SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKSPONANSİYEL AZALAN YOĞUNLUK VE BASINÇ İÇİN İDEAL BİR AKIŞKANIN GRAVİTASYON ALANININ GENEL RÖLATİVİTE TEORİSİNDEN HESAPLANMASI

Kevser ÜZÜMCÜ

Yüksek Lisans TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

Konya, 2006

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKSPONANSİYEL AZALAN YOĞUNLUK VE BASINÇ İÇİN İDEAL BİR AKIŞKANIN GRAVİTASYON ALANININ GENEL RÖLATİVİTE TEORİSİNDEN HESAPLANMASI

KEVSER ÜZÜMCÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

Bu tez 20/01/2006 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Tarafından Oybirliği / Oyçokluğu ile Kabul edilmiştir.

.....	.....
Prof. Dr. H. Şevki MERT	Doç. Dr. Ülfet ATAV
(Danışman)	(Üye)

.....

Yrd. Doç. Dr. Atilla GÜLEÇ

(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

EKSPONANSİYEL AZALAN YOĞUNLUK VE BASINÇ İÇİN İDEAL BİR AKIŞKANIN GRAVİTASYON ALANININ GENEL RÖLATİVİTE TEORİSİNDEN HESAPLANMASI

Kevser ÜZÜMCÜ

Selçuk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. H. Şevki MERT

2006, 16 Sayfa

Bu tezde, Einstein Genel Rölativite Teorisi'nden eksponansiyel azalan yoğunluk ve basınç için ideal bir akışkanın içindeki gravitasyon alan hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Genel Rölativite Teorisi, Gravitasyon Alanı, İdeal Akışkan.

ABSTRACT

M.S. Thesis

GRAVITATIONAL FIELD CALCULATION OF AN IDEAL FLUID FOR EXPONENTIAL DECREASING DENSITY AND PRESSURE FROM GENERAL RELATIVITY

Kevser ÜZÜMCÜ

Selçuk University

Graduae School of Natural and Applied Sciences

Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. H. Şevki MERT

2006, 16 Pages

Jury : Prof. Dr. H. Şevki MERT

Assoc. Prof. Dr. Ülfet ATAV

Ass. Prof. Dr. Atilla GÜLEÇ

In this thesis, the gravitational field of an ideal fluid for the exponential decreasing density and pressure from the relativity theory of Einstein has been estimated.

Key Words: General Relativity Theory, Gravitational Field, Ideal Fluid

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversite Fen Bilimleri Enstitüsüne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmaların süresince bilgi ve tecrübeleri ile bana her konuda yardımcı olan danışmanım Prof. Dr. H. Şevki MERT'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında hiçbir zaman destek ve teşviklerini esirgemeyen Selçuk Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü elemanlarına teşekkür ederim.

Ayrıca, çalışmalarım süresince manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme, sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Kevser ÜZÜMCÜ

Konya, 2006

İÇİNDEKİLER

ÖZET

ABSTRACT

ÖNSÖZ

1. GİRİŞ 1

2. EINSTEIN RÖLATİVİSTİK GRAVİTASYON TEORİSİNDE, MADDE İÇİNDEKİ GRAVİTASYON ALANI VEREN İÇ SCHWARZSCHILD ÇÖZÜMÜNÜN, $P(r)=e^{-\alpha r}$ ve $\rho(r)=e^{-\beta r}$ İLE BELİRLENEN BİR İDEAL AKIŞKAN İÇİN HESAPLANMASI 4

2.1. Alan Denklemleri Ve Özellikleri 4

2.2. Alan Denklemlerinin İç Schwarzschild Çözümü 7

2.3. Eksponansiyel Azalan $P(r)=e^{-\alpha r}$, $\rho(r)=e^{-\beta r}$ Basınç Ve Yoğunluk Değerlerinin Yerine Koyulması Ve ds^2 Gravitasyon İfadesinin Tesis Edilmesi 11

SONUÇ VE TARTIŞMALAR 15

KAYNAKLAR 16

1. GİRİŞ

20. yy'ın ilk çeyreğinde Fizik alanında iki büyük devrim yaşanmıştır. Bu devrimlerden ilki *Einstein*'ın görelilik kuramları, diğeri de kuantum kuramıdır. Bunlar tabiattaki olaylara farklı bir bakış açısı kazandırarak yeni kavramlar, yeni ilkeler ortaya çıkarmışlardır. Bu yönüyle de bilimde gerçek devrimlerdir.

Einstein'e göre ışığın boşluktaki hızının mutlak sabit olması *Newton* mekaniğindeki mutlak zaman kavramının sonunu teşkil etmiş ve *Galilei* görelilik ilkesinden özel rölativite ilkesine geçişi gerektirmiştir. Bu çelişki ise, *Newton* mekaniğinin ve göreliliğinin, *Einstein*'ın özel rölativite mekaniği ve göreliliği ile düzeltilmesi sonucu 1905'te giderilmiştir. Böylece klasik fizikte *Newton* artı *Maxwell* yasalarının yerini *Einstein* artı *Maxwell* yasaları almıştır.

Maxwell denklemlerince sağlanan özel görelilik ilkesi, ilk bakışta içinde yaşadığımız dünyanın gerçek özellikleri olarak kabullenmesi güç, önseziden uzak pek çok nitelik taşımaktadır. Bu nedenle kavranması oldukça zor bir ilkedir.

