T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

k-FİBONACCİ MATRİSLERİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Raziye SOLAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları
Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı

Konya, 2006

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

k-FİBONACCİ MATRİSLERİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Raziye SOLAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları
Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı

Bu tez 22.09.2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hasan ŞENAY Yrd. Doç. Dr. Cevdet ÇETİN Yrd. Doç. Dr. E. Gökçen ALPTEKİN
(Danışman)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

k-FİBONACCİ MATRİSLERİ
ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Raziye SOLAK

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları
Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Cevdet ÇETİN

2006, 32 sayfa

Jüri:
Prof. Dr. Hasan ŞENAY
Yrd. Doç. Dr. Cevdet ÇETİN
Yrd. Doç. Dr. E. Gökçen ALPTEKİN

Bu çalışmada genelleştirilmiş k- Fibonacci sayıları ile genelleştirilmiş k-Fibonacci matrislerinin tanımları verilmiştir. İlk olarak k-Fibonacci matrisinin bazı özel matrisler ile ayrışımı verilmiş ve bu ayrışımlardan yararlanarak k-Fibonacci matrisinin tersi hesaplanmıştır. Daha sonra k-simetrik Fibonacci matrisi tanımlanmış ve k-simetrik Fibonacci matrisinin Cholesky ayrışımı verilmiştir. Ayrıca k-simetrik Fibonacci matrisinin özdeğeri için sınırlar elde edilmiştir. Simetrik Fibonacci matrisinin özdeğerler toplamı ve Fibonacci matrisinin Euclidean normu hesaplanarak k-Fibonacci matrisinin Euclidean normu üzerinde durulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci sayısı, Lucas sayısı, Fibonacci matrisi, k-Fibonacci matrisi, k-simetrik Fibonacci matrisi, Cholesky ayrışımı, matris normu, özdeğer

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

AN INVESTIGATION
ON THE k-FIBONACCI MATRICES

Raziye SOLAK

Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics Education

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Cevdet ÇETİN

2006, 32 pages

Jury:
Prof. Dr. Hasan ŞENAY
Assist. Prof. Dr. Cevdet ÇETİN
Assist. Prof. Dr. E. Gökçen ALPTEKİN

In this study, definitions of the generalized k-Fibonacci numbers and generalized k-Fibonacci matrices are given. First factorization of k-Fibonacci matrix is given with some special matrices and calculated inverse of k-Fibonacci matrix by this factorizations.Afterwards, we defined k-symmetric Fibonacci matrix and Cholesky factorization of k-symmetric Fibonacci matrix is given.Then bounds are found for eigenvalues of k-symmetric Fibonacci matrix. The Euclidean norm of k-Fibonacci matrix that are calculated by the additional of symmetric Fibonacci matrix's eigenvalues and the Euclidean norm of Fibonacci matrix is closely mentioned.

Key Words: Fibonacci number, Lucas number, k-Fibonacci matrix, k-symmetric Fibonacci matrix, Cholesky Factorization, matrix norm, eigenvalue.

ÖNSÖZ

Günümüzde teknolojinin hızla ilerlemesiyle birlikte matematik ile diğer bilimler arasında yakınlaşma olmaktadır. Bu yakınlaşmada matris teorisinin ayrı bir önemi vardır. Biz bu çalışmamızda daha önce tanımlanmış olan Fibonacci ve k-Fibonacci sayılarından yola çıkarak k-Fibonacci matrisini inceledik.

Çalışmamız üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Fibonacci ve Pascal matrisleri, Cholesky ayrışımının tanımı, matris normunun tanımı ve Euclidean normu verilmiştir.

İkinci bölümde k-Fibonacci, k-Lucas sayıları, Vandermonde matrisi ve genelleştirilmiş Binet formülü verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise k-Fibonacci matrisi ve bazı özel matrisler ile ayrışımı verilip bu ayrışımlardan yararlanarak k-Fibonacci matrisinin tersi hesaplanmıştır. Daha sonra k-Simetrik Fibonacci matrisinin tanımından faydalanarak Cholesky ayrışımı verilmiştir. Ayrıca k-Simetrik Fibonacci matrisinin özdeğerleri için sınırlar elde edilmiştir. Simetrik Fibonacci matrisinin özdeğerler toplamı ve Fibonacci matrisinin Euclidean normu hesaplanarak k-Fibonacci matrisinin Euclidean normu üzerinde durulmuştur.

Bu tezin oluşmasında büyük katkılarından dolayı Yrd. Doç. Dr. E. Gökçen ALPTEKİN 'e, danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Cevdet ÇETİN 'e teşekkür ederim.

Ayrıca tüm öğrenim hayatım boyunca en iyi şekilde yetişmem için maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve tez çalışmam boyunca hep yanımda olan değerli eşime minnetlerimi sunarım.

14 Haziran 2006 Raziye SOLAK

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....iii

ABSTRACT.....iv

ÖNSÖZ.....v

1. ÖNBİLGİLER.....1

2. k-FİBONACCİ ve k-LUCAS SAYILARI.....5

3. k-FİBONACCİ MATRİSLERİ.....11

4. KAYNAKLAR.....32

1. ÖNBİLGİLER

Tanım 1.1. $n \geq 2$ tamsayısı için

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (F_0 = 0\ ,\ \ F_1 = 1)$$

rekürans formülü ile tanımlanan sayıya Fibonacci sayısı denir.

Bu sayılar Pisa'lı Leonardo Fibonacci (1170 – 1250) tarafından tanımlanmıştır. α ve β, $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri olmak üzere, Fibonacci sayısının Binet formülü

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{1.1}$$

dir. Fibonacci sayılarının aldığı değerler aşağıdaki tablo ile verilebilir.

n	…	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	…
F_n	…	-8	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	…

Bu tablodan $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ olduğu açıktır. Aynı zamanda $n \in Z^+$ için ilk n tane Fibonacci sayısının karelerinin toplamı,

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$$

ve

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} = F_{n+1} \tag{1.2}$$

dir.[6]

Fibonacci sayılarının bazı özellikleri aşağıdaki şekildedir.[6]

1. $n \in Z^+$ için $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

2. $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$

3. $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$

4. $\sum_{k=2}^{n} F_k F_{k-1} = \frac{F_{2n-1} + F_n F_{n-1} - 1}{2}$

5. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} F_k = (-1)^{n+1} F_{n-1} + 1$

Tanım 1.2. $F_0 = 0$ ve F_n, n. Fibonacci sayısı olmak üzere $n \geq 1$ tamsayısı için L_n, n. Lucas sayısı

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

dir.

