



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SIR MODELİN KARARLILIK ANALİZİ

Serdar Can GÜZEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalını

Ekim-2012
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SIR MODELİN KARARLILIK ANALİZİ

Serdar Can GÜZEL

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

2012, 59 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde, çalışma hakkında genel bilgi verildi.
İkinci bölümde, kaynak araştırmasına yer verildi.
Üçüncü bölümde, Fark Denklemleri geniş bir şekilde ele alındı.
Dördüncü bölümde, Fark Denklem Sistemleri ele alındı.
Beşinci bölümde, SIR Epidemik Model tanıtıldı, diferansiyel denklemlerden oluşan sistem fark denklem sistemine çevrildi denge noktaları bulunarak kararlılık analizi yapıldı, ve nümerik örnekler verildi.
Altıncı bölümde Sonuç ve önerilere yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Denge Noktası, Fark Denklem, Kararlılık, SIR Model

ABSTRACT

MS THESIS

THE STABILITY ANALYSIS OF SIR MODEL

Serdar Can GÜZEL

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF SELÇUK UNIVERSITY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Necati TAŞKARA

2012, 59 Pages

Jury
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Assoc. Prof. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Advisor Asst. Prof. Dr. Necati TAŞKARA

This study consist of six sections.

In the first section, general information about the study is given.

In the second section some information about the difference equations and endemic models that studied before is given.

In the third section, difference equations are investigated widely,

The fourth section includes difference equations and general information about them.

In the fifth section, SIR epidemic model is introduced, model is changed difference form. Equilibrium points of the difference system is given and stabiliy analysis of difference system is done.

The sixth section includes conclusions and recommendations

Keywords: Equilibrium Point, Difference Equations, Stability, SIR Model,

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tezimi büyük sabır ve titizlikle yöneten ve çalışmalarımda hiçbir desteği esirgemeyen saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA'ya, tez sürecinde benden desteklerini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Serdar Can GÜZEL
KONYA-2012

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

SİMGELER VE KISALTMALAR ..... **ix**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Tezin Yapısı 1

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI **2**

2.1. Fark Denklemleriyle İlgili Çalışmalar 2
2.2. Modeller İle İlgili Çalışmalar 2

3. FARK DENKLEMLERİ **5**

3.1. Fark Denklemlere Giriş 6
3.2. Operatörler 10
3.2.1. Fark Operatörleri 10
3.2.2. Belirsiz Toplam 12
3.2.3. Fark Hesabıyla Diferansiyel Arasındaki Benzerlikler 16
3.3. Fark Denklemleri 17
3.3.1. Fark denkleminin incelenmesi: 18
3.2. Lineer Fark Denklemleri 19
3.3. Lineer Fark Denklemlerinin Çözümleri 19
3.4. Verilen Bir Çözümden Hareketle Fark Denklemine Ulaşılması 22
3.5. Homojen Olmayan Fark Denklemleri 22
3.6. Lineer Olmayan Fark Denklemleri 24
3.6.1. Lineer Hale Dönüştürülebilen Fark Denklemleri 24
3.7. İteratif Metotlar 25
3.8. Fark Denklemleri için Genel Tanım ve Teoremler 26
3.9. Rasyonel Fark Denklemleri 30

4. FARK DENKLEM SİSTEMLERİ **32**

4.1. Fark Denklem Sistemlerinin Sınıflandırılması 32
4.2. Lineer Fark Denklem Sisteminin Çözümü 34
4.3. Kararlılık Teorisi 35

5. SIR EPİDEMİK MODEL **39**

5.1. SIR Epidemik Model 39

5.2. SIR Epidemik Modele Ait Nümerik Örnekler 40
5.3. SIR Epidemik Modelin Fark Denklem Sistemine Çevrilmesi 41
5.3.1. SIR Epidemik Fark Denklem Sisteminin Denge Noktalarının Bulunması ve İncelenmesi 46
5.3.2. SIR Epidemik Fark Denklem Sisteminin Kararlığının İncelenmesi.....48
Bu bölümde SIR Epidemik Model için nümerik örnekler verilecektir. 53
5.3.3. Nümerik Örnekler 53

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER 56

6.1. Sonuçlar 56
6.2. Öneriler 56

KAYNAKLAR 57

ÖZGEÇMİŞ.....59

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar
$\mathbb{N}$	:	Doğal Sayılar
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar
$\mathbb{R}^2$	:	İki Boyutlu Reel Sayılar
$\mathbb{R}^k$	:	k Boyutlu Reel Sayılar
$\forall$	:	Her
$<$	:	Küçük
$>$	:	Büyük
$\leq$	:	Küçük Eşit
$\geq$	:	Büyük Eşit
$\in$	:	Elemanıdır
D	:	Türev Operatörü
$\int$	:	İntegral
Γ	:	Gama Fonksiyonu
∞	:	Sonsuz
Δ	:	İleri Fark Operatörü
∇	:	Geri Fark Operatörü
δ	:	Merkezi Fark Operatörü
E	:	Kaydırma Operatörü
$\sum$	:	Belirsiz Toplam
$[\ ]^T$	:	Transpoze

1. GİRİŞ

Bu tezde;

$$\frac{dS(t)}{dt} = \nu N - \nu S(t) - \frac{\beta I(t) S(t)}{N}$$
$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta I(t) S(t)}{N} - (\gamma + \nu) I(t)$$
$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \nu R(t)$$

sistemi olarak verilen literatürde SIR modeli olarak bilenen salgın etkisinde kapalı bir popülasyondaki bireylerin sayısının değişimini gösteren bir diferansiyel denklem sistemi fark denklemine çevrilerek incelenmiştir. Ancak bu tezde fark denklemler ile ilgili fazla Türkçe kaynak olmaması göz önüne alınarak fark denklemler üzerinde yoğun olarak durulmuştur.

1.1. Tezin Yapısı

Bu tez 1.Bölüm Giriş, 2. Bölüm Kaynak Araştırması, 3. Bölüm Fark Denklemleri, 4. Bölüm Fark Denklem Sistemleri, 5. Bölüm SIR Epidemik Model, 6. Bölüm Sonuç ve Öneriler olmak üzere toplam altı bölümden oluşmaktadır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. Fark Denklemleriyle İlgili Çalışmalar

Clark D., Kulenovic M.R.S. (2002), Bu çalışmada, $x_{n+1}=\frac{x_n}{a+cy_n}$, $y_{n+1}=\frac{y_n}{b+dx_n}$ ile verilen Rasyonel Fark denklem sistemini çalışılmıştır. Bu sistemin kararlılığı çözümün asimptotik davranışları incelenmiştir.

Kulenovic M.R.S., Nurkanovic Z. (2005), yaptıkları bu çalışmada, $a,b,c,d,e,f\in(0,\infty)$ olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{a+x_n}{b+y_n},\ y_{n+1}=\frac{c+y_n}{d+z_n},\ z_{n+1}=\frac{e+y_n}{f+x_n}$$

fark denklem sisteminin çözümünün global asimptotik davranışı incelenmiştir. Bu sistemin denge noktalarını bulmuşlar ve sistemi lineerleştirilerek kararlılığı ve lokal asimptotik kararlılığını incelenmişlerdir. Son olarak bazı global çekici sonuçları vermişlerdir.

2.2. Modeller İle İlgili Çalışmalar

Zaman G., Kang Y.H., Jung I.H. (2008), yaptıkları bu çalışmada, SIR modelini *S*:Hastalığa (enfeksiyona) karşı hassas olan bireyleri, *I*: Hastalığa (enfeksiyona) yakalanmış bireyleri, *R*: Hastalığa (enfeksiyona) karşı bağışıklık kazanan bireyleri, ν ölüm (doğum) oranını, γ salgın hastalıktan kurtulma oranını, β bulaşma oranını göstermek üzere,

$$\frac{dS(t)}{dt} = \nu N - \nu S(t) - \frac{\beta I(t) S(t)}{N}$$
$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta I(t) S(t)}{N} - (\gamma + \nu) I(t)$$
$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \nu R(t)$$

olarak tanıtmışlardır, sistemin denge noktalarını bulmuşlar, kararlılık analizi yapılmışlardır. Bir sonraki bölümde aşının hastalığın yayılması üzerine etkileri örneklerle incelenmişlerdir. Son olarak nümerik örnekler üzerinde durup sigara içmeyi bir salgın hastalık olarak varsayıp çeşitli nümerik incelemeler yapmışlardır.

Nasri M., Dehghan M., Douraki M.J. (2005), bu yaptıkları çalışmada ,HIV enfeksiyonun yayılmasının matematiksel (diferansiyel denklem sistemi) modelini incelenmişlerdir. Bu çalışmanın devamında fark denklemlerle ilgi temel tanım ve teoremleri vermişler daha sonra çalışmanın başında verilen diferansiyel modelini fark denklem modeline çevirerek verilen teoremlere göre incelemişlerdir. Daha sonra fark denklem modelini lineerleştirerek, lineer sistemi incelemişlerdir. Çalışmanın son kısmında ise nümerik sonuçlara yer vermişlerdir.

Iwami S., Takeuchi Y., Liu X. (2009), yaptıkları çalışmada, kuş gribinin yayılma modeli vermişler, hastalığın yayılması gelişimi üzerinde durmuşlar, hastalıktan korunma, hastalığın evrimi ve bu evrim sürecinden sonra hastalıktan korunmak için çeşitli önerilerde bulunmuşlardır.

Li G., Jin Z.(2005), yaptıkları çalışmada SEIR modelinin bağışıklık kazanmış ya da hastalığı taşıyıp henüz ortaya çıkmamış bireyler için genel dinamikleri incelenmiş ve denge noktası analizi yapılmışlardır.

Derouich M. Boutayep A. (2008) yaptıkları çalışmada, kuş gribinin insanlar ve kuşlar arasında yayılmasını belirleyen modeli verilmişlerdir. Bu modeldeki sistemlerin kararlılık analizini, yapılmışlar ve değişik parametreler kullanılarak hastalığın yayılmasının benzetimini yapmışlardır.

Acedo L., González-Parra G., Arenas A.J (2010), yaptıkları çalışmada, klasik SIRS modeli tanıtılmışlar genel çözüm için analitik yaklaşımlar kullanmışlardır. Ayrıca değişik parametrelerle nümerik simülasyonlar yapmışlardır.

Iwami S., Takeuchi Y., Liu X.(2007), yaptıkları çalışmada, insanlarda görülen kuş gribi üzerine durulmuştur. Hem insandaki hem de kuşlarda ki yayılım modelleri verilmiş, insanlardaki yayılım modeli incelenerek hastalığın yayılması önlenmesi için önerilerde bulunulmuş, farklı parametrelerle çeşitli benzetimler yapılmıştır.

Li M.Y., Graef J.R., Wang L., Karsai J.(1999), yaptıkları çalışmada SEIR modelinin genel dinamikleri ve salgın hastalıkların toplam popülasyon üzerinde neden olduğu değişimler incelenmiştir.

Allen L. J. S. (1994) yaptığı çalışmada ayrık sistemler üzerinde durmuş, bu sistemleri tanıtmış ve sistemlerle ilgili örnekler vermiştir.

3. FARK DENKLEMLERİ

Matematik hesaplamalar genelde denklemlere dayanır. Bunlardan birisi de "*Fark Denklemi*" ya da "*Rekürans Denklemi*" olarak ifade edilen denklemlerdir. Bu denklemler çok değişik form ve özellikleriyle matematikte, uygulama alanları bakımından da istatistik, elektrik devre analizi, dinamik sistemler, ekonomi, biyoloji ve diğer alanlarda kullanılır.(Kelley W.G., Peterson A.C.) Uygulama alanına örnek olarak, fark denklemleri, daha çok hareket analizinde devreleri matematiksel olarak ifade etme, ekonomide arz talep denklemlerini belirleme, ekonomik dalgalanmalar ve devresel hareketleri açıklama, işsizlik oranı hesabı, spektrum analizi, filtre dizaynı gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Birçok mühendislik, fizik ve sosyal kökenli problemler matematik terimleri ile ifade edildiği zaman bu problemler, bilinmeyen fonksiyonun bir veya daha yüksek mertebeden türevlerini içeren bir denklemi sağlayan fonksiyonun bulunması problemine dönüşür. Bu mantıkla oluşturulmuş denklemlere "Diferansiyel denklemler" denir. Diferansiyel denklemler, uygulamalı matematiğin çok önemli kollarından biri olup, birçok pratik problemin çözümünde önemli bir araçtır. Bu problemlere örnek olarak salınım problemleri, roket, uydu ve gezegenlerin hareketleri, kimyasal reaksiyonlar, radyoaktif maddelerin parçalanması problemleri vb. gösterilebilir.

Diferansiyel denklemler konusunda yapılan ilk çalışmalar, 17. yüzyılın ikinci yarısında, diferansiyel ve integral hesabın keşfinden hemen sonra, İngiliz matematikçi Newton (1642-1727) ve Alman matematikçi Leibnitz (1641-1716) ile başlar. Daha sonraları, 18. yüzyılda, Euler, Clairaut, Lagrance, D'Alembert. Charbit, Monge, Laplace ile 19. yüzyılda da, Chrystal, Cauchy, Jacobi, Ampere, Darboux, Picart, Fusch ve F.G. Frobenius, diferansiyel denklemler teorisini, bugünkü ileri seviyeye getiren matematikçilerdir.

Fark denklem, bir ve daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkeni arasındaki cebirsel bir bağıntıdır. Fonksiyonel denklemler ya da rekürans denklemi olarak da isimlendirilen fark denklemler, diferansiyel denklemlere benzerlik gösterirler. Fakat inceleme süreci yönünden, diferansiyel denklemlerden daha yenidir.