Özel görelilik ilkesi Alman geometrici *Hermann Minkowski*'nin 1908'de ileri sürdüğü temel nitelikteki yeni görüşü ile tam bir anlam kazanmıştır. *Minkowski*'nin bu görüşü, uzay ve zamanı, birbirinden ayrılmaz bir bütün olarak alması ve dört boyutlu bir uzay-zaman olarak nitelemesidir.

Özel rölativite teorisinde birbirine göre serbest hareket eden gözlemcilerin uzay zaman koordinatları arasında matematiksel bağıntılar vardır. *Lorentz* dönüşümleri denilen bu bağıntıların fiziksel anlamı; olayların serbest hareket eden gözlemciler tarafından nasıl algılandığıdır. Örneğin, hareket halindeki gözlemcinin saati, durgun olan gözlemciye geri kalıyor ve bu olay gözlemcinin hızı ışık hızına yaklaştıkça daha çok fark ediliyor. Aynı şekilde *Lorentz* dönüşümlerinden, uzunlukların da farklı gözlemciler için farklı olduğu ortaya çıkıyor.

Sonuç olarak birbirine göre serbest hareket eden iki gözlemci ölçtükleri zaman ve uzay aralıklarının değeri konusunda anlaşmazlık yaşayacaklardır. Bu

anlaşmazlık ise gözlemcilerin dört boyutlu uzay-zamana geçmeleriyle sona erecektir. Çünkü gözlemcilerin her ikisine göre aynı olan tek nitelik iki olay arasındaki dört boyutlu uzay-zaman aralığıdır. Bu aralık mutlak olup *Lorentz* dönüşümleri altında değişmez yani herkes için aynı kalıyor. Bu ise ışığın boşluktaki hızının sabit olmasıyla açıklanır. (Bozdemir 2001)

Einstein'in özel görelilik kuramı, ışık hızına yakın hızlardaki parçacıkların hareketini açıklaması, kütlenin yoğunlaşmış bir enerji olduğunu ve hızla birlikte değiştiğini göstermesi bakımından başarılı bir kuram olup evrendeki en etkin kuvveti gravitasyonu yani evrensel çekim kuvvetini açıklamakta yetersiz kalmıştır.

Newton'un gravitasyon teorisi uzun bir zaman Güneş Sistemi içersindeki gezegenlerin hareket yasalarını başarıyla açıklamış olup, 19.yy'ın sonlarına doğru Güneş'e en yakın gezegen olan Merkür'ün yörüngelerindeki anormalliği açıklayamıyordu. Bunun yanında *Newton* gravitasyonunun özel rölativite ilkesiyle de çelişmesi nedeniyle yeni bir gravitasyon teorisine ihtiyaç duyulmuştur. 1915'te *Albert Einstein*'in "Rölativitenin Genel Teorisi" başlıklı kuramıyla yeni bir gravitasyon yasası gerçekleşmiştir.

Genel görelilik kuramı, *Newton*'un durağan ve sonsuza kadar uzanan değişmez bir evrende bulunan nesnelerin aralarındaki etkileşimleri veren "evrensel gravitasyonel çekim yasası"nın yerine değişen ve genişleyen, mutlak olmayan bir uzayda, ivmeli hareket eden bir evrende geçerli olan çekim yasasıdır.

Einstein genel görelilik kuramını iki ilkeye dayandırmıştır:

1. *Kütlelerin eşdeğerlik ilkesi*: Bu ilke, eylemsizlik kütlesinin çekim kuvvetine eşit olmasına dayanır ve bu ilkeye göre, bütün cisimlerin gravitasyon alanındaki serbest düşme hareketi aynı olup cisimlerin türüne bağlı değildir. Bu durumda serbest düşen cisimlerin uzay-zamandaki yolları seçkin eğriler olarak düşünülebilir. *Einstein*'e göre bu eğriler geometrik anlamda uzay-zaman metriğinin jeodezikleridir. Ama bu metrik özel görelilikte olduğu gibi düz ve sabit olmayıp eğri bir metriktir. Eğri metriğin jeodeziklerini "doğruya en yakın" olan eğriler olarak düşünmek mümkündür. Sonuç olarak, cisimlerin serbest düşmesi yani gravitasyon alanının özellikleri, uzay-zaman yasasına bağlanmıştır denilebilir.

2. *Mach İlkesi (Kısmen)* : Ernst *Mach*, evrendeki madde dağılımını fizikte yerel olarak tanımlanan kavramları etkileyebileceğini düşünüyordu. *Einstein* bu fikri kısmen kabul edip özel görelilikteki uzay zaman yasasının her zaman sabit kalamayacağına, evrendeki maddenin etkisiyle uzay-zaman yasasının değişebileceğini içeren bu ilkenin gravitasyonu da betimleyebileceğine inanıyordu.(Koç 1995)

Einstein'in genel görelik kuramı aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

* Genel görelilik, uzay-zamanının iç özelliklerini dört boyutlu uzay zaman metriğiyle verir.

* Bu metrik düz olmak zorunda değildir, eğri bir metriktir.

* Uzay-zaman metriğinin düzlükten sapması, uzay-zaman eğriliği ile orantılıdır. Bu eğrilik ise gravitasyonunun bir ölçeğidir yani gravitasyonel olayların nedenidir.

* Uzay-zamanın eğriliği ve eğriliğindeki madde dağılımının özellikleri arasındaki bağıntı keyfi olmayıp, somut matematiksel denklemlerle ifade edilebilir.