$\{L_n\}$ Lucas dizisi,

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, …

şeklindedir.[9]

Tanım 1.3. ij- elemanı,

$$p_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1} & , \quad i \geq j \\ 0 & , \quad i < j \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ tipindeki $\mathcal{P}_n = (p_{ij})$ matrisine Pascal matrisi denir. [1]

Örneğin, 5×5 tipindeki $\mathcal{P}_5$ Pascal matrisi,

$$\mathcal{P}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Pascal matrisinin ayrışımları ve simetrik Pascal matrisinin Cholesky ayrışımı Brawer ve Pirovino tarafından verilmiştir. [1] Aşağıda tanımı verilen matris içinde benzer çalışmalar yapılmıştır.

Tanım 1.4. F_n, n. Fibonacci sayısı olmak üzere , ij – elemanı,

$$f_{ij} = \begin{cases} F_{i-j+1} & , \quad i-j+1 \geq 0 \\ 0 & , \quad i-j+1 < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ tipindeki $\mathcal{F}_n = (f_{ij})$ matrisine Fibonacci matrisi denir. [4]

Örneğin, 5×5 tipindeki $\mathcal{F}_5$ Fibonacci matrisi,

$$\mathcal{F}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 1.5. Tüm $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi M_n olsun. $L \in M_n$ köşegen elemanları negatif olmayan alt üçgen bir matris olmak üzere, her $A \in M_n$ matrisi $A = LL^*$ şeklinde yazılabilir. Buna A matrisinin Cholesky ayrışımı denir. $L \in M_n$ tekil olmayan bir matris ise bu ayrışım tektir.[2]

Tanım 1.6. F bir cisim, R reel sayılar kümesi ve $M_n(F)$ $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi olmak üzere

$$M_n : M_n(F) \to R^+$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm aşağıdaki şartları sağlarsa o zaman bu dönüşüme matris normu denir ve $A \in M_n(F)$ için $M_n(A) = \|A\|$ şeklinde gösterilir.

$N_1)$ $A \in M_n(F)$ için $A \neq 0$ ise $\|A\| > 0$ ve $A = 0 \Leftrightarrow \|A\| = 0$

$N_2)$ $A \in M_n(F)$ ve $\alpha \in F$ için $\|\alpha A\| = |\alpha| . \|A\|$

$N_3)$ $A, B \in M_n(F)$ için $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$N_4)$ $A, B \in M_n(F)$ için $\|AB\| \leq \|A\| . \|B\|$

Eğer sadece N_1, N_2 ve N_3 aksiyomları sağlanırsa, o zaman bu norma genelleştirilmiş matris normu denir. Eğer N_1, N_2 , N_3 ve N_4 aksiyomları sağlanırsa buna da matris normu denir.

$A=(a_{ij})$ $n\times n$ tipinde bir matris olmak üzere Tanım 1.6. daki aksiyomları sağlayan Euclidean (Frobenius veya Schur) Normu

$$\|A\|_E=\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

şeklindedir. [2]

2. k-FİBONACCİ ve k-LUCAS SAYILARI

$k \geq 2$ pozitif tamsayısı için k-Fibonacci dizisi olarak adlandırılan genelleştirilmiş Fibonacci dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.1. $k \geq 2$ pozitif tamsayısı ve $g(k)_n$ *n.* k-Fibonacci sayısını göstermek üzere

$$g(k)_1 = \cdots = g(k)_{k-2} = 0$$

$$g(k)_{k-1} = g(k)_k = 1$$

ve $n > k \geq 2$ için

$$g(k)_n = g(k)_{n-1} + g(k)_{n-2} + \cdots + g(k)_{n-k}$$

olacak şekilde $\{g(k)_n\}$ dizisine k-Fibonacci dizisi denir. [5]

k-Fibonacci dizisinin tanımından anlaşılacağı üzere

$$g(k)_{k+1} = g(k)_k + g(k)_{k-1} = 1+1 = 2$$

$$g(k)_{k+2} = g(k)_{k+1} + g(k)_k + g(k)_{k-1} = 2+1+1 = 2^2$$

$$g(k)_{k+3} = g(k)_{k+2} + g(k)_{k+1} + g(k)_k + g(k)_{k-1} = 2^2 + 2 + 1 + 1 = 2^3$$

$$\vdots$$

$$g(k)_{2k-2} = g(k)_{2k-3} + \cdots + g(k)_k + g(k)_{k-1} = 2^{k-3} + \cdots + 2 + 1 + 1 = 2^{k-2}$$

$$g(k)_{2k-1} = g(k)_{2k-2} + \cdots + g(k)_k + g(k)_{k-1} = 2^{k-2} + 2^{k-3} + \cdots + 2 + 1 + 1 = 2^{k-1}$$

şeklindedir. Buradan $j = k, k+1, \ldots, 2k-1$ için,

$$g(k)_j = 2^{j-k}$$

elde edilir.[9]

Örneğin ,

k=2 için $\{g(2)_n\}$ dizisi ön bilgiler bölümünde tanımlanan $\{F_n\}$ Fibonacci dizisine eşit olur.

k=3 için $g(3)_1 = 0$, $g(3)_2 = g(3)_3 = 1$ ve 3- Fibonacci dizisi

0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, …

şeklindedir.

$k=4$ için $g(4)_1 = g(4)_2 = 0$, $g(4)_3 = g(4)_4 = 1$ ve 4- Fibonacci dizisi

0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, …

şeklindedir.

E, $1\times(k-1)$ tipinde bir matris ve I_n $n\times n$ tipinde birim matris olsun.

$k \geq 2$ ve $n > k$ için

$$g(k)_n = g(k)_{n-1} + g(k)_{n-2} + \cdots + g(k)_{n-k}$$

rekürans bağıntısı,

$$Q_k = \begin{bmatrix} 0 & I_{k-1} \\ 1 & E \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Q_k, $k\times k$ tipinde bir matris olmak üzere

$$\begin{bmatrix} g(k)_{n+1} \\ g(k)_{n+2} \\ \vdots \\ g(k)_{n+k} \end{bmatrix} = Q_k \begin{bmatrix} g(k)_n \\ g(k)_{n+1} \\ \vdots \\ g(k)_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır.

Aynı zamanda bu ifade

$$\begin{bmatrix} g(k)_{n+1} \\ g(k)_{n+2} \\ \vdots \\ g(k)_{n+k} \end{bmatrix} = Q_k^n \begin{bmatrix} g(k)_1 \\ g(k)_2 \\ \vdots \\ g(k)_k \end{bmatrix}$$

şeklinde de yazılabilir.