Diferansiyel denklemlerin vazgeçilemez bilimsel önemi de "*doğada kopuklar yoktur*" yanlış varsayımına yer veriliyordu. Bu eski hipoteze göre, fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade

ediliyordu. Bu nedenle diferansiyel denklemler, fizik bilimine özgü matematiksel ifadeler olarak kabul ediliyordu. Fakat 20. yüzyıl başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylarındaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının, süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Günümüzde diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri, fark denklemler kullanılarak kaldırılmak istenmiştir.

1885 yılında Poincare ile doğrusal fark denklem teorisine girilmiş, Lagrange doğrusal diferansiyel denklemin sabit katsayılı olması durumunda çözümünü elde etmiş, Guichard 1887'de ikinci yandaki fonksiyonun polinom olması durumundaki çözümünü incelemiş Gelgrun asimptotik çözümler üzerinde çalışmış, Birkoff ve Carmichael bu çalışmaları genişletmişlerdir.

Fark denklemler diferansiyel denklemlerin özellikle çözümlerinde karşımıza çıkar. Diferansiyel denklemlerin bazı başlangıç değer problemleri için kapalı formda çözümleri yoktur ya da çözümlerin bulunuşları çok zor olabilir. Bu sebeple nümerik yöntemler ile çözümlere ulaşılmaya çalışılır. Bu yöntemlerden birisi de fark denklemlerdir, fark denklemler yapısı itibariyle temel aritmetik işlemine dayandığı için problemlerin çözümünde kolaylık sağlar ve inceleme yönünden diferansiyel denklemlere göre daha yenidir.

Bu bölümde fark operatörleri, fark denklemler, fark denklemlerle ilgili literatürde var olan genel tanım ve teoremler verilmiştir.

3.1. Fark Denklemlere Giriş

Tanım 3.1.1. x bağımsız değişken olmak üzere y fonksiyonu ve bu fonksiyonun $y', y'', .., y^{(n)}$ türevleri arasındaki bir bağıntıya *diferansiyel denklem* denir. Bu denklem

$$F\left(x, y', y'', .., y^{(n)}\right) = 0 \tag{3.1}$$

şeklinde gösterilir.

Diferansiyel denklem tanımından da anlaşıldığı gibi türevleri içeren bir denklemdir. Bu durum çeşitli yerlerde sıkıntılara yol açmaktadır; bunlardan en önemlisi diferansiyel denklemin her zaman analitik çözümünün bulunamaması, bilgisayar uygulamaların da türevin tanımlanamayışıdır, ancak fark denklemler basit, fark işlemi üzerine kurulduğu için sayılan konulardaki sıkıntıları aşmaktadır. Bu bölümde fark

denklemleri ve diferansiyel denklemler arasındaki ilişkiyi, fark denklemleri, fark denklerinin tipleri ve kullanımlarındaki çeşitliliğinin görülmesi için örnekler verilmiştir.

Örnek 3.1.1. (Kelley W.G., Peterson A.C.) 1696 yılında, Peter Minuit, Manhattan Adasını 24$ 'a satın almıştır. Eğer 24$ 'lık bu yatırım yıllık % 7 'den bileşik faizde değerlendirilseydi bu yatırım 1998 yılındaki değeri bulunursa

$y(t)$, t çeyrek yıl sonunda yatırımın değeri olsun. O zaman $y(0)=24$ olur. t çeyrek yıl için faiz oranı % 0.175 olmak üzere $y(t)$,

$$\begin{aligned} y(t+1) &= y(t)+0.175y(t) \\ &= 1.175y(t) \end{aligned}$$

fark denklemini sağlar. $t=0,1,2,...$ için y değerlerini sırasıyla hesaplarsak,

$$\begin{aligned} y(1) &= 24(1.175) \\ y(2) &= 24(1.175)^2 \\ &\vdots \\ y(t) &= 24(1.175)^t \end{aligned}$$

372 yıl sonrasında yani 1488 çeyrek yıl sonunda yatırımın değeri

$$\begin{aligned} y(1488) &= 24(1.175)^{1488} \\ &\simeq 3.903\left(10^{12}\right) \end{aligned}$$

olur. Bu da yaklaşık olarak 3.9 trilyon dolar yapar.

Örnek 3.1.2. (Kelley W.G., Peterson A.C.) Radyoaktif bir maddenin kütlesindeki azalış (sabit zaman periyotlarında azalma), maddenin başlangıçtaki kütlesiyle orantılı olur. Eğer radyumun yarılanma süresi 1600 yıl ve kütlenin zamana göre değişimini veren fonksiyon hesaplanırsa,

$m(t)$, t yıldaki radyumun kütlesi olsun, o halde k pozitif bir sabit olmak üzere

$$m(t+1)-m(t)=-km(t)$$

olur. Buradan

$$m(t+1)=(1-k)m(t)$$

olur. $t=0,1,2,...$ için bu denklemde iterasyon kullanılırsa,

$$m(t)=m(0)(1-k)^t$$

ve yarılanma süresi 1600 yıl olduğu için

$$m(1600)=m(0)(1-k)^{1600}=\frac{1}{2}m(0)$$

$$1-k=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1600}}$$

sonuç olarak

$$m(t)=m(0)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$

olur. Bu problem genel olarak yüksek matematik ve fizik kitaplarında $m'(t)=-km(t)$ diferansiyel denklemi ile verilir, fark edildiği gibi diferansiyel denklemi çözmek yüksek matematik bilgisi gerektirirken verilen fark denklemin çözümü için temel cebir bilgileri kullanılmıştır.

Örnek 3.1.3. (Kelley W.G., Peterson A.C.) Matematikte en çok kullanılan fonksiyonlardan olan Γ 'nın tanımı

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$$

dir.

$$\Gamma(z+1)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z}dt$$

integralini kısmi integral ile çözülürse

$$\Gamma(z+1)=\left(-e^{-t}t^{z}\right)\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}-e^{-t}zt^{z-1}dt$$

$$=z\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$$

buradan $\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$ olduğu için

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

olduğu için yukarıda rekürans bağıntısı bir fark denklemidir. $z=1,2,...$ için iterasyon kullanılırsa

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-t}dt=1$$
$$\Gamma(2)=\Gamma(1+1)=1\Gamma(1)=1$$
$$\Gamma(3)=\Gamma(2+1)=2\Gamma(2)=2$$
$$\Gamma(4)=\Gamma(3+1)=3\Gamma(3)=3.2$$
$$\vdots$$
$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)!=n!$$

olur.

Bu bölümde operatörler konusu üzerinde durulacaktır.

3.2. Operatörler

Diferansiyel denklemler, fonksiyon ve fonksiyonların türevleri kullanılarak oluşturulmaktadır. Fark denklemlerinin oluşturulması için fark operatörlerine ihtiyaç vardır. Bu bölümde fark operatörleri üzerine durulmuştur.

3.2.1. Fark Operatörleri

Bu bölümdeki tanımlar kullanılırken Oturanç G., Aydın K., Kiriş M.E., Keskin Y. kitabından faydalanılmıştır.

Tanım 3.2.1.1. İleri fark operatörü Δ ile gösterilir. Δ operatörü, verilen bir f fonksiyonuna,

$$\Delta f(t) = f(t+h) - f(t) \tag{3.2}$$

işlemini yaptırır, burada h adım aralığını göstermektedir ve herhangi bir kısıtlama getirmez, genel olarak $h=1$ alınır. Yukarıdaki işlemi dizi notasyonu ile gösterilirse

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \tag{3.3}$$

olur.

Tanım 3.2.1.2. Geri fark operatörü ∇ ile gösterilir. ∇ operatörü, bir f fonksiyonuna,

$$\nabla f_i = f_i - f_{i-1} \tag{3.4}$$

işlemini yaptırır.

Tanım 3.2.1.3. δ ile sembolize edilen operatöre merkezi fark operatörü denir. Bu operatör,

$$\delta f_i = f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} \tag{3.5}$$

işlemini yaptırır.

Tanım 3.2.1.4. E ile gösterilen kaydırma operatörü bir f fonksiyonuna

$$Ef_i = f_{i+1} \tag{3.6}$$

işlemini yaptırır.

Teorem 3.2.1.1. (Kelley W.G., Peterson A.C.) Δ ileri fark ve E kaydırma operatörü, m, n pozitif tam sayılar ve c keyfi sabit olmak üzere

i) $\Delta^m\left(\Delta^n f(t)\right) = \Delta^{m+n} f(t)$ (3.7)

ii) $\Delta\left(f(t) + g(t)\right) = \Delta f(t) + \Delta g(t)$ (3.8)

iii) $\Delta\left(cf(t)\right) = c\Delta f(t)$ (3.9)

iv) $\Delta\left(f(t)g(t)\right) = g(t)\Delta f(t) + Eg(t)\Delta f(t)$ (3.10)

v) $\Delta\left(\dfrac{f(t)}{g(t)}\right) = \dfrac{g(t)\Delta f(t) - g(t)\Delta f(t)}{g(t)Eg(t)}$ (3.11)

olur.

Teorem 3.2.1.2. (Kelley W.G., Peterson A.C.) Δ ileri fark ve E kaydırma operatörü, a sabit olmak üzere,

i) $\Delta\left(a^t\right) = \Delta(t-1)a^t$ (3.12)

ii) $\Delta\sin(at) = 2\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)\cos\left(a\left(t+\dfrac{1}{2}\right)\right)$ (3.13)

iii) $\Delta\cos(at) = -2\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)\sin\left(a\left(t+\dfrac{1}{2}\right)\right)$ (3.14)

iv) $\Delta\log(at) = \log\left(1+\dfrac{1}{t}\right)$ (3.15)

v) $\Delta\log\left(\Gamma(t)\right) = \log t$ (3.16)

olur.

3.2.2. Belirsiz Toplam

Fark işlemini daha iyi anlamak için onun tersi olan operatör de iyi bilinmelidir. Bu bölümde literatürde "*Belirsiz Toplam*" olarak geçen operatörden bahsedilecektir.

Tanım 3.1.2.1. (Kelley W.G., Peterson A.C.) $\sum f(t)$ yada $\Delta^{-1}\left(f(t)\right)$ olarak gösterilen operatör her t değeri için

$$\Delta\left(\sum f(t)\right) = f(t) \tag{3.17}$$

şartını sağlar ve belirsiz toplam olarak adlandırılır. Daha önceden de hatırlanacağı gibi belirsiz integral

$$\frac{d}{dt}\left(\int f(t)\,dt\right) = f(t) \tag{3.18}$$

şartını sağlıyordu, ancak belirsiz integral bir fonksiyonlar ailesiydi bir örnek verilecek olunursa

$$\int \cos t dt = \sin t + c$$

dir. Bu durum belirsiz toplam içinde aynıdır bu durum örneklendirilecek olursa Teorem 3.2.1.2. den

$$\Delta 6^t = 5\left(6^t\right)$$

dır,

$$\Delta\frac{6^t}{5} = 6^t$$

olup eşitliğin her iki tarafı Σ ile işleme tutulursa

$$\sum 6^t = \sum \Delta\frac{6^t}{5} = \frac{6^t}{5}$$

olur, ancak c keyfi sabit olmak üzere

$$\Delta\left(\frac{6^t}{5}+c\right)=6^t$$

ve

$$\sum 6^t=\sum\Delta\left(\frac{6^t}{5}+c\right)=\frac{6^t}{5}+c$$

olduğundan belirsiz toplamda bir fonksiyonlar ailesidir.

Sonuç 3.1.2.1. (Kelley W.G., Peterson A.C.) a herhangi bir reel sayı olmak üzere f, $\{a,a+1,a+2,...\}$ kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $g(t)$, $f(t)$'nin belirsiz toplamı, c de keyfi sabit olmak üzere

$$\sum f(t)=g(t)+c \tag{3.19}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.2.1. a sabit ve $\Delta c=0$ ise ,

i) $$\sum a^t=\frac{a^t}{a-1}+c \quad a\neq 1 \tag{3.20}$$

ii) $$\sum\sin(at)=\frac{\cos\left(a\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)}{-2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}+c \tag{3.21}$$

iii) $$\sum\cos(at)=\frac{\sin\left(a\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2}\right)}+c \tag{3.22}$$

iv) $\sum \binom{t}{a} = \binom{t}{a+1} + c$ (3.23)

v) $\sum \binom{a+t}{t} = \binom{a+t}{t-1} + c$ (3.24)

olur.

Teorem 3.2.1.2. (Kelley W.G., Peterson A.C.) s keyfi sabit olmak üzere

i) $\sum \big(f(t) + g(t) \big) = \sum f(t) + \sum g(t)$ (3.25)

ii) $\sum \big(cf(t) \big) = c \sum f(t)$ (3.26)

iii) $\sum \big(f(t) \Delta g(t) \big) = f(t) g(t) - \sum Eg(t) \Delta f(t)$ (3.27)

iv) $\sum \big(Ef(t) g(t) \big) = f(t) g(t) - \sum g(t) \Delta f(t)$ (3.28)

olur.

Uyarı 3.2.1.1. (iii) ve (iv) kısımları literatürde "*kısmi toplamlar*" olarak da bilir.

Bundan sonra notasyon olarak $y(t)$ yerine daha kullanışlı olan dizisel gösterim olan y_t, y_n kullanılacaktır. $a > b$ olmak üzere

$$\sum_{k=a}^{b} y_k = 0$$

olur. Sabit bir m için $n \geq m$ olmak üzere,

$$\Delta^n \left(\sum_{k=m}^{n-1} y_k \right) = y_n$$

Sabit bir p için $p \geq n$ olmak üzere,

$$\Delta^n \left(\sum_{k=n}^{p} y_k \right) = -y_n$$

olur. Sonuç 3.1.2.1. den c, s keyfi sabitler olmak üzere

$$\sum y_n = \sum_{k=m}^{n-1} y_k + c\,,\ m \le n \tag{3.29}$$

ya da alternatif olarak

$$\sum y_n = -\sum_{k=n}^{p} y_k + s\,,\ p \ge n \tag{3.30}$$

olur.

