T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

CEMİLE SOYTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KONYA-2006

T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

CEMİLE SOYTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 08/09/2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Yrd.Doç.Dr. Galip OTURANÇ

(Danışman)

Prof.Dr. Şefik BİLİR

(Üye)

Yrd.Doç.Dr. Hasan KÖSE

(Üye)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Cemile SOYTAŞ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman :Yrd.Doç.Dr.Galip OTURANÇ

2006

Jüri:Prof.Dr. Şefik BİLİR

Yrd.Doç.Dr. Galip OTURANÇ

Yrd.Doç.Dr. Hasan KÖSE

Bu çalışmada Kesirli Türev, Kesirli İntegral ve Adomian'ın Ayırma Yöntemi ile lineer olmayan bir diferansiyel denklemin çözümü verilmiştir. Kesirli türev formülüyle verilen bir fonksiyonun istenilen keyfi mertebeden kesirli türevi hesaplanabilir. Ayrıca verilen bir lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemin çözümü Adomian'ın ayırma yöntemi ile yapılabilir.

Anahtar Kelimeler: Kesirli Türev, Kesirli İntegral, Lineer Olmayan Kesirli Diferansiyel Denklemler,Ayırma Metodu.

ABSTRACT

FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND SOLUTIONS METHODS

Cemile SOYTAŞ
Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisior:Asst.Prof.Dr.Galip OTURANÇ
2006,
Jury:Prof.Dr.Şefik BİLİR
Asst.Prof.Dr.Galip OTURANÇ
Asst.Prof.Dr. Hasan KÖSE

In this study we explained fractional derrivative, fractional integral and an nonlinear differential equation's soluation with Adomian's seperation method. If we choose a function that is given with fractional derrivative formüla, we can calculate it's fractional derrivative form arbitrary order. Besides nonlinear fractional differential equation can be solved with Adomian's seperation method.

Key words: Fractional Derivative, Fractional Integral, Nonlinear Fractional Differential Equations, Seperation Method.

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ……1
1.1. Amaç ve Kapsam……..1
1.2. Literatür Özeti……...1
2. TEMEL KAVRAMLAR……..3
2.1. Gamma Fonksiyonu……...……...3
2.2.Hata Fonksiyonu……5
2.3.Anger Fonksiyonu……..5
2.4.Kesirli İntegral……...6
2.5.Kesirli Türev……...……...6
3.KESİRLİ TÜREV VE İNTEGRALLER……...7
3.1.Grunwald - Letnikov Kesirli Türevleri……..……7
3.2. Riemann - Liouville Kesirli Türeveri……16
3.3.Ardışık Kesirli Türevler……...22
3.4. Kesirli Türevlerin Özelikleri…….…….....23
4.KESİRLİ TÜREVLER İÇİN GENELLEMELER VE UYGULAMALAR……24
4.1.Kesirli Türev……...24
4.2. Polinom Fonksiyonlar için Kesirli Türevin Formülü……..24
4.3.Örnekler……...24
5.ADOMİANIN AYIRMA METODU İLE LİNEER OLMAYAN KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ……..…… 36
5.1 Ayırma Metodu……...36
5.2.Uygulamalar……...…….38
6. GENEL SONUÇ VE ÖNERİLER……..49
7. TABLO 2.……...50
8. KAYNAKLAR……...53

ÖNSÖZ

Kesirli diferansiyel denklemler, özellikle kesirli türev ve kesirli integraller teorik ve pratik bakımdan büyük önem taşımakta ve bütün fen ve mühendislik bilim dallarında çok geniş bir uygulama yeri bulunmaktadır.

Bu çalışmada kesirli türev, kesirli integral ve Adomian'ın ayırma yöntemi ile lineer olmayan bir diferansiyel denklemin çözümü verilmiştir. Kesirli türev formülüyle verilen bir fonksiyonun istenilen keyfi mertebeden kesirli türevi hesaplanabilir. Ayrıca verilen bir lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemin çözümü Adomian'ın ayırma yöntemi ile yapılabilir.

Tez konusunun seçimi ve yürütülmesi konusundaki yardımları ve yakın ilgisinden dolayı sayın hocam Yrd.Doç.Dr. Galip OTURANÇ'a ve Arş.Gör. Yıldıray KESKİN' e teşekkürlerimi sunarım.

Cemile SOYTAŞ

Konya, 2006

1.GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Bu çalışmada Kesirli Türev, Kesirli İntegral ve Kesirli Diferansiyel Denklemlerin çözümlerine yer verilmiştir. Kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için kesirli türev ve kesirli integral hesaplamalarının bilinmesi gerekir. Lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için Adomian'ın ayırma yöntemi uygulanmıştır. Bunun için kesirli türev ve kesirli integral hesaplarının bilinmesi gerekir. Bu yüzden öncelikle bunlara yer verilmiştir.Ayrıca kesirli türev sık bağımlı sıkıştırılmış metaryellerin hareketleri, bir Newton akışkanındaki ince geniş tabaka halindeki viskoelastik metaryellerin sürünme ve gevşeme fonksiyonları ve dinamik sistem ve benzerlerinin kontrolcüsü için $PI^{\lambda}D^{\mu}$ kontrolcüsü gibi bir çok fiziksel problemde yer almaktadır.

Elektromanyetik, akustik, viskoelastik, elektrokimya ve madde bilimlerindeki fenomenlerde kesirli diferansiyel denklemleri kullanılmaktadır. Kesirli türev içeren diferansiyel denklemlerin çözümleri oldukça karışıktır. Bunun için önce kesirli türevin bilinmesi gerekir.

Kesirli türevler ve kesirli integraller lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılmıştır. Kesirli diferansiyel denklemlerinin çözümleri ayırma yöntemi üzerinden elde edilmiştir.Genel olarak lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerden tam çözüme ulaşılabilir bir yöntem yoktur. Sadece yaklaşık çözümler türetilmiştir.

1.2.Literatür Özeti

Podlubny, I. 1999**,** Fractional Differential Equations, Academic Pres.Bu çalışmada diferensiyel ve integralin notasyonlarının genelleştirilmesi için birkaç yaklaşım ele alınmıştır.İstenilen keyfi mertebeden kesirli türev ve kesirli integraller ve bunların özelliklerine yer verilmiştir. Ayrıca kesirli diferansiyel denklemler bu çalışmada bilhassa ele alınmıştır. Ray S.S., Bera R.K. 2004, An approximate solution of a

nonlinear fractional equation by adomian decomposition method, Applied mathematicsand Computation, Volume 165, Issue 2, 15 June 2005, Pages 473-483. Mevcut olan analizlerin amacı lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin çözümleri için Adomian'ın ayırma metodunu uygulamaktır. Sonuç olarak ayırma metoduyla elde edilen çözüm sayısal açıdan değerlendirilir ve truncated metoduyla elde edilen sonuçlar kıyaslanır. Sonuçlar arasında iyi bir uyum gözlemlenmiştir. Davis,H.D. 1936, The Theory of Linear Operators, Principial Press, Blommington, Indiana. Bu çalışmada lineer operatörlerin teoremleri ve gösterimlerinden bahsedilmiştir. Ayrıca kesirli türev ve kesirli integrallerin gösterimine yer verilmiştir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Mühendislikte, fiziki bilimlerde, sosyal bilimlerde ve daha birçok bilim dalında çok sayıda problemi çözmek için önce bu problemleri matematiksel ifadelerle formüle etmek ve sonra da bunlarla ilgili bazı sınır şartları ve başlangıç şartlarını kullanarak problemlerin çözümlerini oluşturan fonksiyonlar bulmak gerekir. Bilinen bir problemi formüle eden bu matematiksel ifadeleri bazen aranan fonksiyonun kesirli mertebeden, birinci mertebeden veya daha yüksek mertebeden türevlerini içermektedir.İşte bu şekilde bir matematiksel ifadeye içindeki türevlerin mertebesine göre *diferansiyel denklem veya kesirli diferansiyel denklem* denir.

2.1.Gamma Fonksiyonu

Tanım:

$\Gamma(x)$ ile göstereceğimiz gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \tag{2.1}$$

genelleştirilmiş integrali ile tanımlanır.

Aynı zamanda eşitlik (2.1.) den

$$n!=\int_0^{\infty} t^{n}e^{-t}dt$$

integraline geçiş yapmak mümkündür. Buradan da görüleceği üzere, Gamma fonksiyonuna faktöriyel fonksiyonuda denir.

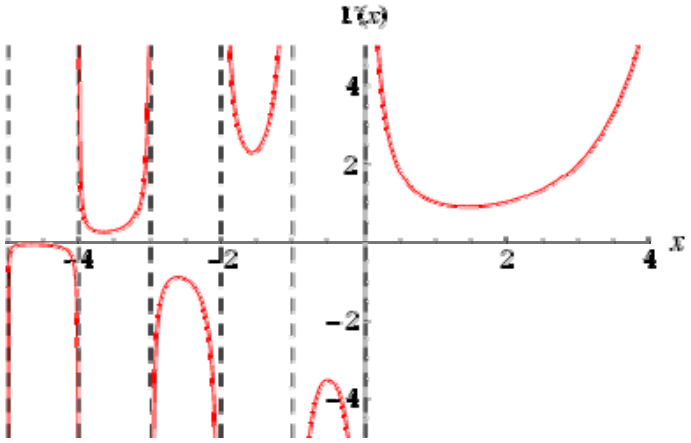
$$\Gamma(n)=\int_0^{\infty} t^{n-1}e^{-t}dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla

$$n!=\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$$

olur.

Gamma fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir (bkz şekil 1).



Şekil 1.

Çalışmanın ileri aşamalarında kullanılacak Gamma fonksiyonuna ilişkin rakamsal değerler Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1:Gamma fonksiyonunun bazı rakamsal değerleri

$\Gamma(0)$	Tanımsız
$\Gamma(\frac{1}{2})$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1)$	1
$\Gamma(\frac{3}{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(2)$	1
$\Gamma(\frac{5}{2})$	$\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(3)$	2
$\Gamma(\infty)$	∞

2.2.Hata Fonksiyonu (erf)

Tanım:

erf(x) ile gösterilen hata fonksiyonu

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \qquad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Söz konusu fonksiyona ilişkin aşağıdaki eşitlik ve değerler mevcuttur.

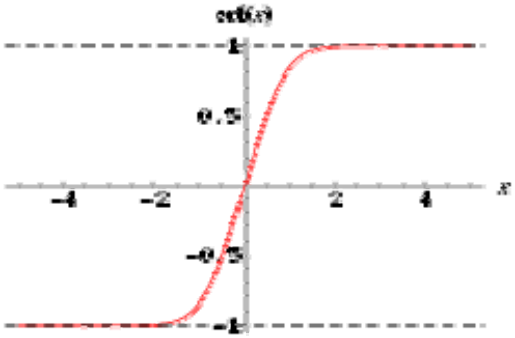
i) erf(x)=1-erfc(x)

ii) erf(-x)=-erf(x)

iii) erf(0)=0

iv) erf(∞)=1

erf(x) in grafiği Şekil 2 de verilmiştir.