Tanım 2.2. $g(k)_0 = 0$ ve $g(k)_n$ $n.$ k-Fibonacci sayısı olmak üzere, $k \geq 2$ pozitif tamsayısı için

$$l(k)_n = g(k)_{n-1} + g(k)_{n+k-1}$$

şeklinde tanımlanan $l(k)_n$'e $n.$ k-Lucas sayısı denir. [6]

Örneğin,

k=2 için $l(2)_n = L_n$ elde edilir.

k=3 için 3- Lucas dizisi

1, 2, 5, 8, 15, 28, 51, 94, 173, 318, ...

dir.

k=5 için 5- Lucas dizisi

1, 2, 4, 8, 17, 32, 63, 124, 244, 480, 943, …

şeklindedir.

$\{g(k)_n\}$ genelleştirilmiş k- Fibonacci dizisi , $n = 1, 2, \ldots$ için

$$g_n = g(k)_{n+k-2}$$

ve

$$G_k = \{g_1, g_2, g_3, \ldots\}$$

olsun.

Örneğin $k = 2$ ise

$$G_2 = \{1, 1, 2, 3, \ldots\}$$

ve $k \geq 3$ için

$$G_k = \{1, 1, 2, 4, \ldots\}$$

şeklindedir.

G_k dizisi, $k \geq 2$ için $g_1 = g_2 = 1$ olacağından (2.1) deki Q_k matrisi

$$Q_k = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & g_1 \\ g_1 & g_1 & \cdots & g_1 & g_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Buradan, $i = 1, 2, \ldots, k$ için

$$g_{i,2}^{\dagger} = g_{n-(k-i)} + g_{n-(k-(i-1))}$$

$$g_{i,3}^{\dagger} = g_{n-(k-i)} + g_{n-(k-(i-1))} + g_{n-(k-(i-2))}$$

$$\vdots$$

$$g_{i,k-1}^{\dagger} = g_{n-(k-i)} + g_{n-(k-(i-1))} + g_{n-(k-(i-2))} + \cdots + g_{n-(k-(i-(k-2)))}$$

olmak üzere

$$Q_k^n = \begin{bmatrix} g_{n-(k-1)} & g_{1,2}^{\dagger} & g_{1,3}^{\dagger} & \cdots & g_{1,k-1}^{\dagger} & g_{n-(k-2)} \\ g_{n-(k-2)} & g_{2,2}^{\dagger} & g_{2,3}^{\dagger} & \cdots & g_{2,k-1}^{\dagger} & g_{n-(k-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ g_{n-1} & g_{k-1,2}^{\dagger} & g_{k-1,3}^{\dagger} & \cdots & g_{k-1,k-1}^{\dagger} & g_n \\ g_n & g_{k,2}^{\dagger} & g_{k,3}^{\dagger} & \cdots & g_{k,k-1}^{\dagger} & g_{n+1} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

yazılabilir.

$$Q_k^n \,.\, Q_k^m = Q_k^{m+n}$$

ve

$$g_{n+m} = \left(Q_k^{n+m}\right)_{k,1}$$

olduğundan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.1. $G_k = \{g_1, g_2, g_3, \ldots\}$ olsun n ve m pozitif tamsayılar olmak üzere

$$\begin{aligned} g_{n+m} &= g_n g_{m-(k-1)} + (g_n + g_{n-1}) g_{m-(k-2)} \\ &\quad + (g_n + g_{n-1} + g_{n-2}) g_{m-(k-3)} + \cdots \\ &\quad + (g_n + g_{n-1} + g_{n-2} + \cdots + g_{n-(k-2)}) g_{m-1} + g_{n+1} g_m \end{aligned}$$

dir. [9]

Dikkat edilecek olursa

$$g_{n+m} = \left(Q_k^{n+m}\right)_{k,1} = \left(Q_k^{n+m}\right)_{k-1,k}$$

olduğundan

$$G_k = \{g_1, g_2, g_3, \ldots\}$$

ve n , m pozitif tamsayıları için

$$\begin{aligned} g_{n+m} &= g_{n-1} g_{m-(k-2)} + (g_{n-1} + g_{n-2}) g_{m-(k-3)} \\ &\quad + (g_{n-1} + g_{n-2} + g_{n-3}) g_{m-(k-4)} + \cdots \\ &\quad + (g_{n-1} + g_{n-2} + g_{n-3} + \cdots + g_{n-(k-1)}) g_m + g_n g_{m+1} \end{aligned}$$

sonucuna varılır.

Q_k k- genelleştirilmiş Fibonacci matrisinin karakteristik polinomu

$$f(\lambda) = \lambda^k - \lambda^{k-1} - \cdots - \lambda - 1$$

ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ Q_k'nın özdeğerleri olsun. $k \times k$ tipinde Λ Vandermonde matrisi

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere $V = \Lambda^T$ şeklinde tanımlansın.

$$d_i = \begin{bmatrix} \lambda_1^{n+i-1} \\ \lambda_2^{n+i-1} \\ \vdots \\ \lambda_k^{n+i-1} \end{bmatrix}$$

ve $V(i)_j$, V nin j. sütununun d_i ile yer değiştirmesi ile elde edilen $k \times k$ tipinde bir matris olsun. Buradan genelleştirilmiş Binet Formülünü elde edebiliriz.

Teorem 2.2. $\{g(k)_n\}$ k- genelleştirilmiş Fibonacci dizisi olsun. $g_n = g(k)_{n+k-2}$ olmak üzere

$$g_n = \frac{\det\left(V(k)_1\right)}{\det\left(V\right)}$$

dir.[9]

İspat: Q_k' nın özdeğerleri farklı olduğu için Q_k köşegenleştirilebilir. $\mathcal{D}$ köşegen elemanları $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ olan $k \times k$ tipindeki köşegen bir matris olsun. Buradan

$$Q_k \Lambda = \Lambda \mathcal{D}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Λ, Vandermonde matrisinin tersi olduğu için

$$\Lambda^{-1} Q_k \Lambda = \mathcal{D}$$

olur. Böylece Q_k matrisi $\mathcal{D}$ matrisine benzerdir. Bu nedenle

$$Q_k^n \Lambda = \Lambda \mathcal{D}^n$$

elde edilir.

$Q_k^n = \left[q_{ij} \right]_{k\times k}$ ifadesinden

$$\begin{aligned} q_{i1} + q_{i2}\lambda_1 + \cdots + q_{ik}\lambda_1^{k-1} &= \lambda_1^{n+i-1} \\ q_{i1} + q_{i2}\lambda_2 + \cdots + q_{ik}\lambda_2^{k-1} &= \lambda_2^{n+i-1} \\ \vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\ q_{i1} + q_{i2}\lambda_k + \cdots + q_{ik}\lambda_k^{k-1} &= \lambda_k^{n+i-1} \end{aligned} \tag{2.3}$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

(2.3) deki Lineer denklem sisteminin çözümünden her $j = 1, 2, \ldots, k$ için

$$q_{ij} = \frac{\det\left(V(i)_j\right)}{\det\left(V\right)}$$

olur. (2.2) den

$$q_{k1} = g_n = \frac{\det\left(V(k)_1\right)}{\det\left(V\right)}$$

bulunup ispat tamamlanır.

