–775. 10.1007/s00348-006-0199-5.

Tinney, C. E. et Jordan, P. (2008). The near pressure field of co-axial subsonic jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 611:175–204.

Troutt, T. R. et McLaughlin, D. K. (1982). Experiments on the flow and acoustic properties of a moderate-Reynolds-number supersonic jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 116:123–156.

Viswanathan, K. (2004). Aeroacoustics of hot jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 516:39–82.

Viswanathan, K. (2009). Mechanisms of jet noise generation : classical theories and recent developments. *International Journal of Aeroacoustics*, 8(4):355–407.

Vuillot, F., Lupoglazoff, N. et Rahier, G. (2008). Double-Stream Nozzles Flow and Noise Computations and Comparisons to Experiments. *AIAA Paper No. 2008-0009*.

Wagner, C., Hüttl, T. et Sagaut, P. (2004). *LES for acoustics*. Cambridge University Press.

Winant, C. D. et Browand, F. K. (1974). Vortex pairing : the mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 63:237–255.

Yen, C. C. et Messersmith, N. L. (1998). Application of Parabolized Stability Equations to the Prediction of Jet Instabilities. *AIAA Journal*, 36(8):1541–1544.

Yen, C. C. et Messersmith, N. L. (1999). The use of compressible parabolized stability equations for prediction of jet instabilities and noise. *AIAA Paper No. 1999-1859*.

Yule, A. J. (1978). Large-scale structure in the mixing layer of a round jet. *Journal of Fluid Mechanics*, 89:413–432.

Zaman, K. B. M. Q. (1999). Spreading characteristics of compressible jets from nozzles of various geometries. *Journal of Fluid Mechanics*, 383:197–228.

Étude du rayonnement acoustique des instabilités hydrodynamiques de jets double-flux avec les équations de stabilité parabolisées (PSE)

Dans le but de réduire le bruit de jet, source principale de nuisance sonore au décollage d'un avion, une compréhension fine des mécanismes aéroacoustiques mis en jeu est nécessaire. Les structures cohérentes de grande échelle se développant dans la couche de mélange d'un jet semblent responsables d'une part importante du bruit observé en champ lointain, surtout dans les basses fréquences. Une approche permettant d'étudier ces structures cohérentes est fournie par la théorie de stabilité, notamment au moyen des équations de stabilité parabolisées (PSE). L'étude de ces ondes d'instabilité est alors complémentaire d'autres approches (LES ou expériences), puisqu'elle permet de mettre en évidence la nature et la dynamique de ces structures, également présentes dans les résultats de simulations ou de mesures.

Au cours de ces travaux de thèse, nous nous sommes intéressés aux structures cohérentes se développant dans des jets à double flux étudiés au cours du projet européen CoJeN (Coaxial Jet Noise). En particulier, nous avons exploité une base de données issues de mesures de fluctuations de pression réalisées en champ proche et en champ lointain de ces jets. Nous avons alors pu comparer les résultats de notre modélisation PSE à ces mesures en périphérie immédiate du jet, confirmant ainsi la pertinence d'un tel modèle, même dans des configurations aussi complexes. De plus, le calcul du rayonnement acoustique en champ lointain engendré par les fluctuations de pression modélisées nous a permis de faire des comparaisons directes avec les niveaux et les directivités mesurés. Nous avons ainsi pu mettre en évidence quantitativement la contribution de ces structures turbulentes de grande échelle au bruit total rayonné par le jet.

Acoustics of hydrodynamic instabilities in dual-stream jets using parabolized stability equations (PSE)

Increasingly stringent aircraft noise regulations require the development of innovative noise reduction strategies. Jet noise is a dominant acoustic component during take-off and a fine understanding of the underlying aeroacoustics mechanisms is then necessary. Large-scale coherent structures that develop in the mixing layer of jets appear to be the dominant acoustic source responsible for the low-frequency far-field noise observed at low emission angles. A stability analysis based on the parabolized stability equations (PSE) is a suitable tool for studying these coherent structures, revealing the nature and the dynamics of the fluctuations obtained by simulations or experiments.

The present work is focused on coherent structures developing in the two mixing layers of dual-stream jets studied in the course of the European project CoJeN (Coaxial Jet Noise). In particular, pressure fluctuations measurements acquired in the near and far fields of two coaxial jets have been thoroughly analyzed. A direct comparison of these experimental results with linear PSE calculations has been performed in the vicinity of the jets, referred to as the linear-hydrodynamic region, confirming the relevance of the approach even in such complex industrial configurations. Furthermore, the acoustic projection to the far-field of the wavepackets issued by this model and calibrated in the near-field allows a direct comparison of the acoustic levels and directivity with far field sound measurements. A quantitative assessment of the contribution of the instability waves to the total jet noise measured has therefore been obtained.