Teorem 3.1.2.3. z_n, y_n'nin belirsiz toplamı olmak üzere

$$\sum_{k=m}^{n-1} y_k = \left[z_n\right]_m^n = z_n - z_m \tag{3.31}$$

olur.

Örnek 3.1.2.1. $\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ hesaplanırsa

Teorem 3.1.2.1. den

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \sum\left(\frac{2}{3}\right)^n + c$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}-1} + c$$

$$= -3\left(\frac{2}{3}\right)^n + c$$

c'yi hesaplamak için $n = 2$ alınırsa

$$\frac{2}{3} = -3\left(\frac{2}{3}\right)^2 + c$$
$$c = 2$$

olup,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 2 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

olur.

Konudan da anlaşılacağı gibi fark operatörleri türeve, toplam ise integrale benzemektedir. Bu bölümde ise fark hesabıyla diferansiyel arasındaki benzerlikler üzerinde durulacaktır.

3.2.3. Fark Hesabıyla Diferansiyel Arasındaki Benzerlikler

D türev operatörünü göstermek üzere verilen bir f fonksiyonun x değerinde

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{3.32}$$

limiti varsa bu limit değerine f in türevi denir ve $Df(x)$ ile gösterilir.

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \tag{3.33}$$

olduğundan

$$Df(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f(x)}{h} \tag{3.34}$$

olur.

f fonksiyonu için $Df(x) = F(x)$ ise f e F nin *ilkel fonksiyonu* denir. Diferansiyel hesabın tersi olarak adlandırılan bu işlem integral olarak adlandırılır. Bu

işlem D^{-1} ile gösterileceği gibi genellikle $f(x)=\int F(x)dx$ şeklinde gösterilir ve f e F nin belirsiz integrali denir.

Gerek önceki bölümlerde gerekse bu bölümlerde üzerinde durulduğu gibi fark ve diferansiyel hesabı arasında benzerlikler söz konusudur, bu durum aşağıdaki çizelgede belirtilmiştir.

Çizelge 3.2.3.a. Diferansiyel ve Fark Hesapları Arasındaki Benzerlik

Diferansiyel Hesabı	Fark Hesabı
$Df(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$
$D^m\left(D^n f(t)\right)=D^{m+n}f(x)$	$\Delta^m\left(\Delta^n f(x)\right)=\Delta^{m+n}f(x)$
$D\left(f(x)+g(x)\right)=Df(x)+Dg(x)$	$\Delta\left(f(x)+g(x)\right)=\Delta f(x)+\Delta g(x)$
$D\left(cf(x)\right)=cDf(x)$	$\Delta\left(cf(x)\right)=c\Delta f(x)$
$D\left(f(x)g(x)\right)=g(x)Df(x)+g(x)Df(x)$	$\Delta\left(f(x)g(x)\right)=g(x)\Delta f(x)+Eg(x)\Delta f(x)$
$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)Df(x)-f(x)Dg(x)}{g^2(x)}$	$\Delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\Delta f(x)-g(x)\Delta f(x)}{g(x)Eg(x)}$
$D\left(x^n\right)=nx^{n-1}$	$\Delta\left(x^n\right)=nhx^{n-1}$

Çizelge 3.2.3.b. Belirsiz İntegral ve Belirsiz Toplam Arasındaki Benzerlik

Belirsiz İntegral Hesabı	Belirsiz Toplam Hesabı
$D\left(\int f(x)dx\right)=f(x)$	$\Delta\left(\sum f(x)\right)=f(x)$
$\int\left(f(x)+g(x)\right)=\int f(x)+\int g(x)$	$\sum\left(f(x)+g(x)\right)=\sum f(x)+\sum g(x)$
$\int cf(x)=c\int f(x)$	$\sum\left(cf(x)\right)=c\sum f(x)$
$\int\left(f(x)Dg(x)\right)dx=$ $f(x)g(x)-\int\left(g(x)Df(x)\right)dx$	$\sum\left(f(x)\Delta g(x)\right)=f(x)g(x)-\sum Eg(x)\Delta f(x)$

3.3. Fark Denklemleri

Bu bölümde literatürde iyi bilinen fark denklemleriyle ilgili genel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 3.3.1. x bağımsız değişken olmak üzere $y(x)$ ve x'in değişik mertebeden ileri farklarını bulunduran denklemlere fark denklemi denir. x bağımsız değişkeninin herhangi bir x_n değeri $y(x_n)=y_n$ şeklinde gösterilir.

$$F(n, y_n, y_{n+1}, ..., y_{n+k}) = 0 \qquad (3.35)$$

Sonlu farklar konusunda türev operatörü ile Δ operatörünün hemen hemen aynı işlevi gördüğü anlaşılmıştır. Dolayısıyla, fark denklemleriyle diferansiyel denklemlerin hemen hemen aynı karakterde olacağı sonucunu çıkarmak zor olmayacaktır.

3.3.1. Fark denkleminin incelenmesi:

Tanım 3.3.1.1. (Mertebe) Denklemdeki bağımlı değişkenin en büyük ve en küçük indisleri arasındaki farktır.

$$F(n, y_n, y_{n+1}, ..., y_{n+k}) = 0 \qquad (3.36)$$

denklemi için mertebe $n + k - n = k$ olarak bulunur.

Tanım 3.3.1.2. (Homojenlik) $F(n, y_n, y_{n+1}, ..., y_{n+k}) = f(n)$ şeklinde k. Mertebeden bir fark denkleminin genel ifadesinde $f(n) = 0$ ise bu fark denklemine *homojen(otonom) fark denklemi* denir. $f(n) \neq 0$ ise homojen olmayan fark denklemi denir.

Tanım 3.3.1.3. (Lineerlik) Eğer bir fark denklemi y_n veya herhangi bir fark ifadesinin 2. yada daha yüksek dereceden kuvvetlerini içeriyorsa ya da y_n ile y_{n+m} nin $(0 < m \leq k)$ çarpımını içeriyorsa bu fark denklemine *lineer olmayan fark denklemi* denir. Aksi takdirde *lineer fark denklemi* denir.

Çizelge 3.1.1.a. Çeşitli denklemlerin mertebe, homojenlik ve lineerlik bakımından incelenmesi

$y_{n+4} - 2ey_{n+1} + y_n = 0$	3. mertebeden, homojen, lineer
$y_{n+5} + 8y_{n+1} + 12n = \log n$	4. mertebeden, homojen değil, lineer
$n^3 y_{n+2} + n^2 y_{n+1} - ny_n = n + 3$	2. mertebeden, homojen değil, lineer
$y_{n+6} y_n = e^n y_{n+1}$	5. mertebeden, homojen değil, lineer değil
$y_{n+2} - y_{n+1} + \pi y_n = e$	2. mertebeden, homojen değil, lineer

3.2. Lineer Fark Denklemleri

Yukarıda tanımlandığı gibi verilen bir fark denkleminde bağımlı değişken 1. dereceden ise denkleme lineerdir denir. Genel olarak lineer fark denklemi,

$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + ... + a_0 y_n = F(n) \tag{3.37}$$

şeklinde ifade edilir.

(3.37) denklemine göre

i) $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ katsayıları sabit iseler denkleme *sabit katsayılı lineer fark denklemi* denir.

ii) Eğer $f(n) = 0$ ise denkleme *lineer homojen fark denklemi* denir.

iii) $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ katsayıları bağımsız değişkenin fonksiyonları şeklinde ise denkleme *değişken katsayılı lineer fark* denklemi denir.

3.3. Lineer Fark Denklemlerinin Çözümleri

k . mertebeden lineer homojen fark denklemi,

$$y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + ... + a_0 y_n = 0 \tag{3.38}$$

şeklindedir. (3.38) denklemin çözümü,

$$y_n = r^n \tag{3.39}$$

şeklinde aranır. $y_n = r^n$, $y_{n+1} = r^{n+1}$,..., $y_{n+k} = r^{n+k}$ değerleri (3.38) de yerine konulursa,

$$r^k + a_{k-1}r^{k-1} + ... + a_1 r + a_0 = 0 \tag{3.40}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme lineer homojen fark denkleminin *karakteristik denklemi* denir. Karakteristik denklem,

$$(r-r_1)(r-r_2).....(r-r_k)=0 \tag{3.41}$$

şeklinde çarpanlarına ayrılıyor ise $r_1, r_2, ..., r_k$ lar denklemin kökleridir. Bu durumda,

$$y_1 = r_1^{\,n}, y_2 = r_2^{\,n}, ..., y_k = r_k^{\,n}$$

olup

$$y_n = c_1 r_1^{\,n} + c_2 r_2^{\,n} + ... + c_k r_k^{\,n} \tag{3.42}$$

şeklindeki çözüme denklemin *homojen çözümü* denir.

i) (3.40) karakteristik denkleminde $\Delta > 0$ ise, karakteristik denklemin kökleri reel ve birbirinden farklıdır. Bu durumda homojen çözüm,

$$y_n = c_1 r_1^{\,n} + c_2 r_2^{\,n} + ... + c_k r_k^{\,n} \tag{3.43}$$

şeklindedir.

ii) (3.40) karakteristik denkleminde $\Delta = 0$ ise, karakteristik denklemin bazı kökleri eşit örneğin, $r_1 \in \mathbb{R}$ kök
karakteristik denklemin m katlı kökü ise bu durumda,

$$y_n = (c_1 + c_2 n + c_3 n^2 + ... + c_m n^{m-1}) r_1^{\,n} + c_{m+1} r_2^{\,n} + ... + c_k r_k^{\,n} \tag{3.44}$$

şeklindedir.

iii) Karakteristik denklem için $\Delta < 0$ ise, karakteristik denkleminin bazı köklerinin kompleks olması durumunda ise,

$r_1 = a + ib$, $r_2 = a - ib$

olsun.

$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $r_1 = \rho e^{i\theta}$, $r_2 = \rho e^{-i\theta}$, $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ olmak üzere,

$$y_n = c_1 r_1^{\,n} + c_2 r_2^{\,n}$$
$$y_n = c_1 \rho^n e^{in\theta} + c_2 \rho^n e^{-in\theta}$$
$$y_n = \rho^n \left(c_1 \left(\cos n\theta + i \sin n\theta\right) + c_2 \left(\cos n\theta - i \sin n\theta\right)\right)$$
$$y_n = \rho^n \left(\left(c_1 + c_2\right)\cos n\theta + i\left(c_1 - c_2\right)\sin n\theta\right)$$
$$y_n = \rho^n \left(C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta\right) \qquad (3.45)$$

elde edilir.

Bu üç durum bir örnek üzerinde incelenecek olursa $y_{n+2} - 2ay_{n+1} + y_n = 0$ homojen fark denklemini çözümü bulunacak olursa,çözüm üç aşamadan oluşacaktır.

i) $a > 1$, $y_n = r^n$ olsun. $r^2 - 2ar + 2 = 0$ denkleminin kökleri,

$$r_{1,2} = \frac{2a \mp \sqrt{4a^2 - 4}}{2}$$
$$= a \mp \sqrt{a^2 - 1}$$

olmak üzere,

$y_n = c_1 r^n + c_2 r^n$

dir. Burada r_1 fonksiyonu n kuvveti sayesinde büyürken, r_2 fonksiyonu ise sıfıra yaklaşır.

ii) $a = 1$ için,

$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0$
$r^2 - 2r + 1 = 0$, $r_1 = r_2 = 1$
$y_n = \left(c_1 + c_2 n\right)1^n$

iii) $a<1$ için,

$r^2-2ar+1=0$, $r_{1,2}=\rho e^{i\theta}=a\mp i\sqrt{1-a^2}$

$a=\cos\theta$ *ve* $\rho=1$ için

$y_n=\left(c_1\sin\left(n\theta\right)+c_2\cos\left(n\theta\right)\right)1^n$

bulunur.

3.4. Verilen Bir Çözümden Hareketle Fark Denklemine Ulaşılması

Kimi zaman bir problemin çözümünden hareketle o probleme ulaşılması istenilebilir ancak bu her zaman mümkün olmayabilir ya da çok zor olabilir. Bu yüzden bu tip problemlerde genel bir kural yoktur çeşitli cebirsel işlemler ve verilen fonksiyon özelikleri ile amaca ulaşılmaya çalışılır. Bu durumda problemdeki keyfi sabitler kadar denklem elde etme bu duruma örnek olarak gösterilebilir.

$y_n=c5^n$ çözümüne ait fark denklemi

$$y_{n+1}=c5^{n+1}=5c5^n=5y_n$$

olup buradan

$$y_{n+1}-5y_n=0$$

olarak bulunur.

3.5. Homojen Olmayan Fark Denklemleri

$F\left(n\right)$, n in fonksiyonları olmak üzere genel şekli,

$$y_{k+n}+a_{k+n}y_{k+n-1}+\ldots+a_ny_n=F(n)$$

olan fark denklemlerinin genel çözümü homojen çözüm ile özel çözümün toplamı şeklindedir.

O halde genel çözüm

$$y_n^G = y_n^H + y_n^P \tag{3.46}$$

olur.

