T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GÖRÜNÜŞTE İLİŞKİSİZ REGRESYON MODELLERİ VE BİR UYGULAMA

DEMET SEZER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

KONYA 2006

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GÖRÜNÜŞTE İLİŞKİSİZ REGRESYON MODELLERİ VE BİR UYGULAMA

Demet Sezer

Selçuk Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç.Dr.Aşır GENÇ

2006, 91 Sayfa

Jüri : Doç.Dr.Aşır GENÇ

Yrd.Doç.Dr.Mustafa SEMİZ

Yrd.Doç.Dr.Necati TAŞKARA

Bu tez çalışmasında hata terimleri arasında ilişki olan iki veya daha fazla regresyon denkleminin parametre tahminleri için geliştirilen Görünüşte İlişkisiz Regresyon (GİR) Yöntemi ele alınmış ve parametre tahminlerinin etkinliği Sıradan En Küçük Kareler (SEKK) Yöntemi ile karşılaştırılmıştır.

Bu amaçla, dört bölümden oluşan tez çalışmasının birinci bölümünde SEKK yöntemi, varsayımları ve parametre tahmini ve tahmin edicilerin özellikleri ele alınmıştır. İkinci bölümde GİR yönteminin temelini oluşturan Genelleştirilmiş En Küçük Kareler (GEKK) yöntemi, varsayımları ve parametre tahmini incelenmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde ise GİR yöntemi, varsayımları, parametre tahminleri ve SEKK yöntemine göre etkinlikteki kazancı ele alınmıştır.

Tezin dördüncü bölümü olan uygulama bölümünde ise Türkiye'nin 1960-2000 yılları arasında seçilmiş ülkelere yaptığı ithalat, SEKK ve GİR yöntemleri ile tahmin edilmiş ve hata terimleri arasında ilişki olan denklemler sisteminin parametre tahminlerinin, GİR yöntemi ile elde edilmesi sonucunda daha etkin olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler : Regresyon, En Küçük Kareler, Genelleştirilmiş En Küçük Kareler, Etkinlik, Görünüşte İlişkisiz Regresyon

ABSTRACT
MS Thesis
SEEMİNGLY UNRELATED REGRESSION MODELS AND AN APPLİCATİON
Demet SEZER
Selcuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor:Assos.Prof.Dr. Aşır GENÇ

2006, 91 pages
Jury : Assos. Prof. Dr. Aşır GENÇ
Asist. Prof.Dr. Mustafa SEMİZ
Asist. Prof. Dr. Necati TAŞKARA

In this thesis study Seemingly Unrelated Regression (SUR) developed for paramater estimators of two or more regression equation(s) having correlated error terms and the efficiency of parameter estimations are compared by using least square method(LSE).

The thesis consists of four sections. In the first section least squares method, its assumptions, parameter estimation and the properties of these estimators are investigated . In the second section generalized least square method which is the base of SUR method, its assumptions and parameter estimations are evaluated.In the third section of this thesis study SUR method, its assumptions, parameter estimations and this techniques profit relative to LSE method in efficiency are given.

In the fourth section of this thesis an application is done. In application part Turkey's import amounts to selected countries between 1960-2000 are estimated by LSE and SUR methods. In the equation systems having correlated error terms it is concluded that parameter estimations are more efficient by using SUR method.

Keywords: Regression, Least squares, Generalized least squares (GLS) , seemingly unrelated regression, efficiency

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının konu seçiminde ve gerçekleşmesinde yardımını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Aşır GENÇ'e, tezin özellikle uygulama bölümündeki katkısından dolayı arkadaşım Arş. Gör. Murat ERİŞOĞLU'na, beni çalışmaya teşvik eden ve destek olan diğer tüm bölüm hocalarıma ve arkadaşlarıma, tez çalışmam boyunca manevi desteğini esirgemeyen eşime ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET---------- ----------i
ABSTRACT ----------ii
ÖNSÖZ ----- ----------iii
İÇİNDEKİLER ---------- iv
KISALTMALAR DİZİNİ ---------- vi
TABLO ve GRAFİKLER DİZİNİ---------- vii
GİRİŞ---------- ---------- 1
KAYNAK ARAŞTIRMASI ---------- 2

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Klasik Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli ---------- 7
1.2. Klasik Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli Üzerindeki Varsayımlar ---------- 8
1.3. Klasik Çoklu Doğrusal Regresyonda Parametre Tahmin Yöntemleri ---------- 15
1.3.1. Sıradan en küçük kareler yöntemi ---------- 16
1.3.2. En çok olabilirlik yöntemi ---------- 17
1.4. Tamin Edicilerin Özellikleri ---------- 20
1.4.1. Küçük örnek özellikleri ---------- 20
1.4.2. Büyük örnek özellikleri ---------- 23

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ DOĞRUSAL REGRESYON MODELİ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ

2.1. Genelleştirilmiş Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli ve Model ile İlgili Varsayımlar---------- 25
2.2. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemi---------- 27
2.2.1. Değişen varyanslılık durumu---------- 32
2.2.2. Otokorelasyonlu hata terimleri durumu ---------- 33

3. GÖRÜNÜŞTE İLİŞKİSİZ REGRESYON MODELİ

3.1. Genel Bilgiler ---------- 37

3.2. Temel Model ---------- 38
3.3. Hata Terimi Varyans-Kovaryans Matrisinin Tahmini ---------- 44
3.3.1. Kısıtlanmış hata terimleri ile GİR modeli ---------- 45
3.3.2. Kısıtlanmamış hata terimleri ile GİR modeli ---------- 46
3.4. Görünüşte İlişkisiz Regresyon Denklemlerinde Parametre Tahmini ---------- 47
3.4.1. Genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi ---------- 47
3.4.2. İki aşamalı genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi---------- 48
3.4.3. İteratif genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi---------- 50
3.5. Görünüşte İlişkisiz Regresyon Modellerine İlişkisiz Hipotez Testleri ---------- 51
3.5.1. Hata terimi varyans-kovaryans matrisinin köşegenlik testi ---------- 52
3.5.2. Ayrı denklemlerdeki katsayı vektörlerinin eşit olupolmadığınıntesti --- 53
3.5.3. GİR için çoklu belirleyicilik katsayısı ---------- 54
3.6. Görünüşte İlişkisiz Regresyon Tahmin Edicilerinin En Küçük Kareler Tahmin Edicilerine Eşit Olduğu Durumlar---------- 54
3.6.1. Denklemlerdeki bağımsız değişken değerlerinin birbirine eşit olduğu durum ---------- 55
3.6.2. Hata terimi varyans-kovaryans matrisinin köşegen olduğu durum ------ 56
3.7. Görünüşte ilişkisiz regresyon modelinde etkinlikteki kazanç---------- 57

4. UYGULAMA

4.1. Uygulama Kapsamı ---------- 61
4.2 Çoklu Doğrusal Modellerinin Elde Edilmesi ---------- 64
4.3. Parametre Tahminlerinin GİR Yöntemi İle Elde Edilmesi ---------- 79
5. SONUÇ---------- 82
KAYNAKLAR ---------- 84
EKLER ---------- 88

KISALTMALAR DİZİNİ

SEKK : Sıradan En Küçük Kareler

GİR : Görünüşte İlişkisiz Regresyon

GEKK : Genelleştirilmiş En Küçük Kareler

KDR : Klasik Doğrusal Regresyon

GDR : Genelleştirilmiş Doğrusal Regresyon

KBMG : Kişi Başına Düşen Milli Gelir

TUFE : Tüketici fiyat endeksi

TÜİK : Türkiye İstatistik Kurumu

TBA : Temel Bileşenler Analizi

VIF : Varyans Şişme Değerleri

TABLO ve GRAFİKLER DİZİNİ

Tablo 1.1 : Varyans dengeleme dönüşümleri

Tablo 3.1 : ρ_{11} ve r_{11}'nin farklı değerleri için $Var(\tilde{\tilde{\beta}}_{11})/Var(\hat{\beta}_{11})$ oranının değerleri

Tablo 4.1 : Regresyon denklemlerinde kullanılan değişkenlerin sembol ve tanımları

Tablo 4.2 : Seçili ülkeler için elde edilen regresyon denklemleri

Tablo 4.3 : Varyans Analizi sonuçları

Tablo 4.4 : Parametrelerin anlamlılık sınamaları, VIF, d ve Breusch-Pagan değerleri

Tablo 4.5 : Anderson-Darling testi sonuçları

Tablo 4.6 : Temel bileşenler regresyon analizi sonuçları

Tablo 4.7 : Parametrelerin anlamlılık sınamaları, VIF ve d değerleri

Tablo 4.8 : Türkiye'nin seçili ülkeler için tahmin edilen ithalat regresyon denklemleri

Tablo 4.9 : Varyans Analizi sonuçları

Tablo 4.10 : Parametrelerin anlamlılık sınamaları, VIF ve d değerleri

Tablo 4.11 : Denklemlerin hataları arasındaki korelasyon katsayıları

Tablo 4.12 : GİR parametre tahminleri ve standart hataları

Grafik 1.1 : Otokorelasyonun tespiti

Grafik 1.2 : Yanlı ve yansız tahmin ediciler

Grafik 1.3 : Etkin tahmin edici

Grafik 1.4 : Tutarlı tahmin edici

Grafik 4.1 : Saçılım grafikleri

Grafik 4.2. Hataların normal dağılım grafikleri

GİRİŞ

Regresyon analizinde, Sıradan En Küçük Kareler (SEKK) varsayımlarından biri de modelin spesifikasyonunun doğru olduğudur. Yani model matematiksel şekli ve değişkenleri ile tamdır, doğrudur. Aksi halde model eksik bilgi içeriyorsa SEKK tahmin edicileri istenen özelliklere sahip olmazlar. İşte tahmin edilmek istenen modelle ilgili bilinmesi gereken husus, tahmin edilen regresyon denkleminin diğer bir regresyon denkleminin hata terimleri ile ilişkili olup olmadığıdır (Akkaya, 1991). Bu tez çalışmasında, tahmin edilen regresyon denkleminin hata teriminin, başka bir veya birden fazla regresyon denkleminin hata terimi ile ilişkili olduğu durum ele alınıp, bu durumda regresyon katsayılarının nasıl tahmin edileceği konusu incelenmiştir. Bu amaçla, tezin birinci bölümünde Sıradan En Küçük Kareler Tahmin Yöntemi, ikinci bölümünde GİR tahmin yönteminin temelini oluşturan Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Yöntemi ve üçüncü bölümünde Görünüşte İlişkisiz Regresyon Tahmin edicileri, bu tahmin edicilerin özellikleri ve GİR tahmin edicilerinin SEKK tahmin edicilerine göre etkinlikteki kazancı teorik olarak gösterilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde ise, Türkiye'nin ithalat talep fonksiyonunun modellenmesi ile ilgili bir uygulamaya yer verilmiştir. Bu uygulamada, hata terimleri ilişkili regresyon denklemlerinin parametre tahminlerinde, GİR tahmin edicilerinin SEKK tahmin edicilerinden daha etkin olduğu gösterilmiştir.

Görünüşte İlişkisiz Regresyon (GİR) modeli (seemingly unrelated regression model) ile ilgili ilk çalışmalar Zellner (1962) tarafından yapılmıştır. GİR modelinde çoklu regresyon denklemlerinin bir kümesi ele alınmaktadır. Bu regresyon denklemler kümesi , eşanlı bir denklemler kümesi biçiminde değildir. Yani herhangi bir denklemde bağımlı değişken olarak bulunan bir değişken bir başka denklemde bağımsız değişken olarak bulunmamaktadır (Uysal, 1997). Zellner, GİR modelini meydana getiren denklemlerin hata terimlerinin ilişkili olduğu ancak farklı denklemlerdeki bağımsız değişkenler arasında yüksek derecede ilişki olmadığı durumlarda GİR tahmin edicisinin Sıradan En Küçük Kareler (SEKK) tahmin edicisine göre daha etkin olduğunu göstermiştir. GİR modelindeki hata terimleri

arasındaki ilişki, aynı zaman noktasındaki hata terimleri arasındaki ilişkinin var olması anlamındadır. Bununla beraber, denklemlerin farklı zaman noktasındaki hata terimleri arasında ilişki yoktur. Hata terimleri arasındaki böyle bir ilişkinin varlığının anlaşılması imkansız olduğundan modele *"Görünüşte İlişkisiz Regresyon Modeli"*, modelin parametre tahminleri için geliştirilen ve genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemine dayanarak elde edilen tahmin ediciye *"Görünüşte İlişkisiz Regresyon Tahmin Edicisi"* adı verilmektedir.

Hata terimleri ilişkili olan denklemler sistemine ayrı ayrı SEKK yöntemi uygulanırsa yansız ve tutarlı ancak etkin olmayan tahminciler elde edilir. Bu yüzden hata terimleri ilişkili bu denklemler sisteminin parametre tahminlerini yaparken sistemi bir bütün olarak ele alan ve hata terimi varyans-kovaryans matrisini de regresyona dahil eden GİR yöntemini kullanmak yansız, tutarlı ve etkin tahmin ediciler elde edilmesini sağlar.

KAYNAK ARAŞTIRMASI

Görünüşte ilişkisiz regresyon modeli ilk defa Zellner (1962) tarafından öne sürülmüştür. Zellner tarafından öne sürülen GİR modeli ve GİR kestiricileri birçok çalışmada uygulamalı ve teorik olarak ele alınmıştır. Bu çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir.

- Zellner, A., (1962) *"An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias"* adlı makalesinde GİR tahmin yönteminin etkinlikteki kazancı ve GİR modelinde hipotez testleri ile ilgili ön bilgiler vererek General Elektric ve Westinghouse firmalarının yatırım fonksiyonlarının incelenmesinde, GİR tahmin yöntemi ile SEKK tahmin yöntemini etkinlik açısından incelemiştir.

- Zellner, A., (1963), *"Estimators for Seemingly Unrelated Regression Equations: SomeExact Finite Sample Results"* adlı makalesine GİR tahmin yöntemi ile elde edilen tahmin edicilerinin bazı sonlu örnek özellikleri ile ilgili incelemelere yer vermiştir.

- Kakwani, N. C., (1967), *"The Unbiadness of Zellner's Seemingly Unrelated Regression Equations Estimators"* adlı makalesinde, Zellner tarafından öne sürülen GİR tahmin edicilerinin yansızlığını farklı bir açıdan incelenmiştir.

- Parks, R. W., (1967), *"Efficient Estimation of a System of Regression Equations When Disturbances are Both Serially and Contemporaneously"* adlı makalesinde, hem otokorelasyonlu hem de aynı zaman noktasındaki hata terimleri ilişkili regresyon denklemleri için etkin parametre tahminlerinin elde edilmesi konusunda çalışmalar yapmıştır.

- Kmenta, J., Gilbert, R. F., (1968), *"Small Sample Properties of Alternative Estimators of Seemingly Unrelated Regressions"* adlı makalesinde, karşılıklı hata terimleri ilişkili regresyon denklemlerinin parametre tahminleri için sıradan en küçük kareler tahmin yöntemi, Zellner'in iki aşamalı tahmin yöntemi, Zellner'in iteratif tahmin yöntemi, Telser'in iteratif tahmin yöntemi ve en çok olabilirlik tahmin yöntemlerini incelemek amacıyla Monte Carlo deney çalışması yapmıştır.

- Kmenta, J., Gilbert, R. F., (1970), *"Estimation of Seemingly Unrelated Regressions with Autoregressive Disturbances"* adlı makalesinde, Parks(1967) tarafından ele alınan otokorelasyonlu GİR denklemlerinin parametre tahminleri için yeni teorik ve uygulamalı çalışmalara yer vermişlerdir.

- Revankar, N.S., (1976), "*Use of Restricted Residuals in SUR Systems: Some Finite Sample Results"* adlı makalesinde kısıtlanmış hata terimleri ile GİR tahmin yöntemine ve sonlu örnek özellikleri üzerinde bazı çalışmalara yer vermiştir.

- Carlson, R:L., (1978), *"Seemingly Unrelated Regression and the Demand for Automobiles of Differen Sizes, 1965-75: A Disaggregate Approach"* adlı makalesinde farklı otomobil modellerinin talep fonksiyonlarının modellenmesinde GİR tahmin yöntemini kullanmıştır.

- Kariya, T., (1981), "*Tests for the Independence Between Two Seemingly Unrelated Regression Equations"* adlı makalesinde iki denklemli GİR modelinin hata terimleri arasındaki ilişkinin istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını test etmek amacıyla bir test istatistiği öne sürmüştür.

- Conniffe, D., (1982), *"Covariance Analysis and Seemingly Unrelated Regressions"* adlı makalesinde kovaryans analizi ile GİR analizi arasındaki benzerlik konusunda bir çalışmaya yer vermiştir.

- Conniffe, D., (1982), *"A note on Seemingly Unrelated Regressions"* adlı makalesinde Zellner tarafından öne sürülen GİR tahmin edicisine karşı alternatif bir tahmin edici öne sürmüştür.

- Srivastava, K. A., Tracy, D. S., (1986), *"Computation of Standart Errors in Seemingly Unrelated Regression Equation Models"* adlı makalesinde hata terimi varyans-kovaryans matrisinin elemanlarının elde edilmesine ilişkin bilgilere yer vermiştir.

- Srivastava, V. K., Giles, D. E. A., (1987), "Seemingly Unrelated Regression Equations Models" adlı kitap çalışmasında GİR modeli, modelin varsayımları, çeşitli tahmin yöntemleri ile tahmin edicilerin elde edilmesi teorik olarak ele alınmıştır.

- Timm, H. N., (2002), Applied Multivariate Analysis adlı kitap çalışmasının 5. bölümünde GİR modelini, modelin parametre tahminlerini ve hipotez testleri konusunu ele almıştır.