Şekil 2.

2.3. Anger Fonksiyonu (AngerJ) [Mapple 9]

Tanım:

AngerJ(v,x) fonksiyonu homojen olmayan bessel denkleminin çözümüdür.

$$xy'' + xy' + (x - v)y = \frac{(x - v)\sin(v\pi)}{\pi} \qquad (2.3)$$

burada x ve v ye verilen değerlere göre AngerJ(x.,v) fonksiyonu hesaplanabilir.

2.4. Kesirli İntegral

Tanım:[23]

Literatürde, Kesirli sıra integralinin en sık karşılaşılan açıklaması, kesirli sıra integralinin aşağıda verilen **Riemann-Liouville** integralidir.

$$\frac{d^{-q} f(x)}{dx^{-q}} = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-q}} \tag{2.4}$$

burada q ($q > 0$ ve $q \in R$) ve $n\text{-}1 \le q \le n$ $n \in Z$ dir .

2.5. Kesirli Türev

Tanım:[23]

Kesirli türev

$$\frac{d^{q} f(x)}{dx^{q}} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-n+q}} \tag{2.5}$$

olarak tanımlanmıştır, burada q ($q > 0$ ve $q \in R$) ve $n\text{-}1 \le q \le n$ $n \in Z$ dir.

3.KESİRLİ TÜREV VE İNTEGRALLER

Literatür [7] den bu çalışmada gösterim olarak;

$$ {}_aD^{\alpha}{}_t \ f(t) \tag{3.1}$$

(3.1) kullanılacaktır. Bu gösterim a ve t kesirli diferansiyelleme işleminin limit değerleri olmak üzere keyfi mertebeden türevler için "kesirli türev" gösterimidir.

"Kesirli integral" keyfi mertebeden integraller anlamındadır ve α ' nın negatif değerine bağlıdır. Kesirli integraller için bir bölme notasyonu kullanılacaktır. $\alpha > 0$ için

$$ {}_aD_t^{-\alpha} \ f(t) \tag{3.2}$$

gösterimi keyfi mertebeden integraller için "kesirli integral" gösterimidir.
Kesirli diferansiyel denklem kesirli türev içeren bir denklemdir.

3.1.Grunwald-Letnikov Kesirli Türevleri

Teorem 3.1.1. [23]

f(t) fonksiyonu alınırsa a ve t'ler limit değerleri olmak üzere

$$ {}_aD_t^p f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C(p,r) f(t-rh)$$

eşitliğinde $p = m$ ise *m*. mertebeden türev ve eğer $p=-m$ ise m katlı integral olur.

İspat: [23]

Kesirli türev ve kesirli integral için bir yaklaşım tanımlanmıştır.
Bunlar klasik analizden bağımsız olarak verilmiştir. *n* tam sayılı mertebeden türev ve *n* katlı integraller olarak alınmıştır.

$y=f(t)$ sürekli fonksiyonu alınırsa
f(t) fonksiyonunun birinci türevi;

$$ f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{3.3}$$

dır. (3.3) iki kere uygulanırsa

$$f''(t)=\frac{d^2f}{d^2t^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(t)-f'(t-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(t)-f(t-h)}{h}-\frac{f(t-h)-f(t-2h)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)}{h^2} \qquad (3.4)$$

ikinci mertebeden türevi elde edilir. (3.3) ve (3.4) kullanılarak

$$f'''(t)=\frac{d^3f}{dt^3}=\lim_{h\to 0}\frac{f(t)-3f(t-h)+3f(t-2h)-f(t-3h)}{h^3} \qquad (3.5)$$

elde edilir. Bu indiksiyonla genellenecek olursa

$$f^n(t)=\frac{d^nf}{dt^n}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r C(n,r)f(t-rh) \qquad (3.6)$$

olur. Burada

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (3.7)$$

olarak ifade edilir. (3.3) - (3.6) daki kesirlerin genel ifadesi;

$$f_h{}^p(t)=\frac{1}{h^p}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r C(p,r)f(t-rh) \qquad (3.8)$$

dır. Burada p keyfi bir tam sayı n de bir tam sayıdır. Açıkca $p\le n$ için

$$\lim_{h\to 0} f^{(p)}{}_h(t)=f^{(p)}(t)=\frac{d^pf}{dt^p}$$

elde edilir. *p* nin negatif değeri alınırsa

$$C(p,r)=\frac{(p+r+1)!}{r!}$$

ile ifade edilir. Buradan;

$$C(-p,r)=(-1)^r C(p,r)$$

dır. (3.8) deki p $-p$ ile değiştirilirse;

$$f_h{}^{(-p)}(t)=h^p\sum_{r=0}^{n}C(p,r)f(t-rh)$$

olur. Burada *p* pozitif bir tam sayıdır.

Eğer n sabit ise, $f_h^{(-p)}(t)$ nin $h \to 0$ iken limitinin 0'a gitmesi doğaldır. Sıfır olmayan bir limite ulaşmak $h \to 0$ iken $h \to \infty$ olmak zorundadır. $h = \frac{t-a}{n}$ alınabilir. Burada a bir reel katsayı ve $f_h^{(-p)}(t)$ nin limit değeri sonlu veya sonsuzdur.

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(-p)}(t) = {}_aD_t{}^{-p} f(t)$$

ile gösterilecektir.

Burada ${}_aD_t^{-p} f(t)$, $f(t)$ fonksiyonu üzerinde bir işlemdir, a ve t'ler limit değerleridir.

Şimdi birkaç özel durum ele alınırsa

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^{n} f(t-rh)$$

da, p=1 için

$$f_h^{(-1)}(t) = h \sum_{r=0}^{n} f(t-rh)$$

$t - nh = a$ ve $f(t)$ sürekli olsun

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(-1)}(t) = {}_aD_t{}^{-1} f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z)dz = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

p için 2, 3, … gibi değerleri de yerine yazılır ve gerekli ara işlemler yapılırsa aşağıdaki genel durum yakalanabilir.

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{r=0}^{n} C(p,r) f(t-rh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)d\tau \qquad (3.9)$$

(3.9) un (p+1) içinde sağlandığı gösterilebilir.

$f_1(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau$ fonksiyonunda $f_1(a) = 0$ dır. (3.9.)' da p yerine (p+1) yazılırsa

$$D_t^{-p-1} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{p+1} \sum_{r=0}^{n} C(p+1,r)\, f(t-rh)$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=0}^{n} C(p+1,r)\, f_1(t-rh) \qquad (3.10)$$

$$- \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=0}^{n} C(p+1,r)\, f_1(t-(r+1)h)$$

olur.

$$(p+1,r) = (p,r) + (p+1,r-1) \qquad (3.11)$$

olur. Burada $C(p+1,-1) = 0$ olmalıdır.

(3.11) i (3.10) daki toplama uygulamak için ikinci toplamdaki *r* ile *r*-1 yer değiştirilirse;

$$D_t^{-p-1} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=0}^{n} C(p,r)\, f_1(t-rh) + \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=0}^{n} C(p+1,r-1)\, f_1(t-rh)$$

$$- \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{p} \sum_{r=1}^{n+1} C(p+1,r-1)\, f_1(t-rh)$$

$$= {}_aD_t^{-p} f_1(t) - \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{p} C(p+1,n)\, f_1(t-(n+1)h)$$

$$= {}_aD_t^{-p} f_1(t) - (t-a)^{p} \lim_{n\to\infty} C(p+1,n) \frac{1}{n^p} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right)$$

elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} f_1\left(a - \frac{t-a}{n}\right) = 0$$

dır.

$$\lim_{n\to\infty} C(p+1,n) \frac{1}{h^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)}{n^p n!} = \frac{1}{\Gamma(p+1)}$$

olur. Burada

$${}_aD_t^{-p-1} f(t) = {}_aD_t^{-p} f_1(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f_1(\tau)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{p!} \int_a^t (t-\tau)^{p} f(\tau)\, d\tau$$

olur. Bu ise (3.9) un indiksiyon ile doğruluğunu gösterir.

(3.9.) formülünün *p*-katlı integrali

$$\frac{d}{dt}\left({}_aD_t^{-p} f(t)\right) = \frac{1}{(p-2)!}\int_a^t (t-\tau)^{p-2} f(\tau)d\tau = {}_aD_t^{-p+1} f(t)$$

olup, buradan;

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+1} f(t)\right)dt$$

$${}_aD_t^{-p+1} f(t) = \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+2} f(t)\right)dt$$

elde edilir. Bu nedenle;

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{-p} f(t) &= \int_a^t dt \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+2} f(t)\right)dt \\ &= \int_a^t dt \int_a^t dt \int_a^t \left({}_aD_t^{-p+3} f(t)\right)dt \\ &= \int_a^t dt \int_a^t dt \ldots \int_a^t f(t)dt \end{aligned}$$

p defa

olur ve (3.6) nın *n* mertebeden integralinin türevini ve *f(t)* sürekli fonksiyonunun (3.9) ifadesinin *p*-katlı integralini gösterir.

$${}_aD_t^{p} f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C(p,r) f(t-rh) \qquad (3.12)$$

eşitliğinde; eğer $p = m$ ise *m*. mertebeden türev ve eğer $p=-m$ ise m katlı integral olur.

Bu çalışma p nin reel değerleri ile sınırlanacaktır.

Tanım 3.1.2. [23]

[a,b] aralığında $f'(t)$ türevi sürekli ise (3.9) dan

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)}\int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau)d\tau \qquad (3.13)$$

olur ve eğer *f(t)* fonksiyonu *m+1* sürekli türeve sahip ise buradan

$${}_aD_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^k(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+k+1)}\int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau)d\tau$$

elde edilir. Burada ${}_aD_t^{-p} f(t)$ ' nın $t=a$' da asimtotik olduğu görülür.

Tanım 3.1.3. [23]

f(t) sürekli fonksiyonunun *p* mertebeden kesirli türevi

$${}_aD_t^p f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{m+1}(\tau) d\tau$$

olarak tanımlanır. $p>0$ olsun, burada;

$$f_h^{(p)}(t) = h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C(p,r) f(t-rh) \tag{3.14}$$

olmak üzere

$${}_aD_t^p f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} f_h^p(t) \tag{3.15}$$

limiti değerlendirilecektir. (3.15) limitini değerlendirmek için aşağıdaki dönüşüm yapılır

$$C(p,r)=C(p-1,r)+C(p-1,r-1)$$

olduğu biliniyor. Buradan

$$f_h^{(p)}(t) = h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C(p-1,r) f(t-rh) + h^{-p} \sum_{r=1}^{n} (-1)^r C(p-1,r-1) f(t-rh)$$

$$= (-1)^n C(p-1,n) h^{-p} f(a) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r C(p-1,r) \Delta f(t-rh)$$

$$= h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C(p-1,r) f(t-rh) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{r+1} C(p-1,r) f(t-(r+1)h)$$

olur. Burada

$$\Delta f(t-rh) = f(t-rh) - f(t-(r+1)h)$$

tır. $\Delta f(t-rh)$, $\tau = t-rh$ noktasında $f(\tau)$ fonksiyonunun birinci mertebeden geri farkıdır.

