T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİRKÜLANT MATRİSLERİN KEYFİ POZİTİF KUVVETLERİ

Hatice GEZ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı

KONYA - 2006

T.C
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SIRKULANT MATRİSLERİN KEYFİ POZİTİF KUVVETLERİ

Hatice GEZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 18.10.2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. ArHîl^i BERKSOY
(Danışman)

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
(Üye)

Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE
(Üye)

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak yapılan bu çalışma bir derlemedir.

Sirkülant matrisler, özel bir matris türüdür. Bu nedenle bu matrislerin öğrenilmesi önem taşımaktadır.

Bu çalışmada ilk olarak sirkülant matrislerle ilgili gerekli tanımlar verilmiş, bu sayede bu matrislerin tanınması sağlanmıştır. Daha sonra bu matrisler için özel bir durum olan bazı fark ve diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan tek mertebeli simetrik sirkülant matrislerin keyfi pozitif değerlerinin bir tipinin hesaplanması incelenmiştir.

Tez konusunun seçilmesi ve yürütülmesi konusundaki yardımları ve yakın ilgisinden dolayı sayın hocam Prof. Dr. Durmuş BOZKURT a, yardım ve desteği için Arş. Gör, Ozan ÖZKAN ve danışman hocam Doç. Ahmet Hilmi BERKSOY'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hatice GEZ

Konya, 2006

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SİRKÜLANT MATRİSLERİN KEYFİ POZİTİF KUVVETLERİ

Hatice Gez

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. A. Hilmi BERKSOY

2006,

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Doç. A. Hilmi BERKSOY

Yard. Doç. Dr. Hasan KÖSE

Bu çalışmada ilk olarak sirkülant matrislerle ilgili gerekli tanımlar verilmiş, bu matrislerin tamnması sağlanmıştır. Daha sonra ise bu matrisler için özel bir durum olan bazı fark ve diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan tek mertebeli simetrik sirkülant matrislerin keyfi pozitif kuvvetlerinin bir tipinin hesaplanması incelenmiştir. Matrisin Jordan formu, Öz vektörlerin, dönüşüm matrislerin ve onlarm terslerinin ifadesi verilmiştir

Anahtar Kelimeler: Sirkülant matrisler, sağ-sol-ters sağ-ters sol sirkülant matrisler, Chebyshev polinomu, simetrik sirkülant matris, dönüşüm matrisi, Jordan formu.

ABSTRACT

Master Thesis

THE ARBITRARY POSITIVE POWER OF CİRCULANT MATRİCES

Hatice GEZ

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisior: Doç. A. Hilmi BERKSOY

2006,

Jury: Doç. A. Hilmi BERKSOY

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Asst. Prof. Dr. Hasan KÖSE

in this study, first we gave definitions about circulant matrices which help us to introduce these matrices. TThen we study on computing of arbitrary positive integer powers for one type of odd order symmetric circulant matrices which are a special station for these matrices andare used some difference and differential equations solutions. Expressions of eigenvectors and Jordan's form of the matrix and its inverse are given,too.

Keyvvords: Circulant matrices, right-left-skew right-skew left circulant matrices, Chebyshev polynomial, symmetric circulant matrix, transforming matrix, Jordan's form.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ 1

1.1 .Amaç ve Kapsam 1

1.2.Literatür Özeti 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 3

2.1. Genel Bilgiler 3

2.2. Sirkulant Matrisler 5

3. BİRİNCİ TİP TEK MERTEBELİ SİMETRİK SİRKULANT MATRİSLERİN KEYFİ POZİTİF TAMSAYI KUVVETLERİNİN HESAPLANMASI 13

3.1. Giriş 13

3.2. Problemin Formüle Edilmesi 13

3.3. B Matrisinin Öz Vektörleri ve *T* Dönüşüm Matrisi 16

3.4. Sayısal Hesaplamalar 30

4. GENEL SONUÇ VE ÖNERİLER 31

5. KAYNAKLAR 32

1. GİRİŞ

1.1. Amaç ve Kapsam

Sirkülant matrisler özel bir matris tipi olduğu için bu matrisler hakkında daha fazla bilgiye sahip olmak gerekmektedir. Bu çalışmada sirkülant matrislerle ilgili kavramları inceleyecek ve uygulayacağız.

Bazı fark ve diferansiyel denklemlerin çözümünde, karesel matrisin keyfi pozitif tamsayı kuvvetlerini hesaplamamızın gerekliliğıyle karşılaşırız. Bu çalışmada simetrik sirkülant matrislerin tek mertebesi için keyfi pozitif tamsayı kuvvetleri için genel bir ifade elde edilmiştir.

1.2. Literatür Özeti

Bozkurt, D., Türen, B.; bu çalışma öğrencilere lineer cebir konularının en iyi şekilde aktarılmasını ve kavratılmasını sağlamaktadır. Bununla birlikte son üç bölüm yüksek lisans ve doktora seviyesindeki öğrencilerin yararlanabilecekleri makalelerden derlenmiş bir bölümdür. Ayrıca Maple V Release 5 paket programının lineer cebir paketinin kullanımı da verilmiştir.

Davis, P. J.; bu çalışmada sirkülant matrislerle ilgili bilgiler verilmiştir. Öncelikle geometrik uygulamalar, matrislerle ilgili önemli bilgiler verilmiş daha sonra sirkülant matrisin tanımı ve bazı özelikleri verilmiştir. İfadeleri biraz daha genişleterek bazı geometrik sirkülantlar, sirkülantların genelleştirilmesi verilmiştir.

Rimas, J.; çalışmasında simetrik sirkülant matrislerin $n = 2p + l(pe\ N)$ mertebeden bir tipi için $/\ (l\ eN)$ inci kuvvetinin bir genel ifadesini elde etmiştir[12].'

Rimas, J.; [13] de, [12] deki makalesini genelleştirmiştir. Simetrik tek mertebeden sirkülant matrislerin bir tipi için (/ e *N)* / inci kuvvetin genel bir açıklaması verilmiştir. Bu çalışmada bu genel ifadenin türetilmesini tamamlamak için sunulmuştur. Matrisin Jördan formu, öz vektörlerin, dönüşüm matrislerin ve onların terslerinin ifadesi de verilmiştir.

Kamer, H., Schneid, J. ve Ueberhuber, C.W.; çalışmasında spektral ayrışımlar tanıtılmıştır. Yani, reel sirkülant matrislerin dört değişik türünün öz değer ayrışımları ve singüler değer ayrışımları verilmiştir. Ters sağ ve ters sol sirkülant olarak bilinen sağ ve sol sirkülant matrisler analiz edilmiştir.

Pollock, D. S. G.; sirkülant matrislerin spektral ayrışımını Fourier matrisi yardımıyla elde etmiştir. Buna ek olarak simetrik sirkülant matrisleri tammlamış ve bu matrisin Fourier dönüşümlerini incelemiştir.

Rojo, O. ve Rojo, H.; çalışmasında spektrumu verilmiş negatif olmayan simetrik bir sirkülant matisin varlığı için kolaca hesaplanabilir yeterli şart türetilmiş, ispatı verilmiştir. Buradan E bir stokastik simetrik sentrosimetrik bir matris, $s_l = \backslash E$ olmak üzere; $(\backslash)_{k=K}$ üzerinde bir düzeltme şartı türetilmiştir. Bunlar FFT kullanımı üzerine inşa edilmiştir.

Lind, D. A.; sirkülant ve ters sirkülant matrisi; Fibonacci sayısı ile tanımlayarak, bu matrislerin determinantlarını birimin *n.* dereceden primitif kökünü kullanarak elde etmiştir.