Genel görelilik, geometrik bir teoridir. Bu geometrinin oluşturduğu eğirilik, kendini, evrende gravitasyonel alanlar olarak gösterir. Genel görelilik denklemleri, uzay-zaman geometrisinin ne kadar ve nasıl eğrildiğini ifade eder. Bu denklemler çözülerek, bütün cisimlerin etrafındaki uzay-zaman geometrisi ve gravitasyon alanları bulunur. Bu kavrama göre; kuvvet kavramının yerini uzay-zaman eğriliği alır ve maddenin bulunduğu ortam, uzay-zaman eğriliğini değiştirir.

Genel rölativite, ışığın gravitasyon alanında bükülmesini, gravitasyonel kırmızıya kayma olayını, Newton teorisinin açıklayamadığı Merkür'ün yörünge hareketini, gravitasyonel dalgaların varolabileceğini öngörürken daha birçok gözlemsel olaya da açıklık getirmiştir. Bütün bu olaylar görünüşte deneysel olarak ölçülmüştür ve genel rölativitenin öngörülenlerinden herhangi bir sapma gözlenmemiştir. (Bozdemir 2001, Koç 1995)

Kozmoloji alanına da büyük katkılar yapan genel rölativite kuramı bir başka devrimsel kavram olan karadelikler kavramını da ortaya koymuştur.

2. EINSTEIN RÖLATİVİSTİK GRAVİTASYON TEORİSİNDE, MADDE İÇİNDEKİ GRAVİTASYON ALANI VEREN İÇ SCHWARZSCHILD ÇÖZÜMÜNÜN, $P(r)=e^{-\alpha r}$ ve $\rho(r)=e^{-\beta r}$ İLE BELİRLENEN BİR İDEAL AKIŞKAN İÇİN HESAPLANMASI

2.1. Alan Denklemleri Ve Özellikleri

Einstein'in genel görelilik kuramı dört temel özelliğe sahiptir:

1) Genel gravitasyon teorisinin alan denklemleri koordinat sistemlerinden bağımsız bir biçimde ifade edilmelidir.

2) Bu teoriye zemin teşkil eden uzay-zaman dört boyutlu *Riemann*'sal bir uzay oluşturmalıdır.

3) Teori, maddenin, uzay-zamanın geometrik yapısına etkisini içermelidir.

4) Teorinin alan denklemleri ilk yaklaşıklıkta klasik gravitasyon teorisinin alan denklemi olan *Poisson* denklemine ($\nabla^2\phi=4\pi\rho$) indirgenebilmelidir.

Bu özelliklerden ilki genel kovaryans ilkesine dayanıp teorinin tansörel niteliğine işaret etmektedir. İkinci şart yerel eşdeğerlilik ilkesine dayanır ve gerçek gravitasyon alanların ancak *Riemann'*sal bir uzay-zaman içinde tutarlı bir şema oluşturacağını belirtmektedir. Üçüncü şart bir bakıma *Mach* ilkesini ifade edip uzay-zamanın geometrik yapısının, gravitasyon alanı meydana getiren maddeyle belirlenebileceğini söylemektedir. Son şart ise teorinin klasik gravitasyon teorisiyle bağıntılı olmasını ifade etmektedir.

Yukarıda belirtilen ilk üç şarttan hareketle alan denklemlerinin sentezi gerçekleştirilip, bu denklemlerden hareketle bunların dördüncü şartı gerçekleştirip gerçekleştirmedikleri analiz edilebilir.

Mach ilkesine göre alan denklemlerinde geometriyi etkileyen maddesel katkı da bir tansör aracılığıyla ifade edilir. Bu katkı *Poisson* denkleminin bir genellemesi olarak düşünülebilir.

ÖRT'nden de bildiğimiz gibi madde ve enerji alanı $T_{\mu\nu}$ enerji impuls tansörü ile temsil edilebilir. İkinci mertebeden simetrik bir tansör olan $T_{\mu\nu}$ enerji - impuls tansörünün en önemli özelliği korunum özelliğidir. Yani diverjansının sıfır olmasıdır.

$$\nabla_{\rho} T_{\mu}^{\rho} = 0 \qquad (2.1.1)$$

$T_{\mu\nu}$ tansörüyle temsil edilen madde ve enerji dağılımları mekanik, termodinamik ve elektromagnetik özelliklere sahip akışkanlar olarak tasarımlanabilir. Bu özellikler tek tekte incelenebilir, birbirleriyle olan etkileşmeleri açısından da incelenebilir. Bu görüşe dayanarak $T_{\mu\nu}$ enerji - impuls tansörü birtakım ikinci mertebeden tansörlerin toplamı olarak yazılır.

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2 U_{\mu} U_{\nu} + \theta_{\mu\nu} + M_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu} \qquad (2.1.2)$$

$T_{\mu\nu}$ ifadesinde, ρ toplam enerji yoğunluğunu U_{μ} vektörü $U_{\mu}U^{\mu}=1$ olmak üzere dörtlü-hız vektörünü, $\Theta_{\mu\nu}$ basınç ve gerilimler tansörünü, $M_{\mu\nu}$ elektromagnetik enerji tansörünü, $F_{\mu\nu}$ elektromagnetik alanla maddenin etkileşmesini temsil eden tansörü, $Q_{\mu\nu}$ de termodinamik etkileşme tansörünü göstermektedir.