Eğer $k = 2$ alınırsa (1.1) deki Fibonacci dizisinin Binet formülü elde edilir.

3. k- FİBONACCİ MATRİSLERİ

Tanım 3.1. $g_n = g(k)_{n+k-2}$ olmak üzere *ij*- elemanı,

$$f(k)_{ij} = \begin{cases} g_{i-j+1} & , \quad i-j+1 \geq 0 \\ 0 & , \quad i-j+1 < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ tipindeki $\mathcal{F}(k)_n = [f(k)_{ij}]$ matrisine k- Fibonacci matrisi denir. [5]

Örnek 3.1. 6×6 tipindeki 2- Fibonacci matrisi

$$\mathcal{F}(2)_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup Tanım 1.4. de verilen Fibonacci matrisi elde edilir.

Örnek 3.2. 6×6 tipindeki 3- Fibonacci matrisi

$$\mathcal{F}(3)_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 13 & 7 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ve 6×6 tipindeki 4- Fibonacci matrisi

$$\mathcal{F}(4)_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 15 & 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$\mathcal{F}(k)_n$ k- Fibonacci matrisinin ayrışımı iki farklı yolla yapılır.

Bu ayrışımlardan ilki aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.2. I_n, $n\times n$ tipinde birim matris, L_k

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olan $k\times k$ tipinde alt üçgen matris, $\overline{\mathcal{F}(k)_n}$, G_k $n\times n$ tipinde matrisler ve S_ℓ

$$\ell = 1, 2, \ldots \text{ için } S_\ell = L_{k+1} \oplus I_\ell$$

işlemi ile tanımlanan bir matris olmak üzere,

$$\overline{\mathcal{F}(k)}_n = [1] \oplus \mathcal{F}(k)_{n-1}$$

$$G_1 = I_n \ , \ G_2 = I_{n-2} \oplus L_2 \ \ , \ \ G_3 = I_{n-3} \oplus L_3 \ , \ldots , \ G_k = I_{n-k} \oplus L_k$$

$$G_{k+1} = I_{n-k-1} \oplus L_{k+1}$$

$$k+2 \le \ell \le n \text{ için } G_\ell = I_{n-\ell} \oplus S_{\ell-k-1}$$

$$S_0 = L_{k+1}$$

ve

$$G_n = S_{n-k-1}$$

dir.

$\ell = k+1$ için

$$\overline{\mathcal{F}(k)}_{k+1} S_0 = \mathcal{F}(k)_{k+1}$$

olduğundan aşağıdaki Lemmayı verebiliriz. [5]

Lemma 3.1. $k+1 \le \ell \le n$ için

$$\overline{\mathcal{F}(k)}_\ell S_{\ell-k-1} = \mathcal{F}(k)_\ell$$

dir. [5]

Örnek 3.3. $k=3$ ve $\ell=6$ için

$$\overline{\mathscr{F}(3)}_6 S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathscr{F}(3)}_6 S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 13 & 7 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathscr{F}(3)}_6 S_2 = \mathscr{F}(3)_6$$

olur.

Örnek 3.4. $k=4$ ve $\ell=6$ için

$$\overline{\mathscr{F}(4)}_6 S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathscr{F}(4)}_6 S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 15 & 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{\mathscr{F}(4)}_6 S_1 = \mathscr{F}(4)_6$$

olur.

Lemma 3.1. in bir sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1. $1 \le \ell \le n$ için G_ℓ matrisleri ile $n \times n$ tipindeki $\mathcal{F}(k)_n$ k- Fibonacci matrisi,

$$\mathcal{F}(k)_n = G_1 G_2 \dots G_n$$

şeklinde çarpanlanabilir. [5]

Örnek 3.5. 5×5 tipindeki

$$\mathcal{F}(3)_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3- Fibonacci matrisinin ayrışımı,

$$\mathcal{F}(3)_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I_5 . (I_3 \oplus L_2) . (I_2 \oplus L_3) . (I_1 \oplus L_4) . (L_4 \oplus I_1)$$

$$= G_1 . G_2 . G_3 . G_4 . G_5$$

dir.

Örnek 3.6. 5×5 tipindeki

$$\mathcal{F}(4)_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4- Fibonacci matrisinin ayrışımı,

$$\mathcal{F}(4)_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I_5 . (I_3 \oplus L_2) . (I_2 \oplus L_3) . (I_1 \oplus L_4) . L_5$$

$$= G_1 . G_2 . G_3 . G_4 . G_5$$

dir.

$\mathcal{F}(k)_n$ k- Fibonacci matrisinin bir diğer ayrışımı ise aşağıda tanımı verilen $C(k)_n$ matrisleri ile yapılabilir. *ij*- elemanı,

$$c(k)_{ij} = \begin{cases} g_i & , \quad j = 1 \quad \text{ise,} \\ 1 & , \quad i = j \quad \text{ise,} \\ 0 & , \quad \text{aksi} \quad \text{takdirde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ tipindeki $C(k)_n = [c(k)_{ij}]$ matrisi

$$C(k)_n = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ g_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Teorem 3.2. $\mathcal{F}(k)_n$ ve $C(k)_n$ $n \times n$ tipindeki matrisler olmak üzere, $n \geq 2$ için

$$\mathcal{F}(k)_n = C(k)_n \left(I_1 \oplus C(k)_{n-1}\right).\left(I_2 \oplus C(k)_{n-2}\right)\ldots\left(I_{n-2} \oplus C(k)_2\right)$$

dir. [5]

Örnek 3.7. 4×4 tipindeki

$$\mathcal{F}(3)_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3- Fibonacci matrisinin ayrışımı,

$$\mathcal{F}(3)_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= C(3)_4.\left(I_1 \oplus C(3)_3\right).\left(I_2 \oplus C(3)_2\right)$$

dir**.**

Örnek 3.8. 5×5 tipindeki

$$\mathscr{F}(4)_5=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\2&1&1&0&0\\4&2&1&1&0\\8&4&2&1&1\end{bmatrix}$$

4- Fibonacci matrisinin ayrışımı,

$$\mathscr{F}(4)_5=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\2&0&1&0&0\\4&0&0&1&0\\8&0&0&0&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&2&0&1&0\\0&4&0&0&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&2&0&1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$=C(4)_5.\left(I_1\oplus C(4)_4\right).\left(I_2\oplus C(4)_3\right).\left(I_3\oplus C(4)_2\right)$$

olur.