Geller, D., Kra, I., Popescu, S. Ve Simanca, S.; sirkülant matrislerin determinantını ve karakteristik polinomunu, birimin *n.* dereceden primitif kökünü kullanarak elde etmişlerdir. Sirkülant matrisler uzayının sonlu boyutlu değişmeli bir cebir yapısında olduğunu göstermişlerdir. Sirkülant matrislerin düzgün olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Genel Bilgiler

Tanım 2.1.1. [4]

A ve B kare matrisler ve

$$B=P^{-1}AP$$

olacak şekilde P düzgün matrisi varsa A ve B matrislerine benzer matrisler P* ye de dönüşüm matrisi denir.

Tanım 2.1.2. [4]

$A_A(X)$- det(/U"-$\hat{A}$) polinomuna A matrisinin karakteristik polinomu denir. $A_{\hat{A}}(X)$-0 denkleminin köklerine^ matrisinin öz değerleri denir. Bu denklemde sıfır olmayan x çözümüne A nın X öz değerine karşılık gelen öz vektörü denir.

Tanım 2.1.3. [4]

A, «-kare matris olmak üzere $A^T = A$ ise A matrisine simetrik matris (her ij için a_{ij} ~a_{rv}) denir.

Tanım 2.1.4. [11]

|ı - j\ > 1 olacak şekildeki her /, j için $a^{\wedge} = 0$ ise A - [a_{ij}] e M_n matrisine üç köşegen matris veya üçlü bant denir. Yani;

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisi bir üç köşegen matrisidir.

Tanım 2.1.5. [4]

$t\ a = t_H$ olacak şekildeki $T_n = \backslash fy.$ matrisine Toeplitz matrisi denir.

Bu matrisi açık olarak yazarsak

$$T. = \begin{vmatrix} >0 & '-1 & *'' & t\text{-}n_{+}7 & '-*_{+}, \\ h & 'o & '' & >\text{-}„_{+}3 & t\text{-}n+2 \\ h & & .'' & ^{-}«+4 & '-„_{+}3 \\ & & & & \\ '*-! & t_n\text{-}2 & \cdot- & '. & 'o \end{vmatrix}$$

olur.

Tanım 2.1.6. [4]

$H_a \sim [hı+j-ıİ$ -i Şeklinde tanımlanan matrise Hankel matrisi denir.

Bu matrisi açık olarak yazarsak

$$H. = \begin{vmatrix} K & *. & K & h \\ *. & K & h, & *. \\ K & h & K & fc_{„+1} \\ & & & \\ V, & K & *„« & hn\text{-}2 \end{vmatrix}$$

olur.

Tanım 2.1.7. [1]

$r_0(*)=ı$

$T_{l}(x) = x$

$T_{n+l}(x) = 2xT_n(x) - T_{n_l}(x)$

ifadesine 1 .Tür Chebyshev Polinomu denir.

Bu polinomun trigonometrik ifadesi ise;

$$T_n(\cos(\$)) = \cos(nO)$$
$$T_n(x) = \cos(\text{« } \arccos(x))$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.8. [1]

$$U_0(x) = \backslash$$
$$U_1(x) = 2x$$
$$U_{a+x}\{x) = 2xU_m(x) - U_{_1}\{x)$$

ifadesine 2.Tür Chebyshev Polinomu denir.

Bu polinomun trigonometrik ifadesi ise;

$$u_n(\underset{nK}{C}os(e)) = \frac{\sin(in+l)9)}{sinO}$$

$$U_n(x) = \frac{\sin((\hat{i}+1)\arccos x)}{\text{sın arccos } x}$$

şeklindedir.

2.2. Sirkülant Matrisler

Tanım 2.2.1. [11]

$$C = \begin{matrix} a. & a. & a. \\ & & Sj\text{-}1 \\ & & {}^{i}n\text{-}2 \\ {}_{L}a_2 & a_3 & \hat{U}, \end{matrix}$$

veya

$$C = circ(c_{1t}c_{2t}\ldots,c_{„})$$

şeklindeki CeM_n matrisine sirkülant matris denir. C nin her bir satınnın elemanları; bir önceki satınn elemanlan ile aynıdır.

Tanım 2.2.2. [13]

$a'eR''$ ve $a = (a_{Q}, a_{I>}, \ldots, a_{n_I})^T$ olsun.

$$c^*M = \begin{matrix} a_0 & a_f & \ldots & a_{n-\backslash} \\ {}^a n-\backslash & {}^a o & & {}^l n-2 \\ \backslash\ {}^a\backslash & {}^{ii}2 & \cdot\bullet & {}^a 0\ J \end{matrix}$$

şeklindeki matrise sağ sirkülant matris (basit sirkülant matris) denir. Herbir satır sağa kayarak devreder. $C_R(a)$, sağ sirkülant matrisde Teoplitz matrisinin özel durumudur. Matrisin 1. satın (yada sütunu) bilinirse matrisin bütün elemanlan belirlenir.

Tanım 2.2.3. [13]

$$C_L\{ah \begin{matrix} «O & «1 & a_{n-1} \\ a, & a. & {}^{ii}0 \\ \backslash {}^a„-\backslash & {}^a o & *n-2j \end{matrix}$$

şeklindeki matrise sol sirkülant (yada anti sirkülant veya (-l)sirkülant) matris denir. Herbir satır soldan yukandaki satınn bir kaydınlmışıdır. $C_L(a)$, özel bir Hankel matrisidir.

Tanım 2.2.4. [13]

$$s^*(*h \begin{matrix} a. & <3, & a_{n-\backslash} \\ -a\ {}_{n-\backslash} & & a_{B-2} \\ {}_v - « , & -a. & 'o\ j \end{matrix}$$

matrisine ters sağ sirkülant matrisi denir. Bu matris Toeplitz matrisin özel bir halidir. Ters sağ sirkülant matrisler aynı zamanda (-1) çarpan sirkülant matristir.

Tanım 2.2.5. [13]

$$\hat{W} = \begin{vmatrix} 'Oo & \ddot{o}_1 & ' \bullet & \ll - \\ \ll 1 & \ll 2 & \cdot \cdot & \sim^{a} o \\ A\text{-}ı & "\ll O & * \cdot & \sim^{a} n\text{-}2i \end{vmatrix}$$

matrisine ters sol sirkülant matris matris denir. Bu matris Hankel matrisinin bir özel durumudur.

Teorem 2.2.1. [13]

A ve B sirkülant matrisleri (sağ, sol, ters sağ, ters sol):

i) $A + B$ ve $A - B$ sirkülanttır,

ii) A^T sirkülanttır,

üi) AB sirkülanttır,

iv) aA sirkülanttır,

v) $\sum_{k} C;A^k$ sirkülant,

vi) Ters sol sirkülant matris simetriktir,

özelliklerini sağlar.

Tanım 2.2.6. [5]

$circ(c_{ll}c_2,...,c_n)$ nin determinantı; değişkenleri $c_{ll}c_{2i}...,c_{ll}$ olan n. dereceden bir homojen polinomdur.

Sirkülant matrislerin determinantlanmn hesabı için basit formüller yoktur. İlk dört durumun;

n=l için det *tireye^*) = c,

«=2 için det c«r(c,, c_2) = *cf* - c.

rc=3 için detc/>c(c_1,c_2,c_3) = c_1^3 +*c*\ +*c*\ -*3c$_x$c$_2$c$_2$*

n=4 için det*circ*(c_{f},$c_{2>}$$c_3$,$c_4$) = $c_,^4$ —*c*\ +*c*\-*c*\ -2cf(cJ +2c_2c_4J

+ 4c,(c_2c_3 +c_3C4)+2c_2C4 -4c_2c_3c„

olduğunu görürüz.