- Akkaya, Ş., (1991), Ekonometri II adlı kitap çalışmasının 18. bölümünde GİR tahmin yöntemine yer vermiştir. Bu bölümde GİR tahmin yöntemi kısaca tanıtılmıştır.

- Doğan, N., (1998), yüksek lisans tezinde, Türkiye'nin 18 OECD ülkesine yaptığı ihracatın modellenmesi ile ilgili bir uygulamaya yer vermiştir. Bu uygulamada modelin parametre tahminleri için hem SEKK tahmin yöntemi hem de GİR tahmin yöntemi kullanılmıştır.

- Uysal, M., (1997), doktora tezinde tahıl ve endüstri ürünlerinin üretim modelinin tahmininde GİR tahmin yöntemini kullanmıştır.

- Aktaş, C.,ve Seydanoğlu D., *"Türkiye'nin AB ülkelerine İlişkin İhracat Talep Fonksiyonlarının Görünüşte İlişkisiz Regresyon Analiziyle Belirlenmesi"* adlı makalesinde Türkiye'nin Almanya, Fransa, İtalya, Hollanda, İngiltere, Belçika, Danimarka, İspanya, İsveç, İrlanda, Yunanistan ve Finlandiya'ya ilişkin ihracat talep fonksiyonlarını modellemişlerdir. Regresyon modellerine ilişkin parametre tahminleri, hem SEKK tahmin yöntemi hem de GİR tahmin yöntemi ile elde edilerek her iki yöntem, tahmin edicilerin etkinliği açısından incelenmiştir.

- Hatırlı, S. A., Demircan, V., Aktaş, A.R., (2002), *"Ayçiçek ve Soya Yağı İthalat Talebenin Analizi"* adlı makalesinde, Türkiye'nin ayçiçek ve soya yağı ithalatını GİR tahmin yöntemi ile analiz etmişlerdir.

BÖLÜM I

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1. Klasik Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli

Değişkenler arasında doğrusal ilişki olduğu varsayımı ile, doğrusal fonksiyonla ifade edilen çoklu regresyon modellerine *çoklu doğrusal regresyon modelleri* adı verilmektedir (Güriş ve Çağlayan, 2000).

Çoklu doğrusal regresyon analizi ise, bağımlı bir değişken (Y) ile bağımsız değişkenler ($X_1, X_2, ..., X_k$) arasındaki doğrusal bağıntıyı belirlemek ve bu bağıntı yardımıyla istatistiksel sonuçları elde etmek amacıyla kullanılan istatistiksel yöntemlerden biridir. Çoklu doğrusal regresyon modeli en genel hali ile,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i \qquad i = 1,2,...,n \tag{1.1}$$

olarak tanımlandığında, n gözlem sayısını ifade etmek üzere her bir gözlem için,

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + ... + \beta_k X_{1k} + \varepsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + ... + \beta_k X_{2k} + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ Y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + ... + \beta_k X_{nk} + \varepsilon_n \end{aligned} \tag{1.2}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler matrislerle,

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

olarak ifade edilebilir. Bu durumda çoklu doğrusal regresyon modeli,

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \qquad (1.4)$$

şeklinde matris gösterimi ile yazılır. Eşitlik (1.4) gösterimi için,

$\underline{Y}: n \times 1$ boyutlu bağımlı değişkenlere ait gözlem değerleri vektörünü,

$X: n \times p$ boyutlu bağımsız değişkenlere ait gözlem değerleri matrisini,

$\underline{\beta} = (\beta_0, \beta_1, ...\beta_k)' : p \times 1$ boyutlu bilinmeyen parametreler vektörünü,

$\underline{\varepsilon} : n \times 1$ boyutlu, aynı dağılıma sahip $E(\underline{\varepsilon}) = 0$ ve $Kov(\underline{\varepsilon}) = \sigma^2 I$ koşulunu sağlayan hata terimleri vektörünü ifade etmektedir. $p = k + 1$ olup modelde tahmin edilecek parametre sayısıdır.

1.2. Klasik Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli Üzerindeki Varsayımlar

Klasik çoklu doğrusal regresyonda parametre tahminlerinin yapılabilmesi ve elde edilen sonuçların geçerliliği için model üzerinde bazı varsayımlar yapılmıştır. Bu varsayımlar;

Varsayım 1 : $E(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i / X_i) = 0$

Hata terimlerinin beklenen değeri (ortalaması) sıfıra eşittir. Hata terimleri $(\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i)$ bazen negatif bazen de pozitif değer almalarına karşın ortalamaları sıfırdır. Varsayım sağlanmadığı durumlarda $(E(\varepsilon_i) \neq 0)$ parametre tahminleri gerçek değerlerinden daha büyük veya daha küçük değerler alır. Bu durumda yanlı parametre tahminleri elde edilir (Graybill, 1961).

Varsayım 2 : $Var(\varepsilon_i) = E[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)]^2 = E[\varepsilon_i^2] = \sigma^2$**,** $\quad i = 1,2,...,n$

Hata terimleri σ^2 ile sabit varyanslıdır. Bu varsayıma göre hata terimi varyansı, bağımsız değişkendeki değişmelere bağlı olarak değişmeyip aynı kalır (sabit varyanslılık) (Myers,1990). Sabit varyanslılık varsayımının geçerli olması halinde hata terimi varyans-kovaryans matrisi,

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I_n$$

şeklinde ifade edilir.

Bu varsayımın sağlanmaması durumunda modelde değişen varyanslılık (heteroscadasticity) sorunu ortaya çıkar. Bu durumda hata terimleri varyansı,

$$Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2, \quad i = 1,2,...,n$$

olarak ifade edilebilir bu da hata terimi varyansının gözlemden gözleme değiştiğini gösterir. Hata varyansları özellikle bağımlı değişkenin değerlerine bağlıdır. Buna bağlı olarak sabit varyanslılık bozulumu da çoğunlukla bağımlı değişken değerlerine bağlıdır. Özellikle bağımlı değişken değerlerine ilişkin değişim aralığının çok büyük olduğu durumlarda, bağımlı değişkenin binom ve poisson türünde dağılımlara sahip olduğu durumlarda veya bağımlı değişkenin çarpık olduğu durumlarda bu sorunla karşılaşmak olasıdır (Alpar, 2003).

Değişen varyanslılık sorunun araştırılması ve giderilmesi sağlanmazsa elde edilen parametre tahminleri büyük standart hataya sahip olacak bu da parametrelere ilişkin geniş güven aralıklarının bulunmasına neden olacaktır. Ayrıca değişen varyanslılık olması durumunda en küçük kareler yönteminin uygulanması yansız ancak etkin olmayan tahmin edicilerin bulunmasına sebep olur.

Uygulamalarda ε_i'nin eşit varyanslılık durumunu test etmek mümkündür. Değişen varyanslılığın tespitinde hatalara ait saçılım grafiklerden ($\hat{Y}_i$ tahmin değerlerine karşı e_i artık grafiği) yararlanılabilmektedir. Grafikte artıkların saçılımı megafon şeklinde ise bu değişen varyanslılığın bir göstergesidir. Değişen varyanslılığın tespitinde kullanılan testler ise, Park testi, Breusch-Pagan testi, Bartlett testi, Lagrange Çarpanları testi, Glejser testi, Spearman'ın sıra korelasyonu testi, Goldfeld-Quant testi, White testi gibi testlerdir (Akkaya, 1998).

Breusch-Pagan Testi: Bu yöntemde değişen varyanslılığın araştırılmasında

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_n^2$

$H_1 :$ En az bir σ_i^2 diğerlerinden farklıdır

hipotezinin test edilebilmesi için aşağıdaki aşamalar izlenir,

i. Model önce SEKK yöntemi ile tahmin edilir ve hata terimlerinin kareleri toplamı, $\sum e_i^2$, bulunur.

ii. $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum e_i^2}{n}$ değeri hesaplanır.

iii. $\dfrac{e_i^2}{\hat{\sigma}^2} = \alpha_0 + \alpha_1 X_{i1} + \alpha_2 X_{i2} + ... + \alpha_k X_{ik} + u_{ik}$ regresyonu SEKK yöntemi ile tahmin edilerek regresyon kareler toplamı (RKT) elde edilir.

iv. $\dfrac{RKT}{2}$ oranı hesaplanır. Bu oran k serbestlik derecesinde χ^2 dağılımına sahiptir. Hesaplanan değer, χ_k^2 tablo değeri ile karşılaştırılır. $\dfrac{RKT}{2} > \chi_k^2$ olursa modelde değişen varyanslılık olduğu söylenir (www.central.sussex.uk).

Modelde değişen varyanslılık sorununun olması durumunda değişkenler üzerinde gerekli dönüşümleri yapılması (varyans dengeleme dönüşümleri, Tablo 1.1) veya "genelleştirilmiş en küçük kareler yönteminin" uygulanması gerekmektedir (Alpar, 2003).

Tablo 1.1. Varyans Dengeleme Dönüşümleri

	Dönüşüm
Y 'ler poisson dağılımına sahip ise	$\sqrt{Y}$
Y 'ler poisson dağılımına sahip ve çok küçük değerlere sahip ise	$\sqrt{Y}+\sqrt{Y+1}$ $\sqrt{Y+0.5}$ $\sqrt{Y+1}$
Y 'lerin dağılım genişliği çok büyük ve tüm Y_i 'ler pozitif ise	$\log(Y)$
Y 'lerin dağılım genişliği çok büyük, tüm Y_i 'ler pozitif ve bazıları sıfıra eşit ise	$\log(Y+1)$
Y 'ler sıfıra yakın olacak şekilde toplanmış ve pozitif ise	$1/Y$
Y 'ler sıfıra yakın olacak şekilde toplanmış, pozitif ve bazı Y_i 'ler sıfır ise	$1/(Y+1)$
Y 'ler binom dağılımına sahip ise ($0 \le Y_i \le 1$)	$Sin^{-1}(\sqrt{Y})$

Varsayım 3: $Kov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E\{[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)][\varepsilon_j - E(\varepsilon_j)]\} = E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \qquad i, j = 1,...,n$

$i \neq j$

Hata terimlerinin birbirini takip eden değerleri arasında ilişki yoktur. Başka bir ifade ile hata teriminin herhangi bir değeri başka bir değerinden bağımsızdır. Bu varsayım sağlanmıyorsa hata terimleri arasında otokorelasyon (ardışık bağımlılık) vardır (Graybill,1961).

Modele alınmayan bağımsız değişkenler, değişkenler arasındaki ilişkiyi ortaya koyan matematiksel modelin yanlış seçilmesi, bağımlı değişkende ölçme hatası olması otokorelasyona sebep olmaktadır.

Hata terimleri arasında ardışık bağımlılık bulunduğunda, parametrelerin tahmin değerleri ve standart hataları bundan etkilenmektedir. Bunun sonucunda

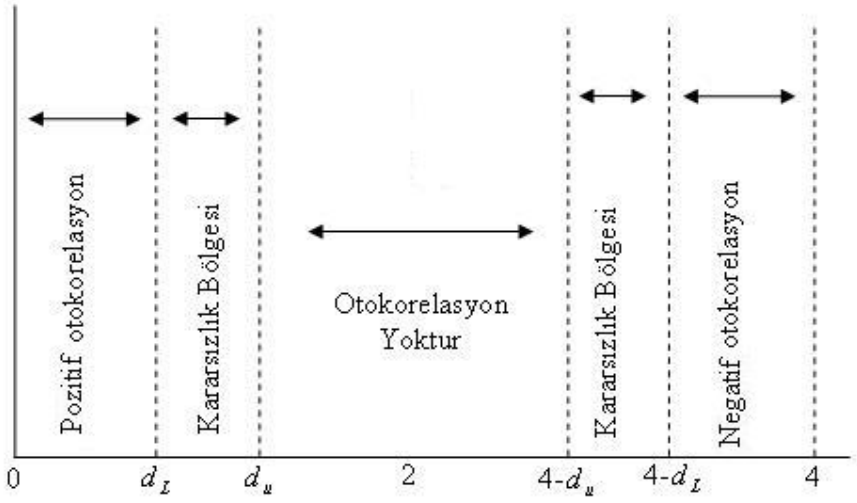
parametre tahminleri yansız olmakla birlikte etkin olmayacak, hata terimin varyansı olduğundan küçük tahmin edilecek, parametre tahminleri için sıradan en küçük kareler yöntemi uygun olmayacaktır (Tarı, 1999).

Modelde otokorelasyonun varlığının tespitinde grafik yöntemi, Durbin-Watson d testi, Durbin h testi, sıra testi, Von Neumann testi, Wallis testi gibi testler kullanılır (Tarı, 1999).

Durbin-Watson d Testi : Hata terimleri arasındaki ardışık bağımlılığı bulmak için en çok kullanılan test istatistiği Durbin-Watson d istatistiğidir. Durbin-Watson d istatistiği aşağıdaki formül ile tahmin edilir (Gujaratı, 1999).

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2}$$

Hesaplanan Durbin-Watson d istatistiğine göre ardışık bağımlılığın olup olmadığına karar vermek için aşağıdaki grafikten yararlanılır.



Grafik 1.1. Otokorelasyonun tespiti

Otokorelasyonun giderilmesi için birinci–fark yöntemi, Durbin-Watson d istatistiğine dayanan ρ yöntemi, Cochrane-Orcutt yöntemi kullanılabilir (Gujarati, 1999).

Varsayım 4 : $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$

Hata terimleri sıfır ortalama ve σ^2 varyansı ile normal dağılıma sahiptir. Çoklu doğrusal regresyon modellerinde hata terimlerinin normal dağılıma sahip olması kendi sıfır ortalamaları etrafında simetrik bir dağılım göstermeleridir. Bu varsayımın sağlanması parametre tahminleri için güven aralıkları oluşturmaya ve gerekli hipotezleri test etmeye imkan sağlar (Myers,1990).

Normallik varsayımının sağlanmamasının nedeni, aykırı değerler olabileceği gibi etkili gözlemlerin varlığı da olabilir. Hata terimlerinin normal dağılıp dağılmadığı grafik yöntemlerle (histogram, P-P grafiği, Q-Q grafiği) kolayca anlaşılabilir (Alpar, 2003). Hataların normal dağılım grafiklerinde, artıklar bir doğru üzerinde ise normallik varsayımının sağlandığı söylenir. Ayrıca normallik testi için, Ki-kare uyum iyiliği testi, Kolmogrov-Smirnov testi, Shapiro-Wilks testi, Anderson-Darling testi gibi yöntemler de kullanılabilir.

Varsayım 5 : $E(X_i\varepsilon_i)=0,\ i=1,2,...,n$

X_i ve ε_i'ler birbirinden bağımsızdır yani bağımsız değişkenler ile hata terimleri arasında bir ilişki olmayıp bağımsız değişkenler sabit değerlidir ($\underline{\varepsilon} \perp X^{(i)}$) . Bağımsız değişkenler ile hata terimleri birlikte değişme eğilimi göstermezler ve dolayısıyla kovaryansları sıfırdır (Tarı, 1999).

Varsayım 6 : X tasarım matrisi sabittir.

X tasarım matrisi, sabitlerin bir matrisi olarak varsayılıp Y, rasgele değişken olarak gözlenir.

Varsayım 7 : $(X'X)$ matrisi singüler olmayan bir matristir.

X tasarım matrisi olup, $(X'X)$ matrisinin tersinin alınabilir olması ve $rank\,(X'X) = p$ olduğu varsayılır.

Varsayım 8 : X matrisinin sütun vektörleri lineer bağımsızdır. $(Rank\,(X) = p)$

Bu varsayıma göre çoklu doğrusal regresyon modellerinde bağımsız değişkenler arasında doğrusal veya doğrusala yakın bir ilişki yoktur. Bu varsayımın sağlanmaması durumunda $(X^{'}X)$ matrisinin tersi alınamayacağından, parametre tahminleri yapılamayacak, tersinin alınabildiği durumlarda ise parametre tahminlerinin varyansları büyük olacak ve parametre tahminleri tutarsız olacaktır (Rawlings, 1998). Eğer bir bağımsız değişken diğer bağımsız değişken ya da değişkenlerin doğrusal bir fonksiyonu olarak yazılabiliyorsa, değişkenler arasında doğrusal bağımlılık söz konusu olacak (çoklu doğrusal bağlantı) ve regresyon katsayıları bulunamayacaktır (Alpar, 2003).

Tahmin edilen modelin R^2 değeri yüksek çıktığı halde t oranlarının küçük çıkması, bağımsız değişkenler arasındaki ikişerli korelasyon katsayılarının yüksek olması, $(X^{'}X)$ matrisinin determinantının sıfıra yakın olması çoklu doğrusal bağlantının bir göstergesi olarak görülmektedir. Bununla birlikte, varyans büyütme faktörü (VIF) ve her bir bağımsız değişkenin diğer bağımsız değişkenlerle regresyonundan elde edilen belirtme katsayısıları da çoklu doğrusal bağlantının varlığının tespitinde kullanılmaktadır.

Çoklu doğrusal bağlantının ortadan kaldırılması için örnek büyüklüğünün arttırılması, değişkenlerin orijinal değerleri yerine dönüştürülmüş değerlerin kullanılması, çoklu doğrusal bağlantı içinde bulunan değişkenlerden tek bir değişkenin unsurları durumunda olanlarının birleştirilmesi ve bazı değişkenlerin modelden çıkarılması, ridge regresyon yönteminin uygulanması, temel bileşenler analizini uygulanması yöntemleri kullanılabilir (Tarı, 1999).

Varsayım 9 : Model doğru olarak belirlenmiştir.

Model kurulurken incelenen olayı açıklayan önemli değişkenlerin modele alındığı, modelin matematiksel kalıbının ve denklem sayısının doğru belirlendiği varsayılmaktadır (Tarı, 1999).