Maddeyi bir ideal akışkan kabul etmek suretiyle, enerji impuls tansörü $T_{\mu\nu}$,

$$T_{\mu\nu}=(\rho c^2+P)U_{\mu}U_{\nu}-Pg_{\mu\nu} \qquad (2.1.3)$$

şeklinde yazılır. Burada P skaler basıncı, ρ ise yoğunluğu göstermektedir. $T_{\mu\nu}$'nin (2.1.2) deki ifadesi kuantum olaylarını içermemektedir. Bunun için bir kısmı nötr taneciklerden oluşan bir kısmı da elektrik yüklü olan maddeyi, $T_{\mu\nu}$ tam olarak yansıtmaz ve geçici bir araç olarak nitelendirebilir.

Gravitasyonun rölativist teorisinde alan denklemleri diverjansı sıfır olan $T_{\mu\nu}$ tansörüyle temsil edebileceğinden, maddenin uzay-zamanın geometrik yapısı üzerine etkisini belirleyecek olan kısmını yansıtan tansörün de:

i) uzay-zamanın *Riemann*'sal yapısını yansıtan,

ii) Diverjansı özdeş sıfır olan

iii) İkinci mertebeden simetrik bir tansör

olması gerekmektedir. Bu üç şartı da bir sabit çarpan yaklaşığıyla sağlayan tansör $R_{\mu\nu}$ *RICCI* tansörüdür.

Bu durumda -x uygun bir orantı katsayısını göstermek üzere *ERGT*'nin alan denklemleri için artık

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu}(R - 2\Lambda) = -x\, T_{\mu\nu} \qquad (2.1.4)$$

yazılabilir. (Özemre 1982, Rossen 1971)

Bu alan denklemlerinin, varsa $T_{\mu\nu}\neq 0$ için çözümlerine *iç çözüm*, $T_{\mu\nu}=0$ için çözümlerine *dış çözüm* denir.

(2.1.4) alan denklemleri Λ ve x gibi iki sabit içermektedir. Λ kozmolojik sabit adını alırken x *Einstein* sabiti adını alır. Bu sabitleri değerlendirirken daha önce bahsettiğimiz alan denklemlerinin ilk yaklaşıklıkta *Poisson* denklemine indirgenebilme şartından yararlanırsa:

$$\Lambda=0 \text{ ve } X = \frac{8\pi G}{c^4}$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda *Einstein* olan denklemlerinin nihai şekli:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad (2.1.5)$$

olur. (2.1.5) deki $R_{\mu\nu}$ *RICCI* tansörünün ifadesi

$$R_{\mu\upsilon} = \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} - \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\rho}$$

şeklindedir. $R_{\mu\nu} = 0$ için *dış çözüm*, $R_{\mu\nu} \neq 0$ için *iç çözüm* yapılır. (Özemre 1982, Rossen 1971, Sezekeres 1968)

Amacımız küresel bir madde içerisindeki gravitasyon alanı yansıtan metriği bulmak olduğu için dış çözüm incelenilmeyip iç *Schwarzschild* çözümü yapılacaktır. Bununla birlikte ele aldığımız küresel maddenin dışındaki gravitasyonel alanı

yansıtan metrik, noktasal M kütleli cismin dışındaki gravitasyonel alanı yansıtan, metrikle aynıdır. Bu metrik ise dış çözümden bulunur.

2.2. Alan Denklemlerinin İç Schwarzschild Çözümü

Denklem (2.1.5)'deki *Einstein* alan denklemleri (μ=0,1,2,3; ν=0,1,2,3 için) lineer olmayan, ikinci mertebeden kısmî türevli 10 diferansiyel denklemden oluşan bir sistem meydana getirmektedir. Bu sistemin genel çözümünü yapmak olanaksız olup ancak özel fiziksel ve geometrik şartlar altında sistemin çözümü nispeten daha kolay bir şekilde çözülebilir.

Bu özel geometrik şartlardan biri de küresel inveryanslı metriktir. Eğer uzay-zaman herhangi bir O noktasına göre küresel simetriye sahipse, $A(x_A^\alpha)$ ve $B(x_B^\alpha)$ O'yu merkez kabul eden bir kürenin yüzeyindeki iki keyfi noktayı göstermek üzere

$$g_{\mu\nu}(A) = g_{\mu\nu}(B) \Rightarrow g_{\mu\nu}(X_A^\alpha) = g_{\mu\nu}(X_B^\alpha)$$

olacaktır. Daha genel bir biçimde ifade edilirse; bir O noktası etrafında keyfi bir rotasyon yapıldığında yeni $\overline{g_{\mu\nu}}$ bileşenleri aynı $g_{\mu\nu}$ lerin x^α ların fonksiyonları oldukları biçimde yeni x^α koordinatlarının fonksiyonu iseler, yani

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha) = \overline{g_{\mu\nu}}(\overline{x^\alpha}) \qquad (2.2.1)$$

ise $g_{\mu\nu}$ metrik tansörünün küresel simetriye sahip olduğu söylenir. Yapılan bu dönüşümler altında $g_{\mu\nu}$ nün sıfırdan farklı bileşenleri

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} e^{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 Sin^2\theta \end{bmatrix} \qquad (2.2.2.)$$

şeklindedir. *Einstein* alan denklemlerinin çözümüne karşılık gelen ds^2 yay elemanının genel ifadesi

$$ds^2=e^{\nu}\ (dx^0)^2-r^2(d\ \theta^2+Sin^2\theta\ d\ \varphi^2)-e^{\lambda}dr^2 \qquad (2.2.3)$$

şeklindedir.

(2.2.3) denkleminde kullanılan koordinatlara "eğrilik koordinatları" adı verilir ve alan denklemleri bu koordinatlarda mümkün olan en basit şeklini alır.