Çizelge 3.5.1.a Özel Çözüm Tablosu

$F(n)$	y_n^P
Aa^n	ca^n
n^k	$c_o + c_1 n + c_2 n^2 + ... + c_k n^k$
$\sin(An)$ ya da $\cos(An)$	$c_1 \sin(An) + c_2 \cos(An)$
$n^k a^n$	$a^n\left(c_0 + c_1 n + ... + c_k n^k\right)$
$a^n \sin(An)$ ya da $a^n \cos(An)$	$a^n(c_1 \sin An + c_2 \cos An)$
$n^k a^n \sin(An)$ ya da $n^k\, a^n \cos(An)$	$\left(c_0 + c_1 n + ... + c_k n^k\right) a^n \sin An + \left(d_0 + d_1 n + ... + d_k n^k\right) a^n \cos An$

Bu çizelge kullanılarak $2y_{n+1} - 3y_n = n^2(-1)^n + 2$ fark denklemini çözümü bulunursa,

$$y_n{}^H = c.\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Çizelge 3.5.1.a dan özel çözüm

$$y_n{}^P = \left(an^2 + bn + c\right)(-1)^n + d$$

olarak seçilir. Özel çözüm genel denklemi sağlayacağından

$$\begin{aligned} y_{n+1}{}^P &= -\left(a\left(n^2 + 2n + 1\right) + b(n+1) + c\right)(-1)^n + d \\ 2y_{n+1}{}^P - 3y_n{}^P &= (-1)^n\left(-5an^2 + (-4a - 5b)n + (-2a - 2b - 5c)\right) - d \\ &= n^2(-1)^n + d \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$a=\frac{-1}{5},b=\frac{4}{25},c=\frac{2}{125},d=-2 \text{ ise } y_n^{\,P}=\frac{1}{125}\left(-25n^2+20n+2\right)(-1)^n-2$$

$$y_n^{\,G}=c\left(\frac{3}{2}\right)^n+\frac{1}{125}\left(-25n^2+20n+2\right)-2$$

elde edilir.

3.6. Lineer Olmayan Fark Denklemleri

Tanım 3.6.1. $y_n=f\left(y_n\right),\ y(0)=y_0$ formundaki denklemlere (Tanım 3.1.1 deki durumlar hariç) *lineer olmayan 1. mertebeden fark denklemi* denir.

Lineer olmayan fark denklemlerinin çözülebilir olması, bazı özelliklerinin biline bilirliği (konveks ve konkavlığı), $y_n\to 0$ ve $y_n\to\infty$ daki davranışlarının belirlenebilmesi f nin karakterine bağlıdır. Lineer olmayan fark denklemlerinin çözülmesi devam eden araştırma konusudur, ancak bazı lineer olmayan fark denklemleri bazı cebirsel özellikler kullanılarak örneğin lineer hale getirilerek, bazıları ise iteratif yöntemler ile çözülebilir.

3.6.1. Lineer Hale Dönüştürülebilen Fark Denklemleri

Lineer olmayan fark denklemleri bazı cebirsel yöntemler ile değişken dönüştürülerek lineer hale getirilebilir. Bu durum örneklendirilecek olursa, $y_{n+1}=y_n^{\,2}-\sqrt{1-y_n^{\,2}}$ fark denklemini çözümü için,

$$y_n=\cos\left(x_n\right)$$

dönüşümü yapılırsa

$$\cos\left(x_{n+1}\right)=\cos^2\left(x_n\right)-\sqrt{1-\cos^2(x_n)}$$

olur. Denklem düzenlenirse,

$$\cos\left(x_{n+1}\right) = \cos^2\left(x_n\right) - \sin^2\left(x_n\right)$$
$$= \cos\left(2x_n\right)$$

buradan,

$$x_{n+1} = 2x_n$$
$$x_{n+1} - 2x_n = 0$$

elde edilir ve bu denklem çözülürse

$$x_{n+1} - 2x_n = 0$$
$$x_n = c2^n$$
$$y_n = \cos\left(c2^n\right)$$

olur.

3.7. İteratif Metotlar

Tanım 3.7.1. $y_{n+1} + Ay_n = B$ 1. mertebeden fark denkleminde $y_0 = k$ başlangıç şartı altında sırasıyla $y_1, y_2, ..., y_n$ çözümlerinin elde edildiği yönteme iterasyon metodu denir.

$y_{n+1} - ay_n = b$, $y_o = 0$ başlangıç şartı altında fark denklemini çözümü bulunacak olursa

$y_{n+1} = b + ay_n$

$n = 0$ için $y_1 = b$

$n = 1$ için $y_2 = b + ay_1 = b + ab$

$n = 2$ için $y_3 = b + ay_2 = b + ab + a^2b$

$n = 3$ için $y_4 = b + ay_3 = b + ab + a^2b + a^3b$

$\vdots$

$n = k-1$ için $y_k = b + ay_{k-1} = b + ab + a^2b + \ldots + a^{k-1}b$

$$y_k = b\left(1 + a + a^2 + \ldots + a^{k-1}\right)$$

$$y_k = b\left(\frac{a^k - 1}{a - 1}\right)$$

İteratif metotlar yüksek mertebeden fark denklemleri, lineer ya da lineer olmayan fark denklem sistemlerinin çözümünde yararlı bir araçtır.

3.8. Fark Denklemleri için Genel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde literatürde iyi bilinen fark denklemleriyle ilgili genel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Teorem 3.8.1. I reel sayıların bir alt aralığı olmak üzere $f : I \times I \to I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. O halde $\forall\, x_{-1}, x_0 \in I$ için,

$$x_{n+1} = f\left(x_n, x_{n-1}\right),\ n = 0,1,2... \tag{3.47}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 3.8.1. Eğer $\overline{x}$ noktası için $f\left(\overline{x}, \overline{x}\right) = \overline{x}$ ise $\overline{x}$'e f in *denge noktası*, $\forall\, n \geq 0$ *için* $x_n = \overline{x}$ ise $\overline{x}$ e f in *sabit noktası* denir.

Örnek 3.8.1. $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n}$ fark denkleminin denge noktasının ∓ 1 olduğunu gösterilirse

$f\left(\overline{x}, \overline{x}\right) = \overline{x} = \dfrac{1}{\overline{x}}$ *ise* $\overline{x} = \mp 1$ dir.

Tanım 3.8.2. $\overline{x}$, $x_{n+1} = f\left(x_n, x_{n-1}\right)$, $n = 0,1,2...$ denkleminin denge noktası olmak üzere;

i) Her $\varepsilon > 0$ sayısı için eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken,

$$\left|x_0 - \overline{x}\right| + \left|x_{-1} - \overline{x}\right| < \delta \tag{3.48}$$

olacak şekilde $\delta > 0$ varsa ve $\forall n \geq -1 \; için \; |x_n - \overline{x}| < \varepsilon$ sağlanıyorsa denklemin $\overline{x}$ *denge noktası kararlıdır* denir.

ii) $\overline{x}$ denge noktası kararlı olsun. Eğer,

$$x_{-1}, x_0 \in I \text{ iken } |x_0 - \overline{x}| + |x_{-1} - \overline{x}| < \gamma \tag{3.48}$$

olacak şekilde $\gamma > 0$ sayısı varsa ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ oluyorsa $\overline{x}$ denge noktasına *lokal asimptotik kararlıdır* denir.

iii) Her $x_{-1}, x_0 \in I$ için eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$ ise $\overline{x}$ denge noktasına *global çekici* denir.

iv) $\overline{x}$ denge noktası kararlı ve global çekici ise $\overline{x}$ *'* e *global asimptotik kararlıdır* denir.

v) Eğer $\overline{x}$ noktası kararlı değil ise $\overline{x}$ denge noktasına *kararsızdır* denir.

vi) Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $|x_0 - \overline{x}| + |x_{-1} - \overline{x}| < r$ olacak şekilde $r > o$ sayısı varsa ve $|x_N - \overline{x}| \geq r$ olacak şekilde $N \geq -1$ sayısı varsa $\overline{x}$ denge noktasına *repeller* denir.

Tanım 3.8.3. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise $\{x_n\}$ dizisi *p periyotludur* denir ve bu şartı sağlayan en küçük tamsayıya *asal periyot* denir.

Tanım 3.8.4. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda geriye kalan sonsuz sayıda terim için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve bu şartı sağlayan en küçük tamsayıya *asal periyot* denir.

Örnek 3.8.2. $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n}$ denkleminin periyodunun 2 olduğunu gösterilirse

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ için

$n = 0 \;\; için \quad x_1 = \dfrac{1}{x_0} = x_1$

$n = 0 \;\; için \quad x_2 = \dfrac{1}{x_1} = x_0$

$n = 0 \;\; için \quad x_3 = \dfrac{1}{x_2} = x_1$

$n = 0 \;\; için \quad x_4 = \dfrac{1}{x_3} = x_0$

bu şekilde devam edilirse,

$$x_n = \left\{ x_1, \frac{1}{x_1}, x_1, \frac{1}{x_1}, ... \right\}$$

olup $p = 2$ olduğu kolayca görülür.

Tanım 3.8.5. $\overline{x}$, $x_{n+1} = f\left(x_n, x_{n-1}\right)$, $n = 0,1,2,3,...$ denkleminin bir denge noktası olsun. Bu denklemin $\left\{x_n\right\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin bir parçası için $\left\{x_L, x_{L+1}, ..., x_M\right\}$ çözümlerinin tamamı $\overline{x}$ denge noktasından büyük ya da eşit ve $x_{L-1} < \overline{x}$ ve $x_{M+1} < \overline{x}$ ise $\left\{x_L, x_{L+1}, ..., x_M\right\}$ kümesine *pozitif yarı dönme* denir.

Aynı denklemin, $\left\{x_n\right\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin bir parçası $\left\{x_L, x_{L+1}, ..., x_M\right\}$ çözümlerinin tamamı $\overline{x}$ denge noktasından küçük ve $x_{L-1} \geq \overline{x}$ *ve* $x_{M+1} \geq \overline{x}$ ise $\left\{x_L, x_{L+1}, ..., x_M\right\}$ kümesine *negatif yarı dönme* denir. $\left(L \geq -1 ve\, M = \infty\right)$

Tanım 3.8.6. $\overline{x}$, $x_{n+1} = f\left(x_n, x_{n-1}\right)$, $n = 0,1,2,3,...$ denkleminin bir denge noktası olsun. Bu denklemin $\left\{x_n\right\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin pozitif ya da negatif yarı dönmeye sahip olduğunu varsayalım. Eğer bu dönmeyi ters yöne çeviren yani denklemin denge noktasından küçük ya da büyük veya eşit değere sahip en az bir tane $x_N \left(N \geq -1\right)$ çözümü varsa $x_{n+1} = f\left(x_n, x_{n-1}\right)$, $n = 0,1,2,3,...$ denklemine *salınımlıdır* denir.

Tanım 3.8.7. $\left\{x_n\right\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden ne pozitif ne de negatif ise bu çözümlere sıfır civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir.

Tanım 3.8.8. $\left\{x_n - \overline{x}\right\}$ dizisi salınımlı ise $\left\{x_n\right\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne $\overline{x}$ *denge noktası civarında salınımlıdır* denir.

Tanım 3.8.9. $\left\{x_n\right\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde $P ve Q$ pozitif tamsayıları varsa $\left\{x_n\right\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisine *sınırlıdır* denir.

Tanım 3.8.10. (Lineerleştirme) Herhangi bir fark denkleminin karakterini inceleyebilmek için o denklemin denge noktasındaki kısmi türevleri ile oluşturduğumuz yeni denkleme karakteristik denklem denir. $x_{n+1} = f\left(x_n, x_{n-1}\right),\ n = 0,1,2,3,...$ denklemi için, $x_{n+1} = f\left(x_n, x_{n-1}\right) = f\left(u,v\right)$ olmak üzere oluşturduğumuz;

$$Z_{n+1} - \frac{\partial f\left(\overline{x},\overline{x}\right)}{\partial u} Z_n - \frac{\partial f\left(\overline{x},\overline{x}\right)}{\partial v} Z_{n-1} = 0 \tag{3.49}$$

denklemi $x_{n+1} = f\left(x_n, x_{n-1}\right)$ denkleminin karakteristik denklemidir. Burada,

$$r = \frac{\partial f\left(\overline{x},\overline{x}\right)}{\partial u},\ s = \frac{\partial f\left(\overline{x},\overline{x}\right)}{\partial v} \tag{3.50}$$

olmak üzere,

$$Z_{n+1} = r.Z_n + s.Z_{n-1} \tag{3.51}$$

elde edilir. Bu denkleme $\overline{x}$ *denge noktası civarında lineer denklem* denir ve karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - r\lambda - s = 0 \tag{3.52}$$

dir.

Teorem 3.8.2. (Lineer Kararlılık Teoremi) (3.52) denklemi göz önüne alınılırsa;

i) $\left|\lambda_1\right| < 1$, $\left|\lambda_2\right| < 1$ ise $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

ii) Denklemin λ_1, λ_2 köklerinden en az biri $\left|\lambda_1\right| > 1$ ise $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır.

iii) Denklemin her iki kökü λ_1, λ_2 nin mutlak değerce birden küçük olması için gerek ve yeter şart $\left|r\right| < 1 - s < 2$ olmasıdır.

iv) Denklemin her iki kökü λ_1, λ_2' nin mutlak değerce birden büyük olması için gerek ve yeter şart $\left|s\right| > 1 ve \left|r\right| < \left|1 - s\right|$ olmasıdır. Bu durumda $\overline{x}$ denge noktası repellerdir.

v) Denkleminin λ_1, λ_2 iki kökü olmak üzere,

$$|\lambda_1| > 1, |\lambda_2| < 1 \Leftrightarrow r^2 + 4s \text{ ve } |r| < |1 - s| \tag{3.53}$$

olması durumunda $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

Teorem 3.8.3. (Clark Teoremi) $p, q \in \mathbb{R}$ *ve* $k, n \{1, 2, 3, ...\}$ olmak üzere,

$$x_{n+1} + px_n + qx_{n-k} = 0 \tag{3.54}$$

denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart,

$$|p| + |q| < 1 \tag{3.55}$$

olmasıdır.