Varsayım 10 : $n \geq k$ 'dır. (n ; gözlem sayısı, k ; parametre sayısı)

Çoklu doğrusal regresyon modellerinde X tasarım matrisinin tam sütun ranklı olabilmesi için gözlem sayısı, modeldeki bağımsız değişken sayısından fazla olmalıdır.

1.3. Klasik Çoklu Doğrusal Regresyonda Parametre Tahmin Yöntemleri

Çoklu doğrusal regresyon modellerinde parametrelerin tahmin edilmesi, parametre vektörü $\underline{\beta}$'nın tahmin edilmesini amaçlamaktadır. $\underline{\beta}$'nın tahmin edicisi $\underline{\hat{\beta}}$'nın elde edilmesi için sırada en küçük kareler (EKK) ve en çok olabilirlik (EÇO) yöntemleri sıkça kullanılmaktadır.

1.3.1. Sıradan En Küçük Kareler Yöntemi (SEKK)

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

modelinde $\underline{\beta} \in R^p$ parametresinin tahmin edilmesi probleminde en küçük kareler yöntemi düşünülürse bu yöntemde amaç;

$$\phi(\underline{\beta}) = (\underline{Y} - X\underline{\beta})'(\underline{Y} - X\underline{\beta}) \qquad (1.5)$$

karesel formunu minimize eden değerleri bulmaktır. Bu amaçla eşitlik (1.5)'in $\underline{\beta}$'ya göre türevi alınıp,

$$\frac{\partial \phi(\underline{\beta})}{\partial \underline{\beta}} = -2X'\underline{Y} + 2X'X\underline{\beta} \qquad (1.6)$$

sıfıra eşitlendiğinde

$$X'X\underline{\beta} = X'Y$$

normal denklemlerine ulaşılır. X tam sütun ranklı olduğundan, $\underline{\beta}$'nın en küçük kareler tahmin edicisi $\underline{\hat{\beta}}$,

$$\underline{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}X'Y \qquad (1.7)$$

olarak elde edilir.

1.3.2. En Çok Olabilirlik Yöntemi (EÇO) :

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

çoklu doğrusal regresyon modelinde

$$\underline{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I_n)$$
$$\underline{Y} \sim N(X\beta, \sigma^2 I) \qquad (1.8)$$

olmak üzere $\underline{\beta}$'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi $\underline{\hat{\beta}}$ ve σ^2'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\sigma}^2$'yı bulmak için olabilirlik fonksiyonu,

$$\ell(\underline{Y};\underline{\beta},\sigma^2) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n/2}(\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{Y}-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta})} \qquad (1.9)$$

ve olabilirlik fonksiyonunun logaritması,

$$In\,\ell(\underline{Y};\underline{\beta},\sigma^2) = -\frac{n}{2}In(2\pi) - \frac{n}{2}In(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\underline{Y}-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta})$$
$$= -\frac{n}{2}In(2\pi) - \frac{n}{2}In(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}(\underline{Y}'\underline{Y} - 2\underline{Y}'X\underline{\beta} + \underline{\beta}'X'X\underline{\beta})$$

(1.10)

dır. $\ell(\underline{\beta},\sigma^2)$ ve $In\,\ell(\underline{\beta},\sigma^2)$ fonksiyonunu maksimum yapan $\underline{\beta}$ ve σ^2'yi bulmak için,

$$\frac{\partial(In\,\ell(\underline{Y};\underline{\beta},\sigma^2))}{\partial\underline{\beta}} = -\frac{1}{2\sigma^2}(-2X'\underline{Y} + 2X'X\underline{\beta})$$
$$\frac{\partial(In\,\ell(\underline{Y};\underline{\beta},\sigma^2))}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}(\underline{Y}-X\underline{\beta})'(\underline{Y}-X\underline{\beta}) \qquad (1.11)$$

birinci türevlerin sıfıra eşitlenmesiyle,

$$X^{'}X\underline{\beta} = X^{'}\underline{Y}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\underline{Y} - X\underline{\beta})^{'}(\underline{Y} - X\underline{\beta})}{n}$$

normal denklemlerine ulaşılır. Buradan, $\underline{\beta}$ 'nın en çok olabilirlik tahmin edicisi;

$$\underline{\hat{\beta}} = (X^{'}X)^{-1}X^{'}\underline{Y} \tag{1.12}$$

ve σ^2 'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi;

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}})^{'}(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}})}{n} \tag{1.13}$$

olarak elde edilir.

Eşitlik (1.8)'deki özelliklerden dolayı $\underline{Y}$ 'nin lineer bir dönüşümü olan $\underline{\hat{\beta}}$ da normal dağılımlıdır. Böylece,

$$\begin{aligned} E(\underline{\hat{\beta}}) &= E\left[(X'X)^{-1}X'\underline{Y}\right] \\ &= E\left[(X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon)\right] \\ &= \underline{\beta} \end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} Kov(\underline{\hat{\beta}}) &= E(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta})(\underline{\hat{\beta}} - \beta)' \\ &= E\left[(X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon) - \beta\right]\left[(X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon) - \beta\right]' \\ &= E\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}\right] \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1} \end{aligned} \tag{1.15}$$

olmak üzere $\underline{\hat{\beta}} \sim N(\underline{\beta}, \sigma^2 (X'X)^{-1})$ dır. Eşitlik (1.14)'den görüldüğü gibi $\underline{\hat{\beta}}$, $\underline{\beta}$'nın yansız bir tahmin edicisidir.

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\hat{\sigma}}^2) &= E\left[\frac{1}{n}(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}})'(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}})\right] \\
&= E\left[\frac{1}{n}(\underline{Y} - X(X'X)^{-1}X'\underline{Y})'(\underline{Y} - X(X'X)^{-1}X'\underline{Y})\right] \\
&= \frac{1}{n}E\left[\underline{Y}'(I - X(X'X)^{-1}X')\underline{Y}\right] \\
&= \frac{1}{n}\left\{tr\left[(I - X(X'X)^{-1}X')\sigma^2 I\right] + (X\underline{\beta})'(I - X(X'X)^{-1}X')(X\underline{\beta})\right\} \\
&= \frac{1}{n}tr\left[\sigma^2(I - X(X'X)^{-1}X')\right] \\
&= \frac{1}{n}\sigma^2(n-p) \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

olduğundan $\hat{\hat{\sigma}}^2$, σ^2'nin yansız bir tahmin edicisi değildir. σ^2'nin yansız bir tahmin edicisi,

$$
\begin{aligned}
\hat{\hat{s}}^2 &= \frac{(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}}^{'})(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}})}{n-p} \\
&= \frac{\underline{Y}'\left[I - X(X'X)^{-1}X'\right]\underline{Y}}{n-p} \qquad (1.17)
\end{aligned}
$$

dır. Eşitlik (1.17) ile gösterilen σ^2'nin tahmin edicisi $\hat{\hat{s}}^2$'ye yansızlık için düzeltilmiş en çok olabilirlik tahmin edicisi denilmektedir (Akdeniz, Öztürk, 1996)

1.4. Tahmin Edicilerin Özellikleri

Dağılımı bilinen ancak parametresi bilinmeyen bir anakütleden alınan örneklem yardımıyla kitlenin bilinmeyen parametrelerinin tahmin edilmesi problemine parametre tahmini problemi denilmektedir.

Parametre tahminleri çeşitli yöntemlerle yapılmaktadır. Bu yöntemler arasında en iyi tahminleri elde eden yöntemi seçebilmek için bir tahminin başka bir yöntemle bulunan tahmine göre daha iyi olduğunu gösterecek bazı kriterlere ihtiyaç vardır. Yapılan tahminin anakütle parametresinin gerçek değerine yakın olması istenir. Bu yakınlık, tahminlerin örnekteki dağılımlarının ortalaması varyansları ile ölçülür.

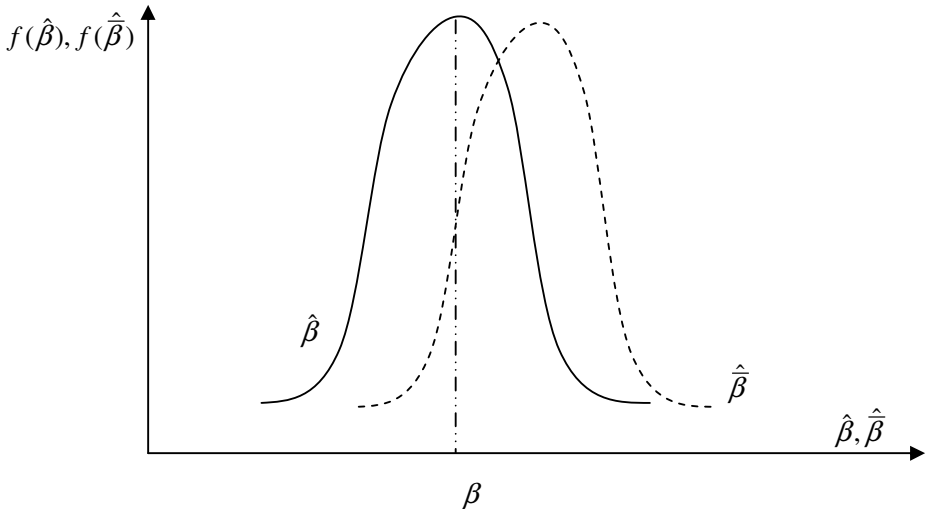
Tahmin edicilerde aranılan özellikler örnek büyüklüğüne göre, küçük ve büyük örnek özellikleri olmak üzere ikiye ayrılır (Tarı, 1999).

1.4.1. Küçük örnek özellikleri

Yansızlık (Sapmasızlık) : Eğer tahmin edicinin beklenen değeri, anakütle parametresinin gerçek değerine eşit ise, o tahmin edici yansız olur. $\hat{\beta}$, β anakütle parametresinin bir tahmin edicisi olmak üzere,

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

ise $\hat{\beta}$, β parametresi için yansız bir tahmin edici olacaktır. Yansızlık, aşağıdaki grafik yardımıyla incelenebilir.



Grafik 1.2. Yanlı ve yansız tahmin ediciler

Grafik (1.2) incelendiğinde, $E(\hat{\beta}) = \beta$ olduğundan $\hat{\beta}$, β için yansız bir tahmin edicidir. Bununla birlikte $E(\hat{\tilde{\beta}}) \neq \beta$ olduğundan $\hat{\tilde{\beta}}$, β parametresi için yansız bir tahmin edici değildir.

Etkinlik : Eğer bir tahmin edici tüm yansız tahmin ediciler arasında en küçük varyansa sahip ise, o tahmin edici anakütle parametresinin etkin bir tahmin edicisidir. β parametresinin iki tahmin edicisi $\hat{\beta}$ ve $\hat{\tilde{\beta}}$ olsun.

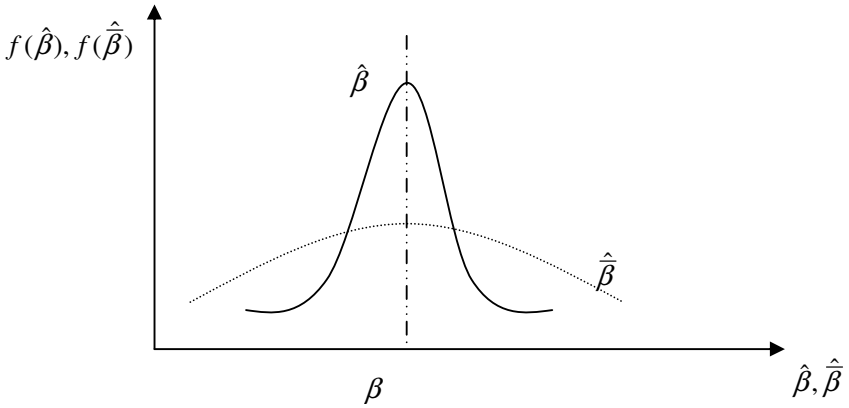
$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

$$E(\hat{\tilde{\beta}}) = \beta$$

ile her iki tahmin edici de yansız birer tahmin edici olmak üzere eğer,

$$Var(\hat{\beta}) < Var(\hat{\tilde{\beta}})$$

ise, $\hat{\beta}$, $\hat{\tilde{\beta}}$'ya göre daha etkin bir tahmin edicidir. Tahmin edicilerin etkinlik özelliği grafik yardımıyla gösterilebilir.



Grafik 1.3. Etkin tahmin edici

Grafik incelendiğinde, $\hat{\beta}$ daha küçük varyansa sahip olduğundan $\hat{\tilde{\beta}}$'ya göre daha etkin bir tahmin edicidir (www.londonmet.ac.uk).

Doğrusallık : Bir tahmin edici eğer, bağımlı değişken Y'nin lineer bir fonksiyonu ise o tahmin edici doğrusaldır. Bu matematiksel olarak,

$$\hat{\beta} = k\,Y$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $\hat{\beta}$, anakütle parametresinin bir tahmin edicisi ve k, bir sabit olup bağımsız değişken X'in bir fonksiyonudur (www.londonmet.ac.uk).

Bir tahmin edici doğrusal ve yansız tahmin ediciler arasında en küçük varyansa sahip ise, o tahmin edici '*en iyi doğrusal yansız tahmin edici'*dir (best linear unbiased estimator, BLUE).

Gauss-Markov Teoremi : Eşitlik (1.7) ile ifade edilen En Küçük Kareler tahmin edicisi, sabit varyanslı, hata terimleri ilişkisiz ve hata terimlerinin beklenen değeri sıfır olan doğrusal bir modelin parametre tahminleri için, tüm yansız tahmin

ediciler arasında en küçük varyansa sahiptir. Başka bir ifade ile, EKK tahmin edicisi, doğrusal bir model için en iyi doğrusal yansız tahmin edici (BLUE) özelliğindedir (Myers, 1990).

1.4.1. Büyük örnek özellikleri

Asimtotik yansızlık : Eğer $\hat{\beta}$ tahmin edicisinin asimtotik ortalaması, ana kütlenin gerçek β parametresine eşit ise, bu tahmin edici asimtotik yansız tahmin edicidir. Bu özellik,

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\beta}) = \beta$$

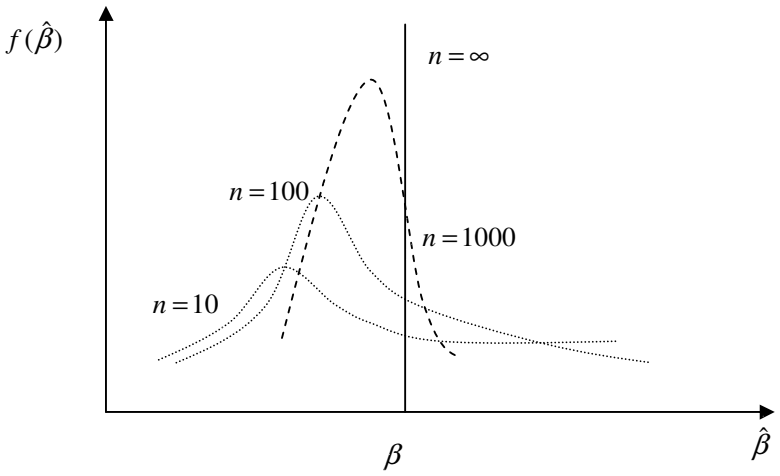
şeklinde gösterilir (Tarı, 1999).

Tutarlılık : Eğer bir $\hat{\beta}$ tahmin edicisi asimtotik yansız ise ve örnek büyüklüğü sonsuza giderken varyansı sıfıra yaklaşıyorsa, bu tahmin edici tutarlıdır. Bu özellik,

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\hat{\beta}\right) = \beta$$

$$\lim_{n\to\infty} Var\left(\hat{\beta}\right) = 0$$

biçiminde gösterilir. Örnek büyüklüğü arttıkça hem yan hem de varyans azalır ve limitte ($n \to \infty$ iken) sıfır olursa, böyle bir tahmin edici tutarlıdır (Tarı, 1999). Bu özellik grafik yardımıyla aşağıdaki şekilde incelenebilir.



Grafik 1.4. Tutarlı tahmin edici

Grafik (1.4) incelendiğinde örnek büyüklüğü arttıkça $\hat{\beta}$ tahmin edicisinin hem yanı hem de varyansı azalmaktadır **(**www.londonmet.ac.uk).

Asimtotik etkinlik : Tutarlı tahmin ediciler arasından en düşük asimtotik varyanslı tahmin edici, asimtotik etkin tahmin edicidir.

BÖLÜM II

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ DOĞRUSAL REGRESYON MODELİ ve GENELLEŞTİRİLMİŞ EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ

2.1. Genelleştirilmiş Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli ve Model İle İlgili Varsayımlar

Eşitlik (1.7) ile bulunan SEKK tahmin edicileri yansızdır. Ancak etkinlik özelliği sağlanmayabilir. Bunun için farklı yöntemlerle kıyaslama yapılması gerekebilir. Bu amaçla hata terimi varyans-kovaryans matrisini de regresyona dahil ederek parametre tahminlerini yapmayı amaçlayan "Genelleştirilmiş En Küçük Kareler(GEKK)" yönteminin incelenmesi uygun olacaktır. Genelleştirilmiş doğrusal regresyon modeli ile klasik doğrusal regresyon modeli hata terimleri üzerine yapılan varsayımlardan dolayı farklılık gösterir.

Genelleştirilmiş doğrusal regresyon modeli,

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i \ , \qquad i = 1,2,...,n \tag{2.1}$$

veya matris gösterimi ile,

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \tag{2.2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada;

$\underline{Y} : n \times 1$ boyutlu bağımlı değişkenlere ait gözlem vektörünü

$X : n \times k$ boyutlu bağımsız değişkenlere ait gözlem matrisini

$\underline{\beta} : n \times 1$ boyutlu regresyon katsayıları vektörünü

$\underline{\varepsilon} : n \times 1$ boyutlu hata terimleri vektörünü temsil etmektedir.