L_k ve $C(k)_n$ matrislerinin tersi

$$L_k^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&\cdots&0\\-1&1&0&0&\cdots&0\\-1&0&1&0&\cdots&0\\-1&0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\-1&0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}$$

ve

$$C(k)_n^{-1}=\begin{bmatrix}g_1&0&\cdots&0\\-g_2&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-g_n&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

olduğu için $\mathscr{F}(k)_n$ k- Fibonacci matrisinin tersi aşağıdaki sonuç yardımıyla bulunabilir.

Sonuç 3.1. $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ için $G_i^{-1} = H_i$ ve $\mathcal{F}(k)_n$, $C(k)_n$, G_n, H_n $n \times n$ tipindeki matrisler olmak üzere,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(k)_n^{-1} &= H_n H_{n-1} \ldots H_2 H_1 \\ &= \left(I_{n-2} \oplus C(k)_2^{-1}\right) \ldots \left(I_1 \oplus C(k)_{n-1}^{-1}\right).C(k)_n^{-1}\end{aligned}$$

dir. [5]

Örnek 3.9. 4×4 tipindeki $\mathcal{F}(3)_4^{-1}$ 3- Fibonacci matrisinin tersini Sonuç 3.1. den

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(3)_4^{-1} &= G_4^{-1}.G_3^{-1}.G_2^{-1}.G_1^{-1} = H_4.H_3.H_2.H_1 \\ &= \left(I_2 \oplus C(3)_2^{-1}\right).\left(I_1 \oplus C(3)_3^{-1}\right).C(3)_4^{-1}\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}(3)_4^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F}(3)_4^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3.10. 5×5 tipindeki $\mathcal{F}(4)_5^{-1}$ 4- Fibonacci matrisinin tersini Sonuç 3.1. yardımıyla,

$$\mathcal{F}(4)_5^{-1} = G_5^{-1}.G_4^{-1}.G_3^{-1}.G_2^{-1}.G_1^{-1} = H_5.H_4.H_3.H_2.H_1$$
$$= \left(I_3 \oplus C(4)_2^{-1}\right).\left(I_2 \oplus C(4)_3^{-1}\right).\left(I_1 \oplus C(4)_4^{-1}\right).C(4)_5^{-1}$$

$$\mathcal{F}(4)_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F}(4)_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde ederiz.

Örnek 3.11. 5×5 tipindeki $\mathcal{F}(3)_5^{-1}$ 3- Fibonacci matrisinin tersi Sonuç 3.1. den faydalanarak,

$$\mathcal{F}(3)_5^{-1} = G_5^{-1}.G_4^{-1}.G_3^{-1}.G_2^{-1}.G_1^{-1} = H_5.H_4.H_3.H_2.H_1$$
$$= \left(I_3 \oplus C(3)_2^{-1}\right).\left(I_2 \oplus C(3)_3^{-1}\right).\left(I_1 \oplus C(3)_4^{-1}\right).C(3)_5^{-1}$$

$$\mathcal{F}(3)_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F}(3)_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.1. den ij – elemanı,

$$\tilde{f}(k)_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ -1 & , \quad i-k \le j \le i-1 \\ 0 & , \quad \text{aksi takdirde} \end{cases} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ tipindeki $\mathcal{F}(k)_n$ k- Fibonacci matrisinin tersi

$$\mathcal{F}(k)_n^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ -1 & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan i= 2, 3, … , k+1 için $\tilde{f}(k)_{i1} = -1$ olduğu görülmektedir.

Tanım 3.3. $j \le 0$ için $q(k)_{ij} = 0$ olmak üzere ij- elemanı,

$$q(k)_{ij} = q(k)_{ji} = \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{k} q(k)_{i,i-\ell} + g_1 & , \quad i = j \quad \text{ise} \\ \sum_{\ell=1}^{k} q(k)_{i,j-\ell} & , \quad i+1 \le j \quad \text{ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $n \times n$ tipindeki $\mathcal{A}(k)_n = [q(k)_{ij}]_n$ matrisine k-simetrik Fibonacci matrisi denir. [5]

$\mathcal{A}(k)_n$ k-simetrik Fibonacci matrisinin tanımından

$$q(k)_{ii} = \sum_{\ell=1}^{k} q(k)_{i,i-\ell}$$

alırsak matris sıfır matrisi olacağından

$$q(k)_{ii} = \sum_{\ell=1}^{k} q(k)_{i,i-\ell} + g_1$$

şeklinde alırız.

$j \ge 1$ için

$$q(k)_{1j} = q(k)_{j1} = g_j$$

dir. $j \ge 2$ için

$$q(k)_{2j} = q(k)_{j2} = g_{j-1}g_1 + g_j g_2$$

ve

$$q(k)_{3j} = g_{j-2}g_1 + g_{j-1}g_2 + g_j g_3$$

şeklindedir. Bu şekilde i üzerinden indüksiyonla $i \le j$ için $g_\ell = g(k)_{\ell+k-2}$ olmak üzere

$$q(k)_{ij} = g_i g_j + g_{i-1}g_{j-1} + \cdots + g_2 g_{j-i+2} + g_1 g_{j-i+1}$$

elde edilir. Özellikle

$$q(k)_{ii} = g_i g_i + g_{i-1}g_{i-1} + \cdots + g_1 g_1 = \sum_{\ell=1}^{i} g_\ell^2$$

olur.

Örnek 3.12. 6×6 tipindeki 3- simetrik Fibonacci matrisi Tanım 3.3. den

$$\mathscr{L}(3)_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 7 & 13 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 11 & 20 \\ 2 & 3 & 6 & 11 & 20 & 37 \\ 4 & 6 & 11 & 22 & 39 & 72 \\ 7 & 11 & 20 & 39 & 71 & 130 \\ 13 & 20 & 37 & 72 & 130 & 240 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Benzer olarak 5×5 tipindeki 4-simetrik Fibonacci matrisi

$$\mathscr{L}(4)_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 12 \\ 2 & 3 & 6 & 11 & 22 \\ 4 & 6 & 11 & 22 & 43 \\ 8 & 12 & 22 & 43 & 86 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$\mathscr{L}(k)_n$ k- simetrik Fibonacci matrisinin tanımından yararlanarak i üzerinden indüksiyonla aşağıdaki Lemma verilebilir.