3.9. Rasyonel Fark Denklemleri

Bu bölümde Hekimoğlu E.Ö. tezinden faydalanılmıştır. Rasyonel fark denklemleri aslında lineer olmayan fark denklemleridir ancak rasyonel fark denklemlerinin çözümleri zaman zaman periyodik özellikler göstermektedir. Bu bölümde; x_0 ve x_{-1} pozitif reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{1 - x_n x_{n-1}}{x_n} \text{ , } (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.56}$$

lineer olmayan fark denkleminin çözümlerini, bu çözümlerin başlangıç şartlarına göre durumları ve bu çözümlerin lokal asimptotik kararlılığı incelenmiştir.

Teorem 3.9.1.(Hekimoğlu E.Ö.) $x_{-1} = k$ ve $x_0 = h$ için, (3.56) fark denkleminin çözümü $\{x_n\}$ dizisi olsun. O takdirde, $t = 0, 1, 2, \ldots$ için (3.1) denkleminin çözümü;

$$x_{2t+1} = k\left(\frac{1-hk}{hk}\right)^{t+1}, \qquad x_{2t+2} = h\left(\frac{hk}{1-hk}\right)^{t+1}. \tag{3.57}$$

İspat. $t = 0$ için aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$x_1 = \frac{1-hk}{h},$$

$$x_2 = \frac{h^2 k}{1-hk}.$$

Şimdi $t > 0$ olmak üzere, (t-1) için aşağıdaki ifadelerin doğru olduğunu varsayalım.

$$x_{2t-1} = k\left(\frac{1-hk}{hk}\right)^{t}, \qquad x_{2t} = h\left(\frac{hk}{1-hk}\right)^{t}. \tag{3.58}$$

t için bu ifadelerin doğru olduğunu gösterelim

$$x_{2t+1} = \frac{1-x_{2t}x_{2t-1}}{x_{2t}} = \frac{1-h\left(\frac{hk}{1-hk}\right)^{t} k\left(\frac{1-hk}{hk}\right)^{t}}{h\left(\frac{hk}{1-hk}\right)^{t}} = \frac{1-hk}{h\left(\frac{hk}{1-hk}\right)^{t}} = k\left(\frac{1-hk}{hk}\right)^{t+1}$$

$$x_{2t+2} = \frac{1-x_{2t+1}x_{2t}}{x_{2t+1}} = \frac{1-k\left(\frac{1-hk}{hk}\right)^{t+1} h\left(\frac{hk}{1-hk}\right)^{t}}{k\left(\frac{1-hk}{hk}\right)^{t+1}} = \frac{1-hk\left(\frac{1-hk}{hk}\right)}{k\left(\frac{1-hk}{hk}\right)^{t+1}} = h\left(\frac{hk}{1-hk}\right)^{t+1}.$$

elde edilir ki, teoremin ispatı tamamlanır.

4. FARK DENKLEM SİSTEMLERİ

Bu bölümde fark denklem sistemlerinin çözümleri ve kararlılığı incelenecektir ve literatürde iyi bilinen fark denklem sistemleri ile ilgili iyi bilinen tanım ve teoremlere yer verilecektir.

4.1. Fark Denklem Sistemlerinin Sınıflandırılması

Tanım 4.1.1. A reel $N \times N$ matris olmak üzere

$$x_{n+1} = Ax_n \tag{4.1}$$

sistemine *lineer homojen fark denklem sistemi* denir. Burada A kat sayılar matrisidir.

Tanım 4.1.1. A reel $Nx\,N$ matris olmak üzere

$$x_{n+1} = Ax_n + b_n \tag{4.2}$$

sistemine *lineer homojen olmayan fark denklem sistemi* denir.

Tanım 4.1.1. $x_n \in \mathbb{R}^k$ ve $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ olmak üzere

$$x_{n+1} = f\left(n, x_n\right),\ n = 0,1,2,\ldots \tag{4.3}$$

sistemine *lineer olmayan fark denklem sistemi* denir.
Yukarıdaki durumlar örneklendirilecek olursa,

$$x_{n+1} = x_n + 2y_n + 3z_n \tag{4.4}$$

$$y_{n+1} = 2x_n + 3y_n + z_n \tag{4.5}$$

$$z_{n+1} = 3x_n + y_n + 2z_n \tag{4.6}$$

(4.4)-(4.6) sistemi lineer homojen fark denklem sistemidir.

$$x_{n+1} = x_n + 4y_n + 7 \tag{4.7}$$

$$y_{n+1} = 3x_n + 5z_n - 2 \tag{4.8}$$

$$z_{n+1} = 2x_n - 3y_n + 10 \tag{4.9}$$

(4.7)-(4.9) sistemi lineer homojen olmayan fark denklem sistemidir.

s, r, b belirli parametreler olmak üzere,

$$x_{n+1} = (1-s)x_n + sy_n \tag{4.10}$$

$$y_{n+1} = rx_n - x_n z_n \tag{4.11}$$

$$z_{n+1} = x_n y_n + (1-b)z_n \tag{4.12}$$

Lorenz Sistemi (Kulenovic M.R.S., Merino O.) olarak bilinen (4.10)-(4.12) sistemi lineer olmayan sisteme örnek olarak verilebilir.

Teorem 4.1.1. $x_n = Ax_{n-1}$, $x(0) = x_0$ sisteminin çözümü

$$x_n = A^n x_0$$

dır.

İspat.
İterasyon yöntemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 \\ x_2 &= Ax_1 = A^2 x_0 \\ &\vdots \\ x_n &= A^n x_0 \end{aligned}$$

olur.

4.2. Lineer Fark Denklem Sisteminin Çözümü

(4.1) sisteminde A katsayılar matrisinde $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ öz değerler ve $v_1, v_2, ..., v_N$ ler de bu öz değerlere karşılık gelen lineer bağımsız öz vektörler olmak üzere (4.1) in genel çözümü

$$x_n = c_1 (\lambda_1)^n v_1 + c_2 (\lambda_2)^n v_2 + ... + c_N (\lambda_N)^n v_N \tag{4.13}$$

dir.

$$x_{n+1} = 4x_n - 9y_n + 5z_n \tag{4.14}$$

$$y_{n+1} = x_n - 10y_n + 7z_n \tag{4.15}$$

$$z_{n+1} = x_n - 17y_n + 12z_n \tag{4.16}$$

(4.14)-(4.16) sistemi $x_{n+1} = Ax_n$ formunda yazılırsa

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix}}_{X_{n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & -9 & 5 \\ 1 & -10 & 7 \\ 1 & -17 & 12 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}}_{X_n}$$

olur. A matrisinin öz değerleri

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

ve öz vektörleri

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}^T$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T$

olarak bulunur. (4.14)-(4.16) sisteminin çözümü (4.13) den

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = c_1(1)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2(2)^n \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} + c_3(3)^n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

olur.

4.3. Kararlılık Teorisi

Bir başlangıç değer probleminin çözümleri bir dizi oluşturur. Bu sebeple sistemin kurulduğu problemler için bu noktaların davranışlarını bilmek önem taşır, fakat bu durum göze alındığında sayısız olasılık mevcuttur, yani yakınsayabilir, salınım yapabilir, dizi sınırlı olabilir, sınırsızda da olabilir, dallanma (bifurcation) yapabilir.(Tu P.N.V)

Tüm bu çalışmalar "*Kararlılık Teorisi*" adı altında yürütülmektedir. Bu bölümde ileride de kullanılacak olan tanım teoremlere yer verilmiştir. Bu bölümdeki tanımlar *n* boyutlu sistemlere de taşınılabilir ancak bu çalışmadaki sistem 3 boyutlu olduğu için tanım ve teoremler 3 boyuta indirgenmiştir. Bu bölümdeki tanım ve teoremlere yer verilirken Clark D., Kulenovic M.R.S., Nasri M., Dehghan M., Douraki M.J. Kulenovic M.R.S., Nurkanovic Z. çalışmalarından faydalanılmıştır.

$$x_{n+1} = f_1(x_n, y_n, z_n) \tag{4.17}$$

$$y_{n+1} = f_2(x_n, y_n, z_n) \tag{4.18}$$

$$z_{n+1} = f_2(x_n, y_n, z_n) \tag{4.19}$$

ve I_1, I_2, I_3 de $\mathbb{R}$ nin açık aralıkları olsun.

Tanım 4.4.1. Eğer $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$,

$$\overline{x} = f_1(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \tag{4.19}$$

$$\overline{y} = f_2(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \tag{4.20}$$

$$\overline{z} = f_2(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \tag{4.21}$$

şartlarını sağlarsa $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ noktası (4.17)-(4.19) sisteminin denge noktası olarak adlandırılır.

Tanım 4.4.2. $\forall \varepsilon > 0$ ($\forall (x_0, y_0, z_0) \in I_1 \times I_2 \times I_3$) için $\left\| (x_0, y_0, z_0) - (\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \right\| < \delta$ iken

$$\forall n \geq 0 \text{ için } \left\| (x_n, y_n, z_n) - (\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \right\| < \varepsilon \tag{4.22}$$

olacak şekilde $\delta > 0$ mevcut ise (4.17)-(4.19) sisteminin denge noktası olan $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ *kararlıdır* denir, aksi halde *kararsızdır* denir.

Tanım 4.4.3. Eğer sistemin denge noktası kararlı ve $\forall (x_0, y_0, z_0) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ için

$$\left\| (x_0, y_0, z_0) - (\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \right\| < \gamma \tag{4.23}$$

olacak şekilde $\gamma > 0$ varsa ve

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (x_n, y_n, z_n) - (\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \right\| = 0 \tag{4.24}$$

ise (4.17)-(4.19) sisteminin denge noktası *asimtotik kararlıdır* denir.

Tanım 4.4.4. Eğer (4.17)-(4.19) sisteminin denge noktası kararlı ve $\forall (x_0, y_0, z_0) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (x_n, y_n, z_n) - (\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \right\| = 0 \tag{4.25}$$

ise (4.17)-(4.19) denge noktası olan $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ *global asimtotik kararlıdır* denir.

Tanım 4.4.5. $\forall(x_0, y_0, z_0) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ için,

$$0 < \left\|(x_0, y_0, z_0) - (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\right\| < r \tag{4.26}$$

olacak şekilde $r > 0$ sayısı varsa ve

$$\left\|(x_N, y_N, z_N) - (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\right\| \geq \gamma \tag{4.27}$$

olacak şekilde $N \geq 1$ mevcutsa o takdirde (4.17)-(4.19) fark denklem sisteminin $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ denge noktası *repellerdir* denir.

Tanım 4.4.6. (4.17)-(4.19) denklem sisteminin iki tane denge noktası olsun. Bu durumda her iki denge noktası da eşzamanlı olarak asimtotik kararlı ise buna *bistability* denir.

Tanım 4.4.7. (4.17)-(4.19) denklem sistemi μ parametresine bağlı olsun. μ nün μ_0 değeri için sistemin doğal niteliği değişirse μ_0 da *dallanma* (*bifurcation*)oluşur denir.

Teorem 4.4.1. (4.17)-(4.19) fark denklem sisteminin Jakobiyen matrisi $J(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ olsun. $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ denge noktasında $J(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ matrisinin karakteristik polinomu $P(\lambda)$ olsun. $P(\lambda) = \lambda^3 - r\lambda^2 - s\lambda - t$ olmak üzere

- **i)** $P(\lambda)$ nın tüm kökleri birim diskin içindeyse yani $|\lambda| < 1$ ise $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ denge noktası kararlıdır.
- **ii)** $P(\lambda)$ nın en az bir kökü birim diskin dışındaysa $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ denge noktası kararsızdır.
- **iii)** $P(\lambda)$ nın bütün kökleri mutlak değerce birden büyükse $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ denge noktası repellerdir.

iv) $P(\lambda)$ nın tüm kökleri birim diskin içinde olması için gerek ve yeter şart

$$|\lambda_{1,2,3}|<1 \Leftrightarrow \begin{cases} |r+t|<1-s \\ |r-3t|<3+s \\ t^2-s-rt<1 \end{cases}$$

dır.

5. SIR EPİDEMİK MODEL

Salgın bir hastalığın matematiksel modellenmesi hastalığın dinamikleri açısından önemli bir araçtır. Hastalığın yayılmasının ve kontrol altına alınmasının incelenmesinde, aşılama ve gerekli önlemlerin alınmasında kilit rol oynar. Modellerin oluşturulması ve analizi, hastalığın seyri için varsayımlarda bulunmayı, hastalık için çeşitli parametreler geliştirilmesi ve bu parametreleri yorumlanması hastalığın yayılması vb. konuları aydınlatır.

5.1. SIR Epidemik Model

Salgın hastalıkların modellenmesi popülasyonun belirli sınıflara bölünmesi ile olur ve birçok modelleme süreci bu şekilde başlar. Bu sınıflama bireyleri duyarlılar, enfekteler, iyileşmiş kişiler, bağışık kazanmışlar, hastalığa maruz kalmış kişiler, anneden bağışıklık kazanmış kişiler vb. gibi belirgin sınıflara böler. Bu bölümde W.O. Kermack ve A.G. McKendrict tarafından 1927 yılında ortaya konan bulaşıcı hastalığın etkisinde kalan kapalı bir popülasyondaki bireyleri üç gruba ayıran model incelenecektir. Bu modelde popülasyondaki bireyler Duyarlı-Susceptible (S), Enfekte-Infected (I), İyileşmiş(Bağışıklık Kazanmış)-Recovered (R) olarak üçe ayrılır ve SIR salgın hastalık modeli olarak adlandırılır. Epidemik modeller zaman içerisinde modifiye edilerek geliştrilmiştir. Li M.Y. ve ark. SIR modeline yeni bir grup eklenmesiyle oluşan SEIR modelini incelemişler. Burada E, Maruz Kalmış(Exposed) kişileri göstermektedir. Li G. ve ark. ise SEIR modelinin kararlılık analizini yapmışlardır. Burada SIR modelindeki S,I,R daha detaylı olarak tanıtılırsa;

Duyarlı Bireyler (Supceptible Individuals): Bu sınıftaki bireyler hastalığa karşı duyarlı kişilerdir, hastalığa hiç yakalanmamışlardır. Hastalığa yakalandıkları anda enfekte sınıfına girerler.