Bu model ile ilgili varsayımlar,

1) $E(\varepsilon_i) = 0$

Hata terimlerinin beklenen değeri (ortalaması) sıfıra eşittir.

2) $Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 \quad i = 1,...,n$

Hata terimleri değişen varyanslıdır.

$Kov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \sigma_{ij} \qquad i, j = 1,...,n \qquad i \neq j$ Hata terimlerinin birbirini takip eden değerleri arasında ilişki vardır. Başka bir ifade ile modelde otokorelasyon mevcuttur.

3) $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2) \;\; i = 1,2,...,n$

Hata terimleri sıfır ortalama ve σ_i^2 varyansı ile normal dağılıma sahiptir.

4) X_i ve ε_i'ler birbirinden bağımsızdır.

5) X tasarım matrisi sabittir.

6) $(X'X)$ matrisi singüler olmayan bir matristir.

7) X matrisinin sütun vektörleri lineer bağımsızdır.

8) Model doğru olarak belirlenmiştir..

9) $rank(X) = k \;, \;\; n \geq k$

Klasik doğrusal regresyon (KDR) modeli varsayımları ile genelleştirilmiş doğrusal regresyon(GDR) modeli varsayımlarına bakıldığında 2. varsayım dışındaki tüm varsayımlar özdeştir. Klasik doğrusal regresyon modelinde hata terimleri sabit varyanslı ve otokorelasyona sahip değil iken genelleştirilmiş doğrusal regresyon modelinde hata terimleri değişen varyanslı ve/veya otokorelasyonlu olabilir. Bu bilgiler ışığında KDR modelinde, hata terimleri varyans-kovaryans matrisi;

$$E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') = \sigma^2 I_n \tag{2.3}$$

iken, GDR modelinde hata terimleri varyans-kovaryans matrisi;

$$E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') = \sigma^2 \Omega \tag{2.4}$$

şeklinde olup Ω matrisi, simetrik, singüler olmayan, pozitif tanımlı ve $n \times n$ boyutlu bir matristir. Böylece, Ω^{-1} de pozitif tanımlı bir matris olacaktır.

Eşitlik (2.4)'e göre $\Omega = I$ olursa, ki bu durum değişen varyanslılık ve otokorelasyon olmadığı zaman gerçekleşir, GEKK tahmin edicisi SEKK tahmin edicisi haline dönüşür. Böylece sıradan en küçük kareler tahmin edicisinin, genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisinin özel bir hali olduğu söylenebilir.

2.2. Genelleştirilmiş En Küçük Kareler (GEKK) Yöntemi

Modelde değişen varyanslılık veya otokorelasyon olması halinde parametre tahminleri SEKK yöntemi ile yapılırsa yansız, tutarlı ancak etkin olmayan parametre tahminleri elde edilir ki bu da elde edilen parametre tahminlerinin en iyi doğrusal yansız tahmin edici (BLUE) olma özelliğini ortadan kaldırır.

(2.1) modeli için parametre tahminleri bulunurken SEKK yöntemi uygulandığında,

$$\underline{\hat{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underline{Y}$$

ve

$$Kov(\underline{\hat{\beta}}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

olarak bulunur. GDR modeli için verilen varsayımlar altında,

$$\begin{aligned} E(\underline{\hat{\beta}}) &= E\left[(X'X)^{-1}X'\underline{Y}\right] \\ &= E\left[(X'X)^{-1}X'(X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon})\right] \\ &= \underline{\beta} + (X'X)^{-1}X'E(\underline{\varepsilon}) \\ &= \underline{\beta} \end{aligned}$$

olarak bulunur ve $\hat{\beta}$'nın β için hala yansız bir tahmin edici olduğu kolaylıkla görülebilir. Bununla beraber,

$$\begin{aligned} Kov(\underline{\hat{\beta}}) &= E(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta})(\underline{\hat{\beta}} - \underline{\beta})' \\ &= E\left[\left[(X'X)^{-1}X'(X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}) - \underline{\beta}\right]\left[(X'X)^{-1}X'(X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}) - \underline{\beta}\right]'\right] \\ &= E\left[(X'X)^{-1}X'\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}'X(X'X)^{-1}\right] \\ &= \sigma^2(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1} \end{aligned} \qquad (2.5)$$

olarak elde edilir ki görüldüğü gibi SEKK yöntemi GDR modeli söz konusu iken etkinlik özelliği bakımından uygun bir tahmin edici olmamaktadır. Bu durum hem değişen varyans ve kovaryansa izin veren hem de sabit varyanslılığa uygun hata terimlerine sahip bir regresyon formülü bulmayı gerektirir. Bunun tek yolu ise, (2.2) eşitliği ile belirtilen modelin hata terimlerinin dönüştürülmesini sağlamaktır.

Aitken, GDR modelinin parametre tahminleri için alternatif bir yöntem geliştirmiştir. "Genelleştirilmiş En Küçük Kareler" veya "Aitken Tahmin Edicisi" olarak bilinen bu yöntemde genelleştirilmiş model bazı varsayımlar ve şartlar altında değişen varyanslılık ve otokorelasyonun varlığı da dikkate alınarak dönüştürülmekte ve dönüştürülen bu yeni model klasik modelin tüm varsayımlarını sağlamakta dolayısıyla modele SEKK yöntemi uygulanarak en iyi doğrusal yansız tahmin edicilerin elde edilmesi sağlanmaktadır.

GDR modelinin dönüşümü aşağıdaki özelliği sağlayan bir P matrisi yardımıyla olmaktadır.

- Ω^{-1} matrisi pozitif tanımlı bir matris olduğundan $n \times n$ boyutlu singüler olmayan bir matris ve

$$\Omega^{-1} = P'P = PP'$$

özelliğini sağlayacak bir P matrisi mevcuttur. P matrisi, Ω^{-1} matrisinin 'karekök matrisi' olarak ifade edilebilir (www.econ.uiuc.edu).

Dönüşüm için P matrisi kullanılarak (2.2) modeli aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir.

$$P\underline{Y} = PX\underline{\beta} + P\underline{\varepsilon}$$
$$\underline{Y}^* = X^*\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}^* \qquad (2.6)$$

Burada $\underline{Y}^* = P\underline{Y}$, $X^* = PX$ ve $\underline{\varepsilon}^* = P\underline{\varepsilon}$ olup (2.6) modeli 'dönüştürülmüş model' olarak adlandırılır. Görüldüğü gibi (2.2) orijinal modeli ile (2.6) dönüştürülmüş model aynı bilinmeyen β regresyon katsayılarına sahiptir.

Dönüştürülmüş modelin hata terimi, ε^*, ile ilgili özelliklere bakılacak olursa,

- $E(\underline{\varepsilon}^*) = E(P\underline{\varepsilon}) = PE(\underline{\varepsilon}) = 0$

- $Kov(\underline{\varepsilon}^*) = E(\underline{\varepsilon}^*\underline{\varepsilon}^{*'})$

$$= E(P\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}'P')$$
$$= PE(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}')P'$$
$$= \sigma^2 P\Omega P'$$
$$= \sigma^2 P(\Omega^{-1})^{-1}P'$$
$$= \sigma^2 P(P'P)^{-1}P', \qquad P'P = \Omega^{-1}$$
$$= \sigma^2 PP^{-1}P'^{-1}P', \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$= \sigma^2 I_n$$

olarak bulunur ki görüldüğü gibi dönüştürülmüş modelde değişen varyanslılık ve otokorelasyon sorunu ortadan kalkmıştır. Ayrıca $rank(X^*) = rank(PX) = k$'dır, çünkü k ranklı bir matris singüler olmayan bir matris ile çarpıldığında rankı değişmez. Bununla beraber $\underline{\varepsilon}^*$ da, $\underline{\varepsilon}$'nun lineer bir dönüşümü olarak elde edildiğinden, normal dağılım göstermektedir. Bunların sonucu olarak söylenebilir ki (2.2) genelleştirilmiş model klasik varsayımları sağlamamakla beraber (2.6) dönüştürülmüş model klasik varsayımları sağlamaktadır ve (2.6) modeline SEKK

yönteminin uygulanması sonucunda en iyi doğrusal yansız (BLUE) tahmin ediciler elde edilecektir (www.econ.uiuc.edu).

Dönüştürülmüş (2.6) modeli için SEKK tahmin edicisi (1.7) eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}\underline{\hat{\beta}}_{GEKK} &= (X^{*'}X^{*})^{-1}X^{*'}\underline{Y}^{*} \\ &= (X'P'PX)^{-1}X'P'P\underline{Y} \\ &= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\underline{Y} \end{aligned} \qquad (2.7)$$

şeklinde, dönüştürülmüş değişkenler kullanılarak elde edilir. Eşitlik (2.7) ile elde edilen tahmin edici literatürde '*Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicisi' veya 'Aitken Tahmin Edicisi*' olarak bilinir. $\underline{\hat{\beta}}_{GEKK}$, tüm lineer ve yansız tahmin ediciler arasında en küçük varyansa sahiptir. Dönüştürülmüş modelin SEKK tahmin edicisi modelin GEKK tahmin edicisidir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}E(\underline{\hat{\beta}}_{GEKK}) &= E\left[(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\underline{Y}\right] \\ &= E\left[(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}X\underline{\beta} + (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\underline{\varepsilon}\right] \\ &= \beta + (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}E(\underline{\varepsilon}) \\ &= \underline{\beta}\end{aligned}$$

olarak elde edilir ve böylece $\underline{\hat{\beta}}_{GEKK}$'in yansız olduğu gösterilebilir. Bununla beraber $\underline{\hat{\beta}}_{GEKK}$'in varyans-kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned}Kov(\underline{\hat{\beta}}_{GEKK}) &= E(\underline{\hat{\beta}}_{GEKK} - \underline{\beta})(\underline{\hat{\beta}}_{GEKK} - \underline{\beta})' \\ &= E\left[(X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}'\Omega^{-1}X(X'\Omega^{-1}X)^{-1}\right] \\ &= \sigma^{2}(X'\Omega^{-1}X)^{-1}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. σ^2 'nin bilinmediği durumlarda,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}})'\Omega^{-1}(\underline{Y} - X\underline{\hat{\beta}})}{n-k}$$

ile tahmin edilebilir.

Sonuç olarak, eğer hata terimi varyans-kovaryans matrisi, Ω, biliniyorsa, genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisi iki yolla bulunabilir:

1) Eşitlik ($\Omega^{-1} = P'P$ özelliği kullanılarak P matrisi elde edilir. Böylece dönüştürülmüş değişkenler $X^* = PX$, $\underline{Y}^* = P\underline{Y}$ bulunur ve bu değişkenler kullanılarak en küçük kareler tahmin edicisi $\underline{\hat{\beta}}_{GEKK} = (X^{*'}X^*)^{-1}X^{*'}\underline{Y}^*$ elde edilir.

2) Ω bilindiğinde Ω^{-1} bulunur ve genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisi $\hat{\beta}_{GEKK} = (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\underline{Y}$ formülü ile doğrudan elde edilir

Eşitlik (2.7)'de hata teriminin Ω varyans-kovaryans matrisi bilindiği varsayılır. Ancak uygulamada genellikle varyans-kovaryans matrisi bilinmez. Bu sebeple, Ω'nın tutarlı bir tahmin edicisi olan S matrisi kullanılarak GEKK tahmin edicisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\underline{\hat{\beta}}^*_{GEKK} = (X'S^{-1}X)^{-1}X'S^{-1}\underline{Y} \qquad (2.8)$$

2.2.1. Değişen Varyanslılık Durumu

Bir çok ekonometrik modelde, hata teriminin sabit varyanslı olma varsayımı geçerli olmamaktadır. Bu nedenle kurulan regresyon modelinin parametre tahminleri yapılırken SEKK yöntemi yerine GEKK yönteminin uygulanması gerekmektedir. Modelin,

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

ve

$$E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') = \sigma^2\Omega$$

olduğunu varsayalım. Burada σ^2'nin bilinmediği ancak Ω'nın bilindiği ve simetrik, pozitif tanımlı bir matris olduğu varsayılır. Bu durumda Ω,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\lambda_n \end{bmatrix} \qquad (2.9)$$

biçiminde bir matris olacaktır. (2.9) matrisi incelendiğinde hata terimleri değişen varyanslı olmakla birlikte hata terimleri arasındaki kovaryans sıfırdır. Bu durumda hata terimi varyans-kovaryans matrisi,

$$E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\lambda_2 \end{bmatrix}$$

olacaktır. λ_i'lerin bilinen pozitif birer sayı olduklarını ve σ^2'nin bilinmediğini kabul edelim. Bu durumda P ve P^{-1} matrisleri,

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{1/\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{1/\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{1/\lambda_n} \end{bmatrix}$$

biçiminde olup, $P'P = PP' = \Omega^{-1}$ olacaktır. Parametre tahminlerinin yapılabilmesi için, varyansın nasıl değiştiği konusunda bir varsayımda bulunulması ya da tüm değişken varyanslarının bilinmesi gerekir. Sonuç olarak, modelde değişen varyanslılık olması durumunda parametrelerin hem SEKK hem de GEKK tahmin edicileri yansız olacaktır ancak en iyi doğrusal yansız tahmin edicilerin elde edilmesi için GEKK yöntemi kullanılmalıdır. SEKK yönteminin kullanılması, büyük standart hataların bulunmasına dolayısıyla küçük t istatistiklerinin elde edilmesine sebep olacak, bu da istatistiksel hipotez testlerinin yanlış sonuçlar vermesine sebep olacaktır.

2.2.2. Otokorelasyonlu Hata Terimleri Durumu

Eğer modeldeki hata terimleri arasında bir korelasyon (ilişki) söz konusu ise,

$$E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') = \sigma_\varepsilon^2 I$$

varsayımı geçerli olmayacaktır. Bu durumda parametre tahminleri için SEKK yönteminin uygulanması, katsayı vektörlerinin yansız olarak elde edilmesine, olması gerekenden daha farklı varyansların bulunmasına ve ileriye dönük tahminlerin doğruluktan uzak olmasına sebep olacaktır.

$$Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t \qquad (2.10)$$

gibi bir modelin ε_t rasgele değişkeni birinci dereceden bir otokorelasyona sahip olsun. Başka bir ifade ile, herhangi bir dönemin hata terimi daha önceki dönemin hata teriminin doğrusal bir fonksiyonu olsun. Bu durumda,

$$\varepsilon_t = \rho(\varepsilon_{t-1}) + e_t, \quad 0 < \rho < 1 \tag{2.11}$$

ile gösterilmek üzere,

$$E(e_t) = 0$$

$$E(e_t e_{t-s}) = 0, \qquad s \neq 0$$

$$E(e_t e_{t-s}) = \sigma_e^2 \qquad s = 0$$

dır (Özkazanç, 1997). Eşitlik (2.11) yardımıyla otokorelasyonlu bir modelde farklı t dönemlerine için ε_t'lerin fonksiyonları,

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_t = \rho(\varepsilon_{t-1}) + e_t \\
&\varepsilon_{t-1} = \rho(\varepsilon_{t-2}) + e_{t-1} \\
&\varepsilon_{t-2} = \rho(\varepsilon_{t-3}) + e_{t-2} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.12}$$

şeklinde olacaktır. Gerekli açılımlar sonunda ise r dönem için ε_t,

$$\varepsilon_t = \sum \rho^r e_{t-r} \tag{2.13}$$

olacaktır. (2.13) eşitliği için,

$$\begin{aligned}
E(\varepsilon_t) &= E(\sum \rho^r e_{t-r}) \\
&= \sum \rho^r E(e_{t-r}), \qquad (E(e_t) = 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olacaktır. Görüldüğü gibi modelde otokorelasyon olsa bile hata terimlerinin beklenen değeri yine sıfır olacaktır. Birinci dereceden otokorelasyona sahip hata terimlerinin varyansı ise,

$$E(\varepsilon_t^2) = \sigma_e^2(1+\rho^2+\rho^4+\rho^8+...)$$
$$= \frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2} = \sigma_\varepsilon^2 \qquad (2.14)$$

olacaktır (Özkazanç,1997). Birbirini izleyen iki döneme ilişkin hata terimleri arasındaki kovaryans, dönem farkı s ile gösterilmek üzere,

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s}) = \rho^s \sigma_\varepsilon^s \qquad (2.15)$$

dır. Eşitlik (2.15) yardımıyla hata terimlerinin varyans-kovaryans matrisi,

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma_\varepsilon^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \cdots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-2} & \cdots & \rho^2 & \rho & 1 & \rho \\ \rho^{n-1} & \cdots & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \Omega$$

şeklinde elde edilir. Ω matrisi simetrik ve korelasyon katsayılarını kapsayan bir matristir (Özkazanç, 1997). Eşitlik (2.7) ile verilen GEKK tahmininde Ω^{-1} yerine yazıldığında parametrelerin GEKK tahmin edicisi elde edilmiş olur.

Modelde birinci dereceden otokorelasyon olması halinde parametre tahminleri iki aşamalı bir yöntemle de, veriler dönüştürülerek elde edilebilir. Bunun için, orijinal veriler bilinen ρ ile uygun şekilde dönüştürülür. Dönüştürülen veriler kullanılarak SEKK yöntemi uygulanır. Uygun bir P matrisi ile dönüştürülen yeni model,

$$P\underline{Y} = PX\underline{\beta} + P\underline{\varepsilon}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki P matrisi,

$$E(P\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}'P') = \sigma^2 I$$

koşulunu sağlamalıdır. Böyle bir P matrisi,

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.18)$$

şeklinde olabilir. (2.18) matrisi kullanılarak dönüştürülen modele SEKK yöntemi uygulanması ile elde edilen parametre tahminleri ile GEKK yöntemi kullanılarak elde edilen parametre tahminleri aynıdır.