M kütleli küresel ve durgun bir cismin oluşturduğu statik gravitasyon alanının metriği denklem (2.2.3) ile verilir. Bu denklemdeki $\lambda=\lambda(r,t)$ ve $\nu=\nu(r,t)$ fonksiyonları iki keyfi fonksiyon olup bu fonksiyonları bulmak için alan denklemlerinden yararlanılacaktır. Ele aldığımız gravitasyon alan statik olduğu için λ ve ν fonksiyonları t ye bağlı olamaz. Bu durumda $\lambda=\lambda(r)$ ve $\nu=\nu(r)$ fonksiyonlarını bulmak için öncelikle $T_{\mu\nu}$ enerji - impuls tansörü tanımlanmalıdır. Cismin iç yapısı bir ideal akışkan şeması ile temsil edilebilir. Bu ideal akışkan için enerji - impuls tansörü denklem (2.1.3) de olduğu gibi

$$T_{\mu\nu}\ =(\ \rho c^2+P)\ U_{\mu}\ U_{\nu}\ -Pg_{\mu\nu}$$

şeklinde yazılır. Bu ideal akışkanın aynı zamanda durgun olduğunu da kabul edersek bu durumda akışkanın ρ yoğunluğu ile P skaler basınç sadece radyal r koordinatının fonksiyonu olurlar.

$$\rho=\rho(r),\ P=P(r)$$

İdeal akışkanımız statik bir yapıya sahip olduğu için bu yapı içerisindeki madde her noktada durgundur. Bu ise dörtlü hız vektörünün bileşenlerini $(U^0,0,0,0)$ şeklinde temin eder. Dolayısıyla ideal akışkanı oluşturan her bir madde taneciğinin öz zamanı ile koordinat zamanı arasındaki bağıntı

$$ds^2=g_{00}(dx^0)^2\Rightarrow ds^2=g_{00}(cdt)^2\Rightarrow 1=g_{00}(U^0)^2 \qquad (2.2.5)$$

şeklinde olacaktır. (2.2.5) deki ifade her iki tarafın ds^2 ye bölünmesiyle elde edilmiştir. Buradan

$$U_0=g_{0\alpha}U^{\alpha}=g_{00}U^{o}=g_{00}.\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}=\sqrt{g_{00}}\,,\ Ui=0$$

sonucuna kolayca ulaşılır. Buna göre denklem (2.1.3) $T_{\mu\nu}$ enerji-impuls tansörü aşağıdaki gibi yazılır:

$$(T_{\mu\nu})=\rho c^2\begin{bmatrix} g_{oo} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}-P\begin{bmatrix} 0 & g_{01} & g_{02} & g_{03}\\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{bmatrix}$$

Küresel simetriye sahip statik bir metriğin en genel şekli (2.2.3) ile verildiğinden, bu metrikteki temel metrik tansör (2.2.2) ifadesi kullanılarak, $T_{\mu\nu}$ nün küresel simetriye sahip ideal akışkan içindeki ifadesi de

$$(T_{\mu\nu})=\begin{bmatrix} \rho c^2 e^{\nu} & 0 & 0 & 0\\ 0 & Pe^{\lambda} & 0 & 0\\ 0 & 0 & Pr^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & Pr^2\sin^2\theta\end{bmatrix} \qquad (2.2.6)$$

şeklini alır. Şimdi artık küresel simetriye sahip statik bir ideal akışkan içindeki gravitasyon alanı temsil eden ds^2 ifadesindeki e^{ν} ve e^{λ} fonksiyonlarının hesaplanmasına geçilebilir (2.1.5) deki

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=-\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

ifadesi

$$R_{\mu\nu}=\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \qquad (2.2.7)$$

şeklinde yazılır. $U^{\mu}U_{\mu}=1$ ve $g^{\mu}_{\mu}=4$ olması sebebiyle

$$T^{\mu}_{\mu}=T=\rho c^2-3P \qquad (2.2.8)$$

olduğunu da göz önünde bulundurarak (2.2.7) denklemlerinin sağ taraflarının sıfırdan farklı terimleri aşağıdaki gibi olur.

$$\left.\begin{aligned} T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T &= \frac{e^{\nu}}{2}(\rho c^2 - 3P) \\ T_{11} - \frac{1}{2} g_{11} T &= \frac{e^{\lambda}}{2}(\rho c^2 - P) \\ T_{22} - \frac{1}{2} g_{22} T &= \frac{1}{2}(\rho c^2 - P) r^2 \\ T_{33} - \frac{1}{2} g_{33} T &= \frac{1}{2}(\rho c^2 - P) r^2 \sin^2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.9)$$

Denklem (2.2.7)'nin sol yanında *RICCI* tansörü yardımıyla hesaplanabilir. $R_{\mu\nu}=0$ olması özelliği kullanılarak:

$$\left.\begin{aligned} R_{00} &= e^{\nu-\lambda}\left[-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r}\right] \\ R_{11} &= \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} \\ R_{22} &= e^{-\lambda}\left[1 + \frac{\nu' r}{2} - \frac{\lambda' r}{2}\right] - 1 \\ R_{33} &= R_{22} Sin^2\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.10)$$

olur.