Tanım 2.2.7.

C sirkülant matris olsun. Eğer C = C^T oluyorsa bu matrise simetrik sirkülant matrisi denir.

$$C = \begin{matrix} c, & c_2 \\ c_2 & c_3 \\ c_{„} & c, \end{matrix}$$

matrisi bir simetrik sirkülant matristir.

Tanım 2.2.8. [9]

w , birimin *n*. primitif kökü olmak üzere *ij* - elemam

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = 4 = w^{0\,\text{r}\,\text{r}\,\text{l})0\,\text{r}_{,1})}$$

şeklinde tammlanan

$$F = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & \ddot{U}J & \boldsymbol{UJ}^{2} & \dots & \mathrm{w}^{\mathrm{""1}} \\ 1 & LJ^{2} & L\ddot{U}^{4} & \dots & \mathrm{w}^{2<-!>} \\ 1 & LJ^{\mathrm{n-l}} & t\ddot{U}^{2(11-1)} & & \ddot{U}J^{in-lY} \end{vmatrix}$$

matrisine Fourier matrisi denir. Aynı zamanda u nin özellikleri kullanılarak bu matris

$$F = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \ddot{U}J & \ddot{U}J & \ddot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{J}^{n-l} \\ \mathbf{1} & \ddot{U}J^{2} & \boldsymbol{uf} & \ddot{U}J^{11-2} \\ \mathbf{1} & oJ^{\mathrm{n-l}} & \ddot{U}J^{\ll-2} & \ddot{U}J \end{matrix}$$

şeklinde de yazılabilir.

$C(d)$ sirkülant matrisinin öz değerleri ve öz vektörleri,

$$C(a)y = Xy$$

denkleminin ya da

$$\sum_{A=0}^{/-1} \mathrm{ZA\text{-}y{+}tJ'*} + !£^{\mathrm{fl}}*\text{-}\mathrm{P'*}^{=} \mathrm{MJ} \quad 7 = 0,1,...,\text{»—}1$$

fark denkleminin kökleridir. Burada toplamların sınırlarında değişiklik yapılırsa

$$\sum_{k=0}^{n-l-J} \mathbf{E}^{d}ty\hat{}j + \sum_{t=n-7}^{n-\backslash} Yi^{a}kyk\sim_{t}n\sim j) = \hat{}yp \;; = 0,1,...,\text{»-}1 \qquad (2.2.1)$$

elde edilir. Denklem sabit katsayılı lineer bir denklem olduğu için $y_k = p^k$ dir. $y_k = p^k$ (2.2.1) denkleminde yerine yazılırsa

ft=0 $k=n-j$

elde edilir, *p* birimi *n*. dereceden primitif kökü olup, *C{a)* sirkülant matrisinin öz değerleri

ve bu öz değerlere karşılık gelen Öz vektörler ise

dir. $LÜ = e^{\sim^{2\,\text{TM}i/n}} - ÜJ^{\sim^{J}}$ olarak seçilirse y = 0,1,…,n-1 için *C(a)* sirkülant matrisinin öz değerleri

$$A,(C(_a)) = g < ¥ \hat{} *$$

ve bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler

dir.

Teorem 2.2.2. [13]

C(a), *nxn* tipinde bir sirkülant matris ve

$$A_y(C(o)) = \sum_{k=0}^{\mathbf{2\,o_4\,w - *}} \quad 4=0,1.\ldots n-1$$

C(d) nın öz değerleri olsun. O zaman

$$A(C(Ö)) = diag\{\backslash(C(a)\backslash\ A,(C(a)),.„,\ X_{a_},(C(a)))$$

ve *F* Fourier matrisi olmak üzere

$$C\{a) = F^{H}k\{C(a))F$$

dir.

Dikkat edilecek olursa tüm sirkülant matrislerin öz vektörlerinin kümesi birbirine eşittir.

Teorem 2.2.3. [15]

C{a), nxn tipinde bir sirkülant matris ve birimin *n.* dereceden primitif kökü w $= e^{2h,i/''}$ olsun. *J=0,*7, ...,«-7 için

$$\det(C(a)) = \prod_{*=0}^{n-1}$$

dir.

Teorem **2.2.4. [5]**

n x n tipinde bir *A* matrisinin sirkülant matris olması için gerek ve yeter şart

$$7\Gamma = \left|\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & \bullet\bullet\ 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \bullet\bullet\ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet\bullet\ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet\bullet\ 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & \bullet\bullet\ 0 \end{array}\right|$$

permütasyon matrisi olmak üzere

$$AIY = 7TA$$

şartının sağlanmasıdır.

Sonuç 2.2.1.

A matrisinin sirkülant olması için gerek ve yeter şart^* matrisinin de sirkülant olmasıdır.

Sonuç 2.2.2.

A ve B, nxn tipinde sirkülant matrisler ise AB matrisi de sirkülanttır.

İspat.

A sirkülant matris ise Teorem 2.2.4 den

$$AK = TTA$$

dir. Eşitliğin her iki yanı sağdan .B matrisi ile çarpılırsa

$$AırB = 7rAB$$

olur. B matrisi de sirkülant olduğu için $Bn = nB$ dir. Dolayısıyla

$$AB\text{-}K = \text{-}KAB$$

olur. AB matrisi Teorem 2.2.4 den sirkülant matristir.

Aynca aynı mertebeli sirkülant matrisler değişmelidir. Dolayısıyla bu özellik ve Sonuç 2.2.1 den sirkülant matrislerin normal matrisler olduğu sonucuna varılabilir. Yani, A sirkülant matris ise

$$AA^*=A^*A$$

şartı sağlanır.

3. BİRİNCİ TİP TEK MERTEBELİ SİMETRİK SİRKÜLANT MATRİSLERİN KEYFİ POZİTİF TAMSAYI KUVVETLERİNİN HESAPLANMASI

Bu kısımda $n = 2p + \backslash$ *(peN)* mertebeli birinci tip sirkülant matrisin /. (/ e *N)* kuvveti için genel bir ifade elde edeceğiz.

3.1. Giriş

Bazı fark ve diferansiyel denklemlerin çözümünde, karesel matrislerin keyfi pozitif tamsayı kuvvetlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Burada simetrik sirkülant matrislerin birinci tipinin /. kuvveti için genel bir ifade elde edeceğiz[5].

Kare matrisin keyfi pozitif tamsayı kuvvetini hesaplamak için gerekli diferansiyel ve fark denklemlerinin bazılarını çözerken bazılarını sonraya bırakacağız [3,19]. Burada tek mertebeli. simetrik üçlü bant matrislerin birinci tipinin /. kuvvetinin bir genel ifadesini bulacağız[20].

3.2. Problemin Formüle Edilmesi

$$\begin{matrix} "0 & 1 & & & 1" \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & 1 & 0_ \end{matrix}$$

şeklindeki *n.* mertebeden simetrik sirkülant *B* matrisini ele alalım.