Daha ortak bir kullanımı olan dönüştürme yöntemi ise (2.18) matrisinin üstten bir satırın çıkartılmasıyla,

$$P = \begin{bmatrix} -\rho & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.19)$$

olarak elde edilir. Bu durumda n yerine $(n-1)$ veri kullanılmakta ve (2.19)'daki P matrisinin boyutu $(n-1)\times n$ olmaktadır. Bu $(n-1)$ sayıdaki yeni veri setiyle yapılan SEKK regresyon sonuçları, GEKK ile yapılan regresyon ile elde edilen sonuçlara çok yakın çıkmaktadır (Özkazanç, 1997).

BÖLÜM III

GÖRÜNÜŞTE İLİŞKİSİZ REGRESYON MODELİ

3.1. Genel Bilgiler

GİR modeli, bazı bağımlı değişkenlerin, bağımsız değişkenlerin lineer bir fonksiyonu olarak ifade edilebildiği durumlarda ortaya çıkar ki bu da birbirlerinden bağımsız olmayan hata terimleri ile çoklu regresyon denklemlerinin oluşturduğu bir sisteme sebep olur. Bu sistemi meydana getiren çoklu regresyon denklemleri yapısal olarak ilişkisiz gibi görünseler de (eşanlı denklem sistemi özelliğinde olmasalar da) aşağıdaki sebeplerden dolayı istatistiksel olarak ilişkili olabilirler.

- Bazı katsayılar denklemler arasında ortak kullanılmaktadır.
- Aynı zaman noktasında, denklemlerdeki karşılıklı hata terimleri ilişkilidir.
- Denklemlerdeki bağımsız değişkenlerin alt kümesi aynıdır, bununla beraber tüm gözlemler aynı değildir. Başka bir ifade ile denklemlerdeki bağımsız değişkenler aynı olmakla beraber bu bağımsız değişken değerleri aynı değildir.

Sistemde yer alan denklemlerin birbirleri ile ilişkileri, denklemlere ait hata terimlerinin ilişkili olmasından kaynaklanmaktadır. Karşılıklı hataları ilişkili denklemler sisteminin parametre tahminleri yapılırken sistem bir bütün olarak ele alınır. Hata terimleri ilişkili denklemlerin aynı zamanda birlikte ele alınarak parametre tahminlerinin yapıldığı çok değişkenli regresyon yöntemi Zellner(1962) tarafından öne sürülen "Görünüşte İlişkisiz Regresyon(GİR)" yöntemidir. GİR yönteminin temeli Genelleştirilmiş En Küçük Kareler yöntemine dayanır.

İlişkili olan denklemler sistemine ayrı ayrı SEKK yöntemi uygulanırsa yansız ve tutarlı ancak etkin olmayan tahminciler elde edilir ki bu da yanlış istatistiksel sonuç çıkarımlarına sebep olur. Bu yüzden hata terimleri ilişkili bu denklemler

sisteminin parametre tahminlerini yaparken sistemi bir bütün olarak ele alan ve hata terimi varyans-kovaryan matrisini de regresyona dahil eden GİR yöntemini kullanmak yansız, tutarlı ve etkin tahmin ediciler elde edilmesini sağlar (Doğan, 1998).

Hata terimleri ilişkili bu tür regresyon denklemlerine iktisadi modellerde sık sık rastlanmaktadır. Çeşitli malların talep fonksiyonları veya çeşitli endüstri dallarının üretim fonksiyonlarında hata terimleri ilişkili denklemler görülebilmektedir. Örneğin, A malı talep fonsiyonu hata terimi; B, C malları talep fonksiyonları hata terimleri ile ilişkili olabilir. Ayrıca, bağımlı ve bağımsız değişken verilerinin zaman serisi veya anket verisi olduğu durumlarda da GİR modeli ile karşılaşılabilmektedir.Benzer biçimde biyokimya, göç ve nüfus hareketleri, farmakoloji vb. gibi konularda GİR modellerine sık başvurulur.

3.2. Temel Model

Aynı zaman periyodunda $t.$ birey üzerinde gözlenmiş, her biri n gözlemden oluşan, N denklemli bir GİR denklem sistemi,

$$
\begin{aligned}
y_{1t} &= \beta_{01} + X_{1t,1}\beta_{11} + X_{1t,2}\beta_{12} + ... + X_{1t,k_1}\beta_{1k_1} + \varepsilon_{1t} \\
y_{2t} &= \beta_{02} + X_{2t,1}\beta_{21} + X_{2t,2}\beta_{22} + ... + X_{2t,k_2}\beta_{1k_2} + \varepsilon_{2t} \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (3.1) \\
y_{Nt} &= \beta_{0N} + X_{Nt,1}\beta_{N1} + X_{Nt,2}\beta_{N2} + ... + X_{Nt,k_N}\beta_{Nk_N} + \varepsilon_{Nt} \qquad t = 1,2,.....n
\end{aligned}
$$

biçiminde yazılabilir.

Eşitlik (3.1) matris notasyonu ile,

$$\begin{aligned}
\underline{y}_1 &= X_1 \underline{\beta}_1 + \underline{\varepsilon}_1 \\
\underline{y}_2 &= X_2 \underline{\beta}_2 + \underline{\varepsilon}_2 \\
&\vdots \\
\underline{y}_N &= X_N \underline{\beta}_N + \underline{\varepsilon}_N
\end{aligned} \tag{3.2}$$

biçiminde yazılabilir. Bu N denklemli sistemde $i.$ denklem,

$$\underline{y}_i = X_i \underline{\beta}_i + \underline{\varepsilon}_i$$

şeklinde ifade edilebilir.Burada;

$\underline{y}_i : (n \times 1)$ boyutlu $i.$ denkleme ait bağımlı değişkenin gözlem değerleri vektörünü,

$X_i : (n \times k_i)$ boyutlu $i.$ denkleme ait bağımsız değişkenlerin gözlem değerleri matrisini,

$\underline{\beta}_i : (k_i \times 1)$ boyutlu $i.$ denkleme ait bilinmeyen regresyon katsayıları vektörünü,

$\underline{\varepsilon}_i : (n \times 1)$ boyutlu $i.$ denkleme ait hata terimi vektörünü temsil etmektedir.

Eşitlik (3.1) ile gösterilen regresyon denklemleri birleştirilmiş biçimde bir bütün olarak ele alındığında matris notasyonu ile;

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & X_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & X_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\beta}_1 \\ \underline{\beta}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \underline{\beta}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{\varepsilon}_2 \\ . \\ . \\ \underline{\varepsilon}_N \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

veya

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \tag{3.4}$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$\underline{Y}:(Nn\times 1)$ boyutlu bağımlı değişkenlere ait gözlem değerleri vektörünü,

$X:(Nn\times\sum_{i=1}^{N}k_i)$ boyutlu bağımsız değişkenlere ait gözlem değerlerini matrisini,

$\underline{\beta}:(\sum_{i=1}^{N}k_i\times 1)$ boyutlu regresyon katsayıları vektörünü,

$\underline{\varepsilon}:(Nn\times 1)$ boyutlu, $E(\underline{\varepsilon})=\underline{0}_{Nn}$ ve $E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}')=\Omega=\Sigma\otimes I_n$ varsayımı ile hata terimleri vektörünü ifade etmektedir. Σ, (3.4) eşitliği ile gösterilen regresyon modelinde denklemlerin hata terimleri arasındaki varyans-kovaryans matrisini ifade etmektedir.

N, modeldeki denklem sayısını; t, zamanı ve n, denklemlerdeki gözlem sayısını göstermek üzere GİR modellerinde hata terimleri üzerindeki varsayımlar;

i) $Kov(\varepsilon_{it},\varepsilon_{jt})=E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt})=\sigma_{ij}, \quad i\neq j \quad t=1,2,...,n \quad i,j=1,...,N$

Varsayıma göre, aynı zaman periyodundaki denklemlerin hata terimleri arasında ilişki vardır

ii) $Kov(\varepsilon_{it},\varepsilon_{it})=Var(\varepsilon_{it})=\sigma_{ii}$

Varsayıma göre, modeli meydana getiren her bir denklemde sabit varyanslılık varsayımı geçerlidir.

iii) $Kov(\varepsilon_{it},\varepsilon_{js})=E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{js})=0, \quad t\neq s$

Varsayıma göre, farklı zaman periyodundaki denklemlerin hata terimleri arasında ilişki yoktur.

iv) Hata terimleri ($\underline{\varepsilon}_i$, $i=1,2,...,n$) normal dağılıma sahiptir.

Varsayıma göre, her bir denklemin hata terimleri normal dağılıma sahiptir.

v) $E(\underline{\varepsilon}_i)=0$, $i=1,2,...,n$

Varsayıma göre, her bir denklemin hata terimlerinin beklenen değeri sıfıra eşittir.

i., ii.ve iii. varsayımların geçerliliği ile, *i*. ve *j*. denklemler arasındaki kovaryans matrisi aşağıdaki gibi gösterilebilir;

$$Kov(\underline{\varepsilon}_i,\underline{\varepsilon}_j)=E(\underline{\varepsilon}_i\underline{\varepsilon}_j^{'})=E\left[\begin{pmatrix}\varepsilon_{i1}\\ \varepsilon_{i2}\\ \vdots\\ \varepsilon_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_{j1} & \varepsilon_{j2} & \cdots & \varepsilon_{jn}\end{pmatrix}\right]$$

$$=E\begin{pmatrix}\varepsilon_{i1}\varepsilon_{j1} & \varepsilon_{i1}\varepsilon_{j2} & \cdots & \varepsilon_{i1}\varepsilon_{jn}\\ \varepsilon_{i2}\varepsilon_{j1} & \varepsilon_{i2}\varepsilon_{j2} & \cdots & \varepsilon_{i2}\varepsilon_{jn}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varepsilon_{in}\varepsilon_{j1} & \varepsilon_{in}\varepsilon_{j2} & \cdots & \varepsilon_{in}\varepsilon_{jn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma_{ij} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_{ij} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{ij}\end{bmatrix}$$

$$=\sigma_{ij}I_n \qquad i,j=1,2,...,N$$

Sonuç olarak N denklemli bir GİR modelinde varyans-kovaryans matrisi, Ω,

$$Kov(\underline{\varepsilon}) = E(\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}') = \Omega$$

$$= \begin{bmatrix} E(\underline{\varepsilon}_1\underline{\varepsilon}_1') & E(\underline{\varepsilon}_1\underline{\varepsilon}_2') & \cdots & E(\underline{\varepsilon}_1\underline{\varepsilon}_N') \\ E(\underline{\varepsilon}_2\underline{\varepsilon}_1') & E(\underline{\varepsilon}_2\underline{\varepsilon}_2') & \cdots & E(\underline{\varepsilon}_2\underline{\varepsilon}_N') \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(\underline{\varepsilon}_N\underline{\varepsilon}_1') & E(\underline{\varepsilon}_N\underline{\varepsilon}_2') & \vdots & E(\underline{\varepsilon}_N\underline{\varepsilon}_N') \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11}I_{n\times n} & \sigma_{12}I_{n\times n} & \sigma_{1N}I_{n\times n} \\ \sigma_{21}I_{n\times n} & \sigma_{22}I_{n\times n} & \sigma_{2N}I_{n\times n} \\ \\ \sigma_{N1}I_{n\times n} & \sigma_{N2}I_{n\times n} & \sigma_{NN}I_{n\times n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{12} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \\ 0 & \sigma_{11} & \cdots & 0 & 0 & \sigma_{12} & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{11} & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{12} & & & \\ \sigma_{12} & 0 & \cdots & 0 & \sigma_{22} & 0 & \cdots & 0 & \ddots & & \\ 0 & \sigma_{12} & \cdots & 0 & 0 & \sigma_{22} & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{12} & 0 & 0 & \cdots & \sigma_{22} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{1N} & 0 & \cdots & 0 & & & & \vdots & & & \ddots \\ 0 & \sigma_{1N} & \cdots & 0 & & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{1N} & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \otimes I_{n\times n}$$

$$= \Sigma \otimes I_{n\times n} \qquad (3.5)$$

olup I, $n \times n$ boyutlu birim matrisi, $\otimes$ ise kronoker çarpımı ifade etmektedir. (3.5) nolu matriste σ_{ii}'ler denklemlerdeki hata terimleri arasındaki varyansı, σ_{ij}'ler ise $i.$ ve $j.$ denklemlerdeki hata terimleri arasındaki kovaryansı göstermektedir (Srivastava ve Giles, 1987).

Σ, $\{\sigma_{ij}\}$'lerden oluşan $(N \times N)$ boyutlu pozitif tanımlı simetrik bir matris, Ω ise $(Nn \times Nn)$ boyutlu pozitif tanımlı simetrik bir matristir.

Hata terimi varyans-kovaryans matrisinin (Ω) tersi,

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma^{11}I & \sigma^{12}I & \cdots & \sigma^{1N}I \\ \sigma^{21}I & \sigma^{22}I & \cdots & \sigma^{2N}I \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma^{N1}I & \sigma^{N2}I & \cdots & \sigma^{NN}I \end{bmatrix} \qquad (3.6)$$

$$= \Sigma^{-1} \otimes I$$

biçiminde gösterilebilir. Hata terimleri varyans-kovaryans matrisinin köşegen olmaması denklemler arasında istatistiksel olarak bir ilişki olduğunu gösterir.

GİR modelini oluşturan denklemlerin kendi içinde bir otokorelasyonu yoktur. Sadece denklemlerdeki hata terimleri $\underline{\varepsilon}_1, ..., \underline{\varepsilon}_N$ arasında bir ilişki söz konusudur (Uysal,1997).

3.3. Hata Terimi Varyans-Kovaryans Matrisinin Tahmini

GİR model tahmini yapılırken hata terimi varyans-kovaryans matrisi regresyona dahil edilmektedir. Ancak uygulamada genellikle hata terimi varyans-kovaryans matrisi bilinmez. Bu yüzden bu matrisin tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla Zellner (1962), SEKK yöntemi ile elde edilen hata terimlerini kullanarak aşağıdaki çözümü öne sürmüştür.

s_{ij}'ler, σ_{ij}'lerin tahminini, S, Σ matrisinin tahmini ve $\hat{\Omega}$ da Ω matrisinin tahminini göstermek üzere sistemin hata terimi varyans-kovaryans matrisinin tutarlı bir tahmini, $\hat{\Omega}$,

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1N} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{N1} & s_{N2} & \cdots & s_{NN} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\hat{\Omega} = S \otimes I \tag{3.7}$$

olarak ifade edilebilir. S matrisinin tersi ise,

$$S = \begin{bmatrix} s^{11} & s^{12} & \cdots & s^{1N} \\ s^{21} & s^{22} & \cdots & s^{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s^{N1} & s^{N2} & \cdots & s^{NN} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\hat{\Omega}^{-1} = S^{-1} \otimes I$$

şeklinde olacaktır. Zellner (1962,1963), S varyans-kovaryans matrisinin elemanlarının elde edilmesi için aşağıdaki fomülasyonu önermiştir.

Denklemlerdeki parametre sayısı aynı (k) ise;

$$s_{ij} = \frac{1}{n} y_i^{'}(I_n - X_i(X_i^{'}X_i)^{-1}X_i^{'})(I_n - X_j(X_j^{'}X_j)^{-1}X_j^{'})y_j \qquad \text{i,j=1,…,N}$$

$$= \frac{1}{n} e_i^{'} e_j \qquad (3.8)$$

Denklemlerdeki parametre sayısı farklı ise;

$$s_{ij} = \frac{1}{n-k_i} y_i^{'}(I_n - X_i(X_i^{'}X_i)^{-1}X_i^{'})(I_n - X_j(X_j^{'}X_j)^{-1}X_j^{'})y_j$$

$$= \frac{1}{n-k_i} e_i^{'} e_j \qquad i, j = 1,...,N \text{ ve } k_i \geq k_j$$

$$(3.9)$$

Eşitlik (3.8) ve (3.9)'da bulunan e_i hata terimi vektörleri her bir denkleme ayrı ayrı SEKK yöntemi uygulanarak elde edilen hata terimleri olup "kısıtlanmış" ve "kısıtlanmamış" hata terimleri vektörleri olarak iki farklı şekilde elde edilir (Viraswami, 1998).