(2.2.10) denklemlerinde $\nu' = \frac{d\nu}{dr}, \lambda' = \frac{d\lambda}{dr}$ şeklinde ifade edilmiştir. Elde edilen veriler çerçevesinde ν ve λ fonksiyonlarını belirleyen diferansiyel denklemlerin üç lineer diferansiyel denklemden oluşan bir sistem olduğu görülür:

$$e^{-\lambda}\left[-\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\nu'}{r}\right] = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(\frac{\rho c^2}{2} + \frac{3P}{2}\right) \qquad (2.2.11.a)$$

$$e^{-\lambda}\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r}\right] = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(\frac{\rho c^2}{2} - \frac{P}{2}\right) \qquad (2.2.11.b)$$

$$e^{-\lambda}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r}\right] - \frac{1}{r^2} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(\frac{\rho c^2}{2} - \frac{P}{2}\right) \qquad (2.2.11.c)$$

Dikkat edilirse (2.2.11) de dördüncü bir denklem ifade edilmemiştir. Bunun sebebi (2.2.10)' daki R_{33} ün R_{22} ile orantılı olması dolayısıyla çözümü farklı kılacak bir denklem oluşturmamasıdır. Bundan sonra problemin çözümünü veren ν ve

λ fonksiyonları belirlenmeye çalışılacaktır. Bu yapılırken de $P=e^{-\alpha r}$, $\rho=e^{-\beta r}$ basınç ve yoğunluk değerleri kullanılacaktır. (Özemre 1982, Hoyle ve Narlıkar 1963, Rosen 1961, Sezekeres 1968, Voorhees 1970)

2.3. Eksponansiyel Azalan $P(r)=e^{-\alpha r}$, $\rho(r)=e^{-\beta r}$ Basınç Ve Yoğunluk Değerlerinin Yerine Koyulması Ve ds^2 Gravitasyon İfadesinin Tesis Edilmesi

ν ve λ fonksiyonlarının belirlenmesi (2.2.11) denklemlerinin çözümüyle mümkündür.

Öncelikle denklem (2.2.11.a) ve (2.2.11.b) taraf tarafa toplanırsa:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu' + \lambda'}{r}\right) = \frac{8\pi G}{c^4}\left(\rho c^2 + P\right) \qquad (2.3.1)$$

elde edilir. (2.2.11.b), (2.2.11.c) ve (2.3.1) denklemleri kullanılarak $\rho ve P'$ yi çekmek mümkündür. Bunun için önce (2.3.1) denklemi ile (2.2.11.c) denklemi toplanır ve P çekilir:

$$P.\frac{8\pi G}{c^4} = e^{-\lambda}\left[\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right] - \frac{1}{r^2} \qquad (2.3.2)$$

(2.3.1) denkleminin her iki yanını $\frac{1}{2}$ ile çarptıktan sonra elde edilen bu denklemden (2.2.11.c) denklemi çıkarılıp ρ çekilirse

$$\rho\frac{8\pi G}{c^2} = e^{-\lambda}\left[\lambda' - \frac{1}{r^2}\right] + \frac{1}{r^2} \qquad (2.3.3)$$

elde edilir. Böylece P ve ρ'yu çekmiş olduk. Bundan sonra (2.2.11.b) denkleminden (2.2.11.c) denklemini çıkararak yeni bir denklem elde edilir.

$$\frac{e^{\lambda}}{r^2}=\frac{\nu^{'}\lambda^{'}}{4}+\frac{\nu^{'}-\lambda'}{2r}+\frac{\lambda'}{r}+\frac{1}{r^2}-\frac{\nu^{''}}{2}-\frac{\nu^{'2}}{4} \tag{2.3.4}$$

elde edilir.

(2.3.2) denkleminde r' ye göre türev alınırsa

$$\frac{8\pi G}{c^4}\frac{dP}{dr}=e^{-\lambda}\left[\frac{\nu''}{r}-\frac{\nu'}{r^2}-\frac{\lambda'\nu'}{r}-\frac{\lambda'}{r^2}-\frac{2}{r^3}\right]+\frac{2}{r^3} \tag{2.3.5}$$

Denklem (2.3.4)'de elde edilen $\frac{\nu''}{r}$ ifadesi denklem (2.3.5)' de yerine koyulursa

$$-\frac{8\pi G}{c^4}.\frac{dP}{dr}=\frac{\nu'}{2}e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'+\lambda'}{r}\right) \tag{2.3.6}$$

denklemi elde edilir.

(2.3.6) denklemi (2.3.1) denklemiyle karşılaştırıldığında

$$\frac{dP}{dr}=-(\rho c^2+P)\frac{\nu'}{2} \tag{2.3.7}$$

denklemi elde edilir.

Denklem (2.3.7) de $P(r)=e^{-\alpha r}$, $\rho(r)=e^{-\beta r}$ değerleri yerine koyulursa:

$$\nu'=\frac{2\alpha e^{-\alpha r}}{e^{-\beta r}c^2+e^{-\alpha r}} \tag{2.3.8}$$

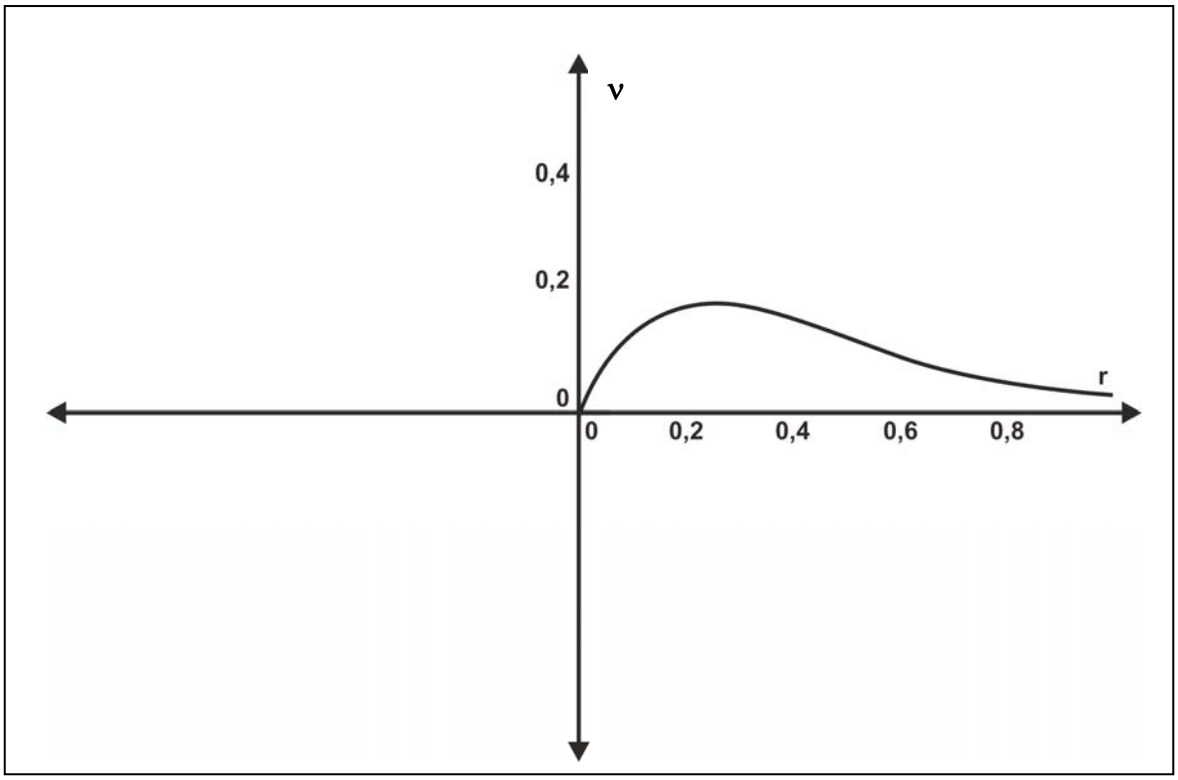
bulunur. Denklem (2.3.8)'den

$$\nu^{'}=\frac{e^{-\alpha r}(2\alpha)}{e^{-\alpha r}(1+c^2e^{-\beta r+\alpha r})} \qquad (\alpha\text{-}\beta=\gamma)$$

$$\nu^{'}=\frac{2\alpha}{1+c^2e^{\gamma r}} \tag{2.3.9}$$

elde edilir. Denklemin her iki tarafının integrali alınırsa; ν elde edilr

$$\nu=2\frac{\alpha}{\gamma}\ell n\left|\frac{c^2e^{\gamma r}}{1+c^2e^{\gamma r}}\right| \tag{2.3.10}$$



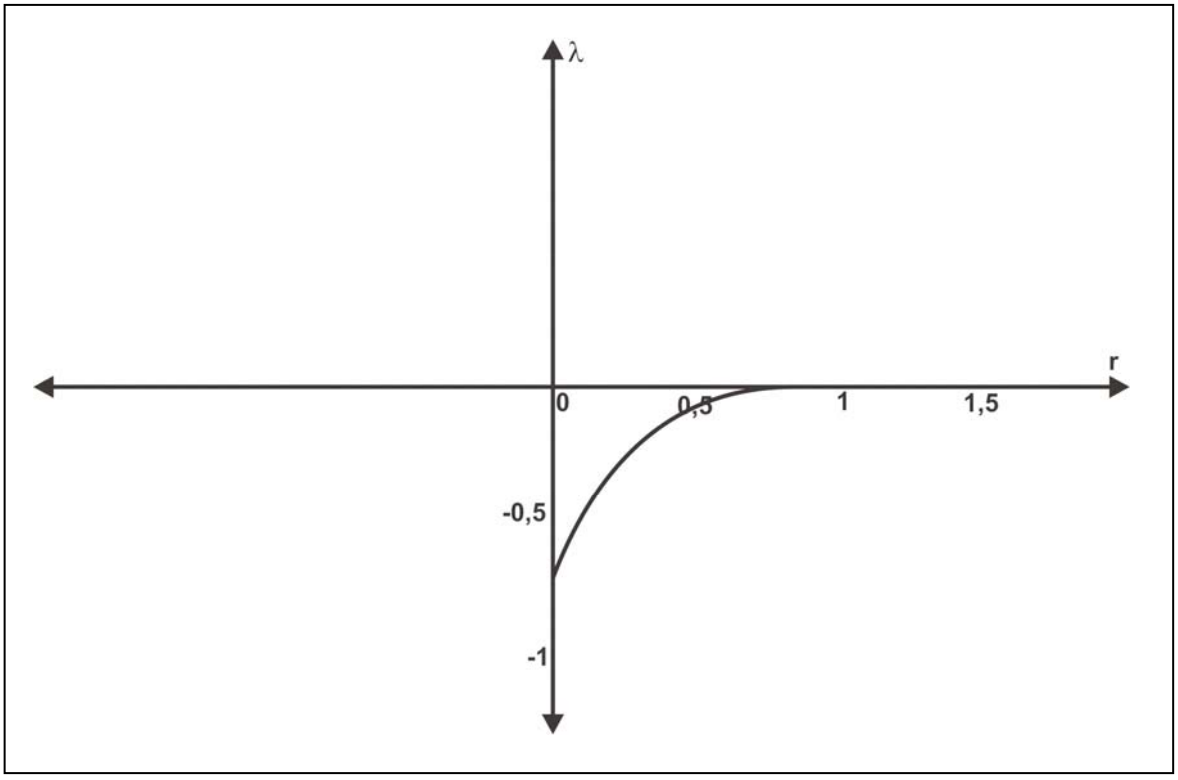
Şekil 2.3.1 ν fonksiyonunun r' ye bağlı değişimi