Matrisin / inci kuvvetini $B^{/} = TJ'T^{\sim/}$ ifadesini kullanarak buluruz[6]. Burada *J, B* matrisin Jordan formu ve *T* ise dönüşüm matrisidir. *J* ve *T* matrisleri *B* matrisinin öz değer ve öz vektörleri bilindiği takdirde bulunabilir. *B* matrisinin öz değerleri

$$\|B-AE\| = 0 \tag{3.2.2}$$

karakteristik denklem ile tanımlanır.

a e R için

$$A,(\text{«})=\begin{vmatrix} a & 1 & & & & 1 \\ 1 & a & 1 & & & \\ & 1 & ar & 1 & & \\ & & & 1 & a & 1 \\ 1 & & & & 1 & a \end{vmatrix} \cdot \quad {}^{A} \text{»} = \begin{vmatrix} \text{ÛT} & 1 & & & & 0 \\ 1 & o; & 1 & & & \\ & 1 & a & 1 & & \\ & & & 1 & a & 1 \\ 0 & & & & 1 & a \end{vmatrix} \tag{3.2.3}$$

olsun.

$$\|B-XE\| = D_n\{-X) \tag{3.2.4}$$

olur. (3.2.3) den

$$D_n = aA_{n-1} - 2A_{n-2} - 2(-1)^n \tag{3.2.5}$$

ve

$$K = <xA_{n\cdot l}-A_n\hat{}_2 \quad (A_2 = a^2 - 1, A, = or, A_0 = 1) \tag{3.2.6}$$

ifadeleri elde edilir. Burada $D_n = D_n(a)$ ve $A_{\text{„}} = A_n(a)$ dir. (3.2.6) fark denklemini çözersek

$$A_n(a)=U_n \begin{matrix} f \sim .\backslash \\ \sim \\ \backslash 2s \end{matrix}, D_n(a) = U_n \begin{matrix} a \\ \tilde{2} \\ \backslash *-/ \end{matrix} - U_{n-l} \begin{matrix} \\ \\ \backslash *J \end{matrix} - 2(-1)";$$

elde ederiz. Burada $U_n(x) > n.$ dereceden ikinci tür Chebyshev polinomudur. Yani, $-1 < ; t < 1$ olmak üzere

$$V_n(x) = \frac{\sin((H+1)\arccos;c)}{\sin\arccos x}$$

dir.

$$T_n(x) = \pm(U_n(x) - U_{n-2}(x))$$

eşitliğini kullanarak

$$^W = 2k(|\tilde{}|\backslash - (-1)" \tag{3.2.7}$$

eşitliğini elde ederiz[7]. Burada $T_n(x)$ n. dereceden birinci tür Chebyshev polinomudur. Yani, $-1 < x < 1$ olmak üzere

$$(r_n(x)) = \cos(H\arccos;c) \tag{3.2.8}$$

dir. $T_n(x)$ polinomunun bütün sıfırları [-1,1] aralığında olup bulunan bağıntı kullanılarak $£ = 1,2,\ldots\ldots,n$ için

$$^ = \cos i\,^ i V \tag{3•2•9}$$
$$2n$$

bulunabilir. (3.2.9)'u ele alarak $T_n(y)$-{-\f polinomunun sıfırlarını da k-1,3,5,...,n tek tamsayılar ve k=0,2,4, ...,n çift tamsayılar için

$$Y_{nk} = \cos\frac{}{n} \tag{3.2.10}$$

olarak elde ederiz.

n değerini (n, B matrisinin mertebesi) tek tamsayı olarak alalım. (3,2.4), (3.2.7) ve (3.2.10)'u ele alarak (3.2.2) karakteristik denkleminin köklerini

$$^ = -2\cos\frac{kn}{n}, \mathrm{J}fc = 1,3,5,\ldots\ldots,« \tag{3.2.11}$$

olarak bul uruz[9].

$A_{(}.(/ = 1,3,\ldots,«\text{-}1)$ öz değeri katlı $(l_i = 2)$ iken X_n Öz değeri basittir $(/_{„} = 1)$. Burada $/.$, X_{f} öz değerinin katilliğim belirtmektedir.

J matrisi, B matrisinin Jordan formu olsun. J matrisinde X_n basit öz değerine tek Jordan blok karşılık gelir.

$r(B\text{-}X_iE) = n\text{-}2$ ve $n\sim r\{B\sim X_iE) = 2$ $(7=7,3,5,\ldots,n\text{-}2)$ [6]

olduğundan J matrisinde X_t $(/. = 2)$ katlı öz değerine ^(A,.) 2x2 Jordan bloğu ve X_n öz değerine $J_x(X_n)$ 1x1 Jordan bloğu karşılık gelir. Buna göre B matrisinin Jordan formunu yazarsak

$$J = \{diag\{X,\backslash X_zX,.\ldots.X_{n_2}X_{n_2}X_{„})) \tag{3.2.12}$$

olur.

3.3. *B* Matrisinin Öz Vektörleri ve *T* Dönüşüm Matrisi

$J = T\sim^{l}BT$ $(BT = TJ)$ bağıntısını göz önüne alalım. Burada B (3.2.1) deki n. mertebeden matris $(n = 2p + \backslash, p\ e\ N)$, J, B nin Jordan formu ve T dönüşüm matrisidir. Şimdi T dönüşüm matrisini bulabiliriz.

$Tj\backslash J = 1,w)$, T nin j. sütununu göstersin, $T = (7]\ T_2\ldots T_n)$ ve $\{BT_X\ BT_2\ \ldots\ BT_n) = \{T_tA_l\ T_2X,\ T_3X,\ T_4A_3\ \ldots T_{n_2}X_{n_2}\ T„_,X_{n_2}\ T„X_n)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} BT_2 &= T_2\backslash \\ BT, &= T_3\backslash \\ BT_A &= T,\backslash \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

$$\begin{aligned} BT_{n-Z} &= T_{n-Z}A_{„_i.} \\ BT_{n-1} &= T_{n-t}A_{„_l} \\ BT_n &= TX_n \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$T_j = \begin{cases} {}^{T}JA> & J=^{2}P\sim^{l}> \\ Tj\text{-}ıa^{*} & j = 2p(peN,j = \backslash\hat{}\hat{\imath}) \end{cases} \quad (3.$$

olarak tanımlar ve (3.3.1) sisteminin çözümünü bulursak;

$$U_0$$

$$T = {}_{s}\ j=\hat{\imath},3,5,\ldots,n\text{-}2_{>} \quad (3\text{-}$$

$$\begin{matrix} \mathrm{V}^{2}, \\ U_{\mathrm{n-2}} \quad \mathbf{'V} \\ K^{*}J \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} U_{\mathrm{n-3}}.\ 2, \\ \mathbf{'V} \\ \mathrm{V}^{2}, \end{matrix}$$

$$^{r}J2 = \begin{matrix} \\ \mathrm{V}^{2}. \end{matrix} \quad ,j=l,3,5,\ldots,n\text{-}2, \quad (3.$$

$$\begin{matrix} \boldsymbol{u}, \\ \mathbf{V}^{2}. \\ 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \boldsymbol{u}^{n-2} \\ \backslash \quad \mathbf{V}^{2}\ ,, \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \mathbf{T^{*}} \\ \mathbf{l} \\ \mathrm{T;} = 1 \\ \mathbf{vV} \end{matrix} \quad (3$$

olur. Burada $U_k(x)$, ikinci tür k. derece Chebyshev polinomudur. Bu

$$U_{k(x)}=\frac{\sin((k+1)a_i\cos x)_i}{\sin\arccos x} \qquad (3.3.6)$$

şeklinde ikinci tür *k.* dereceden Chebyshev polinomudur[7].