3.4.1. Kısıtlanmış hata terimleri ile GİR modeli

$\underline{\beta}'$nın GİR yöntemi ile parametre tahminlerinin yapılabilmesi için önceden hata terimi varyans-kovaryans matrisinin bilinmesi gerektiğinden bahsedilmişti. Ancak Σ, genellikle bilinmediğinden bunun tutarlı kestiricisi S matrisinin elde edilebilmesi için s_{ij} elemanlarının hesaplanması gerekmektedir. Bu hesaplama eşitlik (3.8) ve (3.9)'da verilmişti. Bu eşitliklerdeki ε_i hata terimi vektörleri, eğer her bir denkleme ayrı ayrı SEKK yöntemi uygulanarak,

$$\underline{Y}_i = X_i \underline{\beta}_i + \underline{\varepsilon}_i, \quad i = 1,...,N \qquad (3.10)$$

şeklinde elde ediliyorsa bu hata terimi vektörlerine "kısıtlanmış hata terimleri vektörü" adı verilir. Kısıtlanmış hata terimi vektörleri $\underline{\hat{\varepsilon}}_i$ ile hata terimi varyans-kovaryans matrisinin tutarlı tahmini $\hat{S}$ ile gösterilmek üzere , $\hat{S}$ matrisini oluşturan $\hat{s}_{ij}$ elemanları kısıtlanmış hata terimleri ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{s}_{ij} = \frac{1}{n} \underline{\hat{\varepsilon}}_i' \underline{\hat{\varepsilon}}_j , \qquad i, j = 1,2,...,N \tag{3.11}$$

3.4.2. Kısıtlanmamış hata terimleri ile GİR modeli

$\underline{\beta}'$nın GİR yöntemi ile parametre tahminlerinin yapılabilmesi için hata terimi varyans-kovaryans matrisinin tahminin elde edilebilmesi için kullanılan hata terimlerini elde edebilmek için diğer bir yöntem de "kısıtlanmamış hata terimlerinin" kullanılmasıdır. Kısıtlanmamış hata terimlerini kısıtlanmış hata terimlerinden ayıran en belirgin özellik GİR modeli ile çok değişkenli regresyon modellerini birbirinden ayıran kısıtlamaların göz ardı edilmesidir. Diğer bir deyişle, kısıtlanmamış hata terimleri tüm $X_1, X_2,..., X_N$ bağımsız değişkenlerin y_i üzerindeki regresyonuna SEKK uygulanarak elde edilir. Yani hata terimleri,

$$\underline{Y}_i = X \underline{\beta}_i + \underline{\varepsilon}_i , \qquad i = 1,..., N \tag{3.12}$$

regresyon denklemi ile elde ediliyorsa bu hata terimi vektörlerine "kısıtlanmamış hata terimleri vektörü" adı verilir. Kısıtlanmamış hata terimi vektörleri $\underline{\tilde{\varepsilon}}_i$ ile hata terimi varyans-kovaryans matrisinin tutarlı tahmini $\tilde{S}$ ile gösterilmek üzere , $\tilde{S}$ matrisini oluşturan $\tilde{s}_{ij}$ elemanları kısıtlanmamış hata terimleri,

$$\tilde{s}_{ij} = \frac{1}{n} \underline{\tilde{\varepsilon}}_i' \underline{\tilde{\varepsilon}}_j , \qquad i, j = 1,2,...,N \tag{3.13}$$

olarak elde edilir.

3.4. Görünüşte İlişkisiz Regresyon Denklemlerinde Parametre Tahmini

GİR yönteminde parametre tahminleri yapılırken GEKK yöntemi temel alınmıştır. Daha önce belirtildiği gibi hata terimleri ilişkili regresyon denklemlerinin parametre tahminleri için, her bir denkleme ayrı ayrı SEKK yönteminin uygulanması etkin olmayan tahmin edicilerin bulunmasına sebep olmaktadır. Bu yüzden, GİR yönteminde, tahmin edicilerin etkinlik özelliği dikkate alınarak denklemler arası hata terimlerinin varyans-kovaryans matrisi de parametre tahminlerinde yer almaktadır.

3.4.1. Genelleştirilmiş en küçük kareler tahmini

Eğer hata terimi varyans-kovaryans matrisi, Ω, biliniyor ise eşitlik (3.1) ile gösterilen GİR denklemler sistemi ikinci bölümde anlatılan GEKK yöntemi kullanılarak tahmin edilebilir. Hata terimi varyans-kovaryans matrisi,

$$E(\varepsilon\varepsilon') = \Omega = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \otimes I_n = \Sigma \otimes I_n$$

olmak üzere σ_{ij}'lerin bilindiği varsayılsın. Bu durumda $P\Omega P' = I$ veya $P'P = \Omega^{-1}$ olacak şekilde tekil olmayan bir P matrisi elde edilebilir. P matrisi kullanılarak N denklemli model,

$$P\underline{Y} = PX\underline{\beta} + P\underline{\varepsilon}$$

şeklinde dönüştürülebilir. Dönüştürülmüş modele SEKK yöntemi uygulanarak $\underline{\beta}$'nın tahmin edicisi,

$$\underline{\tilde{\beta}}_{GEKK} = \left[(PX)'(PX)\right]^{-1}(PX)'(P\underline{Y})$$

$$= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}X'\Omega^{-1}\underline{Y}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma^{11}X_1'X_1 & \sigma^{12}X_1'X_2 & \cdots & \sigma^{1N}X_1'X_N \\ \sigma^{21}X_2'X_1 & \sigma^{22}X_2'X_2 & \cdots & \sigma^{2N}X_2'X_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma^{N1}X_N'X_1 & \sigma^{N2}X_N'X_2 & \cdots & \sigma^{NN}X_N'X_N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}\sigma^{1i}X_1'y_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N}\sigma^{Ni}X_N'y_i \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

ile elde edilir. Burada σ^{ij} değerleri Ω^{-1} matrisinin elemanlarıdır. Eşitlik (3.14) ile elde edilen $\underline{\tilde{\beta}}_{GEKK}$ tahmin edicisine "Zellner tahmin edicisi" veya "Aitken'in GEKK tahmin edicisi" denir. $\underline{\tilde{\beta}}$'ların varyans-kovaryans matrisi ise,

$$Kov(\underline{\tilde{\beta}}) = E(\underline{\tilde{\beta}} - \underline{\beta})(\underline{\tilde{\beta}} - \underline{\beta})'$$

$$= E\left[(X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}\underline{Y} - \underline{\beta}\right]\left[(X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}\underline{Y} - \underline{\beta}\right]'$$

$$= E\left[(X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}(X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}) - \beta\right]\left[(X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}(X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}) - \underline{\beta}\right]'$$

$$= (X'\Omega^{-1}X)^{-1}$$

olarak bulunur (Ağaoğlu,1998).

3.4.1. İki aşamalı genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi

Modelin hata terimi varyans-kovaryans matrisi genellikle bilinmez. Bu durumda varyans-kovaryans matrisinin tahmin edilmesi gerekmektedir. Hata terimi varyans kovaryans matrisinin hem kısıtlanmış hata terimleri hem de kısıtlanmamış hata terimleri ile nasıl tahmin edileceğine kesim 3.3'de değinilmişti. İster kısıtlanmış hata terimleri isterse kısıtlanmamış hata terimleri ile tahmin edilen varyans-kovaryans matrisi kullanılarak tüm denklem sistemine Aitken'in GEKK yöntemini uygulayarak $\underline{\beta}$'nın en iyi doğrusal yansız tahmin edicisi (BLUE) $\underline{\tilde{\beta}}_{İAGEKK}$ aşağıdaki adımlar ile elde edilir:

Adım 1 : GİR modelindeki her bir denkleme SEKK yöntemi uygulanarak parametre tahminleri eşitlik (1.7) ile aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\underline{\hat{\beta}}_i = (X_i' X_i)^{-1} X_i' \underline{Y}_i$$

Adım 2 : Her bir denklemin hata terimleri vektörü elde edilir.

$$\underline{e}_i = \underline{Y}_i - X_i \underline{\hat{\beta}}_i$$

Adım 3 : Modelin hata terimi varyans kovaryans matrisinin tahmini S, (3.8) veya (3.9) eşitlikleri ile bulunur.

Adım 4 : $\underline{\beta}$'nın İki Aşamalı Genelleştirilmiş En Küçük Kareler tahmin edicisi,

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{\beta}}_{\text{İAGEKK}} &= (X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}\underline{Y} \\ &= \left[X'(S^{-1}\otimes I_n)X\right]^{-1}X'(S^{-1}\otimes I_n)\underline{Y} \qquad (3.15)\end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır.

Eşitlik (3.15) ile gösterilen tahmin edici, "*İki Aşamalı Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicisi"* veya "*Aitken'in İki Aşamalı Tahmin Edicisi"* olarak adlandırılmıştır. Burada Ω, hata terimi varyans-kovaryans matrisidir. Bu durumda,

$$\underline{\tilde{\beta}}_{\text{İAGEKK}} = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{\beta}}_1 \\ \underline{\tilde{\beta}}_2 \\ \vdots \\ \underline{\tilde{\beta}}_N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s^{11}X_1'X_1 & s^{12}X_1'X_2 & \cdots & s^{1N}X_1'X_N \\ s^{21}X_2'X_1 & s^{22}X_2'X_2 & \cdots & s^{2N}X_2'X_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s^{N1}X_N'X_1 & s^{N2}X_N'X_2 & \cdots & s^{NN}X_N'X_N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} s^{1i}X_1'y_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} s^{Ni}X_N'y_i \end{bmatrix}$$

olacaktır. $\underline{\tilde{\beta}}$'ların varyans-kovaryans matrisi ise,

$$
\begin{aligned}
Kov(\underline{\tilde{\beta}}) &= E(\underline{\tilde{\beta}} - \underline{\beta})(\underline{\tilde{\beta}} - \underline{\beta})' \\
&= E\left[(X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}\underline{Y} - \underline{\beta}\right]\left[(X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}\underline{Y} - \underline{\beta}\right]' \\
&= E\left[(X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}(X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}) - \beta\right]\left[(X'\hat{\Omega}^{-1}X)^{-1}X'\hat{\Omega}^{-1}(X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}) - \underline{\beta}\right]' \\
&= (X'\Omega^{-1}X)^{-1} \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

dır.

3.3.2. İteratif genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi

GİR model tahminin en çok olabilirlik tahmin edicisi, normal dağılımlı hata terimleri varsayımı ile iteratif yöntemle elde edilir. Bunun için hata terimi varyans-kovaryans matrisi her adımda yeniden elde edilir.

$$\hat{\Omega}_2 = (Y - X\tilde{\beta}_1)(Y - X\tilde{\beta}_1)' \qquad (3.17)$$

$\tilde{\beta}_1$, iki aşamalı genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisidir. (3.17) formülüyle elde edilen hata terimi varyans-kovaryans matrisi kullanılarak β'nın yeni bir tahmin edicisi,

$$\tilde{\beta}_2 = (X'\hat{\Omega}_2^{-1}X)^{-1}(X'\hat{\Omega}_2^{-1}Y)$$

şeklinde elde edilir. $\tilde{\beta}_2$, kullanılarak hata terimi varyans-kovaryans matrisi yeniden elde edilir. Bu şekilde devam eden iterasyonda β'nın ve hata terimi varyans-kovaryans matrisinin tahmin edicisi,

$$\hat{\Omega}_i = (Y - X\tilde{\beta}_{i-1})(Y - X\beta_{i-1})'$$

ve

$$\tilde{\beta}_i = (X'\hat{\Omega}_i^{-1}X)^{-1}(X'\hat{\Omega}_i^{-1}Y)$$

şeklinde yazılabilir. Bu süreç, $\left\|\tilde{\beta}_i - \tilde{\beta}_{i-1}\right\|^2 < \delta$, $\delta > 0$ (δ, keyfi seçilmiş bir skaler olup $\delta = 10^{-3}$) oluncaya kadar devam eder. Park (1993) tarafından öne sürülen bu şekildeki parametre tahmin yöntemine "iteratif genelleştirilmiş en küçük kareler tahmini" adı verilir.

3.5. GİR MODELLERİNE İLİŞKİN HİPOTEZ TESTLERİ

i) $Kov(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{jt}) = E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}) = \sigma_{ij}, \quad i \neq j \quad t = 1,2,...,n \quad i, j = 1,...,N$

ii) $Kov(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{js}) = E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{js}) = 0, \quad t \neq s$

iii) $Kov(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{js}) = E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{js}) = 0, \quad t \neq s$

iv) Hata terimleri ($\underline{\varepsilon}_i$, $i = 1,2,...,n$) normal dağılıma sahiptir.

v) $E(\underline{\varepsilon}_i) = 0$, $i = 1,2,...,n$

varsayımları ile,

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

şeklinde gösterilen GİR modeline ilişkin hata terimi varyans-kovaryans matrisinin köşegen olup olmadığının test edilmesi için köşegenlik testi, ayrı denklemlerdeki katsayı vektörlerinin eşitliğinin testi ve GİR modeli için belirleyicilik katsayısı aşağıdaki gibi bulunmaktadır.

3.5.1. Hata terimi varyans kovaryans matrisinin köşegenlik testi

GİR modelinde hata terimi varyans kovaryans matrisinin köşegen olması denklemlerdeki hata terimleri arasında bir ilişkinin olmadığını gösterir. Bu durumda parametre tahminlerinin GİR yöntemi ile elde edilmesinin bir kazancı olmayacaktır. Bu amaçla varyans kovaryans matrisinin köşegenliğinin araştırılması gerekir.

$H_0 : \sigma_{ij} = 0 \quad \forall i, j = 1,..., N$ ve $i \neq j$ için

$H_1 :$ En az bir $\sigma_{ij} \neq 0$'dır.

hipotezini α anlam düzeyinde test etmek için hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımı altında Breusch-Pagan'ın Lagrange Çarpanları (LM) test istatistiği,

$$\lambda = n\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1} r_{ij}^2$$

$$= n\sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i-1} \frac{s_{ij}^2}{\sqrt{s_{ii}s_{jj}}} \qquad (3.18)$$

kullanılabilir. Eşitlik (3.18) ile elde edilen test istatistiği, $\chi^2_{\frac{N(N-1)}{2}}$ tablo değeri ile karşılaştırılarak hipotez test edilir. Eğer yokluk hipotezi red edilirse denklemlerdeki hata terimleri arasında ilişki olduğu ve regresyon denklemler sisteminin GİR yöntemi ile çözümlenmesi gerektiği sonucuna ulaşılır (www.puplic.asu.edu).

3.5.2. Ayrı Denklemlerdeki Katsayı Vektörlerinin Eşitliğinin Testi

$H_0 : C\underline{\beta} = \underline{\xi}$ yokluk hipotezine karşı $H_1 : C\underline{\beta} \neq \underline{\zeta}$ hipotezinin test edilmesi için Wald istatistiği kullanılabilir. $S = \lfloor s_{ij} \rfloor$ ve $\underline{\tilde{\beta}}$, $\underline{\beta}$'nın tahmin edicisi ve X matrisi eşitlik (3.3)'de tanımlandığı gibi olmak üzere hipotez testi için wald istatistiği,

$$W = (C\underline{\tilde{\beta}} - \underline{\xi})' \left\{ C\left[X'(S \otimes I_n)^{-1} X \right]^{-1} C' \right\}^{-1} (C\underline{\tilde{\beta}} - \underline{\xi}) \qquad (3.19)$$

dir. Yokluk hipotezi için, W istatistiği asimptotik olarak $r(C)$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımına sahiptir. Eğer yokluk hipotezi kabul edilirse farklı denklemlerdeki katsayı vektörlerinin eşit olduğu söylenebilir (Timm, 2002).

$H_0 : \underline{\beta}_1 = \underline{\beta}_2 = \ldots = \underline{\beta}_N$ hipotezi ile ayrı denklemlerdeki katsayı vektörlerinin eşit olup olmadığını test etmek için diğer bir yöntem Zellner(1962) tarafından öne sürülmüştür. Zellner, hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımı altında aşağıdaki F istatistiğini öne sürmüştür.

$$F_{(N-1)k;Nn-Nk} = \frac{Nn - Nk}{(M-1)k} \frac{\underline{Y}'\Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}C'\left[C(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}C'\right]^{-1}C(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\underline{Y}}{\underline{Y}'\Sigma^{-1}\underline{Y} - \underline{Y}\Sigma^{-1}X(X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}\underline{Y}} \qquad (3.20)$$

(3.19) ve (3.20) no'lu eşitliklerdeki C matrisi, $C\underline{\tilde{\beta}} = 0$ olacak biçimde $\underline{\beta}$ katsayı vektörü üzerine konulan kısıtlar matrisidir . Bu kısıtlar matrisi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$C\tilde{\beta} = \begin{bmatrix} I_{k\times k} & -I_{k\times k} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{k\times k} & -I_{k\times k} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_{k\times k} & -I_{k\times k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{k\times k} & -I_{k\times k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.21)$$

(3.21) eşitliğindeki birim matrisler ve sıfır matrisleri $k \times k$ boyutludur. Bu sebeple, $q = (N-1)k$ tane kısıt vardır. Eğer hata terimi varyans-kovaryans matrisi, Ω, biliniyorsa, $H_0 : \underline{\beta}_1 = \underline{\beta}_2 = ... = \underline{\beta}_N$ hipotezi için (3.20) test istatistiği kullanılabilir. Ancak hata terimi varyans-kovaryans matrisinin bilinmediği durumlarda bunun yerine tutarlı tahmin edicisi $\hat{\Omega}$ kullanılarak test yapılabilmektedir (Zellner,1962).

3.5.3. GİR için çoklu belirleyicilik katsayısı

Hipotez testlerine ek olarak GİR denklemleri bir bütün olarak düşünüldüğünde (3.4) ile gösterilen modelin belirleyicilik katsayısı, R^2_{GIR},

$$R^2_{GIR} = \frac{\underline{\hat{\varepsilon}}' S^{-1} \underline{\hat{\varepsilon}}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} s_{ij} \left(\sum (y_{it})^2 \right)}$$

formülü ile elde edilir. Burada $\underline{\hat{\varepsilon}}$, SEKK yöntemi ile elde edilen hata terimleri vektörüdür (www.uta.edu).

3.6. GİR Tahmin Edicilerinin EKK Tahmin Edicilerine Eşit Olduğu Durumlar

Bazı durumlarda N denklemden meydana gelen sistemin parametre tahminleri için GİR yöntemi ile elde edilen tahmin edicileri, SEKK yöntemi ile elde edilen tahmin edicilere etkinlik açısından bir üstünlük sağlamamaktadır. GİR tahmin edicileri ile SEKK tahmin edicilerinin aynı olduğu iki durum söz konusudur.