Lemma 3.2. $i \le j$ için

$$q(k)_{ij} = \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{i-1} q(k)_{i-\ell,j} + g_{j-(i-1)} & , \quad 1 \le i \le k \quad \text{ise} \\ \sum_{\ell=1}^{k} q(k)_{i-\ell,j} + g_{j-(i-1)} & , \quad i \ge k+1 \quad \text{ise} \end{cases}$$

dir. [5]

Buradan $\mathscr{L}(k)_n$ k- simetrik Fibonacci matrisinin ayrışımını bulmak için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.3. $n \geq 1$ pozitif bir tamsayı, $\mathscr{F}(k)_n$, $\mathscr{L}(k)_n$, H_n $n \times n$ tipindeki matrisler olmak üzere

$$H_n H_{n-1} \cdots H_2 H_1 \mathscr{L}(k)_n = \mathscr{F}(k)_n^{\mathrm{T}}$$

ve $\mathscr{L}(k)_n$ k- simetrik Fibonacci matrisinin Cholesky ayrışımı

$$\mathscr{L}(k)_n = \mathscr{F}(k)_n . \mathscr{F}(k)_n^{\mathrm{T}}$$

dir. [5]

İspat. Sonuç 3.1. den

$$H_n H_{n-1} \ldots H_2 H_1 = \mathscr{F}(k)_n^{-1}$$

dir. Buradan

$$\mathscr{F}(k)_n^{-1} . \mathscr{L}(k)_n = \mathscr{F}(k)_n^{\mathrm{T}}$$

elde edilir.

$$X = [x_{ij}] = \mathscr{F}(k)_n^{-1} . \mathscr{L}(k)_n$$

olsun. (3.1) ve Lemma 3.2. den $1 \leq i \leq k$ için

$$\begin{aligned} x_{ij} &= q(k)_{ij} - q(k)_{i-1,j} - q(k)_{i-2,j} - \cdots - q(k)_{1,j} \\ &= g_{j-i+1} \end{aligned}$$

ve $i \geq k+1$ için

$$\begin{aligned} x_{ij} &= q(k)_{ij} - q(k)_{i-1,j} - q(k)_{i-2,j} - \cdots - q(k)_{i-k,j} \\ &= g_{j-i+1} \end{aligned}$$

bulunur. Bu nedenle

$$\mathscr{F}(k)_n^{-1} . \mathscr{L}(k)_n = \mathscr{F}(k)_{\mathrm{n}}^{\mathrm{T}}$$

eşitliğinden $\mathscr{L}(k)_n$ ' nin Cholesky ayrışımı

$$\mathscr{L}(k)_n = \mathscr{F}(k)_n . \mathscr{F}(k)_n^{\mathrm{T}}$$

şeklindedir.

Örnek 3.13. 5×5 tipindeki 4-simetrik Fibonacci matrisinin

$$\mathscr{L}(4)_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 12 \\ 2 & 3 & 6 & 11 & 22 \\ 4 & 6 & 11 & 22 & 43 \\ 8 & 12 & 22 & 43 & 86 \end{bmatrix}$$

olduğunu biliyoruz. Bu matrisin Cholesky ayrışımı

$$\mathscr{L}(4)_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{L}(4)_5 = \mathscr{F}(4)_5 . \mathscr{F}(4)_5{}^{\mathrm{T}}$$

şeklindedir. Benzer olarak 5×5 tipindeki 3-simetrik Fibonacci matrisi

$$\mathscr{L}(3)_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 11 \\ 2 & 3 & 6 & 11 & 20 \\ 4 & 6 & 11 & 22 & 39 \\ 7 & 11 & 20 & 39 & 71 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup, bu matrisin Cholesky ayrışımı

$$\mathscr{L}(3)_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathscr{L}(3)_5 = \mathscr{F}(3)_5 . \mathscr{F}(3)_5{}^{\mathrm{T}}$$

dir.

Teorem 3.1. ve Teorem 3.3. den $\mathscr{L}(k)_n$ k- simetrik Fibonacci matrisinin bir diğer ayrışımı,

$$\mathscr{L}(k)_n = G_1 G_2 \dots G_n G_n^{\mathrm{T}} \dots G_2^{\mathrm{T}} G_1$$

olarak yazılır.

Bununla beraber Teorem 3.3. den

$$\mathscr{L}(k)_n^{-1} = \left[\tilde{q}(k)_{ij}\right] = \left(\mathscr{F}(k)_n \times \mathscr{F}(k)_n^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

yazılabilir.

Buradan i= 1, 2, … , $n-k$ ve $j-i \le k$ için

$$\tilde{q}(k)_{ii} = \begin{cases} k+1 & , \quad i = 1,2,\ldots,n-k, \\ n+1-i & , \quad i = n+1-k,\ldots,n \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\tilde{q}(k)_{ij} = \begin{cases} k-(j-i+1) & , \quad j-i \le k \\ 0 & , \quad j-i \ge k+1 \end{cases}$$

yazılır. Aynı zamanda $i = n-k+1,\ldots,n-1$, $j = n-k+2,\ldots,n$ ve $i+1 \le j$ için

$$\tilde{q}(k)_{ij} = n-1-j$$

yazılır.

Sonuç 3.2. Eğer j tek sayı ise,

$$F_n F_{n-j} + \cdots + F_{j+1} F_1 = \begin{cases} F_n F_{n-(j-1)} - F_j & , \quad n \quad \text{tek} \quad \text{ise}, \\ F_n F_{n-(j-1)} & , \quad n \quad \text{çift} \quad \text{ise}, \end{cases}$$

ve eğer j çift ise,

$$F_n F_{n-j} + \cdots + F_{j+1} F_1 = \begin{cases} F_n F_{n-(j-1)} & , \quad n \quad \text{tek} \quad \text{ise}, \\ F_n F_{n-(j-1)} - F_j & , \quad n \quad \text{çift} \quad \text{ise}, \end{cases}$$

dir. [5]

R reel sayılar kümesi olmak üzere

$$\mathscr{D} = \left\{ \; x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n : x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \right\}$$

olsun. x , $y \in \mathscr{D}$ ve $x \prec y$ ise k = 1, 2, … , n için

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \le \sum_{i=1}^{k} y_i$$

olur.

$x \prec y$ ise x , y ’den önce gelir ya da y, x ’ten sonra gelir denir.

Dolayısıyla x , $y \in \mathscr{D}$ ve $x \prec y$ ise k = 0, 1, 2, … , n-2, n-1 için

$$\sum_{i=0}^{k} x_{n-i} \ge \sum_{i=0}^{k} y_{n-i}$$

yazılabilir.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

olmak üzere

$$\left(\bar{x}, \ldots, \bar{x}\right) \prec \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

dir.

Tanım 3.4. $i, j = 1, 2, \ldots, n$ için $\omega_{ij} \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ için

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{ij} = 1$$

ve $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} = 1$$

ise $n \times n$ tipindeki $\Omega_n = [\omega_{ij}]_n$ matrisine double stochastic matris denir. [5]

Teorem 3.3. den $\mathscr{L}(k)_n$ k- simetrik Fibonacci matrisinin pozitif yarı tanımlı olduğu açıktır. Ayrıca $\mathscr{L}(k)_n$ tekil olmayan bir matris olduğu için $\mathscr{L}(k)_n$ k- simetrik Fibonacci matrisi pozitif tanımlı bir matristir. Dolayısıyla $\mathscr{L}(k)_n$' nin özdeğerleri pozitiftir.