Enfekte Bireyler (Infected Individuals): Bu sınıftaki bireyler hastalığı kapmış bireylerdir ve hastalığı duyarlı bireylere bulaştırabilirler. Bu bireylerin bu sınıfta geçirdiği zaman *bulaşıcı dönem* olarak adlandırılır. Hastalıktan kurtulan bireyler yani bağışıklık sağlayanlar iyileşmiş sınıfına dahil olurlar.

İyileşmiş Bireyler (Recovered Individuals): Bu bireyler hastalığa yakalanmış ve sonrasında iyileşerek bağışıklık kazanmış bireylerdir.

Matematik modeller hastalığın yayılmasının ve kontrol altına alınmasının incelenmesinde önemli bir araçtır. Modellerin oluşturulması ve analizi hastalığın seyri için varsayımlarda bulunmayı, hastalık için çeşitli parametreler geliştirilmesi ve bu parametrelerini yorumlanması hastalığın yayılması vb. konuları aydınlatır. Zaman içerisinde birçok hastalık modeli birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bunlardan bazıları Zaman ve ark. (2008), Anderson, R.M.,May,R.M.. dır.

Bu bölümde SIR epidemik modeli tanıtılacak. Çalışmanın ilerleyen ana kısmında ise bu diferansiyel denklem sistemi fark denklem sistemine çevrilecek bu sistem çeşitli metotlara çözülecek sistemin denge noktası bulunup, kararlılık analizi yapılacaktır.

SIR Epidemik Model (Zaman ve ark.)

$$\frac{dS(t)}{dt} = \nu N - \nu S(t) - \frac{\beta I(t) S(t)}{N} \tag{5.1}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta I(t) S(t)}{N} - (\gamma + \nu) I(t) \tag{5.2}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \nu R(t) \tag{5.3}$$

Bu modelde $\nu, \beta, \gamma, N > 0$ olmak üzere önemli dinamikler aşağıda verilmiştir.

ν : Ölüm oranı (Denk olarak doğum oranı),

γ : Hastalıktan kurtulma oranı

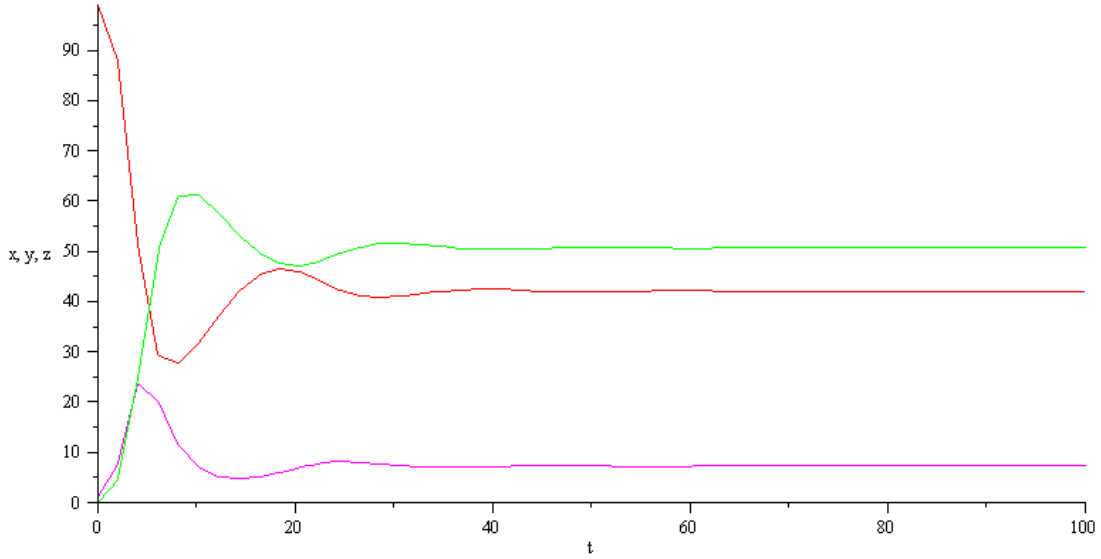
β : Bulaşma kat sayısıdır

N : Toplam popülasyon

5.2. SIR Epidemik Modele Ait Nümerik Örnekler

Bu bölümde SIR Epidemik Modele ait birkaç nümerik örnek üzerinde durulmuştur. Bu bölümde yer alan grafikler *Maple 13* programı kullanılarak çizdirilmiştir. (5.1)-(5.3) diferansiyel sisteminin nümerik çözümünde *Maple 13* de 4. dereceden Runge-Kutta medotu ile işlem yapılmıştır.

Şekil 5.2.1 de $\nu = 0.1$, $\gamma = 0.7$, $\beta = 1.9$, $N = 100$, $S_0 = 99$, $I_0 = 1$, $R_0 = 0$ alınmıştır. (Allen L. J. S.)



Şekil 5.2.1

5.3. SIR Epidemik Modelin Fark Denklem Sistemine Çevrilmesi

Matematiksel modellerin birçoğu lineer olmayan sistemlerden oluşur, ancak bu başlangıç değer problemlerin birçoğu kapalı formda sembolik çözümleri yoktur ya da çözümlerin bulunuşu oldukça zor olabilir. Bu durumda nümerik çözümler oldukça önem taşımaktadır. Nümerik yöntemlerden bir tanesi de farklar hesabıyla çözüme ulaşmaktır. Fark denklemlerini oluşturmak için iki yol var bunlardan birincisi sistemin diferansiyel sistemi olarak ortaya konulması ve böyle sistemlerin fark denklem sistemlerine çevrilmesi, ikincisi ise; toplanan veriler ışığında doğrudan fark denklemlerin oluşturulmasıdır. Bu bölümde (5.1)-(5.3) sistemi fark denklemine çevrilecektir.

(5.1)-(5.3) sistemi için,

$$\frac{dS(t)}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta S(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{S(t+h)-S(t)}{h} \tag{5.4}$$

$$\frac{dI(t)}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta I(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{I(t+h)-I(t)}{h} \tag{5.5}$$

$$\frac{dR(t)}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta R(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{R(t+h)-R(t)}{h} \tag{5.6}$$

dir. Yeterince küçük $h>0$ için (5.4)-(5.6) denklemlerini

$$\frac{dS(t)}{dt} = \frac{S(n+1)-S(n)}{h} = \frac{S_{n+1}-S_n}{h} \tag{5.7}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{I(n+1)-I(n)}{h} = \frac{I_{n+1}-I_n}{h} \tag{5.8}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{R(n+1)-R(n)}{h} = \frac{R_{n+1}-R_n}{h} \tag{5.9}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda (5.1)-(5.3) sistemi yeniden düzenlenirse

$$\frac{S_{n+1}-S_n}{h} = \nu N - \nu S_n - \frac{\beta I_n S_n}{N} \tag{5.10}$$

$$\frac{I_{n+1}-I_n}{h} = \frac{\beta I_n S_n}{N} - (\gamma+\nu) I_n \tag{5.11}$$

$$\frac{R_{n+1}-R_n}{h} = \gamma I_n - \nu R_n \tag{5.12}$$

olur. (5.10) denklemi düzenlenip S_n, (5.11) denklemi düzenlenip I_n, (5.12) denklemi düzenlenip R_n parantezine alınırsa

$$S_{n+1} = \nu h N + S_n\left(1-\nu h - \frac{\beta h I_n}{N}\right) \tag{5.13}$$

$$I_{n+1} = I_n\left(\frac{\beta h S_n}{N} - h(\gamma+\nu)+1\right) \tag{5.14}$$

$$R_{n+1} = (1-\nu h) R_n + \gamma h I_n \tag{5.15}$$

olur. (5.13)-(5.15) sistemi (5.1)-(5.3) sisteminin fark denklem formudur.

Fark denklem sisteminin bir avantajı da çözümü kolaylaştırmasıdır. Çünkü bilgisayar sistemleri için türev kavramı yoktur. Oysaki fark denklemler temel aritmetik işlemidir ve hemen hemen bilgisayardaki tüm işletim sistemlerimdeki (MS Windows, Linux dağıtımları, MacOS sürümleri) elektronik tablolarda (MS Office Excel, Open Office Calc vb), hatta tablet (mobil) işletim sistemlerinde (iOS, Android, Windows Phone) uygulamalarında (iWork Numbers, OfficeSuite) ve programlama dillerinde (C, Pascal vb) hesaplanabilir. Bu sayede diferansiyel denklem fark denklemleriyle her platformda hesaplanabilir hale gelmektedir.

(5.13)-(5.15) sistemi $v = 0.1$, $\gamma = 0.7$, $\beta = 1.9$, $N = 100$, $S_0 = 99$, $I_0 = 1$, $R_0 = 0$ şartları altındaki MS Office Excel programı altındaki çözümleri aşağıdadır.

Çizelge 5.3.a

n	S_n	I_n	R_n
0	99	1	0
1	97,6701	1,849901	0,56
3	95,21735	3,385109	1,551145
4	90,82919	6,069412	3,322714
5	83,34636	10,48148	6,455768
6	71,61151	16,92047	11,80893
7	55,7271	24,32686	20,33968
8	38,94683	29,15977	32,33555
9	26,81966	27,58895	46,07818
10	21,61856	21,06754	57,84173
11	21,11478	14,43861	65,01222
12	22,91748	9,786015	67,89686
13	25,78892	6,89813	67,94528
14	29,12857	5,160564	66,37261
15	32,61605	4,120042	63,95272
16	36,06442	3,50556	61,14373
17	39,35662	3,16465	58,21534
18	42,41367	3,013688	55,33032
19	45,17693	3,008579	52,59156
20	47,59727	3,128593	50,06904
21	49,62843	3,367352	47,81553
22	51,22313	3,727266	45,876
23	52,332	4,215101	44,29319
24	52,90575	4,837126	43,11019
25	52,90194	5,592711	42,37017
26	52,29716	6,466002	42,11247
27	51,10434	7,416804	42,36444
28	49,39177	8,374277	43,12869
29	47,29565	9,239522	44,36799
30	45,01552	9,902698	45,99268
31	42,78559	10,27367	47,85878
32	40,82751	10,31375	49,78333
33	39,30419	10,05007	51,57637
34	38,29515	9,562727	53,0783
35	37,80032	8,953802	54,18716
36	37,76269	8,316972	54,86632
37	38,09506	7,720727	55,13452
38	38,70107	7,205845	55,04736
39	39,48807	6,791018	54,67885

40	40,37329	6,480505	54,10751
41	41,28588	6,270524	53,40799
42	42,16693	6,153466	52,64684
43	42,96864	6,120185	51,88104
44	43,65349	6,160925	51,15786
45	44,19371	6,265436	50,51535
46	44,57111	6,422657	49,98276
47	44,77728	6,620303	49,58083
48	44,81383	6,844571	49,32173
49	44,69257	7,080202	49,20895
50	44,43501	7,311024	49,23715
51	44,07115	7,521033	49,39235
52	43,63714	7,695889	49,65274
53	43,17214	7,824544	49,99022
54	42,71461	7,900594	50,37275
55	42,29868	7,922982	50,76726
56	41,95122	7,895839	51,14275
57	41,69012	7,827501	51,473
58	41,52381	7,728997	51,73856
59	41,45196	7,612389	51,92771
60	41,46695	7,489307	52,03643
61	41,55584	7,369907	52,06753
62	41,70227	7,262268	52,02928
63	41,8883	7,172206	51,93381
64	42,09589	7,10334	51,79554
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
121	42,54528	7,310655	51,14402
122	42,54075	7,312741	51,14647
123	42,53575	7,31433	51,14989
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

(5.13)-(5.15) sistemi $v = 0.035$, $\gamma = 0.076$, $\beta = 0.2$, $N = 955$, $S_0 = 700$, $I_0 = 165$, $R_0 = 90$ şartları altındaki MS Excel programı altındaki çözümleri

Çizelge 5.3.b

n	S_n	I_n	R_n
0	700	165	90
1	97,6701	176,747	108,78
3	95,21735	187,0703	128,0309
4	90,82919	195,6794	147,5035
5	700	202,3831	166,9215
6	669,473	207,1021	185,9992
7	639,8987	209,867	204,4588
8	611,8172	210,8031	222,0464
9	585,6955	210,1078	238,5453
10	561,8987	208,024	253,7835
11	540,6742	204,8148	267,6383
12	522,1505	200,7418	280,0355
13	506,3469	196,05	290,9457
14	493,1925	190,9571	300,3791
15	482,5469	185,6494	308,3781
16	474,2227	180,28	315,0103
17	468,0043	174,9705	320,3622
18	463,6637	169,8142	324,5323
19	460,9725	164,8801	327,6268
20	459,7097	160,2164	329,7547
21	459,6674	155,8547	331,0248
22	460,6535	151,8136	331,5429
23	462,4931	148,1013	331,4106
24	465,0289	144,7183	330,7233
25	468,1205	141,6593	329,5698
26	471,6434	138,9148	328,0321
27	475,4881	136,4727	326,1849
28	479,5585	134,3187	324,0958
29	483,7709	132,4374	321,8256
30	488,053	130,8128	319,4283
31	492,3423	129,4285	316,9519
32	496,5854	128,2681	314,4383
33	500,737	127,3154	311,9244
34	504,7589	126,5548	309,4416
35	508,6197	125,9705	307,0171
36	512,2936	125,5478	304,6734
37	515,7602	125,2719	302,4295
38	519,0036	125,1288	300,3008
39	522,0124	125,105	298,2993

40	524,7788	125,1873	296,4343
41	527,2986	125,3632	294,7124
42	529,5704	125,6204	293,1377
43	531,5957	125,9475	291,7124
44	533,3784	126,3334	290,4365
45	534,9245	126,7676	289,3087
46	536,2419	127,2401	288,3257
47	537,3401	127,7415	287,4834
48	538,23	128,2632	286,7763
49	538,9238	128,797	286,198
50	539,4342	129,3354	285,7412
51	539,7751	129,8716	285,3983
52	539,9605	130,3995	285,1609
53	540,0051	130,9137	285,0204
54	539,9234	131,4094	284,9678
55	539,7301	131,8827	284,9943
56	539,4396	132,33	285,0909
57	539,0659	132,7487	285,2487
58	538,6227	133,1366	285,4591
59	538,123	133,4924	285,7137
60	537,5791	133,8149	286,0046
61	537,0026	134,1039	286,3241
62	536,4043	134,3593	286,6652
63	535,7939	134,5816	287,0213
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
121	530,2339	133,8892	290,877
122	530,2324	133,9009	290,8668
123	530,2285	133,9125	290,859
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Yukarıdaki tablolardan da görüleceği gibi fark denklem sistemleri MS Office Excel ile kolaylıkla çözümleri elde edilmektedir.