3.6.1.Denklemlerdeki bağımsız değişken değerlerinin birbirine eşit olduğu durum ($X_1 = X_2 = ... = X_N = X$)

Denklemlerdeki bağımsız değişken değerleri aynı olduğunda (3.3) no'lu eşitlikteki X matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X \end{bmatrix} = I_N \otimes X \qquad (3.22)$$

(3.22) no'lu eşitlikteki X matrisi (3.15) no'lu eşitlikte gösterilen GİR tahmin edicisinde yerine konulursa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}^* &= \left[X'(S^{-1} \otimes I)X\right]^{-1} X'(S^{-1} \otimes I)\underline{Y} \\ &= \left\{\left[I_N \otimes X\right]'(S^{-1} \otimes I)(I_N \otimes X)\right\}^{-1}\left[I_N \otimes X\right]'(S^{-1} \otimes I)\underline{Y} \\ &= \left[(I_N' \otimes X')(S^{-1} \otimes I)(I_N \otimes X)\right]^{-1}(I_N' \otimes X')(S^{-1} \otimes I)\underline{Y} \\ &= \left[S^{-1} \otimes (X'X)\right]^{-1}(S^{-1} \otimes X')\underline{Y} \\ &= \left[S \otimes (X'X)^{-1}\right]\left[S^{-1} \otimes X'\right]\underline{Y} \\ &= (I_N \otimes (X'X)^{-1}X')\underline{Y} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} (X'X)^{-1}X' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (X'X)^{-1}X' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & (X'X)^{-1}X' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X'X)^{-1}X'\underline{y}_1 \\ (X'X)^{-1}X'\underline{y}_2 \\ \vdots \\ (X'X)^{-1}\underline{y}_N \end{bmatrix}$$

$= \underline{\hat{\beta}}$ (SEKK tahmin edicisi)

Görüldüğü gibi denklemlerdeki bağımsız değişken değerleri aynı olduğunda GİR tahmin edicisi ile SEKK tahmin edicisi aynı olmaktadır.

3.6.2. $\sigma_{ij} = 0,\ i, j = 1,...,N$ (Hata terimi varyans-kovaryans matrisinin köşegen olduğu durum)

Denklemlerdeki hata terimi kovaryansları sıfır olduğunda varyans-kovaryans matris aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$S = diag(s_{11},...,s_{NN}) \text{ ve } S^{-1} = diag(1/s_{11},...,1/s_{NN})$$
$$= diag(s^{11},...,s^{NN})$$

Bu durumda (3.15) no'lu eşitlikteki GİR tahmin edicisinde,

$$X'(S^{-1} \otimes I)X = \begin{bmatrix} X_1' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_N' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{11}I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{22}I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s^{11}X_1'X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{22}X_2'X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{NN}X_N'X_N \end{bmatrix}$$

ve

$$X'(S^{-1} \otimes I)Y = \begin{bmatrix} X_1' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_2' & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X_N' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{11}I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{22}I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{NN}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \vdots \\ \underline{y}_N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s^{11}X_1'\underline{y}_1 \\ s^{22}X_2'\underline{y}_2 \\ \vdots \\ s^{NN}X_N'\underline{y}_N \end{bmatrix}$$

olarak yazarsak, GİR tahmin edicisi;

$$\underline{\tilde{\beta}}^{*} = \begin{bmatrix} s^{11}X_1'X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s^{22}X_2'X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s^{NN}X_N'X_N \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} s^{11}X_1'\underline{y}_1 \\ s^{22}X_2'\underline{y}_2 \\ \vdots \\ s^{NN}X_N'\underline{y}_N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{11}}(X_1'X_1)^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^{22}}(X_2'X_2)^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{s^{NN}}(X_N'X_N)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{11}X_1'\underline{y}_1 \\ s^{22}X_2'\underline{y}_2 \\ \vdots \\ s^{NN}X_N'\underline{y}_N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (X_1'X_1)^{-1}X_1'\underline{y}_1 \\ (X_2'X_2)^{-1}X_2'\underline{y}_2 \\ \vdots \\ (X_N'X_N)^{-1}X_N'\underline{y}_N \end{bmatrix} \qquad (3.23)$$

$$= \underline{\hat{\beta}}$$

olur. Görüldüğü gibi modelin hata terimi varyans-kovaryans matrisi diyagonal olduğunda parametrelerin GİR tahmin edicisi SEKK tahmin edicisi ile aynıdır.

3.7. Görünüşte İlişkisiz Regresyon Modelinde Etkinlikteki Kazanç

GİR tahmin edicilerinin, SEKK tahmin edicilerine göre en önemli üstünlüğü, sonlu örnekler için minimum varyansa sahip olması yani daha etkin olmasıdır. GİR modelinin sonlu örneklerdeki bu üstünlüğü Zellner(1963), Kakwani(1967), Sirivesta&Giles(1987) ve Kemanta(1990) tarafından ispatlanmıştır.

Kemanta GİR tahmin edicilerinin SEKK tahmin edicilerine göre daha etkin olduğunu gösterirken aşağıdaki yolu izlemiştir (Doğan, 1998).

İki denklemli GİR modeli aşağıdaki gibi gösterilsin.

$$Y_{1t} = \beta_{10} + \beta_{11} X_{1t} + \varepsilon_{1t}$$
$$Y_{2t} = \beta_{20} + \beta_{22} X_{2t} + \varepsilon_{2t}$$

GİR modelinin parametrelerinin varyansı, (3.16) eşitliğinde,

$$Var(\underline{\tilde{\beta}}) = (X' \Omega^{-1} X)^{-1}$$

olarak ifade edilmişti. Bu eşitlik açık biçimde yazılırsa,

$$Kov(\underline{\tilde{\beta}}) = \begin{bmatrix} Var(\tilde{\beta}_{11}) & Kov(\tilde{\beta}_{11}\tilde{\beta}_{22}) \\ Kov(\tilde{\beta}_{11}\tilde{\beta}_{22}) & Var(\tilde{\beta}_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} X_1' & 0 \\ 0 & X_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} X_1' & 0 \\ 0 & X_2' \end{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2} \begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} \right\}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)\sigma_{11} X_2' X_2}{\sigma_{11}\sigma_{22} X_1' X_1 X_2' X_2 - \sigma_{12}^2 X_1' X_2 X_2' X_1} & \dfrac{(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)\sigma_{12} X_2' X_1}{\sigma_{11}\sigma_{22} X_1' X_1 X_2' X_2 - \sigma_{12}^2 X_1' X_2 X_2' X_1} \\ \dfrac{(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_2^2)\sigma_{12} X_1' X_2}{\sigma_{11}\sigma_{22} X_1' X_1 X_2' X_2 - \sigma_{12}^2 X_1' X_2 X_2' X_1} & \dfrac{(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)\sigma_{22} X_1' X_1}{\sigma_{11}\sigma_{22} X_1' X_1 X_2' X_2 - \sigma_{12}^2 X_1' X_2 X_2' X_1} \end{bmatrix}$$

(3.24)

GİR parametrelerinin varyans-kovaryans matrisi eşitlik (3.24)'deki gibi olacaktır. Bu durumda $Var(\tilde{\beta}_{11})$'in GİR varyans değeri,

$$Var(\tilde{\beta}_{11}) = \frac{(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)\sigma_{11} X_2' X_2}{\sigma_{11}\sigma_{22} X_1' X_1 X_2' X_2 - \sigma_{12}^2 X_1' X_2 X_2' X_1} \tag{3.25}$$

dir. $\tilde{\beta}_{11}$ parametresinin SEKK varyansı,

$$Var(\hat{\beta}_{11}) = \frac{\sigma_{11}}{X_1' X_1} \tag{3.26}$$

idi.

Hata terimleri ε_1 ve ε_2 arasındaki korelasyon,

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}$$

Bağımsız değişkenler arasındaki doğrusal korelasyon,

$$r_{12} = \frac{X_1' X_2}{\sqrt{(X_1' X_1)(X_2' X_2)}}$$

ile gösterilirse, GİR modelindeki birinci denklemin bağımsız değişkenine ait parametrenin varyansı $Var(\tilde{\beta}_{11})$, ifadeler yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$Var(\tilde{\beta}_{11}) = \frac{\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)}{(X_1' X_1)(1-\rho_{12}^2 r_{12}^2)} \tag{3.27}$$

şeklinde elde edilir. Elde ettiğimiz GİR modeli parametresinin varyansını (3.26) eşitliğindeki SEKK parametresinin varyansına oranladığımızda elde edilen kazanç,

$$\frac{Var(\tilde{\beta}_{11})}{Var(\hat{\beta}_{11})} = \frac{\dfrac{\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)}{(X_1' X_1)(1-\rho_{12}^2 r_{12}^2)}}{\dfrac{\sigma_{11}}{(X_1' X_1)}}$$

$$\frac{Var(\tilde{\beta}_{11})}{Var(\hat{\beta}_{11})} = \frac{(1-\rho_{12}^2)}{(1-\rho_{12}^2 r_{12}^2)} \leq 1$$

şeklinde ifade edilir.

Orandan da görüldüğü gibi denklemlerin hata terimleri arasındaki ilişki ρ_{12}, arttığında ve aynı zamanda bağımsız değişkenler arasında ilişki olmadığında , etkinlikteki kazanç maksimum olmaktadır.

Hata terimleri arasındaki ilişki ρ_{12} ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişki r_{12}'nin farklı değerleri için elde edilecek kazanç oranları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 3.1 : ρ_{12} ve r_{12}'nin Farklı Değerleri İçin $Var(\tilde{\beta}_{11})/Var(\hat{\beta}_{11})$ Oranının Değerleri

		ρ_{12}									
		0	**0.10**	**0.20**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0,70**	**0,80**	**0,90**
r_{12}	**0**	1.00	0.99	0.96	0.91	0.84	0.75	0.64	0.51	0.36	0.19
	0.10	1.00	0.99	0.96	0.91	0.84	0.75	0.64	0.51	0.36	0.19
	0.20	1.00	0.99	0.96	0.91	0.85	0.76	0.65	0.52	0.37	0.20
	0.30	1.00	0.99	0.96	0.92	0.85	0.77	0.66	0.53	0.38	0.20
	0.40	1.00	0.99	0.97	0.92	0.86	0.78	0.68	0.55	0.40	0.22
	0.50	1.00	0.99	0.97	0.93	0.88	0.80	0.70	0.58	0.43	0.24
	0.60	1.00	0.99	0.97	0.94	0.89	0.82	0.74	0.62	0.47	0.27
	0.70	1.00	0.99	0.98	0.95	0.91	0.85	0.78	0.67	0.52	0.32
	0.80	1.00	1.00	0.99	0.97	0.94	0.89	0.83	0.74	0.61	0.39
	0.90	1.00	1.00	0.99	0.98	0.97	0.94	0.90	0.85	0.75	0.55
	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

BÖLÜM IV

UYGULAMA

4.1. Uygulama Kapsamı

Tezin uygulama kısmında Türkiye'nin ABD, Almanya, Fransa, Hollanda, İtalya, İngiltere ve İsviçre'ye olan ithalat talep fonksiyonu modellenmiştir. Bu amaçla çalışmada, Türkiye'nin ülkelerden gerçekleştirdiği ithalat tutarı bağımlı değişken, sabit fiyatlarla hesaplanan kişi başına düşen milli gelir (KBMG), tüketici fiyat endeksi (TUFE), Türkiye'nin o ülkeye yaptığı ihracat tutarı ve ülkelerin para biriminin TL cinsinden değeri bağımsız değişkenler olarak ele alınmıştır. Türkiye'nin, her bir ülke için ithalat talep fonksiyonunda, KBMG ve TUFE değişkenleri ortak bağımsız değişkenler iken Türkiye'nin ülkelere gerçekleştirdiği ihracat tutarı ve ülkelerin para biriminin TL cinsinden değeri her bir ülke için farklılık göstermektedir. Çalışmada kullanılan veri seti, Türkiye İstatistik Kurumu (TÜİK) tarafından yayınlanan "1923-2004 İstatistik Göstergeler" adlı yayından derlenmiştir. Türkiye'nin ABD, Almanya, Fransa, Hollanda, İtalya, İngiltere ve İsviçre'ye olan ithalat talep fonksiyonunun modellenmesi amacıyla ele alınan veri seti ise 1960-2000 yılları arasını kapsamaktadır. Her bir ülke için Türkiye'nin talep fonksiyonu tahmin edilmeden önce, terim büyüklüklerindeki ve ölçü birimlerindeki farklılıklardan dolayı verilerin doğal logaritması alınmıştır.

Türkiye'nin ithalat talep fonksiyonun modellenirken, Avrupa'dan ekonomik büyüklükleri ve Türkiye'nin gerçekleştirdiği ithalat oranlarının yüksekliğinden dolayı Almanya, İtalya, Fransa, İngiltere, İsviçre ve Hollanda çalışmaya dahil edilirken, ABD'de dünya konjoktöründeki dengeleri etkileyebilecek güce sahip olmasından dolayı çalışmaya dahil edilmiştir.

Türkiye 2004 yılında 97 539 766 bin $'lığ ithalat gerçekleştirmiştir. Bu ithalat tutarının %12.8'ini Almanya'dan, %7'sini İtalya'dan, %6.4'ünü Fransa'dan, %4.9'unu ABD'den, %4.4'ünü İngiltere'den, %3.5'ini İsviçre'den, %2'sini

Hollanda'dan gerçekleştirmiştir. Bu 7 ülkeden gerçekleştirdiğimiz ithalat tutarı toplam ithalatımızın %41'ini oluşturmaktadır.

İthalat bilgileri ülkede tüketilmek amacıyla doğrudan doğruya yapılan ithalatın tamamı ile geçici kabul, transit, aktarma veya antrepoya konulmak amacıyla gümrüklere girmiş olup da; sonradan statüsünde değişiklik yapılmak suretiyle iç piyasaya sürülen malları, ihracat bilgileri ise; ülke içinde üretilen, imal ve istihraç edilen mallardan yapılan ihracatı kapsamaktadır(1923-2004 İstatistik Göstergeler, 2005).

Tüketici fiyat endeksi, belirli bir referans döneminde hane halkları tarafından satın alınan mal ve hizmetlerden oluşan bir sepetin fiyat değişimini zaman içinde karşılaştırarak ölçer. Mal ve hizmet sepetindeki her bir madde için miktar ve kalite değişmeleri göz önüne alınarak endeksin sadece fiyat hareketlerini yansıtması sağlanır(Fiyat Endeksleri, 2000).

Seçili ülkenin para biriminin TL cinsinden değeri ile seçili ülkenin bir para birimini(örneğin 1 $) almak için ödenen TL miktarı ifade edilmektedir. Veri setinde yıl sınırlaması yapılırken, 2003 yılında Avrupa Birliği içinde yer alan ülkelerin ortak para birimi Euro (€)'ya geçmesi gözönünde bulundurulmuştur.

Milli gelir, bir ulusal ekonominin bir yılda yaratmış olduğu mal ve hizmetlerin toplam değeridir. Milli gelir rakamlarında yıldan yıla meydana gelen değişmeler, kısmen üretilen mal ve hizmetlerin miktarındaki değişmelerden, kısmen de mal ve hizmetlerin fiyatlarındaki değişmelerden kaynaklanır. Farklı yılların milli gelir rakamlarını reel olarak, yani mal ve hizmet miktarındaki değişmelere göre ifade etmek ve karşılaştırmak için mal ve hizmet fiyatlarındaki değişmelerin etkisini arındırmak gerekir. Fiyat değişmelerinin etkisini arındırmak için, belli bir yılın fiyatlar genel düzeyi sabit bir ölçü kabul edilip, diğer yıllara ilişkin rakamlar bu ölçü üzerinden gösterilir. Bu yöntemle hesaplanan milli gelire reel milli gelir, başka bir ifade ile sabit fiyatlarla milli gelir denir (Han, 2000).

Sabit fiyatlarla kişi başına düşen milli gelir ile, bir ülkenin toplam reel milli gelirinin ülke nüfusuna bölünmesi ile elde edilen değer ifade edilmektedir. Çalışmada fiyatların etkisinden arınmış olmasından dolayı sabit fiyatlarla kişi başına düşen milli gelir değişkeni tercih edilmiştir.

Modelde birbirine benzer olarak tanımlanmış birden çok doğrusal regresyon denkleminin tahmin edilmek istenmesi, denklemlerde ortak bağımsız değişkenlerin bulunması ve denklemlerin hata terimleri arasındaki ilişkinin varlığından dolayı GİR tahmin yöntemi ile parametre tahminlerinin elde edilmesinin uygun olacağı görülmüştür. Hata terimleri ilişkili birden çok regresyon denkleminin parametre tahminleri bulunurken GİR tahmin yöntemi ile, SEKK tahmin yöntemine göre daha etkin parametre tahminlerinin elde edildiği daha önceki kısımlarda teorik olarak ispatlanmıştı. Tezin uygulama kısmında da bu kazanç gösterilmeye çalışılmıştır. Bu amaçla her bir ülke için Türkiye'nin ithalat talep fonksiyonu modellenirken parametre tahminleri ve tahminlerin standart hataları hem SEKK tahmin yöntemi hem de GİR tahmin yöntemi ile elde edilerek etkinlikteki kazanç ispatlanmaya çalışılmıştır.

Çalışmanın ilk kısmında her bir ülke için çoklu doğrusal regresyon modelleri SEKK yöntemi ile elde edilmiş ve hata terimleri üzerindeki varsayım incelemeleri yapılmıştır. Hataların normal dağılıp dağılmadığı hem grafik yardımı ile hem de Anderson-Darling testi ile incelenmiş ve hata terimlerinin normal dağılıma uygunluk gösterdiği görülmüştür. Sabit varyanslılıktan bir sapma olup olmadığı hem saçılım grafikleri yardımı ile hem de Breush-Pagan testi kullanılarak incelenmiş ve değişen varyanslılık sorunu ile karşılaşılmamıştır. Çoklu doğrusal bağlantı sorununu ise VIF değeri kullanılarak incelenmiş ve her bir ithalat talep fonksiyonu denkleminde çoklu doğrusal bağlantı ile karşılaşılmıştır. Bu sorunun giderilmesi için Temel Bileşenler Analizi uygulanmıştır. Çoklu doğrusal regresyon modelinin varsayımlarından biri olan hata terimleri arasında ardışık bağımlılığın olmaması varsayımı ise Durbin-Watson testi ile araştırılmış ve bazı ülkeler için Türkiye'nin ithalat talep fonksiyonunda otokorelasyon sorununa rastlanmıştır. Otokorelasyon sorunun ortadan kaldırılması için eşitlik (4.1) ve eşitlik (4.2)'deki gerekli dönüşümler yapıldıktan sonra tüm varsayım bozulmaları ortadan kaldırılmış ve ithalat talep fonksiyonları

SEKK tahmin yöntemi ile yeniden elde edilmiştir. SEKK tahmin yöntemi sonuçları Tablo (4.8), tablo (4.9) ve tablo (4.10)'da verilmiştir.