Bu şekilde eşitlik devam ederse

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{n-k} C(p-k-1, n-k) h^{-p} \Delta^k f(a+kh) + h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r C(p-m-1, r) \Delta^{m+1} f(t-rh)$$

olur. Gerekli diğer ara işlemler yapılırsa

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} (-1)^{n-k} C(p-k-1, n-k) h^{-p} \Delta^k f(a+kh) = \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} \qquad (3.16)$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n-m-1} (-1)^r C(p-m-1, r) \Delta^{m+1} f(t-rh)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \qquad (3.17)$$

(3.16) ve (3.17) yi kullanarak

$${}_aD_t^p f(t) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} f_h^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{m+1}(\tau) d\tau \qquad (3.18)$$

elde edilir. $[a,t]$' de sürekli $f^{(k)}(t) \quad (k = 1, 2, ..., m+1)$ türevlerinin kabulünden ve $m > p-1$'i sağlayan m tamsayısının varlığından (3.18) formülü elde edilir. m'nin en küçük değeri için $m<p<m+1$ dır.

Teorem 3.1.4. [23]

$f(t) = (t-a)^{\nu}$ olmak üzere *f(t)* nin kesirli türevi

$${}_aD_t^p (t-a)^{\nu} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-p+1)} (t-a)^{\nu-p}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: [23]

$f(t)=(t-a)^{\nu}$ ise *-p* mertebeden kesirli integrali alınırsa (3.9) formülü kullanılarak

$$ {}_aD_t^p(t-a)^{\nu}=\frac{1}{\Gamma(-p)}\int_a^t(t-\tau)^{-p-1}(r-a)^{\nu}d\tau \tag{3.19}$$

yazılır. Farzedelim ki integralin yakınsaması için ν>-1 olsun;

$\tau=a+\xi(t-a)$ dan,

$$ {}_aD_t^p(t-a)^{\nu}=\frac{1}{\Gamma(-p)}(t-a)^{\nu-p}\int_a^t\xi^{\nu}(t-\xi)^{-p-1}d\xi$$

$$=\frac{1}{\Gamma(-p)}B(-p,\nu+1)(t-a)^{\nu-p}$$

$$=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-p+1)}(t-a)^{\nu-p} \qquad (p<0,\nu>-1) \tag{3.20}$$

elde edilir, burada $0<m<p<m+1$ dır.

Teorem 3.1.5. [23]

Tamsayı mertebeden türevler ile kesirli türevlerin bileşkesi; $\frac{d^n}{dt^n}$ tam sayı mertebeden türev, ${}_aD_t^p$ kesirli türev ve $f^{k}(a)=0$ (k=0, 1, 2,…) olmak üzere

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t))={}_aD_t^p(\frac{d^n f(t)}{dt^n})={}_aD_t^{p+n}f(t)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: [23]

(3.18) deki m için sınırlama yapılarak $m>p$-1 olursa ve m yerine s yazarak (3.18) yazılırsa yani $m<p<m$+1 olmak koşuluyla

$$ {}_aD_t^p=\sum_{k=0}^{s}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(-p+s+1)}\int_a^t(t-\tau)^{s-p}f^{s+1}(\tau)d\tau \tag{3.21}$$

olur.

(3.21) deki p mertebeden kesirli türevin n tamsayı mertebesinin türevini alınırsa, burada $s=m+n-1$ alınır. Sonuçta

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^p f(t)\right)=\sum_{k=0}^{s}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(-p-n+s+1)}\int_a^t(t-\tau)^{s-p-n}f^{(s+1)}(\tau)d\tau={}_aD_t^{p+n}f(t) \tag{3.22}$$

olur. $s\geq m+n-1$ olduğundan $s=m+n-1$ alınırsa, Buradan

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t))={}_aD_t^{p+n}f(t)$$

$$=\sum_{k=0}^{m+n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(m-n)}\int_a^t(t-\tau)^{m-p-1}f^{(m+n)}(\tau)d\tau \tag{3.23}$$

elde edilir.

$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ tamsayı mertebeden bir türevin p mertebeden kesirli türevi ve ters mertebeden türev alınırsa (3.21)' i kullanarak;

$${}_aD_t^p\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right)=\sum_{k=0}^{s}\frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t(t-\tau)^{m-p-1}f^{(m+n)}(\tau)d\tau \tag{3.24}$$

elde edilir. $s=m-1$ alınırsa

$${}_aD_t^p\left(\frac{d^m f(t)}{dt^m}\right)=\sum_{k=0}^{s}\frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(m-p)}\int_a^t(t-\tau)^{m-p-1}f^{(m+n)}(\tau)d\tau$$

elde edilir .(3.23) ve (3.24) ten

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t))={}_aD_t^p(\frac{d^n f(t)}{dt^n})+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} \tag{3.25}$$

elde edilir. (3.24) ve (3.25) den $\frac{d^n}{dt^n}$ ve ${}_aD_t^p$ işlemleri değişmelidir. Böylece $t=a$ $f^k(a)=0$ (k=0, 1, 2, …) olmak koşuluyla

$$\frac{d^n}{dt^n}({}_aD_t^p f(t))={}_aD_t^p(\frac{d^n f(t)}{dt^n})={}_aD_t^{p+n}f(t)$$

elde edilir.

Teorem 3.1.6 [23]

$0 \le m \le p \le m+1$ ve $0 \le n \le q \le n+1$ ve $f(t)$

$f^{(k)}(a) = 0$, $(k = 0,1,...,r-1)$ olmak üzere ${}_aD_t^p$ ve ${}_aD_t^q$ diferansiyellerinin birleşimi

$$ {}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t)) = {}_aD_t^{p+q} f(t) \qquad (3.26) $$

(3.26) daki gibidir.

3.2. Riemann –Liouville Kesirli Türevleri

Literatür [23] de Riemann –Liouville kesirli türevleri Grünwald-Letnikov kesirli türevlerinin kesirli mertebeden geri farkının limiti olarak tanımlanır. (3.18) in özel bir durumu altında integral-diferansiyel açıklaması

$$ {}_aD_t^p f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^{m+1} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f(\tau) d\tau, m \le p \le m+1 \qquad (3.27) $$

dır. (3.27) de verilen kesirli türev tanımı "Riemann-Liouville" tanımıdır.

Teorem 3.2.1. [23]

Tamsayı mertebeden kesirli türevlerin ve integrallerin bileşimi; *k>n* ise *f(t)* sürekli fonksiyonunun *(k-n).* türevi

$$ f^{(k-n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} D^k \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \qquad (3.28) $$

olmak üzere (3.28) D^k $k \le 0$ ise *k* defa integrasyon, *k*>0 ise *k* defa diferansiyel ifade etmektedir.

İspat: [23]

$f(\tau)$ her (*a,t*) sonlu aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun

$f(t)$ fonksiyonu $\tau = a$ noktasında *r*<1 mertebeden bir integrale sahip olsun.

$$ \lim_{\tau \to a} (\tau - a)^r f(t) = const(\neq 0) $$

dır. Burada,

$$f^{-1}(t)=\int_a^t f(\tau)d\tau$$

integrali vardır ve sonlu bir değere sahiptir.

Yani $t\to a$ iken 0'a eşittir. Gerçekten $\tau=a+y(t-a)$ ve $\varepsilon=t-a$ dan

$$\lim_{\tau\to a} f^{-1}(t)=\lim_{t\to a}\int_a^t f(\tau)d\tau=\lim_{t\to a}(t-a)\int_0^1 f(a+y(t-a))dy$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-r}\int_0^1(\varepsilon y)^r f(a+y\varepsilon)y^{-r}dy=0 \qquad (3.29)$$

$f(t)$ nin iki katlı integrali

$$f^{-1}(t)=\int_a^t d\tau_1\int_a^t f(\tau)d\tau=\int_a^t(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

genel durumda indiksiyon formülüyle Cauchy formülü

$$f^{-n}(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t(t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau \qquad (3.30)$$

elde edilir. $n\geq 1$ ve $k\geq 0$ tamsayısı alınırsa

$$f^{-k-n}(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}D^{-k}\int_a^t(t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau$$

elde edilir. Burada D^{-k} ($k\geq 0$) sembolü *k* defa integrasyon adımını gösterir.

Diğer taraftan $n\geq 1$ sabit noktası $k\geq n$ tamsayısı için $f(t)$ nin *k-n* türevi

$$f^{(k-n)}(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}D^{k}\int_a^t(t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau \qquad (3.31)$$

olarak yazılabilir.

D^k sembolünün anlamı, eğer $k\leq 0$ *k* defa integrasyon, $k>0$ ise *k* defa diferansiyeldir. Eğer *k=n-1,n-2,…,* ise (3.6) *f(t)* nin iteratif integrallerini verir; *k=n* için *f(t)* fonksiyonunu verir. k=n+1 , n+2 , … için *k-n*, *n=1, 2, …* için *f(t)* nin türevlerini verir.

Tanım 3.2.2. [23]

n nin tamsayı değerleri için *n*-katlı integrasyon

$$f^{-n}(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)d\tau \qquad (3.32)$$

dır. (3.32) Cauchy formülünde p>0 reel sayısı ile n tamsayısı yer değiştirerek;

$$ {}_aD_t^{-p} f(t)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau)d\tau \qquad (3.33)$$

elde edilir. (3.33) p-katlı kesirli integral tanımıdır. (3.32) deki n tamsayısı $n\geq 1$ şartını sağlamalıdır. Bu durumda açıktır ki (3.33) integrali için p>0 olmalıdır.

Eğer $t\geq a$ için $f(t)$ sürekli ise (3.33) ile tanımlanan integrasyon aşağıdaki önemli özeliğe sahiptir.

$$ {}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^{-q} f(t)\right)={}_a D_t^{-p-q} f(t)$$

ve bunun ispatı aşağıdaki gibidir.

$$ {}_aD_t^{-p}\left({}_aD_t^{-q} f(t)\right)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_a^t (t-\tau)^{q-1}\,{}_aD_r^{-p} f(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^t (t-\tau)^{q-1}d\tau\int_a^\tau (\tau-\xi)^{p-1} f(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_a^t f(\xi)d\xi\int_\xi^t (\tau-\tau)^{q-1}(\tau-\xi)^{p-1}d\tau$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p+q)}\int_a^t (t-\xi)^{p+q-1} f(\xi)d\xi$$

$$=D^{-p-q} f(t)$$

Tanım 3.2.3. [23]

Tam sayı olmayan dizilerin diferansiyellerinde k-n mertebeden bir tam sayı dizisinin türevi için (3.31) verilirse; n tamsayısı, $\alpha\in R$ ve ile $\alpha>0$ ile $k-\alpha>0$ şeklinde ayrılabilir. Bu durumda ;

$$ {}_aD_t^{k-\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^k}{dx^k}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau \qquad (3.34)$$

elde edilir. Burada α, $\alpha>0$ şeklinde sınırlandırılmıştır. Bu sınırlama $0<\alpha\leq 1$ ile de değiştirilebilir.