5.3.1. SIR Epidemik Fark Denklem Sisteminin Denge Noktalarının Bulunması ve İncelenmesi

Çizelge 5.3.a-5.3.b den çıkarılabilecek bir diğer sonuç da n ler büyüdükçe S_n , I_n , R_n ler belirli değerlerde sabitlenmektedir. Bu noktalar sistemin denge noktalarıdır.

Teorem 5.3.1.1. (5.13)-(5.15) sisteminin denge noktaları

$$E_1(N,0,0) \text{ ve } E_2\left(\frac{N(\gamma+\nu)}{\beta}, \nu N\left(\frac{1}{\gamma+\nu}-\frac{1}{\beta}\right), \gamma N\left(\frac{1}{\gamma+\nu}-\frac{1}{\beta}\right)\right) \tag{5.16}$$

dır.

İspat.

Tanım 4.1.4 den

$$\overline{S} = f_1\left(\overline{S},\overline{I},\overline{R}\right) \tag{5.17}$$

$$\overline{I} = f_2\left(\overline{S},\overline{I},\overline{R}\right) \tag{5.18}$$

$$\overline{R} = f_3\left(\overline{S},\overline{I},\overline{R}\right) \tag{5.19}$$

olmak üzere (5.13)-(5.15) sistemi yeniden yazılırsa

$$\overline{S} = \nu h N + \overline{S}\left(1-\nu h-\frac{\beta h\overline{I}}{N}\right) \tag{5.20}$$

$$\overline{I} = \overline{I}\left(\frac{\beta h\overline{S}}{N}-h(\gamma+\nu)+1\right) \tag{5.21}$$

$$\overline{R} = (1-\nu h)\overline{R}+\gamma h\overline{I} \tag{5.22}$$

olur. (5.20)-(5.22) denklemleri düzenlenirse,

$$\nu N-\overline{S}\left(\nu+\frac{\beta\overline{I}}{N}\right)=0 \tag{5.23}$$

$$\overline{I}\left(\frac{\beta\overline{S}}{N}-(\gamma+\nu)\right)=0 \tag{5.24}$$

$$\gamma\overline{I}-\nu\overline{R}=0 \tag{5.25}$$

elde edilir. (5.24) den $\bar{I}=0$ ya da $\left(\frac{\beta\bar{S}}{N}-(\gamma+\nu)\right)=0$ olacağı açıktır. Eğer $\bar{I}=0$ olursa $\bar{S}=N$ ve $\bar{R}=0$ olur. Bu durumda $E_1(N,0,0)$ olur.

$\left(\frac{\beta\bar{S}}{N}-(\gamma+\nu)\right)=0$ ise, $\bar{S}=\frac{N(\gamma+\nu)}{\beta}$ olur. $\bar{S}$ (5.23) de yerine yazılırsa $\bar{I}=\nu N\left(\frac{1}{\gamma+\nu}-\frac{1}{\beta}\right)$ olur. $\bar{I}$ değeri (5.25) yerine yazılırsa $\bar{R}=\gamma N\left(\frac{1}{\gamma+\nu}-\frac{1}{\beta}\right)$ olarak bulunur. Bu durumda $E_2\left(\frac{N(\gamma+\nu)}{\beta},\nu N\left(\frac{1}{\gamma+\nu}-\frac{1}{\beta}\right),\gamma N\left(\frac{1}{\gamma+\nu}-\frac{1}{\beta}\right)\right)$ olup, ispat tamamlanır.

Bu teoremden çıkarılabilecek diğer sonuç da $\bar{I}=0$ olması demek bu popülasyonda hastalanan birey yoktur ya da kalmamıştır demektir. Bu durumda hastalığın olmadığı bir popülasyonda bağışıklık kazanmış bireylerden de söz edilemez Bu durumda $\bar{R}=0$ olması da aşikârdır. Bu durumda tüm popülasyon duyarlı kişilerden oluşur, yani $\bar{S}=N$ dir.

Literatürde E_1 "*disease-free equilibrium*" olarak geçmektedir. Bu ifade Türkçeye hastalığın olmadığı denge hastalıksız denge şeklinde çevrilebilir, E_2 " *endemic equilibrium*" olarak adlandırılır. Bu ifade ise epidemik denge olarak tanımlanabilir. (Hu Z. ve ark.)

5.3.2. SIR Epidemik Fark Denklem Sisteminin Kararlığının İncelenmesi

(5.13)-(5.15) sisteminin Jakobiyen matrisi

$$J(S,I,R)=\begin{bmatrix} 1-\nu h-\frac{\beta hI}{N} & -\frac{\beta hS}{N} & 0 \\ \frac{\beta hS}{N} & \frac{\beta hS}{N}-h(\gamma+\nu)+1 & 0 \\ 0 & h\gamma & 1-\nu h \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

dır.

Teorem 5.3.2.1. (5.13)-(5.15) sisteminde eğer

$$\frac{\beta}{\gamma+v}<1 \tag{5.27}$$

ise E_1 denge noktası kararlıdır.

İspat.

E_1 (5.26) da yerine yazılırsa

$$J\left(E_1\right)=\begin{bmatrix} 1-vh & -\beta h & 0 \\ 0 & \beta h-h\left(\gamma+v\right)+1 & 0 \\ 0 & h\gamma & 1-vh \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

olur. $J\left(E_1\right)$ öz değerleri,

$\lambda_1=1-vh$, $\lambda_2=1-vh$ ve $\lambda_3=\beta h-h\gamma-vh+1$

olur. Teorem 4.4.1 den sistemin kararlı olabilmesi için $\left|\lambda_{1,2,3}\right|<1$ olmalıdır.

$\lambda_{1,2}=1-vh<1$

olup

$1-vh<1$

$vh>0$

elde edilir. $v,h>0$ olduğu için bu durum her zaman doğrudur.

$\lambda_3=\beta h-h\gamma-vh+1<1$

durumunda ise

$$\begin{aligned} \beta h - h\gamma - \nu h + 1 &< 1 \\ \beta h - h\gamma - \nu h &< 0 \end{aligned} \tag{5.29}$$

olup, bu eşitsizlik düzenlenirse

$$\frac{\beta}{\gamma + \nu} < 1$$

olur ki ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.2.2. (5.13)-(5.15) sisteminde

$A = \nu^2\beta^2 - 8\gamma\nu^2\beta + 12\nu^2\gamma^2 + 4\nu\gamma^3 - 4\nu\beta\gamma^2 + 12\gamma\nu^3 - 4\nu^3\beta + 4\nu^4$ olmak üzere eğer

$$\sqrt{A} < \nu\beta \tag{5.30}$$

ise E_2 denge noktası kararlıdır.

İspat.

E_2 (5.26) da yerine yazılırsa

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} 1 - \nu h - \beta h\nu\left(\frac{1}{\gamma+\nu} - \frac{1}{\beta}\right) & -h(\gamma+\nu) & 0 \\ \beta h\nu\left(\frac{1}{\gamma+\nu} - \frac{1}{\beta}\right) & 1 & 0 \\ 0 & h\gamma & 1 - \nu h \end{bmatrix} \tag{5.31}$$

olur. $J(E_2)$ öz değerleri

$$\lambda_1 = 1 - \nu h \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma+\nu}\Big(2(\gamma+\nu) - \nu h\beta + \\ \sqrt{\nu^2h^2\beta^2 - 8\gamma h^2\nu^2\beta + 12h^2\nu^2\gamma^2 + 4h^2\nu\gamma^3 - 4h^2\nu\beta\gamma^2 + 12\gamma h^2\nu^3 - 4h^2\nu^3\beta + 4h^2\nu^4}\Big) \end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2}\frac{1}{g+v}\Big(-2(\gamma+v)+vh\beta+ \sqrt{v^2h^2\beta^2-8\gamma h^2v^2\beta+12h^2v^2\gamma^2+4h^2v\gamma^3-4h^2v\beta\gamma^2+12\gamma h^2v^3-4h^2v^3\beta+4h^2v^4}\Big) \tag{5.34}$$

olur.

$$\sqrt{v^2h^2\beta^2-8\gamma h^2v^2\beta+12h^2v^2\gamma^2+4h^2v\gamma^3-4h^2v\beta\gamma^2+12\gamma h^2v^3-4h^2v^3\beta+4h^2v^4}$$

ifadesinde kök içindeki ifade h^2 parantezine alınırsa

$$h\sqrt{v^2\beta^2-8\gamma v^2\beta+12v^2\gamma^2+4v\gamma^3-4v\beta\gamma^2+12\gamma v^3-4v^3\beta+4v^4} \tag{5.35}$$

olur. $A = v^2\beta^2-8\gamma v^2\beta+12v^2\gamma^2+4v\gamma^3-4v\beta\gamma^2+12\gamma v^3-4v^3\beta+4v^4$ olduğundan bu ifade (5.35) de yerine yazılırsa

$$h\sqrt{A} \tag{5.36}$$

olur. (5.33) ve (5.34), (5.36) ya göre düzenlenirse,

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{(\gamma+v)}\Big(2(\gamma+v)-vh\beta+h\sqrt{A}\Big)$$

$$= 1-\frac{vh\beta}{2(\gamma+v)}+\frac{h\sqrt{A}}{2(\gamma+v)} \tag{5.37}$$

olur. (5.34) ise

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2}\frac{1}{g+v}\Big(-2(\gamma+v)+vh\beta+h\sqrt{A}\Big)$$

$$= 1-\frac{vh\beta}{2(\gamma+v)}-\frac{h\sqrt{A}}{2(\gamma+v)} \tag{5.38}$$

olur.

Teorem 4.4.1 den sistemin kararlı olabilmesi için $\left|\lambda_{1,2,3}\right|<1$ olmalıdır.

$$\lambda_1 = 1 - vh < 1$$

için

$$\begin{aligned} 1 - vh &< 1 \\ vh &> 0 \end{aligned}$$

olur. $v, h > 0$ olduğu için bu durum her zaman doğrudur.

$$\lambda_3 = 1 - \frac{vh\beta}{2(\gamma + v)} - \frac{h\sqrt{A}}{2(\gamma + v)} < 1$$

için ise

$$\begin{aligned} 1 - \frac{vh\beta}{2(\gamma + v)} - \frac{h\sqrt{A}}{2(\gamma + v)} &< 1 \\ -\frac{vh\beta}{2(\gamma + v)} - \frac{h\sqrt{A}}{2(\gamma + v)} &< 0 \\ -\frac{h\sqrt{A}}{2(\gamma + v)} &< \frac{vh\beta}{2(\gamma + v)} \end{aligned}$$

eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{2(\gamma + v)}{h}$ ile çarpılırsa

$$\sqrt{A} < v\beta$$

elde edilir. Son olarak,

$$\lambda_2 = 1 - \frac{vh\beta}{2(\gamma + v)} + \frac{h\sqrt{A}}{2(\gamma + v)} < 1$$

için

$$1-\frac{vh\beta}{2(\gamma+v)}+\frac{h\sqrt{A}}{2(\gamma+v)}<1$$

$$-\frac{vh\beta}{2(\gamma+v)}+\frac{h\sqrt{A}}{2(\gamma+v)}<0$$

$$\frac{h\sqrt{A}}{2(\gamma+v)}<\frac{vh\beta}{2(\gamma+v)}$$

olur. Bu eşitsizliğinin her iki tarafı $\frac{2(\gamma+v)}{h}$ ile çarpılırsa

$$-\sqrt{A}<v\beta$$

elde edilir ki ispat tamamlanır.

Sonuç 5.3.2.1 (5.13)-(5.15) sisteminin denge noktaları hiçbir zaman repeller olmaz.

İspat.