(3.3.3)-(3.3.5)ve

$$U_{n-2}\left(\frac{c\,1}{2}\right)=-1\,(/=1,3,5,\ldots,n-2), \qquad (3.3.7)$$

bağıntısı göz önünde tutulursa T* dönüşüm matrisi;

$$T=\begin{pmatrix} u_0 & U_{n-3}\left(\frac{K}{2j}\right) & 0 & u_{n-1}\left(\frac{2}{2j}\right) & U_n\left(\frac{A-2}{2\ j}\right) & a_{n-1}\left(\frac{2}{2\ j}\right) \\ u_1\left(\frac{1}{2}\right) & u_{n-4}\left(\frac{2}{2}\right) & 1 & u_{n-2}\left(\frac{2}{2}\right) & u_{n-1}\left(\frac{2}{2}\right) & a_{n-2}\left(\frac{2}{2\ j}\right) \\ u_2\left(\frac{4}{2}\right) & u_{n-5}\left(\frac{2}{2}\right) & 2 & u_{n-3}\left(\frac{2}{2}\right) & u_{n-2}\left(\frac{2}{2}\right) & a_{n-3}\left(\frac{2}{2}\right) \\ u_3\left(\frac{4}{2}\right) & U_{n-4}\left(\frac{2}{2}\right) & u_{n-2}\left(\frac{4}{2}\right) & u_{n-4}\left(\frac{2}{2}\right) & u_{n-3}\left(\frac{2}{2}\right) & a_{n-4}\left(\frac{2}{2}\right) \\ u_4\left(\frac{4}{2}\right) & U_{n-3}\left(\frac{4}{2}\right) & u_{n-3}\left(\frac{4}{2}\right) & u_{n-5}\left(\frac{2}{2}\right) & u_{n-4}\left(\frac{2}{2}\right) & a_{n-5}\left(\frac{2}{2}\right) \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (3.3.8)$$

şeklinde yazılır. Şimdi de T^{-1} ters matrisi bulalım.

T^{-x} ters matrisinin/ sütununu — $T^{-x}=\overline{H}(r_1r_2\ldots T_n)$ ile gösterelim ve gerekli dönüşümleri uygulayarak,

$$
\begin{array}{l}
\text{I «-;-:| }_{2}\ \text{I} \\
{}^{2\ddot{o}}\text{»->-\ } ir\ y^{X\ [\ U} \\
\\
T\ ,\ - \qquad \left(\ 2\ \backslash\ \right. + 2\ddot{U} \qquad \begin{matrix} 2 \\ h. \\ 2 \end{matrix} \qquad , \qquad j=\backslash,n-2_{i} \\
\qquad\quad \backslash\ *\ / \\
\qquad\quad \text{" / * I } o \quad + X_{s}\ddot{U} \qquad \begin{matrix} \text{il} \\ 2 \end{matrix} \\
\qquad\quad\ \ {}^{*}\ J \\
\\
K\text{-}{}^{*}Vn\text{-},\text{-}l \\
\\
21/_{n-y-2}
\end{array}
\qquad \textbf{(3.3.9)}
$$

ve

$$
{}^{T}{}^{*}\text{-}l = \qquad T_{_} = \qquad (3.3.10)
$$

$$
\begin{array}{l}
r\ {}_{_2}\ \hat{} \\
\\
\qquad\qquad -2 \\
-2 \qquad\qquad -A \\
\qquad\qquad -2 \\
-2 \qquad\qquad -4 \\
\qquad\qquad -2 \\
\\
-2 \\
-X_{n-2} \qquad\qquad -2 \\
\\
\qquad\qquad .\ 1\ \ y
\end{array}
$$

elde edilir. (3.3.9) ve (3.3.10) ifadeleri göz önünde tutularak T^{l} matrisini:

$$-V_{jM}\,{}^{*}W\,4 \qquad -V4^{'4^{N}} \qquad -2\ \ -4$$

$$2\,\hat{}\,l\,f\,l^{+}\,\hat{}\,\ddot{i}_{2} \qquad {}^{>^{2}<}\ +4K_{n-3}\,fi_{2} \qquad \sim\backslash\ \ -2$$

$$-2\ \ .-4$$

$$7-1_{n} \quad {}^{*}JJ\pm +m \qquad {}_{M} \quad +W_{'n-2}\ \backslash \qquad -4\ \ -2$$

$$\hat{}y\hat{}j+\hat{}\hat{}_{2}^{t^{2}}\mathbf{1}\ \hat{}_{2}\hat{}\,\text{¥HT)} \qquad <waV+2\,\hat{}\,\%\,l\ \ -2\ \ -4-,$$

$$*L\ \%\ hW4_{v\,\hat{}\,y} \qquad {}^{2t/}\hat{}\ V\,K\,\hat{} \qquad \cdot 2a\,PL_{v\,*\,y} \qquad 1 \qquad 1 \quad 1$$

(3.3.11)

olarak yazabiliriz. (3.3,8) ve (3.3.11) uygulanarak keyfî tek mertebe *n (n = 2p + \,p e N)* (3.2.1) matrisinin T dönüşüm matrisi ve tersi bulunmuş olur.

Örneğin, *n=3* için $\backslash = -1$, $U_{t}^{r\bar{K}\backslash} = 1$ ve

$$T = \begin{vmatrix} f & & U_{0} & 1 & f & 1 & 1 & 1\hat{} \\ & -1 & & 0 & & -1 & 0 & 1 \\ & 0 & & -1 & 1 & v\,0 & -1 & 1 \\ \mathbf{v} & & & &) & & & \end{vmatrix}$$

$$(A,+2)t/_{0}\ {}^{e}\dot{A}^{*s} \qquad -2 \qquad -A \qquad \Big| \qquad / \qquad -2 \quad 1\ \hat{}$$

$$3 \qquad v\,2; \qquad \cdots \qquad -2 \qquad \Big| \qquad -\ \sim\ 3 \qquad 1 \quad -2$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1 \qquad \Big| \qquad \mathbf{v} \qquad 1 \quad 1$$

$$\mathbf{J}$$

olur.

H=\5ıçın, ^=2003—=-a, /Lj=-2cos—=6; $a = 2\cos\frac{}{}$, o=2cos—;

c/. $\frac{'}{V^{\wedge}}$;O = M = 1,3; t/, $\frac{z'\,X,^{N}}{\ast\ J}$ = 4, /=1,3; t/$_3$ 2J = a, $U,\frac{z'\,1\ \ ''\backslash}{v\,2\ ;}$ = -6 ve

$$\pounds/,\frac{r\ i\ \sim s}{v\,2\,y}\ \frac{4}{u.}\qquad \frac{/''\,1\ ''\backslash}{u.}\qquad \frac{f\ \cdot j\ ''\backslash}{\wedge 3\ \ v\,2\,y}$$

$$T = \begin{matrix} & & v\,2\,y & tfl\ v\,2 \\ t/. & u._{V\,2\,;} & u,_{V\,2\,;} & a_{v\,2\,;} \\ -1 & O & -1 & O \\ & -1 & & -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & a & 1 & -b & 1 \\ -a & -a & fc & ö & 1 \\ a & 1 & -fc & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \wedge t/_2\ \frac{f\ i\ \wedge}{A}\ +2t/. & (A+2)C/,\ \frac{r\ 1\ ''\backslash}{v\,2\,;} & \backslash u_{f\ v\,2\,y}\ \frac{r\ 1\ \backslash}{+2i7,\ A} & -2 \\ 21/,\ \frac{/\ 1\ \backslash}{v\,2\,/}\ +W_{c\,v\,2\,;} & U+2)t/,\ \frac{4}{v\,2\,;} & 2U_r\ \frac{'V}{v\,2\,,}\ +\ \wedge C/_2\ \frac{''i}{v\,2} & -A\quad -2 \\ 5\ J3l/.\ \frac{''i}{v\,2\,,}\ +2U,\ \frac{''i}{v\,2\,y} & & W_{o\,v\,2\,,}\ +2\pounds A\ \frac{'V}{v\,2\,;} & -2 \\ 2\pounds/_{\text{„}}\ \frac{\wedge\ 1\ \sim\backslash}{v\,2\,y}\ +\wedge t/_c\ \frac{f\ 1\ ''\backslash}{\backslash^{A}\ /} & (\wedge+2)C/,\ \frac{}{V^{A}\ /} & 2U_r\ \frac{}{\frac{'V}{v\,2_y}} & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} —b & —b & a & \sim 2 & a \\ a & -b & -b & a & -2 \\ a & a & \sim b & -2 & -b \\ —b & a & a & —b & —2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

elde edilir.