(3.34) de $p=k-\alpha$ alınırsa

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dx^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau \qquad k-1 \le p \le k \qquad (3.35) $$

yani *f(t)* fonksiyonunun kesirli türevi

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dx^k} \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-k+p}} \qquad k-1 \le p \le k \qquad (3.36) $$

olarak tanımlanır.

Riemann-Liouville kesirli türevlerinin bazı özellikleri alınacak olursa en önemlisi olarak p>0 ve t>a için Riemann-Liouville kesirli türevi için

$$ {}_aD_t^p \left({}_aD_t^{-p} f(t) \right) = f(t) \qquad (3.37) $$

özeliğidir. Yani Riemann-Liouville kesirli diferansiyel oparatörü aynı *p* mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrasyonunun bir sol tersidir.

Diğer bir özelik ${}_aD_t^p f(t), (k-1 \le p < k)$ kesirli türev ise $f(t)$ fonksiyonu integrallenebilirdir. Buradan,

$$ {}_aD_t^{-p} \left({}_aD_t^p f(t) \right) = f(t) - \sum_{j=1}^{k} \left[{}_aD_t^{p-j} f(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)} \qquad (3.38) $$

elde edlir. (3.37) ye benzer bir özelik olarak genel durumun özel hali

$$ {}_aD_t^p \left({}_aD_t^{-q} f(t) \right) = {}_aD_t^{p-q} f(t) \qquad (3.39) $$

olup, burada *f*(t) sürekli kabul edilir ve eğer $p \ge q \ge 0$ ise ${}_aD_t^{p-q} f(t)$ türevi vardır.

Teorem 3.2.4. [23]

$f(t) = (t-a)^{\beta}$ olmak üzere *f(t)* fonksiyonunun kesirli türevi

$$ {}_aD_t^p (t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-p)} (t-a)^{\beta-p} $$

eşitliğinden elde edilebilir.

İspat: [23]

$\beta \in R$ olmak üzere $f(t) = (t-a)^{\beta}$ kuvvet fonksiyonunun ${}_aD_t^p f(t)$, Riemann-Liouville kesirli türevini hesaplamak için

$$ {}_aD_t^p f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left({}_aD_t^{-(n-p)} f(t) \right), \quad (n-1 \le p < n) \qquad (3.40) $$

eşitliğini alalım. Bu fonksiyonun $\alpha = n - p$ mertebesinden kesirli integrali (3.40) da yazılırsa

$$ {}_aD_t^{-\alpha}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu+\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha} $$

den

$$ {}_aD_t^{p}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1+\nu-p)}(t-a)^{\beta-p} $$

elde edilir ve burada $f(t) = (t-a)^{\beta}$ tek sıra integrallenebilmesi için $\beta > -1$ olmalıdır.

Teorem 3.2.5. [23]

Tamsayı mertebeden türevlerin birleşimi; $t=a$ kesirli diferansiyelin en düşük noktası ve $f^{(k)}(a) = 0\ (k = 0,1,2,...,n-1)$ olmak üzere

$$ \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{p} f(t)\right) = {}_aD_t^{p}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = {}_aD_t^{p+n} f(t) $$

eşitliği sağlanır.

İspat: [23]

Burada Riemann-Liouville kesirli türevinin tamsayı mertebeden türevleri görülür.(3.34) tanımı kullanılarak

$$ \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{k-\alpha} f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau = D_t^{n+k-\alpha} f(t) $$

yazılabilir ve $p=k-a$ ile

$$ \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{p} f(t)\right) = {}_aD_t^{n+p} f(t) $$

elde edilir.

İşlemin tersini almak için

$$ \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^{k-\alpha} f(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau = D_t^{n+k-\alpha} f(t) \qquad (3.41) $$

ve

$$ {}_aD_t^p g(t) = {}_a D_t^{p+n}\left({}_aD_t^{-n} g(t)\right) \tag{4.42} $$

verilmelidir. (3.41) ve (3.42) yi kullanarak

$$ {}_aD_t^p\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = {}_a D_t^{p+n}\left({}_aD_t^{-n} f^{(n)}(t)\right) $$

$$ = {}_a D_t^{p+n}\left(f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^j}{\Gamma(j+1)}\right) $$

$$ = {}_a D_t^{p+n} f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-p-n}}{\Gamma(1+j-p-n)} $$

elde edilir.

Riemann-Liouville kesirli türev operatörü ${}_aD_t^p$' nın $\frac{d^n}{dt^n}$ ile birleştiğini görürüz. Öyleki $t=a$, kesirli diferansiyelin en düşük noktası, $(k = 0,1,2,...,n-1)$ için $f^{(k)}(a) = 0$ olup

$$ \frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_a D_t^p\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = {}_a D_t^{p+n} f(t) \tag{3.43} $$

elde edilir.

Teorem 3.2.6. [23]

${}_aD_t^p$, $(m-1 \le p < m)$ ve ${}_aD_t^q$, $(n-1 \le q < n)$ olmak üzere kesirli türevlerin birleşimi

$$ {}_aD_t^p\left({}_aD_t^q f(t)\right) = {}_a D_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_a D_t^{p+q} f(t) \tag{3.44} $$

(3.44) deki gibidir.

İspat:[23]

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^p\left({}_aD_t^q f(t)\right) &= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{-(m-p)}\left({}_aD_t^q f(t)\right)\right\} \\
&= \frac{d^m}{dt^m}\left\{{}_aD_t^{p+q-m} f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_aD_t^{q-j} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{m-p-j}}{\Gamma(1+m-p-j)}\right\} \\
&= {}_a D_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^{n}\left[{}_aD_t^{q-j} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(1-q-j)}
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

elde edilir. *p* ve *q* nun yer değiştirmesiyle

$$
{}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_a D_t^{p+q} f(t) - \sum_{j=1}^{m}\left[{}_aD_t^{p-j} f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(1-q-j)} \tag{3.46}
$$

yazılabilir. $p=q$ durumu hariç (3.45) ve (3.46) nın karşılaştırılmasında ${}_aD_t^p$ ve ${}_aD_t^p$'nın birleşemeyeceği söylenebilir. Yani $p \neq q$ için

$$
{}_aD_t^p\left({}_aD_t^q f(t)\right) = {}_a D_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_a D_t^{p+q} f(t) \tag{3.47}
$$

(3.47) eşitliğinin var olması için aşağıdaki değerler mevcut olmalıdır;

$$
\left[{}_aD_t^{p-j} f(t)\right]_{t=a} = 0, \quad (j = 1,2,...,m)
$$

eğer *f(t)* sürekli türevler için yeterli sayıya sahip ise bu $f^{(j)}(a) = 0, \quad (j = 0,1,2,...,m-1)$'e denktir.ve

$$
\left[{}_aD_t^{q-j} f(t)\right]_{t=a} = 0, \quad (j = 1,2,...,n)
$$

eğer *f(t)* sürekli türevler için yeterli sayıya sahip ise bu $f^{(j)}(a) = 0, \quad (j = 0,1,2,...,n-1)$ 'e denktir ve $f^{(j)}(a) = 0, \quad (j = 0,1,2,...,r-1)$ ise (3.47) sağlanır.

3.3. Ardışık Kesirli Türevler

Literatür [23] den bir fonksiyonun ardışık kesirli türevi

$$
\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ...\alpha_n
$$

olmak üzere

$$
D^{\alpha} f(t) = D^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+.....\alpha_n} f(t) = D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} D^{\alpha_3} ... D^{\alpha_n} f(t) \tag{3.48}
$$

(3.48) e eşittir.

3.4. Kesirli Türevlerin Özelikleri

Lemma 3.4.1. [23]

$\lambda_1, \lambda_2 \in R$ olmak üzere

$$ {}_aD_t^p(\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)) = \lambda_1 {}_aD_t^p f(t) + \lambda_2 {}_aD_t^p g(t) \tag{3.49} $$

(3.49) eşitliğinde görüldüğü üzere kesirli türevlerin lineerlik özeliği vardır.

İspat: [23]

Eşitlik (3.8) den

$$ {}_aD_t^p(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C(p,r)(\lambda f(t-rh) + \mu g(t-rh)) $$

yazılırsa

$$ = \lambda \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C(p,r) f(t-rh) + \mu \lim_{\substack{h\to 0 \\ nh=t-a}} h^{-p} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C(p,r) g(t-rh) $$

$$ = \lambda {}_aD_t^p f(t) + \mu {}_aD_t^p g(t) $$

elde edilir.

Lemma 3.4.2. [23]

$\varphi(t)$ ve $f(t)$ fonksiyonları için $f(t)\varphi(t)$ nin n. kesirli türevi için leibniz kuralı

$$ {}_aD_t^p(\vartheta(t) f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} C(p,k) \varphi^k(t) {}_aD_t^{p-k} f(t) \tag{3.50} $$

(3.50) deki gibidir.

Lemma 3.4.3. [23]

$\varphi(t) = F(h(t))$ bileşke fonksiyonunun p. mertebeden kesirli türevi

$$ {}_aD_t^p F(h(t)) = \frac{(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} \varphi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} C(p,k) \frac{k!(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} \sum_{m=1}^{k} (h(t)) \sum \prod_{r=1}^{k} \frac{1}{ar!} \left(\frac{h^r(t)}{r!} \right)^{ar} \tag{3.51} $$

(3.51) deki gibidir.

4. KESİRLİ TÜREVLER İÇİN GENELLEMELER VE UYGULAMALAR

4.1. Kesirli Türev

Tanım 4.1.1.

Literatür [24] den $f(x)$ sürekli fonksiyon olmak üzere

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-n+q}} \tag{4.1}$$

(4.1) n diferansiyel adımı göstermek üzere kesirli türevin tanımını gösterir burada $q\ (q > 0 ve q \in R)$ oparatörü $n-1 \le q \le n$ 'ye karşılık gelen tam sayıdır.Bu bölümdeki uygulamalarda (4.1) den yararlanılmıştır.

4.2. Polinom Fonksiyonlar için Kesirli Türevin Formülü

Tanım 4.2.1.

$$f(x) = x^k$$

olmak üzere literatür [23] den polinom fonksiyonunun kesirli türevi

$$\frac{d^a}{dx^a} x^k = \frac{k!}{(k-a)!} x^{k-a}$$

dir. Bu gamma fonksiyonu ile

$$\frac{d^a}{dx^a} x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)} x^{k-a} \tag{4.2}$$

olarak tanımlanır.

4.3.Örnekler

Örnek 4.3.1

$f(x) = x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}.$ türevini bulalım.

Çözüm:

Türev tanımındaki formülden (4.1) de işlem yapılırsa

$$0 \le \frac{1}{2} \le 1 \qquad n=1$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{tdt}{(x-t)^{1-1+\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{tdt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}$$

tablo1 den $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğu dikkate alınırsa

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Diğer taraftan (4.2) formülünde $a = \frac{1}{2}$ k=1 yerlerine yazılırsa

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)}x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Buda eşitlik (4.1) in eşitlik (4.2) ile aynı sonucu verdiğini gösterir.