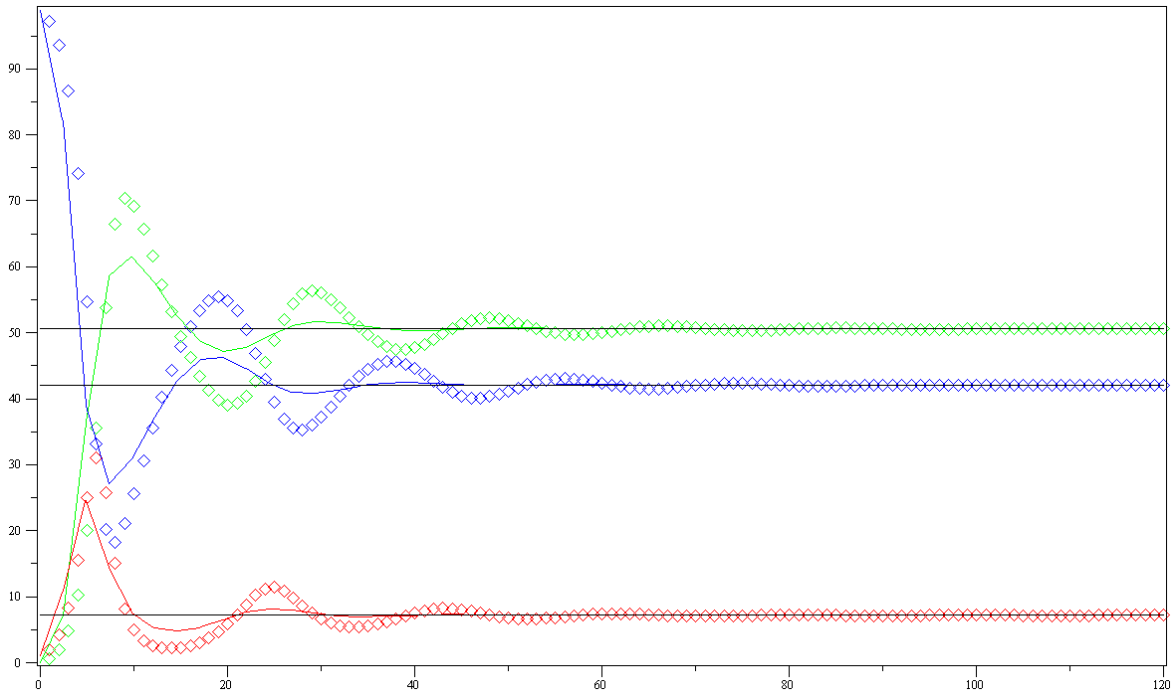
Teorem 4.4.1 den sistemin denge noktalarının repeller olabilmesi için $|\lambda_{1,2,3}|>1$ olmalıdır. Ancak Teorem 5.3.2.1. ve Teorem 5.3.2.2. den $vh>0$ olduğundan dolayı λ_1 ler her zaman 1 den küçüktür.

Bu bölümde SIR Epidemik Model için nümerik örnekler verilecektir.

5.3.3. Nümerik Örnekler

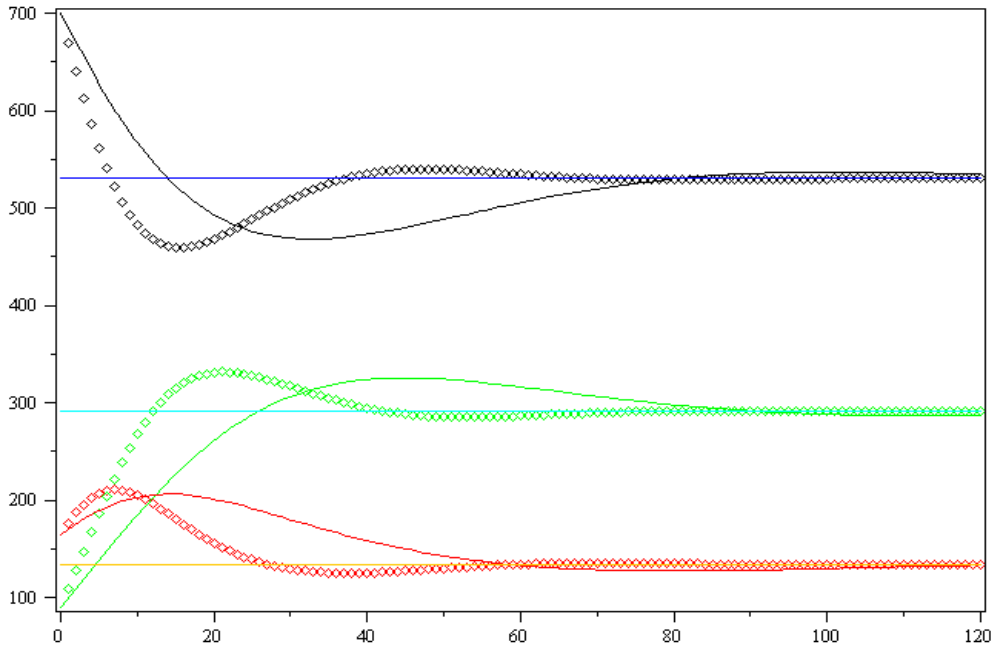
Bu kısımda çeşitli nümerik örneklere yer verilmiştir.

Örnek 5.3.3.1. $v=0.1$, $\gamma=0.7$, $\beta=1.9$, $N=100$, $S_0=99$, $I_0=1$, $R_0=0$ şartları altında (5.1)-(5.3) ve (5.13)-(5.15) sistemleri ortak grafikte verilmiştir.



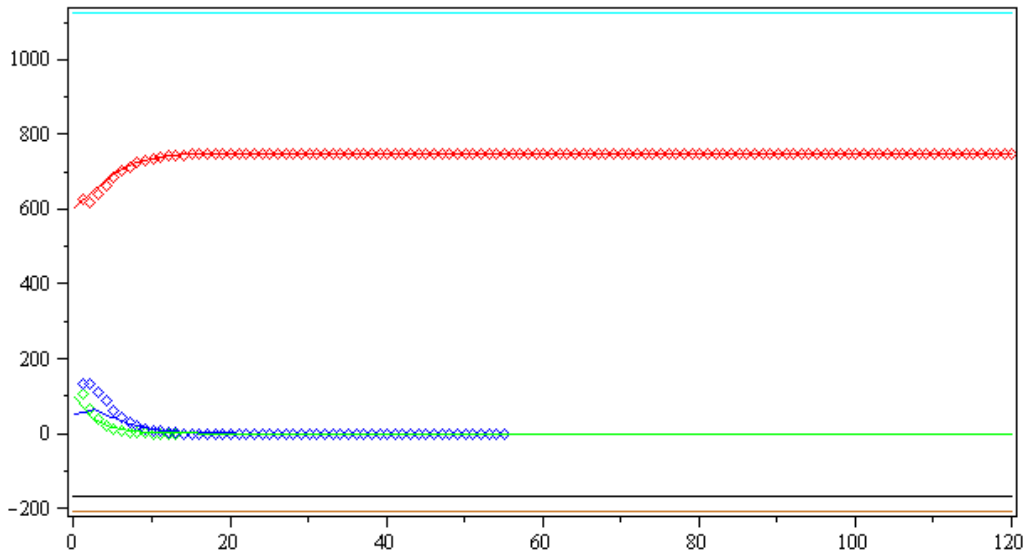
Şekil 5.3.3.a Kırmızı, yeşil, mavi düz çizgiler diferansiyel denklemin 4 dereceden Runge-Kutta metodu ile çözümü, kesikli çizgiler ise fark denklem yöntemi ile çözümüdür. Siyah renkli çizgiler ise denge noktasını göstermektedir.

Örnek 5.3.3.2. $v = 0.035$, $\gamma = 0.076$, $\beta = 0.2$, $N = 955$, $S_0 = 700$, $I_0 = 165$, $R_0 = 90$ şartları altında (5.1)-(5.3) ve (5.13)-(5.15) sistemleri ortak grafikte verilmiştir



Şekil 5.3.3.b Düz çizgiler diferansiyel denklemin 4 dereceden Runge-Kutta çözümü, kesikli çizgiler ise fark denklem yöntemi ile çözümüdür. Mavi, siyan ve turuncu renkli çizgiler ise denge noktasını göstermektedir.

Örnek 5.3.3.3. $v = 0.4$, $\gamma = 0.5$, $\beta = 0.6$, $N = 750$, $S_0 = 600$, $I_0 = 100$, $R_0 = 50$ şartlar altında (5.13)-(5.15) sisteminin denge noktası $\overline{S} = 1125$, $\overline{I}$=-166.6666668 , $\overline{R} = -208.3333335$ olur. Denge noktalarının kararlılığı incelenirse, sistemin Jakobiyen matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = 0.6, \lambda_2 = 1.237850958$ $\lambda_3 = 0.4954823757$ dır. $\lambda_2 > 1$ olduğundan Teorem 4.4.1 e göre denge noktası kararsızdır. Ayrıca bu sistem grafik üzerinde gösterilirse



Şekil 5.3.3.c Düz çizgiler diferansiyel denklemin 4 dereceden Runge-Kutta çözümü, kesikli çizgiler ise fark denklem yöntemi ile çözümüdür. Siyan, siyah ve altın rengi renkli çizgiler ise denge noktasını göstermektedir

olur.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1. Sonuçlar

Bu çalışmada;

$$\frac{dS(t)}{dt} = \nu N - \nu S(t) - \frac{\beta I(t) S(t)}{N}$$
$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\beta I(t) S(t)}{N} - (\gamma + \nu) I(t)$$
$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \nu R(t)$$

sistemi olarak verilen literatürde SIR modeli olarak bilenen salgın etkisinde kapalı bir popülasyondaki bireylerin sayısının değişimini gösteren bir diferansiyel denklem sistemi fark denklemine çevrilerek

$$S_{n+1} = \nu h N + S_n \left(1 - \nu h - \frac{\beta h I_n}{N}\right)$$
$$I_{n+1} = I_n \left(\frac{\beta h S_n}{N} - h(\gamma + \nu) + 1\right)$$
$$R_{n+1} = (1 - \nu h) R_n + \gamma h I_n$$

olarak elde edilmiştir. Ayrıca bu sistemin denge noktaları bulunarak kararlılık analizi yapılmıştır. Sistem bu sayede elektronik tablolar ile çözümleri gösterilmiştir. (MS Excel) .

6.2. Öneriler

SEIR, MSEIR ve HIV gibi modeller, benzer yöntemle incelebilir.

KAYNAKLAR

Nasri M., Dehghan M., Douraki M.J., Study of system of non-linear difference equations arasing in a deterministic model for HIV infection, Applied Mathematics and Computation 171 (2005) 1306-1330

Clark D., Kulenovic M.R.S., A Coupled System of Rational Difference Equations, Computers and Mathematics with Applications 43(2002) 849-867

Iwami S., Takeuchi Y., Liu X., Avian flu pandemic: Can we prevent it?, Journal of Thetetical Biology 257(2009) 181-190

Zaman G., Kang Y.H., Jung I.H., Stability analysis and optimal vaccination of an SIR epidemic model, BioSystems 93(2008) 240-249

Derouich M. Boutayep A., An Avian Influenza Mathematical Model, Aplied Mathematical Sciences, Vol. 2 no. 36, 1749-1760

Acedo L., González-Parra G., Arenas A.J., An exact global solution for the classical SIRS epidemic model, Nonlinear Analysis: Real World Applications 11 (2010) 1819-1825

Iwami S., Takeuchi Y., Liu X., Avian–human influenza epidemic model, Mathematical Biosciences 207 (2007) 1–25

Li M.Y., Graef J.R., Wang L., Karsai J., Global dynamics of a SEIR model with varying total population size, Mathematical Biosciences 160 (1999) 191-213

Anderson, R.M.,May,R.M.,.Infectious Disease of Humans: Dynamics and Control. Oxford University Press,Oxford 1991

Tu P.N.V, Dynamical Systems An Introduction with Applications in Economics and Biology Second Revised and Enlarged Edition, Springer-Verlag Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1992.1994

Allen L. J. S. , Some Discrete-Time SI, SIR and SIS Epidemic Models, Mathematical Biosciences 124:83-105 (1994)

Oturanç G., Kurnaz A., Kiriş M.E., Keskin Y., Dizgi Ofset ISBN 975-28856-8-3 2007

Kulenovic M.R.S., Nurkanovic Z., Global behavior of o three-diamensional linear fractional system of the difference equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications 310 (2012) 673-689

Kulenovic M.R.S., Merino O., Discrete Dynamical Systems and Difference Equations with Mathematica, CRC Press LLC, 2000 N.W. Corporate Blvd., Boca Raton, Florida 33431 2002

Li G., Jin Z., Global stability of a SEIR epidemic model with infectious force in latent, infected and immune period, Chaos, Solitons and Fractals 25 (2005) 1177–1184

Hu Z. Teng Z., Jiang H., Satability analysis in a class of discrete SIRS epidemic models, Nonlinear Analysis: Real World Aplications 13 (2012) 2017-2033

Kelley W.G., Peterson A.C., Difference Equations An Introduction with Applications, A Harcourt Science and Technology Company 525 B Street, Suite 1900, San Diego CA 92101-4495 USA

Hekimoğlu E.Ö., Rasyonel Fark Denklemlerinin Çözümleri ve Kararlılığı, Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya, 9-12

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Serdar Can GÜZEL
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Fethiye-1986
Telefon	**:**	5438095120
Faks	**:**	-
e-mail	**:**	serdarcanguzel@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Mehmet Erdoğan Anadolu Lisesi, Fethiye, MUĞLA**	**2005**
Üniversite	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, KONYA**	**2009**
Yüksek Lisans	:	**Selçuk Üniversitesi, Selçuklu, KONYA**	**-**
Doktora	:	**-**	

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2011-	**Milli Eğitim Bakanlığı**	**Öğretmen**

YABANCI DİLLER

İngilizce