$\lambda(k)_1$, $\lambda(k)_2$, … , $\lambda(k)_n$, $\mathscr{L}(k)_n$ $n \times n$ tipindeki k- simetrik Fibonacci matrisinin özdeğerleri ve $(\lambda(k)_1, \lambda(k)_2, \ldots, \lambda(k)_n) \in \mathscr{D}$ olsun.

$$\sum_{i=1}^{n} q(k)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda(k)_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} g_j^2 = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1) g_i^2 \tag{3.3}$$

olduğundan

$$\left(q(k)_{nn}, q(k)_{n-1,n-1}, \ldots, q(k)_{22}, q(k)_{11}\right) \prec \left(\lambda(k)_1, \lambda(k)_2, \ldots, \lambda(k)_n\right)$$

dir. Bununla birlikte $\mathscr{L}(2)_n = \mathscr{F}(2)_n \mathscr{F}(2)_n^T$ ve $\sum_{i=1}^{j} F_i^2 = F_{j+1} F_j$ olduğundan

$$\left(F_{n+1}F_n, F_nF_{n-1}, \ldots, F_2F_1\right) \prec \left(\lambda(2)_1, \lambda(2)_2, \ldots, \lambda(2)_n\right)$$

dir.

Sonuç 3.2. ve (1.2) den aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.3. $\lambda(2)_1, \lambda(2)_2, \ldots, \lambda(2)_n$, $\mathscr{L}(2)_n$ simetrik Fibonacci matrisinin özdeğerleri olsun.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} = \begin{cases} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda(2)_i} & , \quad n \quad \text{tek} \quad \text{ise}, \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda(2)_i + 1} & , \quad n \quad \text{çift} \quad \text{ise}, \end{cases}$$

dir. [5]

Sonuç 3.4. $\lambda(2)_n$, $n \times n$ tipindeki simetrik Fibonacci matrisinin özdeğerleri olsun.

Eğer n tek sayı ise;

$$\sqrt{n\lambda(2)_n} \le \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} \le \sqrt{n\lambda(2)_1}$$

Eğer n çift sayı ise;

$$\sqrt{n\lambda(2)_n + 1} \le \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} \le \sqrt{n\lambda(2)_1 + 1}$$

dir. [5]

Lemma 3.3. $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ için

$$\frac{2}{i(i+1)} \le \lambda(k)_i$$

ve $i = k+1, k+2, \ldots, n$ için

$$\frac{2}{(k+1)(2i-k)} \le \lambda(k)_i$$

dir. [5]

İspat: (3.2) ifadesinden

$$(k+1, k+1, \ldots, k+1, k, k-1, \ldots, 2, 1) \prec \left(\frac{1}{\lambda(k)_n}, \frac{1}{\lambda(k)_{n-1}}, \cdots, \frac{1}{\lambda(k)_1} \right)$$

olduğu açıktır. Buradan $1 \le i \le k$ için

$$\frac{1}{\lambda(k)_1} + \frac{1}{\lambda(k)_2} + \cdots + \frac{1}{\lambda(k)_i} \le 1 + 2 + \cdots + i = \frac{i(i+1)}{2}$$

bulunur ve

$$\frac{1}{\lambda(k)_i} \le \frac{i(i+1)}{2}$$

yazılır. Böylece $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ için

$$\frac{2}{i(i+1)} \le \lambda(k)_i$$

elde edilir.

Eğer $k+1 \le i \le n$ ise

$$\frac{1}{\lambda(k)_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda(k)_k} + \frac{1}{\lambda(k)_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{\lambda(k)_i} \le \frac{k(k+1)}{2} + (i-k)(k+1) = \frac{(k+1)(2i-k)}{2}$$

yazılır. Buradan

$$\frac{1}{\lambda(k)_i} \le \frac{(k+1)(2i-k)}{2}$$

olur. Böylece $i = k+1, k+2, \ldots, n$ için

$$\frac{2}{(k+1)(2i-k)} \le \lambda(k)_i$$

bulunur.

Teorem 3.3. den

$$\det \mathscr{L}(k)_n = \prod_{i=1}^{n} \lambda(k)_i = 1$$

olduğu için Lemma 3.3. den

$$\lambda(\mathrm{k})_1 \left(\prod_{i=2}^{k} \frac{2}{i(i+1)} \right) \left(\prod_{j=k+1}^{n} \frac{2}{(k+1)(2j-k)} \right) \le \lambda(k)_1 \lambda(k)_2 \ldots \lambda(k)_n = 1$$

bulunur.

$$\sum_{i=1}^{n} q(k)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda(k)_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} g_j^2 = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1) g_i^2$$

olduğundan aşağıdaki sonucumuzu verebiliriz.

Sonuç 3.5. $n \times n$ tipindeki $\mathscr{L}_n$ simetrik Fibonacci matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ olsun. $n \ge 2$ pozitif tamsayıları için

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i+1) F_i^2 = \begin{cases} F_n F_{n+2} & , \quad n \quad \text{çift} \quad \text{ise}, \\ F_n F_{n+2} - 1 & , \quad n \quad \text{tek} \quad \text{ise}, \end{cases}$$

dir.

İspat. (3.3) ifadesinden

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)F_i^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

dir. Matrisin izi ve özdeğerleri arasındaki bağıntıdan

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i}F_k^2\right)$$

dir. Fibonacci sayılarının özelliğini kullanarak

$$=\sum_{i=1}^{n}F_iF_{i+1}$$

elde edilir. Buradan da

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)F_i^2=\begin{cases}F_nF_{n+2} & , \quad n \quad \text{çift} \quad \text{ise,}\\ F_nF_{n+2}-1 & , \quad n \quad \text{tek} \quad \text{ise,}\end{cases}$$

bulunur.

Örnek 3.14. 3×3 tipindeki

$$\mathscr{L}_3=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&6\end{bmatrix}$$

simetrik Fibonacci matrisinin özdeğerleri toplamı

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=F_3F_5-1=9$$

dir.

Örnek 3.15. 4×4 tipindeki

$$\mathscr{L}_4=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\1&2&3&5\\2&3&6&9\\3&5&9&15\end{bmatrix}$$

simetrik Fibonacci matrisinin özdeğerleri toplamı

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=F_4F_6=24$$

bulunur.