Örnek 4.3.2.

$f(x) = e^x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}.$ mertebeden türevini bulalım

Çözüm:

(4.1) kesirli türev formülü

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-n+q}}$$

idi. n-1<q<n olduğundan burada

$$f(t) = e^t, \quad n=1, \quad q = \frac{1}{2}$$

bu veriler yerine yazılırsa

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} e^x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{e^t dt}{(x-t)^{1-1+\frac{1}{2}}}$$

elde edilir, bu eşitlik düzenleyecek olursa

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} e^x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{e^t dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{olur.}$$

tablo1 den $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ olduğunun biliyoruz. Biz burada önce $\int_0^x \frac{e^t dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}$ integralini Mapple 9 programı yardımıyla hesaplayacak olursak

$$\int_0^x \frac{e^t dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} = e^x \sqrt{x} erf\left(\sqrt{x}\right)$$

elde edilir. Bunun x e göre türevi alınırsa

$$\frac{d}{dx} e^x \sqrt{x} erf\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + e^x \sqrt{\pi} erf\left(\sqrt{x}\right)$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} e^x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x\pi}} + e^x erf\left(\sqrt{x}\right)$$

olarak bulunur. Buradaki türev ve integral işlemlerinde Mapple 9 programından yararlanılmıştır.

Örnek 4.3.3.

$f(x) = \cos x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}.$ mertebeden türevini bulalım.

Çözüm:

(4.1) deki kesirli türev formülü

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-n+q}}$$

idi. n-1<q<n olduğundan burada

n=1

$q=\frac{1}{2}$

$f(t) = \cos t$

bu veriler yerine yazarsak

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} \cos x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\cos t dt}{(x-t)^{1-1+\frac{1}{2}}}$$

olur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} \cos x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\cos t dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}$$

Mapple 9 proğramı yardımıyla işlemler yapılırsa;

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} \cos x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} - \pi\sqrt{2}\,AngerJ(\frac{1}{2}, x) + \frac{1}{4}x\sqrt{2}\left(-AngerJ(\frac{1}{2}, x) + \frac{AngerJ(-\frac{1}{2}, x)}{2x}\right)$$

$$+\frac{1}{4}x\sqrt{2}\,AngerJ(-\frac{1}{2}, x) + \frac{1}{4}x\sqrt{2}\left(-AngerJ(\frac{1}{2}, x) - \frac{AngerJ(-\frac{1}{2}, x)}{2\pi}\frac{1}{\pi x}\right)$$

$$-\frac{\pi\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}x\sqrt{2}\,AngerJ(\frac{1}{2}, x) + \frac{1}{4}x\sqrt{2}\,AngerJ(-\frac{1}{2}, x)\right)}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir.

Örnek 4.3.4.

$f(x)=\sin x$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}.$ mertebeden türevini bulalım..

Çözüm:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}\sin x}{dx^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\sin t dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}$$

Mapple 9 proğramı yardımıyla işlemler yapılırsa;

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}\cos x}{dx^{\frac{1}{2}}}=-\frac{\pi\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}x\sqrt{2}AngerJ(\frac{1}{2},x)-\frac{1}{4}x\sqrt{2}AngerJ(-\frac{1}{2},x)\right)}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$+\frac{\pi\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}AngerJ(\frac{1}{2},x)+\frac{1}{4}x\sqrt{2}(-AngerJ(\frac{3}{2},x))+\frac{AngerJ(\frac{1}{2},x)}{2x}-\frac{1}{\pi x}\right)}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{-\frac{1}{4}\sqrt{2}AngerJ(-\frac{1}{2},x)-\frac{1}{4}x\sqrt{2}(-AngerJ(\frac{1}{2},x))-\frac{AngerJ(-\frac{1}{2},x)}{2x}+\frac{1}{\pi x}}{\sqrt{x}}$$

elde edilir.

Örnek 4.3.5.

$f(x)=x^3+3x^2+x+1$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}.$ mertebeden türevini bulalım.

Çözüm:

Kesirli türevler için lemma 3.4.1. den lineerlik özeliği olduğu biliniyor;

(4.1) deki polinom fonksiyonlar için kısa kesirli türev formülünde $x^3,x^2,x,1$ in

kesirli türevleri bulunup ara işlemler yazılırsa $\frac{d^{\frac{1}{2}} f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}}$ bulunur.

$$\frac{d^a}{dx^a} x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)} x^{k-a}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x^3}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3-\frac{1}{2}+1)} x^{3-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x^3}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} x^{\frac{5}{2}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x^2}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(2+1)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)} x^{2-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x^2}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)} x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} 1}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(1+0)}{\Gamma(0-\frac{1}{2}+1)} x^{0-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-\frac{1}{2}}$$

Bunlar yerine yazılırsa kesirli türevlerin lemma 3.4.1. deki lineerlik özeliğinden

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x^3+3x^2+x+1}{dx^{\frac{1}{2}}}=\frac{16}{5\sqrt{\pi}}x^{\frac{5}{2}}+3\frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{16}{5\sqrt{\pi}}x^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{2}} \qquad (4.3)$$

bulunur. Kesirli türev formülünde aynı fonksiyon uygulanırsa;

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{(x^3+3x^2+x+1)dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{16}{5\sqrt{\pi}}x^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}x^{-\frac{1}{2}} \qquad (4.4)$$

bulunur. (4.3) ve (4.4) deki sonuçların aynı olduğu görülür.

Örnek 4.3.6.

$f(x)=x^3$ fonksiyonunun kısa yoldan ve uzun yoldan $\frac{1}{2}.$ mertebeden türevini bulalım.

Çözüm:

$a=\frac{1}{2}\quad k=3$ değerlerini (4.1) de yerine yazarsak

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^3=\frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3-\frac{1}{2}+1)}x^{3-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{7}{2})}x^{\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{16}{5\sqrt{\pi}}x^{\frac{5}{2}} \qquad (4.5)$$

Aynı şekilde temel formülden

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x^3}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^3 dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{16}{5\sqrt{\pi}}x^{\frac{5}{2}} \qquad (4.6)$$

elde edilir.Görüldüğü üzere (4.5) ile (4.6) dan elde edilen sonuçlar aynıdır.

Örnek 4.3.7.

$f(x) = x^3$ ün $\frac{3}{2}$. mertebeden türevini bulalım.

Çözüm:

$\frac{d^a}{dx^a}x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)}x^{k-a}$ formülünü kullanılırsa

$a = \frac{3}{2}$, $k = 3$

$$\frac{d^{\frac{3}{2}}}{dx^{\frac{3}{2}}}x^3 = \frac{\Gamma(3+1)}{\Gamma(3-\frac{3}{2}+1)}x^{3-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{5}{2})}x^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}} \qquad (4.7)$$

(4.1) deki kesirli türev formülünde $f(x) = x^3$ ün $\frac{3}{2}$. mertebeden kesirli türevi

$$\frac{d^q f(x)}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)}\frac{d^n}{dx^n}\int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-n+q}}$$

denkleminde

$q = \frac{3}{2}$; $n = 2$ değerleri yerine yazılırsa

$$\frac{d^{\frac{3}{2}}x^3}{dx^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x\frac{t^3dt}{(x-t)^{1-2+\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^{\frac{3}{2}}x^3}{dx^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x\frac{t^3dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{8}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}} \tag{4.8}$$

olarak elde edilir. Böylece (4.7) ile (4.8) de bulunan sonuçların aynı olduğu görülür.

Örnek 4.3.8.

$f(x)=x$ fonksiyonunun iki kere $\frac{1}{2}.$ mertebeden türevini bulalım.

Çözüm:

$$f(x)=x$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x=\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)}x^{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}$$

aynı şekilde bulduğumuz bu fonksiyonun bir kez daha aynı mertebeden türevi alınırsa

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{d^{\frac{1}{2}}f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}}\right]=\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(1+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1)} x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} x^{0}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{1} 1$$

$$= 1 \qquad (4.9)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}[\frac{d^{\frac{1}{2}} f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}}] = \frac{d^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} f(x)}{dx^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}} = \frac{df(x)}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx} x$$

$$= 1 \qquad (4.10)$$

olur. (4.9) ve (4.10) daki sonuçların aynı olması Teorem 3.1.6. ile Teorem 3.2.6. nın doğruluğunu gösterir.

Örnek 4.3.9.

$f(x) = x$ fonksiyonunun için $\frac{d}{dx}({}_aD_t^{\frac{1}{2}} f(x)) = {}_aD_t^{1+\frac{1}{2}} f(x) = {}_aD_t^{\frac{3}{2}} f(x)$ eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

Çözüm:

$f(x) = x$ olduğuna göre önce $\frac{d}{dx}({}_aD_t^{\frac{1}{2}} f(x))$ hesaplanırsa;

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{tdt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}2\sqrt{x}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

buradan

$$\frac{d}{dx}({}_aD_t^{\frac{1}{2}} f(x)) = \frac{1}{\sqrt{p\,x}} \tag{4.11}$$

olarak elde edilir.

Diğer taraftan ${}_aD_t^{\frac{3}{2}} f(x)$ hesaplanırsa

$$\frac{d^{\frac{3}{2}}x}{dx^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \frac{tdt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d^2}{dx^2}[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}[\frac{1}{\sqrt{\pi}}2\sqrt{x}]$$

ve böylece

$$\frac{d^{\frac{3}{2}}x}{dx^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \tag{4.12}$$

olarak elde edilir. Buradan (4.11) ile (4.12) nin aynı olması verilen eşitliğin doğruluğunu gösterir. Böylece Teorem 3.1.5. ile Teorem 3.2.5. in doğruluğu gösterilmiş olur.

5.ADOMİANIN AYIRMA METODU İLE LİNEER OLMAYAN KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

5.1. Ayırma Metodu

Tanım 5.1.1.

Literatür [24] den Adomian ayırma metodu kısa bir biçimde ele alınırsa; L nin tersi doğrusal oparatör, R kalan lineer parça, N lineer olmayan oparatör olduğunda

$$Lu + Ru + Nu = g \tag{5.1}$$

(5.1) formunda bir eşitlik yazılabilir. Ayrışımla denklemlerin genel çözümleri

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{5.2}$$

olarak tanımlanır.

Burada u_0 $Lu = g$ nin genel çözümüdür. (5.1) den $Lu = g - Ru - Nu$ yazılabilir. L^{-1} in tersi vardır. Her tarafı L^{-1} ile çarpılırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu$$

olur.

Başlangıç değer problemi için L^{-1} i $L \equiv \frac{d^n}{dt^n}$ 0 dan t ye kadar n katlı integrasyon oparatörü olarak tanımlanır.

Örneğin $L \equiv \frac{d^2}{dt^2}$ oparatörü için

$$L^{-1}Lu = u - u(0) - tu'(0)$$

böylece

$$u = u(0) + u'(0) + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{5.3}$$

elde edilir.