Denklem (2.3.2)' de $P=e^{-\alpha r}$ ve (2.3.9) ν' değerleri yerine koyularak λ değeri hesaplanabilir:

$\frac{8\pi G}{c^4} = k$ gibi bir sabit seçilirse

$$\lambda = \ell n\left[\frac{2\alpha r + c^2 e^{\gamma r} + 1}{(kr^2 e^{-\alpha r} + 1)(c^2 e^{\gamma r} + 1)}\right] \qquad (2.3.11)$$

elde edilir.



Şekil 2.3.2 λ fonksiyonunun r' ye bağlı değişimi

Şimdi elde ettiğimiz ν ve λ fonksiyonları denklem (2.2.3) ds^2 ifadesinde yerine koyalım. Bunun için ν ve λ fonksiyonlarının e^{ν} ve e^{λ} şeklinde yazılması gerekir.

$$e^{\nu}=\left(\frac{c^2e^{\gamma r}}{1+c^2e^{\gamma r}}\right)^{2\alpha},\quad e^{\lambda}=\frac{2\alpha r+c^2e^{\gamma r}+1}{(kr^2e^{-\alpha r}+1)(c^2e^{\gamma r}+1)},\quad k=\frac{8\pi G}{c^4}$$

değerleri yerine konulduğunda buradan ds^2 ifadesi

$$ds^2=\left(\frac{c^2e^{\gamma r}}{1+c^2e^{\gamma r}}\right)^{2\frac{\alpha}{\gamma}}(dx^o)^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)-\frac{2\alpha r+c^2e^{\gamma r}+1}{\left(\frac{8\pi G}{c^4}r^2e^{-\alpha r}+1\right)\left(c^2e^{\gamma r}+1\right)} \qquad (2.3.12)$$

şeklinde elde edilir.

SONUÇ VE TARTIŞMALAR

M kütleli küresel ve durgun bir madde içerisindeki gravitasyonel alan *Einstein* alan denklemlerinin yardımıyla bulunabilir. Bu denklemlerin genel çözümü yapmak imkansız olup ancak özel geometrik ve fiziksel şartlar altında çözüm yapmak mümkün hale gelir.

Alan denklemlerinin iç *Schwarzschild* çözümü madde içerisindeki gravitasyonel alana karşılık gelir. Madde bir ideal akışkan olarak kabul edilirse bu ideal akışkan denklem (2.1.3)'deki enerji-impuls tansörüyle temsil olunur.

Küresel simetriye sahip statik bir ideal akışkan içerisindeki gravitasyonel alanı temsil eden metrik üstel olarak azalan basınç ve yoğunluk değerleri için denklem (2.3.12)'deki gibi elde edilmiştir.

Denklem (2.2.3)'deki e^{ν}, gravistasyon potansiyelini temsil eder ve bize madde içerisindeki gravistasyon alanın nasıl değiştiği hakkında bilgi verir. Bu potansiyel *Newton* potansiyelinden farkı basınç etkisini de içermesidir. Klasik fizikteki potansiyel sadece kütle ve uzaklığa bağlı olup diğer etkilerden bağımsızdır. Ulaştığı ve daha sonra azalarak sonsuzda tekrar sıfır olduğu görülmektedir. Yani maddenin merkezinden uzaklaştıkça gravitasyonel alan artarak belli bir değerde yapılan gözlem ve deneylerle uyumlu bir sonuçtur. Örneğin, dünyanın merkezinde de gravitasyon alan sıfırken merkezden uzaklaştıkça bu değer artarak maksimuma ulaşmakta ve sonsuzda yine sıfır olmaktadır. Bu da bize bulduğumuz sonucun tutarlı olduğunu gösterir. Elde ettiğimiz sonuç tutarlı olsa da klasik fizikteki veriler ile birebir örtüştüğünü söyleyemeyiz. Basınç faktörü ve uzaydaki deformasyon nedeniyle ν potansiyelinin grafiği *Newton* potansiyelinin grafiğiyle aynı olmayıp sapmalar gösterecektir.

KAYNAKLAR

A. Yüksel Özemre, İ.Ü. 1982. Gravitasyonun Rölativist Teorileri, İstanbul

B.H. Voorhees, Static Axially Symmetric Gravitational Fields, Phys. Rev. D2, 2119 (1970)

F. Hoyle, J. Narlıkar, Proc. Roy. Soc., 273 A, 1, (1963).

N. Rosen, Plys. Rev., D3, 2317, (1971).

P. Sezekeres, Multipole Particles in Equilibrium in General Relativity, Phys. Rev. 176, 1446 (1968)

Süleyman Bozdemir, "Felsefe, Bilim ve Fizik", TFV Fizik Dergisi, Sayı: 16, Ekim 2001.

Yalçın Koç; "Kuantum Felsefesi" Tübitak Bilim ve Teknik Dergisi, Sayı: 326, sayfa (22-29) Ocak - 1995.