Örnek 3.16. 5×5 tipindeki

$$\mathscr{L}(3)_5=\begin{bmatrix}1&1&2&4&7\\1&2&3&6&11\\2&3&6&11&20\\4&6&11&22&39\\7&11&20&39&71\end{bmatrix}$$

3 - simetrik Fibonacci matrisinin özdeğerleri toplamı

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5&=\sum_{i=1}^{5}(6-i)g_i^2\\&=5g_1^2+4g_2^2+3g_3^2+2g_4^2+g_5^2\\&=102\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.17. 5×5 tipindeki

$$\mathscr{L}(4)_5=\begin{bmatrix}1&1&2&4&8\\1&2&3&6&12\\2&3&6&11&22\\4&6&11&22&43\\8&12&22&43&86\end{bmatrix}$$

4 - simetrik Fibonacci matrisinin özdeğerleri toplamı

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4+\lambda_5&=\sum_{i=1}^{5}(6-i)g_i^2\\&=5g_1^2+4g_2^2+3g_3^2+2g_4^2+g_5^2\\&=117\end{aligned}$$

elde edilir.

Ayrıca aşağıda verdiğimiz teoremimizle $\mathscr{F}_n$ Fibonacci matrisinin Euclidean normunu kolaylıkla hesaplayabiliriz.

Teorem 3.4. *F_n n.* Fibonacci sayısı olmak üzere $n\times n$ tipindeki $\mathscr{F}_n$ Fibonacci matrisinin Euclidean normu,

$$\left\|\mathscr{F}_n\right\|_E=\begin{cases}\sqrt{F_nF_{n+2}} & , \ n \ \text{çift ise,}\\ \sqrt{F_nF_{n+2}-1} & , \ n \ \text{tek ise,}\end{cases}$$

dir.

İspat. Euclidean normunun tanımından

$$\begin{aligned}\left\|\mathscr{F}_n\right\|_E^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} F_{i-j+1}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(F_i^2+\cdots+F_1^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{i} F_k^2)\end{aligned}$$

dir. Fibonacci sayısının özelliğinden

$$\left\|\mathscr{F}_n\right\|_E^2 = \sum_{i=1}^{n} F_i F_{i+1}$$

elde edilir. Buradan

$$\left\|\mathscr{F}_n\right\|_E^2 = \frac{F_{2n+1}+F_nF_{n+1}-1}{2}$$

olur. Fibonacci sayılarının özelliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\left\|\mathscr{F}_n\right\|_E^2 &= \frac{F_{n+1}^2+F_n(F_n+F_{n+1})-1}{2} \\ &= \frac{F_{n+1}^2+F_nF_{n+2}-1}{2} \\ &= \frac{F_{n+2}F_n-(-1)^{n+1}+F_nF_{n+2}-1}{2} \\ &= \frac{2F_{n+2}F_n+(-1)^n-1}{2} \\ &= \begin{cases} F_nF_{n+2} & , \ n \ \text{çift ise,} \\ F_nF_{n+2}-1 & , \ n \ \text{tek ise,}\end{cases}\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla Fibonacci matrisinin Euclidean normu

$$\left\|\mathscr{F}_n\right\|_E = \begin{cases} \sqrt{F_nF_{n+2}} & , \ n \ \text{çift ise,} \\ \sqrt{F_nF_{n+2}-1} & , \ n \ \text{tek ise,}\end{cases}$$

dir.

Örnek 3.18. 4×4 tipindeki

$$\mathcal{F}_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\2&1&1&0\\3&2&1&1\end{bmatrix}$$

Fibonacci matrisinin Euclidean normu

$$\left\|\mathcal{F}_4\right\|_E=\sqrt{F_4F_6}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

ve 5×5 tipindeki

$$\mathcal{F}_5=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\2&1&1&0&0\\3&2&1&1&0\\5&3&2&1&1\end{bmatrix}$$

Fibonacci matrisinin Euclidean normu

$$\left\|\mathcal{F}_5\right\|_E=\sqrt{F_5F_7-1}=\sqrt{65-1}=\sqrt{64}=8$$

bulunur.

Sonuç 3.5. ve Teorem 3.4. den $n\times n$ tipindeki simetrik Fibonacci matrisinin özdeğerleri toplamı ve Fibonacci matrisinin Euclidean normu arasında bir benzerlik söz konusudur. Benzer ilişki k- simetrik Fibonacci matrisinin özdeğerler toplamı ile k- Fibonacci matrisinin Euclidean normu arasında da olduğundan aşağıdaki sonucumuzu verebiliriz.

Sonuç 3.6. $n\times n$ tipindeki $\mathcal{F}(k)_n$ k- Fibonacci matrisi ve $g_n=g(k)_{n+k-2}$ olmak üzere

$$\left\|\mathcal{F}(k)_n\right\|_E=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)g_i^2}$$

dir.

Örnek 3.19. 4×4 tipindeki

$$\mathscr{F}(3)_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3-Fibonacci matrisinin Euclidean normu

$$\begin{aligned} \left\| \mathscr{F}(3)_4 \right\|_E &= \sqrt{\sum_{i=1}^{4} (5-i) g_i^2} \\ &= \sqrt{4g_1^2 + 3g_2^2 + 2g_3^2 + g_4^2} \\ &= \sqrt{31} \end{aligned}$$

ve 5×5 tipindeki

$$\mathscr{F}(4)_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4-Fibonacci matrisinin Euclidean normu

$$\begin{aligned} \left\| \mathscr{F}(4)_5 \right\|_E &= \sqrt{\sum_{i=1}^{5} (6-i) g_i^2} \\ &= \sqrt{5g_1^2 + 4g_2^2 + 3g_3^2 + 2g_4^2 + g_5^2} \\ &= \sqrt{117} \end{aligned}$$

bulunur.

4. KAYNAKLAR

[1] Brawer, R. and **Pirovino, M.** 1992. The Linear Algebra of the Pascal Matrix, Linear Algebra and Its Applications, 174:13-23.

[2] Horn, R. A., Johnson, C. R. 1985. Matrix Analysis, Cambridge University Press.

[3] Lee, G.Y. 2000. k-Lucas Numbers and Associated Bipartite Graphs, Linear Algebra and Its Applications, 320:51-61.

[4] Lee, G.Y., Kim J.S., Lee, S.G. 2002. Factorizations and Eigenvalues of Fibonacci and Symetric Fibonacci Matrices, The Fibonacci Quarterly, 40 (3): 203-211.

[5] Lee, G.Y., Kim J.S. 2003. The Linear Algebra of the k-Fibonacci Matrix, Linear Algebra and Its Applications, 373:75-87.

[6] Vajda, S. 1989**.** Fibonacci & Lucas Numbers and the Golden Section Theory and Applications, Ellis Horwood Limited.

[7] Vorobiev, N.N. 1992. Fibonacci Numbers, Birkhauser Verlag, Berlin.

[8] Zhizheng, Z. 1997. The Linear Algebra of the Generalized Pascal Matrix, Linear Algebra and Its Applications, 250:51-60.

[9] www.mathnet.or.kr/Proceeding/Pure2001/kwangyeun.pdf.