Sınır değer problemleri kesin olmayan integrasyonlar kullanılarak ve sabit verilerden yola çıkarak değerlendirilir.

$$u = A + Bt + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{5.4}$$

olarak yazılabilir. *u* yu çözmek için (5.3) ve (5.4) deki eşitlikler varsayılan ayrışımla $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ da u_0 belirlenir.

Literatür [1,2] den sonuç olarak özel lineer olmayan $Nu = f(u)$ için özel polinom serileri yazılabilir.

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \qquad (u_0 u_1 u_2 \ldots\ldots u_n)$$

Bu Adomian tarafından oluşturulmuştur. Tabiki bu A_n polinomlarının lineer olmayışına dayanır. Bu A_n ler aşağıda verilmiştir.

$$A_0 = f(u_0)$$

$$A_1 = u_1 \frac{df(u_0)}{du_0}$$

$$A_2 = u_2 \frac{df(u_0)}{du_0} + \frac{u_1^2}{2!} \frac{d^2 f(u_0)}{du_0^2}$$

$$A_3 = u_3 \frac{df(u_0)}{du_0} + u_1 u_2 \frac{d^2 f(u_0)}{du_0^2} + \frac{u_1^3}{3!} \frac{d^3 f(u_0)}{du_0^3}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \sum_{v=1}^{n} C(v,n) f^{(v)}(u_0) \tag{5.5}$$

Burada *C(v,n),* u nun *v* li kombinasyonudur.

Son dönemde Adomian çözümleme metodu tekrar gözden geçirilmiştir ve Adomian polinomlarının matematiksel modeli sunulmuştur.

Böylece genel formül

$$u = u_0 - L^{-1} R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} Nu \tag{5.6}$$

$$= u_0 - L^{-1} R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{5.7}$$

olur. Burada $u_0 = \varnothing + L^{-1} g$ ve $L\varnothing = 0$ $(Lu = g)$ (5.8)

dır. Böylece

$$u_{n+1} = -L^{-1} R u_n - L^{-1} g \qquad n \geq 0 \tag{5.9}$$

sonucu ortaya çıkar.

Bilinen u_0 kullanılarak bütün bileşenler kullanılabilir. (5.9) eşitliği kullanılarak benzerleri bulunabilir. $u_{0,}u_{1,}u_2.....u_n$ (5.2) de yerine konularak *u* elde edilir.

5.2. Uygulamalar

Örnek 5.2.1. [8]

$$\frac{dy}{dt} = 10y^2 \text{ , } y(0) = 1$$

adi diferansiyel denklemini Adomian ayırma metodu ile çözelim.

Çözüm:

$L \equiv \frac{d}{dt}$ olduğu varsayılırsa

$\frac{dy}{dt} = 10y^2$ eşitliğinin her iki tarafında L^{-1} ile işlem yapılırsa

$$L^{-1}\frac{dy}{dt} = L^{-1}10y^2$$

$$y_{n+1} = L^{-1}A_n$$

Burada A_n ler Adomian polinomlarıdır.

$$A_0 = 10y_0^2$$
$$A_1 = y_1 20y_0 = 20y_0y_1$$
$$A_2 = y_2(20y_0) + \frac{y_1^2}{2}20 = 20y_0y_2 + 10y_1^2$$

şeklinde hesaplanabilir. Böylece,

$$y_0 = c \qquad A_0 = c^2$$

$$y_{n+1} = L^{-1}A_n$$

$$n = 0 \qquad y_1 = L^{-1}10c^2 = 10c^2t$$

$$A_1 = 200c^3t$$

$$n=1 \qquad y_2 = L^{-1}200c^3t = 100c^3t^2$$

$$A_2 = 20c(100c^3t^2) + 10(10c^2t)^2 = 3000c^4t^4$$

$$n=2 \qquad y_3 = L^{-1}A_2 = L^{-1}3000c^4t^4 = 1000c^4t^3$$

olmak üzere $y_0, y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ değerleri

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \ldots$$

da yazılırsa

$$y(t) = c + 10c^2t + 100c^3t^2 + 1000c^4t^3 + \ldots$$

elde edilir. Burada $y(0) = c = 1$ olduğundan

$$y(t) = 1 + 10t + 100t^2 + 1000t^3 + \ldots$$

sonucuna ulaşılır.

Diğer taraftan

$$\frac{dy}{dt} = 10y^2 \text{ , } y(0) = 1$$

denkleminin analitik çözümünden,

$$\frac{dy}{y^2} = 10dt$$

$$y^{-2}dy = 10dt$$

ve

$$y = \frac{1}{c - 10t}$$

$$y(0) = 1$$

ise, c=1 olur.

$$y = \frac{1}{1 - 10t}$$

elde edilir. Bu fonksiyonunun seri açılımı

$$y(t) = 1 + 10t + 100t^2 + 1000t^3 + \ldots$$

dır. Bu da Adomian çözümünün doğruluğunu gösterir.

Örnek 5.2.2. [8]

$$\frac{dy}{dt} = y - 2y^2, \quad y(0) = 1$$

adi diferansiyel denklemini Adomian ayırma metodu ile çözelim.

Çözüm:

$L \equiv \frac{d}{dt}$ olduğu varsayılırsa

$\frac{dy}{dt} = y - 2y^2$ eşitliğinin her iki tarafında L^{-1} ile işlem yapılırsa

$$L^{-1}\frac{dy}{dt} = L^{-1}y - L^{-1}2y^2$$

$$y_{n+1} = L^{-1}y_n - L^{-1}A_n$$

$$A_0 = y_0$$
$$A_1 = y_1$$
$$A_2 = y_2$$

Burada, A_n ler Adomian polinomlarıdır.

$$y_{n+1} = L^{-1}y_n - L^{-1}A_n$$

$y_o = c \quad A_0 = 2y_0^{\,2} = 2c^2$

$n = 0 \quad y_1 = L^{-1}y_0 - L^{-1}A_0 = L^{-1}c - L^{-1}2c^2 = ct - 2c^2t$

$A_1 = 4c(ct - 2c^2t) = 4c^2t - 8c^3t$

$n = 1 \quad y_2 = L^{-1}y_1 - L^{-1}A_1 = L^{-1}(ct - 2c^2t) - L^{-1}(4c^2t - 8c^3t)$

$$y_2 = c\frac{t^2}{2} - 3c^2t^2 + 4c^3t^2$$

$$A_2 = 4c(c\frac{t^2}{2} - 3c^2t^2 + 4c^3t^2) + 2(ct - 2c^2t)^2$$

$n = 2 \quad y_3 = L^{-1}y_2 - L^{-1}A_2 = L^{-1}(c\frac{t^2}{2} - 3c^2t^2 + 4c^3t^2) - L^{-1}(4c(c\frac{t^2}{2} - 3c^2t^2 + 4c^3t^2) + 2(ct - 2c^2t)^2)$

$$y_3 = c\frac{t^3}{6} - c^3t^3 + \frac{4}{3}c^2t^3 - \frac{2}{3}c^2t^3 + 4c^3t^3 - \frac{16}{3}c^4t^3 - \frac{2}{3}c^2t^3 + \frac{8}{3}c^3t^3 + \frac{8}{3}c^4t^3$$

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \ldots$$

de bulunan değerler yerine yazılırsa

$$y(t) = c + (ct - 2c^2t) + (c\frac{t^2}{2} - 3c^2t^2 + 4c^3t^2) +$$
$$(c\frac{t^3}{6} - c^3t^3 + \frac{4}{3}c^2t^3 - \frac{2}{3}c^2t^3 + 4c^3t^3 - \frac{16}{3}c^4t^3 - \frac{2}{3}c^2t^3 + \frac{8}{3}c^3t^3 + \frac{8}{3}c^4t^3) + \ldots$$

olur. Burada,

$$y(0) = c = 1$$

olduğundan

$$y(t) = 1 - t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{13}{6}t^3 + \ldots \qquad (5.10)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{dy}{dt} = y - 2y^2, \quad y(0) = 1$$

diferansiyel denklemi bilinen bir yöntemle çözülürde

$$\frac{dy}{y - 2y^2} = dt$$

eşitliğinin her iki tarafının integrali alınırsa

$$-\ln(-1 + 2y) + \ln y = t + c$$

y(0)=1 oldugundan burada

$$y = \frac{e^t}{2e^t - 1}$$

olur. Bu fonksiyonun seri açılımı;

$$y(t) = 1 - t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{13}{6}t^3 + \ldots \qquad (5.11)$$

olarak elde edilir. Buradan (5.10) ile (5.11) nin aynı olduğu görünür.

Örnek 5.2.3.

$$\frac{dy}{dt} - y = t, \quad y(0) = 1$$

diferansiyel denklemini Adomian ayırma metodu ile çözelim.

Çözüm:

$L \equiv \frac{d}{dt}$ olduğu varsayılırsa

$\frac{dy}{dt} = y + t$ eşitliğinin her iki tarafı L^{-1} ile işleme sokulursa

$$L^{-1}\frac{dy}{dt} = L^{-1}y + L^{-1}t$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{t^2}{2}$$

$$y_0 = c$$

$$n = 0 \quad y_1 = L^{-1}c + \frac{t^2}{2}$$

$$y_1 = ct + \frac{t^2}{2}$$

$$n = 1 \quad y_2 = L^{-1}(ct + \frac{t^2}{2}) + \frac{t^2}{2}$$

$$y_2 = \frac{ct^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}$$

$$n = 2 \quad y_3 = L^{-1}(\frac{ct^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}) + \frac{t^2}{2}$$

$$y_3 = \frac{ct^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2}$$

$$y(t) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots$$

$$y(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + \ldots$$

$$y(t) = 1 + t + 2t^2 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \ldots \qquad (5.12)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\frac{dy}{dt} - y = t, \quad y(0) = 1$$

diferansiyel denklemi, sabitin değişimi kuralıyla çözülürse

$$y = ce^t$$

$$y' = c'e^t + ce^t$$

olur. Denklemde bunlar yerine yazılırsa

$$c' = xe^{-t}$$

olur. Her iki tarafın integrali alınısa

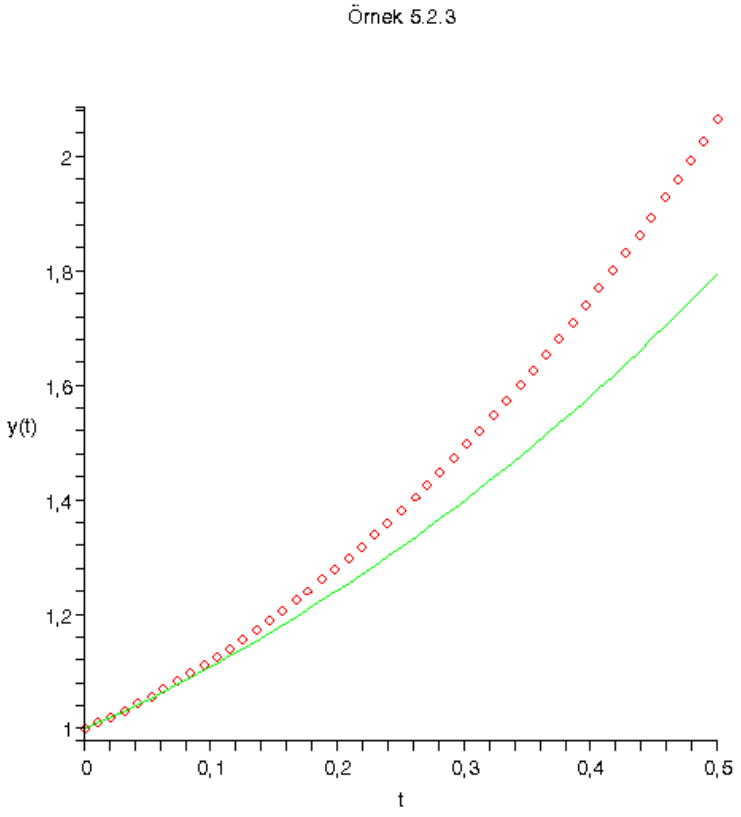
$$c = -te^{-t} - e^{-t} + k$$

olur. Böylece

$$y = 2e^t - t - 1 \qquad (5.13)$$

olarak elde edilir.