B' matrisini elde edelim.

Tmn i. satırını $L, \forall f = 1,«)$ ile gösterirsek (bkz (3.3.8)),

$$\mathbf{r} =$$

ve

$$\ddot{u}, = \begin{matrix} AT \\ "AT: \\ A¥ \\ "AT \\ AT- \\ "AT \end{matrix} \quad , \quad / = !, « - 2;$$

$$\begin{matrix} y \\ (-1 \end{matrix} \; . \; * - 4$$

$$\begin{matrix} TJ \\ U \end{matrix} \quad \begin{matrix} I \\ n\text{-}l\text{-}2 \end{matrix} \quad -^{J}n\text{-}4$$

$$U_{i-\backslash} \quad 2$$

$$« / . - M \quad \begin{matrix} n-2 \\ L\ 2 \end{matrix}$$

$$iT = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \qquad T^{T} - \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \tag{3.3.13}$$

(burada T sembolü matrisin transpozudur).

$B' = TJ^{l}T^{-l}$ ve $j' = diag(\lambda_{1}>\lambda_{2}>\ldots>\lambda_{n-2}>\lambda_{n-1}>\lambda_{n})$ ifadelerinden

$$\mathbf{H\text{-}V^{*},\text{-}4}$$

$$
\begin{aligned}
&\%U_M \quad W_{_j_s} \quad + 2^{\wedge}{}_{_}, \quad *2\bullet ;\\
&+ 4^{\wedge}{-},{-}= \quad 2U_{\ldots j._2} \quad \ast J \quad 2 J\\
&1 \quad \%u_M \quad W_{\ldots_j_2} \quad + 2Uj_, \quad y\ 2\\
&+ \quad {}^{\wedge}.{-},{-}2 \quad 21/_{n\text{-}j\text{-}2} \quad + A_3 t/._{_}, \\
&+ \ldots + \dot{I} \quad {}^{\wedge}{\ldots}_2 t/_M \quad , V_2{}^{\wedge}{-}y{-}2 \quad \frac{S_{I}\text{-}2}{j} + 2C/_{,,,} \quad Y\\
&+ 4,{-}2^{\wedge}{-},{-}2 \quad W_{n_j_2} \quad + \quad K\text{-}\imath Ujs \quad {}^{N}_{n\text{-}2}\\
&+ \frac{X}{\ldots}, \quad {}_{1,y} = 1, H - 2;
\end{aligned}
\tag{3.3.14}
$$

$$-2A;$$

$$-2A($$

$$
\begin{aligned}
&{}^{1}\ J'.0\text{«-}1> \quad \text{«} \quad ' \quad {}''\text{-}^{1} \quad \text{«}\\
&\qquad -2A:{}_{\ldots 2}\\
&\qquad -A^{/+1}\\
&\qquad {}^{A}_{n}-2\\
&\qquad A\\
&\begin{vmatrix} 1 \\ n \\ 1 \\ \pi\hat{\imath} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} Ku_{\ 1\text{-}1} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} V \\ \backslash *) \\ \backslash \\ .2) \end{vmatrix}
+ A,{}^{n}C/_{\ldots\text{-}1\text{-}2}
\begin{vmatrix} *) \\ \bullet \\ + A'^{+\cdot\wedge}_\text{«} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} u;j \\ V \\ .2. \end{vmatrix}.\\
&\ldots \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 2A*\text{-}J \end{vmatrix}_{j\text{-}1}
\begin{vmatrix} f\ A^{\wedge} \\ i\ 2\ J \end{vmatrix}
+ A\{t>_{B\text{-}1\text{-}2}
\begin{vmatrix} {}^{A}_{n}-2 \\ i\ 2\ j, \end{vmatrix}\\
&\quad + \frac{A'}{\ldots}, \quad i = 1, n - 2;
\end{aligned}
\tag{3.3.15}
$$

$$\backslash B'\} \qquad = -L_{n\text{-}}fr_i$$
$$\hat{} \quad Hn\text{-}\backslash J \quad {}_{n} \quad {}''\text{-}^{1} \quad i$$

$$X?U \quad \left(\begin{matrix} I \\ n\text{-}j\text{-}2 \end{matrix}\right) \quad \backslash k]_{+2}\hat{}j(k$$

$$r\,1\,\text{-}s$$

$$\text{v } 2\text{ y}$$

$$\#\text{-}2\hat{}\text{-},\text{-}2 \quad \left(\begin{matrix} \backslash\text{-}2 \\ \backslash\ *\bullet\ J \end{matrix}\right) + 2AL2\hat{}y\text{-}, \quad \left(\begin{matrix} S>\text{-}2 \\ V\ \hat{}\ / \end{matrix}\right) + \left(\begin{matrix} A' \\ \text{-}*\text{-}, \end{matrix}\right) \ y = 1,/\imath\text{-}2;$$

(3.3.16)

$$\text{-}2\hat{}$$

$$n \qquad n$$

$$\text{-}A_{.n\text{-}2}$$

$$\text{-}2A'_{.n\text{-}2}$$

$$V \quad \hat{} \quad J$$

$$\hat{}^{]/+!}M \quad \left(\begin{matrix} r\,\dot{+}\,N \\ \text{v } 2\text{ ,} \end{matrix}\right) 4 + 2\hat{}\text{-},\text{-}; \quad \left(\begin{matrix} <\text{"}\,\dot{}\,N \\ V\ *\ / \end{matrix}\right) A$$

$$\#'\text{l}/_{W} \left(\begin{matrix} f\,1\,N \\ \text{v } 2\text{ ;} \end{matrix}\right) \dot{\text{i}} \ {}_{+}2\hat{}\text{„}\text{–}\text{,}\text{–}^{2} \left(\begin{matrix} f\,1\,\text{-}N \\ \text{v } 2_{y} \end{matrix}\right) \dot{\text{i}}$$

$$\%$$

$$\text{«}:{}_{2}\text{l}/M \quad \left(\begin{matrix} {}^{A}n\text{-}2 \\ \backslash\ 2\ J \end{matrix}\right) + 2lJ_{n\text{—}2}U_{n\text{—}i\text{—}2} \quad \left(\begin{matrix} \backslash\text{-}2 \\ \backslash\ *\ J \end{matrix}\right)$$