(0,0.5) aralığında; aşağıdaki grafikte kesik çizgi (5.12) yi ve düz çizgi (5.13) ü ifade etmektedir. Grafiğe bakılırsa sonuçların birbirine yakın olduğu görülür.



Örnek 5.2.4.

$$\frac{dy}{dt} - y = e^t, \quad y(0) = 1$$

diferansiyel denklemini Adomian ayırma metodu ile çözelim.

Çözüm:

$L \equiv \frac{d}{dt}$ olduğu varsayılırsa

$\frac{dy}{dt} = y + e^t$ eşitliğinin her iki tarafı L^{-1} ile işleme sokulursa

$$L^{-1}\frac{dy}{dt} = L^{-1}y + L^{-1}e^t$$

$$y_{n+1} = L^{-1}y_n + e^t$$

$$y_0 = c$$

$$n = 0 \quad y_1 = L^{-1}c + e^t$$

$$y_1 = ct + e^t$$

$$n = 1 \quad y_2 = L^{-1}(ct + e^t) + e^t$$

$$y_2 = \frac{ct^2}{2}e^t + e^t$$

$$n = 2 \quad y_3 = L^{-1}(\frac{ct^2}{2}e^t + e^t) + e^t$$

$$y_3 = \frac{ct^3}{6} + e^t + e^t + e^t$$

$$y(t) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots$$

$$y(t) = c + ct + e^t + \frac{ct^2}{2}e^t + e^t + \frac{ct^3}{6} + e^t + e^t + e^t + \ldots$$

y(0)=1=c olduğundan

$$y(t) = 6e^t + 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \ldots \qquad (5.14)$$

olarak elde edilir. Diğer taraftan

$$\frac{dy}{dt} - y = e^t, \quad y(0) = 1$$

diferansiyel denklemi sabitin değişimi kuralıyla çözülürse

$$y = ce^t$$

$$y' = c'e^t + ce^t$$

olur. Denklemde bunlar yerine yazılırsa

$$c' = 1$$

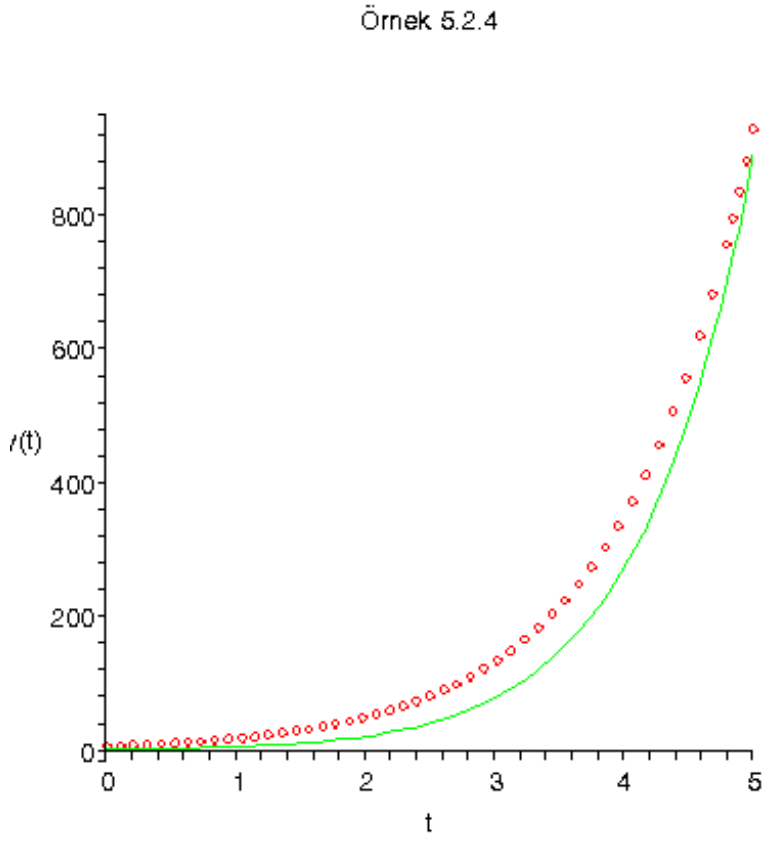
olur. Her iki tarafın integrali alınısa

$$c = t + k$$

olur böylece y(0)=1' den

$$y = te^t + e^t \qquad (5.15)$$

olarak elde edilir.(0,5) aralığında; aşağıdaki grafikte kesik çizgi (5.14) ü ve düz çizgi (5.15) i ifade etmektedir. Grafiğe bakılırsa sonuçların birbirine yakın olduğu görülür.



Örnek 5.2.5. [Lineer olmayan kesirli diferansiyel eşitliğin çözümü]

$$\frac{dy}{dt} + \frac{d^{1/2}y}{dt^{1/2}} - y = 0\,, \qquad y(0) = 1$$

Kesirli diferansiyel denklemini Adomian ayırma metodu ile çözelim.

Çözüm:

$L \equiv \frac{d}{dt}$ olduğu varsayılırsa

$\frac{dy}{dt} = -\frac{d^{1/2}y}{dt^{1/2}} + y$ eşitliğinin her iki tarafında L^{-1} ile işlem yapılırsa

$$L^{-1}\frac{dy}{dt} = -L^{-1}\frac{d^{1/2}y}{dt^{1/2}} + L^{-1}y$$

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$y_{n+1} = L^{-1}A_n - \frac{d^{-1/2}y_n}{dt^{-1/2}}$$

$A_0 = y_0$
$A_1 = y_1$
$A_2 = y_2$

Burada A_n ler Adomian polinomlarıdır.

$y_o = c \quad A_0 = y_0 = c$

$n=0 \qquad y_1 = L^{-1}A_0 - \frac{d^{-1/2}y_0}{dt^{-1/2}} = L^{-1}c - \frac{d^{-1/2}c}{dt^{-1/2}} = ct - \frac{2c}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}$

$$A_1 = y_1 = ct - \frac{2c}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}$$

$n=1 \qquad y_2 = L^{-1}y_1 - L^{-1}A_1 = L^{-1}(ct - \frac{2c}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}) - L^{-1}(ct - \frac{2c}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t})$

$$y_2 = \frac{1}{2}t^2c - (\frac{4c}{3\sqrt{\pi}} - \frac{2c}{\pi^{3/2}})t^{3/2} + \frac{2t}{\pi}$$

$$A_2 = y_2 = \frac{1}{2}t^2c - (\frac{4c}{3\sqrt{\pi}} - \frac{2c}{\pi^{3/2}})t^{3/2} + \frac{2t}{\pi}$$

$n=2 \qquad y_3 = L^{-1}y_2 - L^{-1}A_2 = L^{-1}(\frac{1}{2}t^2c - (\frac{4c}{3\sqrt{\pi}} - \frac{2c}{\pi^{3/2}})t^{3/2} + \frac{2t}{\pi}) - L^{-1}(\frac{1}{2}t^2c - (\frac{4c}{3\sqrt{\pi}} - \frac{2c}{\pi^{3/2}})t^{3/2} + \frac{2t}{\pi})$

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)...$$

da bulunan eşitlikler yerine yazılırsa

$$y(t) = \frac{1}{6}ct^3 - \frac{8c}{15\sqrt{\pi}}t^{5/2} - \frac{4c}{5\sqrt{\pi}}t^{5/2} + \frac{2c}{\pi}t^2 - \frac{c}{\pi}t^{5/2} + \frac{20c}{3\pi}t^2 - \frac{8c}{\pi^{3/2}}t^{3/2} + \frac{1}{2}t^2c - (\frac{4c}{3\sqrt{\pi}} - \frac{2c}{\pi^{3/2}})t^{3/2} + \frac{2t}{\pi} + ct - \frac{2c}{\pi}\sqrt{t} + c + ...$$

olur. Buradan $y(0) = c = 1$ yazılırsa

$$y(t)=1+\frac{2}{\pi}\sqrt{t}+(\frac{2}{\pi}+1)t+(-\frac{8}{\pi^{3/2}}-\frac{4}{3\sqrt{\pi}}+\frac{2}{\pi^{3/2}})t^{3/2}+$$
$$(\frac{2}{\pi}+\frac{20}{3\pi}+\frac{1}{2})t^{2}+(-\frac{8c}{15\sqrt{\pi}}-\frac{4c}{5\sqrt{\pi}}-\frac{1}{\sqrt{\pi}})t^{5/2}+\frac{1}{6}t^{3}+...$$

elde edilir.

Örnek 5.2.6.[24]

$$\frac{dy}{dx}+\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dt^{\frac{1}{2}}}-2y^{2}=0\ ,\qquad y(0)=1$$

Adomian ayırma metoduyla aşağıdaki lineer olmayan kesirli diferansiyel eşitliği çözelim.