(3.3.17)

$$K=V'r,$$

$$24\pounds/_{,,}-;-J\hat{}W\hat{i}/,-_{1}\ {}^{f\ 1\ N}_{\backslash\ \hat{}\ /}\ {}^{f\ 1\ "\backslash}_{v\ 2\ /}\ 4$$

$$\hat{}^{3}_{K*S}\ +\ \%^{l}U_{J_,}\ \hat{}_{y\ \hat{}\ j}$$

$$\hat{}l\cdot_{2}U_{n}_J__{2}\qquad {}'\cdot{}^{n-l}\ {}_{,}\ {}^{1J+1}+\mathbf{W}-.{}_{v\ 2\ y}\ +{}^{X-}_{-}\mathrm{i}\ ,\ \mathrm{y}=1,\text{»}-2;$$

(3.3.18)

$$\mathrm{Al}$$

(3.3.19)

$$\{*<\}\ =\sim L_{n}J'r_{n}\hat{}\ =\mathrm{I}\ (\ \mathrm{r}\ +\ \mathrm{A}<^{\prime\prime}\ +\ \ldots{}^{A'}+>\pounds)\ \ \mathrm{A};\quad (3.3.20)$$

$$\mathrm{l}\quad i(n-\backslash),n\quad n\qquad\qquad *\cdot\ \ -'"\cdot(""\mathrm{O};$$

(3.3.21)

$$\{*']\ \ =\mathrm{Ii},/\mathrm{r}_{,,}=\{\mathrm{B}'\}\qquad (3.3.22)$$

$$\mathrm{l}\quad \mathrm{Jnn}\quad \hat{}\quad "\quad "\quad \mathrm{l}\quad \mathrm{J}\ (/\imath\text{-}\mathrm{l}),(\mathrm{n}\text{-}\mathrm{l})$$

olur. (3.3.14)-(3.3.22) ifadelerini

$$I\quad {}^{J}\mathrm{y}\quad \text{«}\quad \text{«}\ \mathrm{s}\qquad \hat{}\ -\ 1\ \ {}^{\backslash A\ -\ I}_{2}\ \ \mathrm{V},\hat{}\ -\ ,\ -\ 2\ \ {}^{-\backslash zA-1}_{2}$$

$$\cdot+2\ddot{\mathrm{u}}\mathrm{y}\text{-}.\ {}^{-*2*-1}\ +\pounds/_{,,}{}_{n-j-2}\qquad 2U_{n-j-2}\ {}^{\backslash k-\backslash}\qquad (3.3.23)$$

$$+\mathbf{W}\mathrm{y}\text{-}\mathrm{I}\ {}^{\backslash k-\backslash}\quad ,\quad ij=\backslash,n\backslash$$

şeklinde yazabiliriz. Burada X_x $(i = 1,3,5,...,«)$, 5 matrisinin ((3.2.3) de tanımlanan) öz değerleri $n = 2p + l(p$ e $N)$, B matrisinin mertebesi ve $U_k(x)$ ikinci tür *fc.* dereceden Chebyshev polinomudur(bkz 3.3.6).

(3.2.1) deki B matrisi ve onun kuvvetleri sirkülant matrislerdir [5]. B matrisinin /. kuvveti

$$B^{1} = TJ'T^{\sim J} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} a, & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n} & a_{n-1} & \cdots & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_x & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & a_5 & a_4 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_2 & a_x \end{bmatrix}; \quad (3.3.24)$$

olarak yazılır. Burada

$$\begin{aligned} &\{y(0) = \{*'\}_{n-1} \\ &= 4 + 2\sum_{*=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(t/_{n-J-2}\, \frac{\cos(2*-1)}{\sin(2k-1)} + £/_{j-1}\, \frac{\cos(2k-1)}{\sin(2*-1)} \right) U_{n-3} \\ &+ 2£/_{\lfloor n/2 \rfloor}\, \frac{\cos(\lfloor n/2 \rfloor - 1)}{\sin(\lfloor n/2 \rfloor)}\, U_{n-j-2} \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

$j = l^{w+1}$

(V. $\frac{\sin(7k+)}{\sin(*-J)} = 1,\ k\ -1, \frac{n-1}{\quad}$ şeklinde değerlendirilir.)

(3.3.25) daki form göz önüne alınıp basitleştirilirse

$$\begin{aligned} &2\cos\frac{2k-}{2}\, U_{n-j-7} + U_{y-1}\, \cos(lk-1)\, U_{n-3} \\ &+ 2\, U_{K\ 2\ j} + U_{n-3}\cos\frac{2}{2}, t/_{n-j-2}\cos\frac{2}{2} \\ &= 2\cos\frac{(I-1)}{2*-1} \\ &, \quad , \quad «-1 \quad . \quad {}_1« + 1 \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

ifadesini elde ederiz. Burada $T_n(x)$\

$$T_n(x) = \cos\left(n \arccos x\right) \qquad -1 < x < 1 \tag{3.3.27}$$

şeklinde ikinci tür *n.* derece Chebyshev polinomudur[7]. *k* ve *j* nin gösterdiği değerler ile (3.3.26) bağıntısını ispatlayabiliriz.

Örneğin; *k=l* ve *j=l* (*n* tek ve X_t ,(3.2.3) den belirli) ise ;

$$\left| f - 3 \right| A \left| + \hat{}\,„\text{-}3 \right| M_{(2)} \left| + 2U_0 \right| M_{L2J} \left| + \hat{}\,„\text{-}3 \right| M_{.2.} \left| \hat{}\,„\text{-}3 \right| .2\ J \left| = 2T_0 \right| \{2\} \left| \right. \tag{3.3.28}$$

elde ederiz.

(/ Yj=u, iYj= dir(bkz.(3.3.6)ve(3.3.27)).

M* yi bulalım. (3.3.6) ve (3.2.3) göz önüne alınarak,

$$f - 3 \quad A, \quad \frac{\sin(n-2)\arccos\left(-\cos\frac{7T}{n}\right)}{\sin\arccos\left(-\cos\frac{7T}{n}\right)} \quad A, \quad \frac{\sin(w-2)\arccos\left(-\cos\frac{7T}{n}\right)}{\sin\arccos\left(-\cos\frac{7T}{n}\right)}$$

$$\frac{\sin(n-2)\arccos\cos\frac{7T}{n}}{\sin\arccos\cos\frac{7T}{n}} \qquad \frac{\sin(„-2)\,TC\frac{7T}{n}}{\sin 7T\frac{7T}{n}}$$

$$\frac{\sin rm - 27T - \frac{(»-2)7r"}{.\ 7T}}{\sin\frac{}{}} \qquad \frac{\sin\left|«7T - 7T\ H\frac{27Ti}{«}\right| - \sin\left|tVK\text{-}\backslash\frac{2TT}{«}\right|}{\sin\frac{7T}{/i}}$$

yazarız. H tek sayı olduğundan

$$U_{n-3}\begin{pmatrix} f_1 \\ v \end{pmatrix}\begin{matrix} \sin\frac{}{} \\ \sin\frac{}{n} \end{matrix}\begin{matrix} 2\sin\cos\frac{}{n} \\ \sin\frac{}{n} \end{matrix}\begin{matrix} \\ = 2\cos\frac{}{n} \end{matrix}\begin{matrix} \\ -K \end{matrix}$$

elde ederiz.

$\begin{pmatrix} r_1 \\ v \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} r_1 \\ v \end{pmatrix}$ ve $U_{n-3}\begin{pmatrix} z' \\ v \end{pmatrix} = -A,$ değerleri (3.3.28) de yerine konulduğunda, bu ifadenin sağ ve sol uzantısı ortaya çıkar. (3.3.26) bağıntısı $k=l$ $J=l,$ tek n ve $X,$ değerleri için (3.2.3) aracılığıyla tanımlanmıştır.

Benzer şekilde k *vej* nin bütün diğer değerleri için bağıntı kontrol edilebilir.

Böylece (3.3.26) daki ifade (3.3.25) de yerine yazılırsa:

$$«,« = A:+2\sum_{k=1}^{n-1} XX_{-},:r_{y-}, \quad / = !. \quad «+1 \tag{3.3.29}$$

değeri elde edilir.

(3.3.29) da $T_M \begin{pmatrix} X \\ v \end{pmatrix} = 7_,(l) = 1 \quad j = l,$ $n-l$ ifadesi yerine konulursa:

$$«y(0 = \sum_{A=1}^{n+1} £4i-ı^-|î)-ı \quad y = ı, \quad »+ı \tag{3.3.30}$$

ifadesini elde ederiz (Burada $/.,$ X_i öz değerinin katilliğidir).

(3.3.30) daki toplamın yönü değiştirilirse;

$$^{ü}A^{l}) = \sum_{k=l}^{2} 2J^{-2*+2^{\wedge}i-2Jfc+2^{7}}-1 \quad (X_{n-2k+2} \quad ;=ı, \quad »+ı \tag{3.3.31}$$

elde edilir.

3.4. Sayısal Hesaplamalar

Elde edilen ifadeleri kullanarak *n* inci mertebeden (3.2.1) deki matrisin keyfi pozitif tamsayı kuvvetlerini bulabiliriz.

Örneğin, *n=3* ise, $J = diag(X_x, A,, X_y) = diag\{-1,-1,2)$,

$$B'^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a_x & a_2 & a \\ a & a, & a, \\ a_2 & a_1 & a_j \end{pmatrix}$$

$$\hat{u}_1(/) = 2^{/} + 2(-iy, \hat{U}_2(/) = 2^{/} - (-l)^{/}$$

dir.

w=J ise $cr = 2\cos\frac{}{5}$, $o = 2\cos\frac{}{5}$ olmak uzere

$$J' = diag\{\backslash_9 \backslash, \backslash, \backslash, \backslash) = diag(-a,a,b,b,2)$$

ve

$$a_1\{l) = 2'+2b^l+2\{-a)^l$$
$$a_2(l) = 2^l+b^lb + \{-a)^l\{-a)$$
$$a,(l) = 2^l+b^l(-a) + \{-a)^lb$$

olmak üzere

$$5\begin{pmatrix} a_x & a_2 & a_3 & a_3 & a_2 \\ a_2 & ci\backslash & a_2 & a_z & a_3 \\ a_3 & a_2 & Ü, & a_2 & a_3 \\ cr_3 & \#_3 & a_2 & a_l & a_2 \\ a_2 & <3_3 & o_3 & a_2 & a_l \end{pmatrix}$$

dir.

4. GENEL SONUÇ VE ÖNERİLER

Sirkülant matrisler için Özel bir durum olan, bazı fark ve diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan tek mertebeli simetrik sirkülant matrislerin keyfi pozitif kuvvetlerinin bir tipinin hesaplanması incelenmiştir.

Öncelikle konuyla ilgili temel kavramlar hatırlatılıp kullanılacak olan sirkülant matrislerin özelliklerine bakılmıştır.

Simetrik sirkülant matrislerin $n = 2p + \backslash(p\ e\ N)$ mertebeden bir tipi için $/(/$ e $N)$ inci kuvvetinin bir genel ifadesini elde etmek için ilk olarak öz değer ve öz vektörler bulunmuştur. Bunlar yardımıyla dönüşüm matrisi ve Jordan formu bulunarak matrisin /. kuvveti elde edilmiştir. Buradaki dönüşüm matrisi Chebyshev Polinomu kullanılarak elde edilmiştir.

5. KAYNAKLAR

[I] Abramowitz, M., Stegun, I. A., eds. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Chapter 22. New York: Dover, 1972

[2] Accettlla, C. J., Del Coorso,G. M. And Manzini, G., Inversion of two level circulant matrices över Z_p, Linear Algebra and Applications 366 (2003) 5-23

[3] Aganval, R.P., Difference Equations and Inequalities, Marcel Dekker, 1992

[4] Bozkurt, D., Türen, B., Lineer Cebir, Sel-Ün Vakfi Yayınları.

[5] Davis, P.J., Circulant Matrices, John Wiley and Sons, New York, 1979.

[6] El-Sayet, S. **M.,** A direct method for solving circulant tridiagonal block systems of linear equations, Applied Mathematics and Computation, 2004

[7] Fox, L., Parke J.B., Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis, Oxford University Press, London, 1968.

[8] Geller, D., Kra, I., Popescu, S. and Simanca, S., On Circulant Matrices, http:\\www.math.sunysb.edu\: sorin\eprints\circulant.pdf.

[9] Gray, R. M., Teoplitz and Circulant Matrices: A review, (2002), http:\\ee.stanford.edu\: gray\teopIitz.pdf.

[10] Horn, P., Johson, Ch., Matrix Analysis, Cambridge University Press, 1986.

[II] Horn R.A., Johnson, C.R, Matrix Analysis, Cambridge University Press, New York, 1985.

[12] James, G., Advanced Modern Engineering Mathematics, Addison-Wesley,1994

[13] Karner, H., Schneid, J. Ueberhuber,C.W., Spectral decomposition of real circulant matrices, Linear Algebra and Applications 367 (2003) 301-311.

[14] Lehmer, D. H., Some Properties of Circulants, Journal of Num. Theory 5(1): (1973)43-54

[15] Lind. D. H., A Fibonacci Circulant, The Fibonacci Quarterly December (1970): 449-455.

[16] Maze, **G.,** Partitions modulo *n* and circulant matrices, Discrete Mathematics 287 (2004) 77-84

[17] Oturanç, G., Kurnaz, A., Kiriş, M. E., Sayısal Analiz,Dizgi Ofset Matbaacılık, 2003.

[18] Pollock, D. S. **G.,** Circulant Matrices and Time-Series Analysis, Int. J. Math. Educ. Scı. Technol. 33(2): (2002) 213-230

[19] Resta, G. and Sburlati, G., On the number of different permanents of some sparse (0,l)-circulant matrices, Linear Algebra and Applications 375 (2003) 197-209

[20] Rimas, J., Investigation of the dynamics of mutually synchronized systems, Telecommunications and Radio Engineering 32(1997) 68-79.

[21] Rimas, J., On computing of arbitrary positive integer powers for one type of symmetric odd order circulant matrices-l,Appl. Math. Comput,in press.

[22] Rimas, J., On computing of arbitrary positive integer powers for one type of symmetric odd order circulant matrices-2, Appl. Math. Comput,in press.

[23] Rojo, O., Rojo, H., Some results on symmetric circulant matrices and on symmetric centrosymmetric matrices, Linear Algebra and Applications, 2004.

[24] Solak, S., On the norms of circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers, Applied Mathematics and Computation, 2004

[25] Taşçı, D., Lineer Cebir, SEL-ÜN Vakfı Yayınları,Konya, 1999.

[26] Zellini, P., On Some Properties of Circulant Matrices, Lin. Alg. Appl. 26: (1979)31-43

[27] Zellini, P. and Mach, A., On Some Theorems on Circulant Matrices, Lin. Alg. Appl. 41: (1981) 137-149.

[28] Zhang, F., Matrix Theory Basic Results and Techniques, Springer-Verlag, New York.

[29] Zhang, S., Jiang, Z. and Liu, S., An application of the GrÖbner basis in computation for the minimal polynomials and inverses of block circulant matrices, Linear Algebra and Applications 347(2002) 101-114