Çözüm:

$L\equiv\frac{d}{dt}$ olduğunu varsayılırsa

Böylece y(t) fonksiyonu Adomian ayırma metodu ile c'nin keyfi sabit olduğu

$$y=c-L^{-1}\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dt^{\frac{1}{2}}}\right)+2L^{-1}y^{2}$$

şeklinde yazılabilir.

$$y(t)=y_{o}(t)+y_{1}(t)+y_{2}(t)+...$$

eşitliğin çözümü olduğu farzedilirse

$y_{o}(t)=c$

$$y_{1}(t)=2L^{-1}A_{0}-\frac{d^{-\frac{1}{2}}y_{0}(t)}{dt^{-\frac{1}{2}}}=2c^{2}t-2c\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$$

$$y_{2}(t)=2L^{-1}A_{1}-\frac{d^{-\frac{1}{2}}y_{1}(t)}{dt^{-\frac{1}{2}}}=4c^{3}t^{2}-\frac{8c^{2}}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}+ct$$

$$y_{3}(t)=2L^{-1}A_{2}-\frac{d^{-\frac{1}{2}}y_{2}(t)}{dt^{-\frac{1}{2}}}=8c^{4}t^{3}-\frac{352}{15}\frac{c^{3}}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{5}{2}}+(5+\frac{4}{\pi})c^{2}t^{2}-\frac{4c}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}$$

$$y_4(t) = 2L^{-1}A_3 - \frac{d^{-\frac{1}{2}} y_3(t)}{dt^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= 16c^5t^4 - \frac{6464}{105\sqrt{\pi}} c^4 t^{\frac{7}{2}} + (50 + \frac{80}{\pi}) \frac{c^3t^4}{3} - \left(\frac{32}{3\sqrt{\pi}} + \frac{64}{15\pi\sqrt{\pi}} \right) c^2 t^{\frac{5}{2}} + \frac{ct^2}{2}$$

$$y_5(t) = 2L^{-1}A_4 - \frac{d^{-\frac{1}{2}} y_4(t)}{dt^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= 32c^6t^5 - \frac{143744}{945\sqrt{\pi}} c^5 t^{\frac{9}{2}} + (\frac{568}{5\pi} + \frac{95}{2}) c^4t^4 - \left(\frac{1072}{21\sqrt{\pi}} + \frac{1344}{35\pi\sqrt{\pi}} \right) c^3 t^{\frac{7}{2}} + (\frac{14}{3} + \frac{44}{9\pi}) c^2t^3 - \frac{8ct^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}}$$

böylece eşitliğin çözümü

$$y(t) = c + (2c^2t - 2c\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}) + (4c^3t^2 - \frac{8c^2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + ct) + \ldots$$

olur.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dt^{\frac{1}{2}}} - 2y^2 = 0 \qquad\qquad y(0)=1$$

olduğundan $y(0)=c=1$ olur ve $y(t)$ fonksiyonu

$$y(t) = 1 + (2t - 2\frac{\sqrt{t}}{\pi}) + (4t^2 - \frac{8}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + t) + \ldots$$

ise

$$y(t) = 1 - \frac{2}{\pi}\sqrt{t} + 3t + 4t^2 - \frac{8}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + t + \ldots$$

olarak bulunur.

Sonuç olarak y nin 5 terimi yaklaşık olarak alınabilir.

$$\varphi_5 = \sum_{i=0}^{4} y_i$$

6. GENEL SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Kesirli Türev, Kesirli İntegral ve Lineer olmayan diferansiyel denklemin çözümü hakkında bilgi verilmiştir. Kesirli türev ve kesirli integralin tanım formüllerinin yanında, polinom fonksiyonlar için kesirli türev hesaplarında gamma fonksiyonuna bağlı bir özel formül tanımlandı.

Kesirli türev ve kesirli integrallerin bir takım özellikleri verilirken tam sayı mertebeden türevlerde olduğu gibi kesirli türevlerde de lineerlik özelliği olduğu gösterildi. Kesirli türevlerin tamsayı mertebeden türevleri ve kesirli integrallerin tamsayı mertebeden integrallerinden bahsedildi. Polinom fonksiyonların kesirli türev tanımındaki formülden türevi hesaplandığında ve elde edilen özel formülde türevi hesaplandığında aynı sonuçların elde edildiği örneklerde gösterildi. Hazırlanmış olan Tablo 2 de çok kullanılan fonksiyonların $\frac{1}{2}.$ ve $-\frac{1}{2}.$ mertebeden kesirli türevleri verilmiştir. Verilen formüllerden yararlanılarak istenilen fonksiyonun istenilen keyfi mertebeden kesirli türevi hesaplanabilir.

Ayrıca adi türevli diferansiyel denklemlerin bilinen yollarla yapılan çözümünden elde edilen sonucun Adomian ayırma yöntemiyle yapılan çözümden elde edilen sonuca yakın ya da aynı olduğu gösterildi. Adi türevli diferansiyel denklemlerin Adomian ayırma metoduyla çözümüne benzer olarak kesirli diferansiyel denklemlerin Adomian ayırma yöntemiyle çözümü yapılmıştır. Bu yöntemle bilinen yöntemlerle hesaplanamayan bir kesirli diferansiyel denklemin çözümü yapılabilmektedir.

TABLO 2

$f(x)$	$\frac{d^{\frac{1}{2}} f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{d^{-\frac{1}{2}} f(x)}{dx^{-\frac{1}{2}}}$
0	0	0
c	$\frac{c}{\sqrt{\pi x}}$	$2c\sqrt{\frac{x}{\pi}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0	$\sqrt{x}$
$x^0 = 0$	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}$	$2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$
$x^{\beta+\frac{1}{2}}$	x^{β}	$\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}$

$f(x)$	$\frac{d^{\frac{1}{2}} f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{d^{-\frac{1}{2}} f(x)}{dx^{-\frac{1}{2}}}$
x	$2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$	$\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}$
$x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{3}{4}\sqrt{\pi}x$	$\frac{3}{8}\sqrt{\pi}x^2$
x^n $n=1,2,3,....$	$\frac{[n!]^2[4x]^n}{(2n)!\sqrt{\pi x}}$	$\frac{[n!]^2[4x]^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)!\sqrt{\pi}}$
$\sqrt{1+x}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}+\frac{\arctan\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi}}$	$\sqrt{\frac{x}{\pi}}+\frac{(1++x)\arctan\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi}}$
$\sqrt{1-x}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}}-\frac{\arctan h\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi}}$	$\sqrt{\frac{x}{\pi}}+\frac{(1-x)\arctan h\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}(1+x)}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\arctan(\sqrt{x})$

$f(x)$	$\frac{d^{\frac{1}{2}} f(x)}{dx^{\frac{1}{2}}}$	$\frac{d^{-\frac{1}{2}} f(x)}{dx^{-\frac{1}{2}}}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}(1-x)}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\arctan h(\sqrt{x})$
e^x	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} + e^x erf(\sqrt{x})$	$e^x erf(\sqrt{x})$
$\cosh(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \frac{\sqrt{\pi} L_0(\sqrt{x})}{2}$	$\sqrt{\pi x} L_{-1}(\sqrt{x})$
$\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \cos(x+\frac{1}{4}\pi) - \sqrt{2}\, fres(\sqrt{\frac{2x}{\pi}})$	$\cos(x-\frac{1}{4}\pi) - \sqrt{2} gres(\sqrt{\frac{2x}{\pi}})$
$\sinh(\sqrt{x})$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi} I_0(\sqrt{x})$	$\sqrt{\pi x} L_{-1}(\sqrt{x})$

8. KAYNAKLAR

[1] Adomian, G. 1986, Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press,New York, NY.

[2] Adomian, G. 1994, Solving Frontier Problems of Physics:The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Boston.

[3] Axtell, M., Bise, M. E.1990, Fractional calculus applications in control systems,Proc. Of the IEEE 1990 Nat.Aerospace and Electronics Conf.,New York,;563-566

[4] Bagley, R. L. 1989, Power law and fractional calculus model of viscoelasticity,AIAA Journal, vol.27, no.10, 1412-1417.

[5] Bagley, R. L., Tornik, P. J. 1986, On the faractional calculus model of viscoelastic behavior,Journal of Rheology,vol.30,133-155.

[6] Carlson, G. E., Halijak, C. A. 1961, Simulation of fractional derivative operatör $\sqrt{s}$ and the fractional integral operatör $\frac{1}{\sqrt{s}}$, Kansas State University Bulletin, vol 45,no.7.

[7] Davis,H.D. 1936, The Theory of Linear Operators, Principial Press,Blommington,Indiana.

[8] Daşdemir, V. 2006, Adomian Ayrıştırma Metodu, Konya.

[9] Diethelm, K. 1997, An algorithm for the numarical solution of differential equations of fractional order,Electronic Transactions on Numerical Analysis,ISSN1968-9613,vol.5,March,1-6.

[10] El-Sayed, A. M. A. 1988, Faractional derivative and faractional differential equations, Bull Fac. Sci., Alexandria Univ.,vol. 28,18-22.

[11] Gorenflo, R., Marinardi, F., Fractional calculus:integral and diffeential equations of fractional order,in Carpinteri and Mainardi [35].

[12]Himoun,N., Abbaour,K., Cherruault,Y. 1999,New results of convergence of Adomian's method,Kybernetes 28 (4-5) 423-429.

[13] Kiryakova, V. 1994, Generalized Fractional Calculus and Applications,Pitman Research Notes in Math.,no.301,Longman, Harlov.

[14] Koeller, R. C. 1984, Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity, Trans.ASME-J.Appl.Mech.,vol.51,299-307.

[15] Kurnaz, A., Oturanç, G., Kiriş,M.E. 2005, *n* dimensional differential transformation method for solving PDEs, İnternational journal of Computer Mathematics (in press).

[16] Kurnaz, A., Oturanç, G., 2005, The differential transform approximation for the system of ordinary differential equation, İnternational journal of Computer Mathematics (in press).

[17] Mbodje, B., Montseny, G. 1995, Boundary fractional derivative control of the wave equations,IEEE Trans.Aut.Control,vol.40,378-382.

[18] Miller, K. S. ,Ross, B. 1993,An Introdiction to the Fractional C alculus and Fractional Differential Equations ,John Wiley & Sons Inc.,New York.

[19] Momani, S., Khaled, K.A. 2005, Numerical solutions for systems of fractional differential equations by the decomposition methodApplied Mathematics and Computation, Volume 162, Issue 3, 1351-1365.

[20] Oldham, K. B. ,Spanier, J. 1974,The Fractional Calculus,Academic Press,New York-London.

[21] Podlubny, I. 1993, Fractional derivatives: a new stage in process modelling and control ,4th International DAAAM Symposium,Brno,Czech Republic,September 16-18,263-264.

[22] Podlubny, I., Kostial, I. 1993, Fractional derivative based process models and their applications, 4th International DAAAM Symposium,Brno,Czech Republic,September 16-18,265-266.

[23] Podlubny, I. 1999, Fractional Differential Equations, Academic Pres.

[24] Ray S.S., Bera R.K. 2004, An approximate solution of a nonlinear fractional equation by adomian decomposition method , Applied mathematics and Computation ,Volume 165, Issue 2, 15 June 2005, Pages 473-483.

[25] Riewe, F. 1997, Mechanics with fractional derivatives ,Phys. Rev. E,vol.55, no. 3, 3581-3592.

[26] Rogers, L. 1983, Operators and fractional derivatives for viscoelastic constituitive equations, J. of Rheology, vol.27,351-372.

[27] Ross, B.1974, Fractional calculus and its Alications ,proceedings of the international conference at the university of New Haven, June, Springer-Verlag, New York.

[28] Ross, B. Fractional calculus:an historical apologia for the development of a calculus using differentiation and antidifferentiation of non integral orders, Mathematics Magazine, vol. 50. no.3, may.115-122