Çalışmanın daha sonraki kısmında ise Türkiye'nin ithalat talep fonksiyonu GİR tahmin yöntemi ile modellenmiştir. Elde edilen parametre tahminleri, parametrelerin standart hataları, SEKK tahmin yöntemi ile elde edilen standart hatalara göre azalma oranları tablo (4.12)'de verilmiştir.

4.2. Çoklu Doğrusal Regresyon Modellerinin Elde Edilmesi

Çalışmanın bu kısmında, seçilen 7 ülke için Türkiye'nin ithalat fonksiyonu tahmin edilecektir. Seçili ülkeler için belirlenen ithalat fonksiyonunda, TUFE ve KBMG değişkenleri ortak değişken iken, ihracat tutarları ve döviz kuru değerleri ülkeye göre değişmektedir. Regresyon denklemlerini belirtirken kullanılacak olan değişken sembol ve değişkenlerin tanımı Tablo 4.1.'de verilmiştir.

Tablo 4.1. Regresyon denklemlerinde kullanılan değişkenlerin sembol ve tanımları

SEMBOL	TANIM
IMA	Türkiye'nin ABD'den gerçekleştirdiği ithalat tutarının doğal logaritmik değeri
IMAL	Türkiye'nin Almanya'dan gerçekleştirdiği ithalat tutarının doğal logaritmik değeri
IMFR	Türkiye'nin Fransa'dan gerçekleştirdiği ithalat tutarının doğal logaritmik değeri
IMH	Türkiye'nin Hollanda'dan gerçekleştirdiği ithalat tutarının doğal logaritmik değeri
IMIS	Türkiye'nin İsviçre'den gerçekleştirdiği ithalat tutarının doğal logaritmik değeri
IMIN	Türkiye'nin İngiltere'den gerçekleştirdiği ithalat tutarının doğal logaritmik değeri
IMIT	Türkiye'nin İtalya'dan gerçekleştirdiği ithalat tutarının doğal logaritmik değeri
DVA	Türkiye'de dönem sonu 1 ABD Doları($) alış fiyatının doğal logaritmik değeri
DVAL	Türkiye'de dönem sonu 1 F.Alman Markı alış fiyatının doğal logaritmik değeri
DVFR	Türkiye'de dönem sonu 1 Fransız Frangı alış fiyatının doğal logaritmik değeri
DVH	Türkiye'de dönem sonu 1 Hollanda Florini alış fiyatının doğal logaritmik değeri
DVIN	Türkiye'de dönem sonu 1 İngiliz Sterlini alış fiyatının doğal logaritmik değeri
DVIS	Türkiye'de dönem sonu 1 İsviçre Frangı alış fiyatının doğal logaritmik değeri
DVIT	Türkiye'de dönem sonu 100 İtalyan Lireti alış fiyatının doğal logaritmik değeri
EXA	Türkiye'nin ABD'ne gerçekleştirdiği ihracat tutarının doğal logaritmik değeri
EXAL	Türkiye'nin Almanya'ya gerçekleştirdiği ihracat tutarının doğal logaritmik değeri
EXFR	Türkiye'nin Fransa'ya gerçekleştirdiği ihracat tutarının doğal logaritmik değeri
EXH	Türkiye'nin Hollanda'ya gerçekleştirdiği ihracat tutarının doğal logaritmik değeri
EXIN	Türkiye'nin İngiltere'ye gerçekleştirdiği ihracat tutarının doğal logaritmik değeri
EXIS	Türkiye'nin İsviçre'ye gerçekleştirdiği ihracat tutarının doğal logaritmik değeri
EXIT	Türkiye'nin İtalya'ya gerçekleştirdiği ihracat tutarının doğal logaritmik değeri
TUFE	Türkiye'de tüketici fiyat endeksinin doğal logaritmik değeri
KBMG	Türkiye'de sabit fiyatlarla kişi başına düşen milli geliri,n doğal logaritmik değeri

Seçili ülkeler için tahmin edilen regresyon denklemlerindeki parametre tahminleri ve denklemlerin belirleyicilik katsayı değerleri(R^2) Tablo 4.2'de verilmiştir.

Tablo 4.2. Seçili ülkeler için elde edilen regresyon denklemleri

Ülke	**Regresyon Denklemlerinin Tahminleri**	R^2
ABD	IMA = 4.53 + 0.0591 DVA + 0.0032 KBMG + 0.191 TUFE + 0.627 EXA	0.96
Almanya	IMAL = 2.31 + 0.0214 DVAL + 0.0581 KBMG + 0.0101 TUFE + 0.786 EXAL	0.98
Fransa	IMFR = 1.92 + 0.0432 DVFR + 0.0436 KBMG + 0.297 TUFE + 0.746 EXFR	0.96
Hollanda	IMH = 1.24 + 0.0218 DVH + 0.0181 KBMG + 0.016 TUFE + 0.895 EXH	0.97
İngiltere	IMIN = 4.66 + 0.0796 DVIN + 0.109 KBMG + 0.0715 TUFE + 0.495 EXIN	0.97
İsviçre	IMIS = 1.64 + 0.0743 DVIS + 0.164 KBMG + 0.315 TUFE + 0.591 EXIS	0.96
İtalya	IMIT = 4.04 + 0.160 DVIT + 0.156 KBMG + 0.101 TUFE + 0.485 EXIT	0.97

Seçili ülkeler için elde edilen regresyon denklemlerinin genel anlamlılığının test edildiği varyans analizi sonuçları Tablo 4.3'de verilmiştir.

Tablo 4.3. Varyans Analizi Sonuçları

Ülke	**Regresyon Kareler Ortalaması**	**Hata Kareler Ortalaması**	F	p
ABD	14.712	0.066	222.6	<0.001
Almanya	21.952	0.062	354.02	<0.001
Fransa	27.930	0.137	203.48	<0.001
Hollanda	26.445	0.084	316.64	<0.001
İngiltere	15.022	0.059	253.55	<0.001
İsviçre	24.995	0.132	189.95	<0.001
İtalya	25.438	0.079	322.11	<0.001

Tablo 4.3 incelendiğinde elde edilen regresyon denklemlerinin hepsinin istatistiksel olarak anlamlı olduğu görülmektedir. Başka bir ifade ile, regresyon denklemlerinde yer alan parametre tahminlerinden en az bir tanesi istatistiksel olarak anlamlıdır. Çoklu regresyon analizi varsayımlarına göre elde edilen regresyon denklemlerine ait hataların sıfır ortalamalı, sabit varyanslı normal dağılıma uygunluk göstermesi gerekmektedir. Aynı zamanda denkleme alınan bağımsız değişkenler arasında kuvvetli ilişkinin olmaması gerekmektedir (çoklu doğrusal bağlantı olmamamsı). Hata terimleri için diğer bir varsayım ise ardışık hata terimleri arasında ilişki olmaması (otokorelasyon) varsayımıdır. Parametrelerin anlamlılık testleri otokorelasyonun tespitinde kullanılan Durbin Watson d istatistiği, değişen varyanslılığın tespiti için hesaplanan Breusch-Pagan test istatistiği değerleri ve çoklu doğrusal bağlantının bir göstergesi olan Varyans Şişme Değerleri(VIF) değerleri Tablo 4.4 de verilmiştir.

Tablo 4.4. Parametrelerin anlamlılık sınamaları, VIF, d ve Breusch-Pagan değerleri

ABD	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	*VIF*
Sabit	4.530	1.459	3.10	0.004*	
DVA	0.05912	0.04621	1.28	0.209	**17.8**
KBMG	0.00322	0.02624	0.12	0.903	2.5
EXA	0.6266	0.1421	4.41	<0.001*	**20.5**
TUFE	0.19129	0.06898	2.77	0.009*	4.0
Durbin-Watson **d = 1.53**		**Breusch-Pagan = 0,82**			
Almanya	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	*VIF*
Sabit	2.307	1.426	1.62	0.115	
DVAL	0.02142	0.04137	0.52	0.608	**17.9**
KBMG	0.05815	0.02846	2.04	0.048*	3.2
EXAL	0.7859	0.1465	5.36	<0.001*	**36.9**
TUFE	0.01008	0.08878	0.11	0.910	**7.1**
Durbin-Watson **d = 0.69**		**Breusch-Pagan = 7,32**			
Fransa	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	*VIF*
Sabit	1.921	1.715	1.12	0.270	
DVFR	0.04319	0.05971	0.72	0.474	**13.7**
KBMG	0.04359	0.04243	1.03	0.311	3.2
EXFR	0.7457	0.1979	3.77	0.001*	**26.3**
TUFE	0.2969	0.1174	2.53	0.016*	**5.6**
Durbin-Watson **d= 0.89**		**Breusch-Pagan = 8,19**			
Hollanda	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	*VIF*
Sabit	1.243	1.336	0.93	0.358	
DVH	0.02183	0.05069	0.43	0.669	**19.3**
KBMG	0.01813	0.03866	0.47	0.642	4.4
EXH	0.8946	0.1827	4.90	<0.001*	**44.6**
TUFE	0.0164	0.1043	0.16	0.876	**7.3**
Durbin-Watson **d= 0.79**		**Breusch-Pagan = 9,80**			
İsviçre	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	*VIF*
Sabit	1.641	1.129	1.45	0.155	
DVIS	0.07431	0.02379	3.12	0.004*	2.9
KBMG	0.16396	0.04537	3.61	0.001*	3.8
EXIS	0.5908	0.1386	4.26	<0.001*	**6.9**
TUFE	0.3153	0.1069	2.95	0.006*	4.9
Durbin-Watson **d = 0.92**		**Breusch-Pagan = 5,18**			
İngiltere	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	*VIF*
Sabit	4.663	1.006	4.63	<0.001*	
DVIN	0.07964	0.03715	2.14	0.039*	**11.7**
KBMG	0.10864	0.02482	4.38	<0.001*	2.5
EXIN	0.4950	0.1095	4.52	<0.001*	**16.4**
TUFE	0.07153	0.07015	1.02	0.315	4.7
Durbin-Watson **d = 1.17**		**Breusch-Pagan = 6,64**			
İtalya	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	*VIF*
Sabit	4.037	1.015	3.98	<0.001*	
DVIT	0.15981	0.03294	4.85	<0.001*	**6.1**
KBMG	0.15562	0.02865	5.43	<0.001*	2.5
EXIT	0.4850	0.1051	4.61	<0.001*	**12.3**
TUFE	0.10148	0.09127	1.11	0.274	**5.9**
Durbin-Watson **d = 1.30**		**Breusch-Pagan = 5,35**			

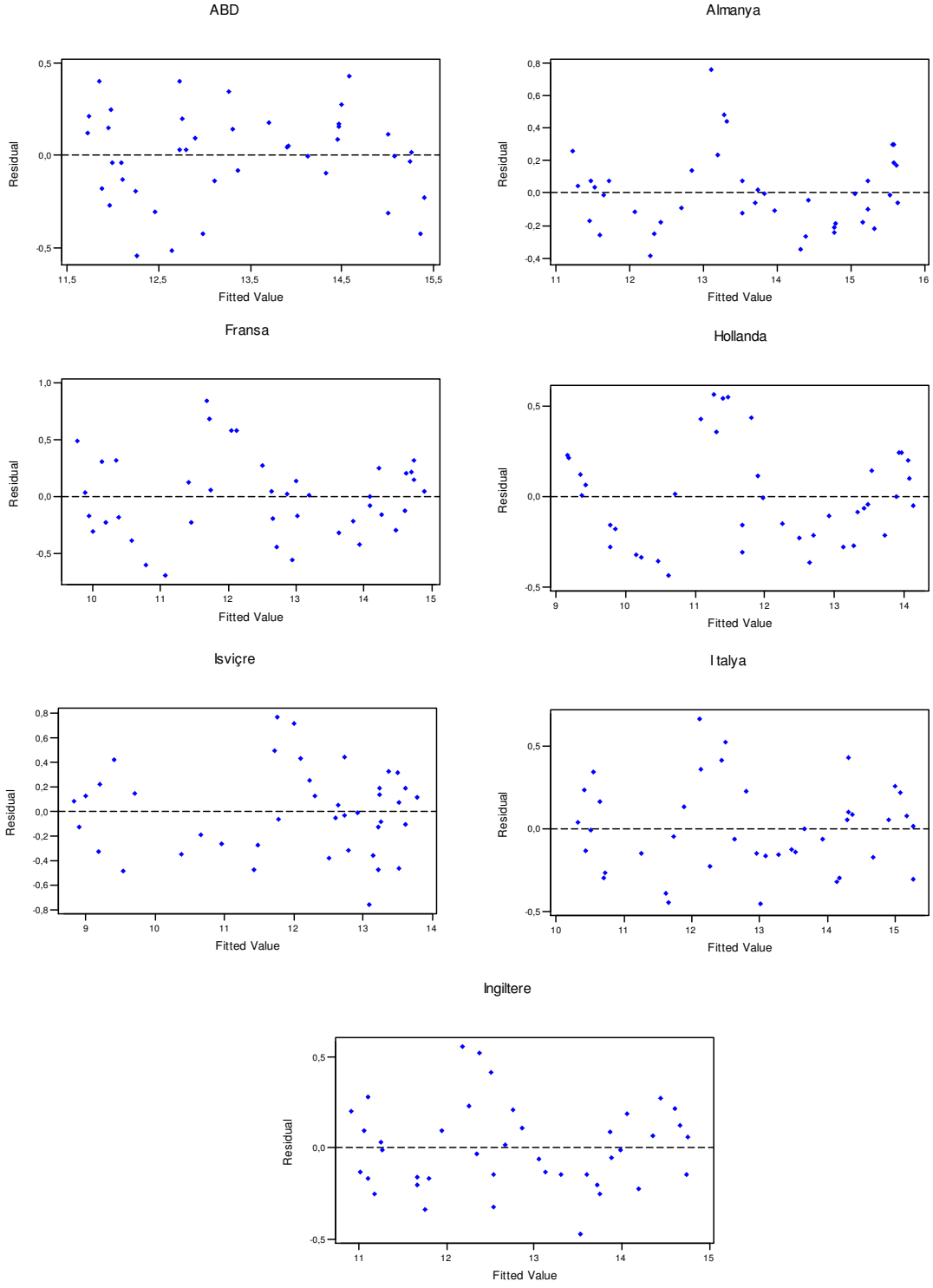
Tablo 4.4 incelendiğinde tüm denklemlerde, Türkiye'nin seçili ülkelere gerçekleştirdiği ihracat değişkeninin Türkiye'nin o ülkeden gerçekleştirdiği ithalat tutarı değişkenini açıklamakta etkili olduğu görülmektedir. Sabit fiyatlarla kişi başına düşen milli gelir değişkeninin ithalat tutarını açıklamakta etkili olduğu ülkeler, Almanya, İsviçre, İngiltere, İtalya'dır. Döviz kuru değerinin ithalat tutarını açıklamada etkili olduğu ülkeler İsviçre, İngiltere ve İtalya'dır. Tüketici fiyat endeksinin anlamlı olduğu ülkeler ise, ABD ve Fransa'dır.

$\alpha = 0{,}05$, $n = 41$ ve 4 bağımsız değişken için yaklaşık olarak $d_L = 1.29$ ve $d_u = 1{,}72$'dir. Buna göre, ABD ve İtalya için belirlenen Türkiye'nin ithalat denkleminde otokorelasyonun olup olmadığına karar verilemezken diğer ülkeler için belirlenen denklemlerin pozitif otokorelasyon içerdiği görülmüştür.

Çoklu doğrusal bağlantının belirlenmesinde kullanılan VIF değerleri bağımsız değişkenlere ilişkin korelasyon matrisinin tersinin köşegen değerleridir. Uygulamada VIF değerlerinin 5 ya da 10'nun üzerinde olması güçlü çoklu doğrusal bağlantının ve ilgili değişkenlere ilişkin tahminlerin pek güvenilir olmadığının göstergesidir (Sinan, 2003). İthalat denklemlerinde VIF değerleri incelendiğinde tüm denklemlerde bağımsız değişkenler arasında güçlü bir çoklu doğrusal bağıntının olduğu saptanmıştır.

Breusch-Pagan test istatistik değerleri, $\chi^2_{4;0.05} = 9{,}488$ tablo değeri ile karşılaştırıldığında Hollanda haricindeki tüm denklemlerde değişen varyanslılık olmadığı görülmüştür. Hollanda için ise sabit varyanslılıktan sapma göz ardı edilebilecek kadar küçük olduğu gözlenmiş, bu nedenle veriler üzerinde herhangi bir dönüşümün yapılmamasına karar verilmiştir. Değişen varyanslılığın tespitinde ayrıca hatalara ait saçılım grafiklerinden de yararlanılabilmektedir. Grafikte artıkların saçılımı megafon şeklinde ise bu değişen varyanslılığın bir göstergesidir. Türkiye'nin seçili ülkeler için oluşturulan ithalat regresyon denklemleri için sabit varyanslılık

varsayımının sağlanıp sağlanmadığını grafikler yardımıyla incelemek için saçılım grafikleri grafik 4.1'de verilmiştir.



Grafik 4.1. Saçılım Grafikleri

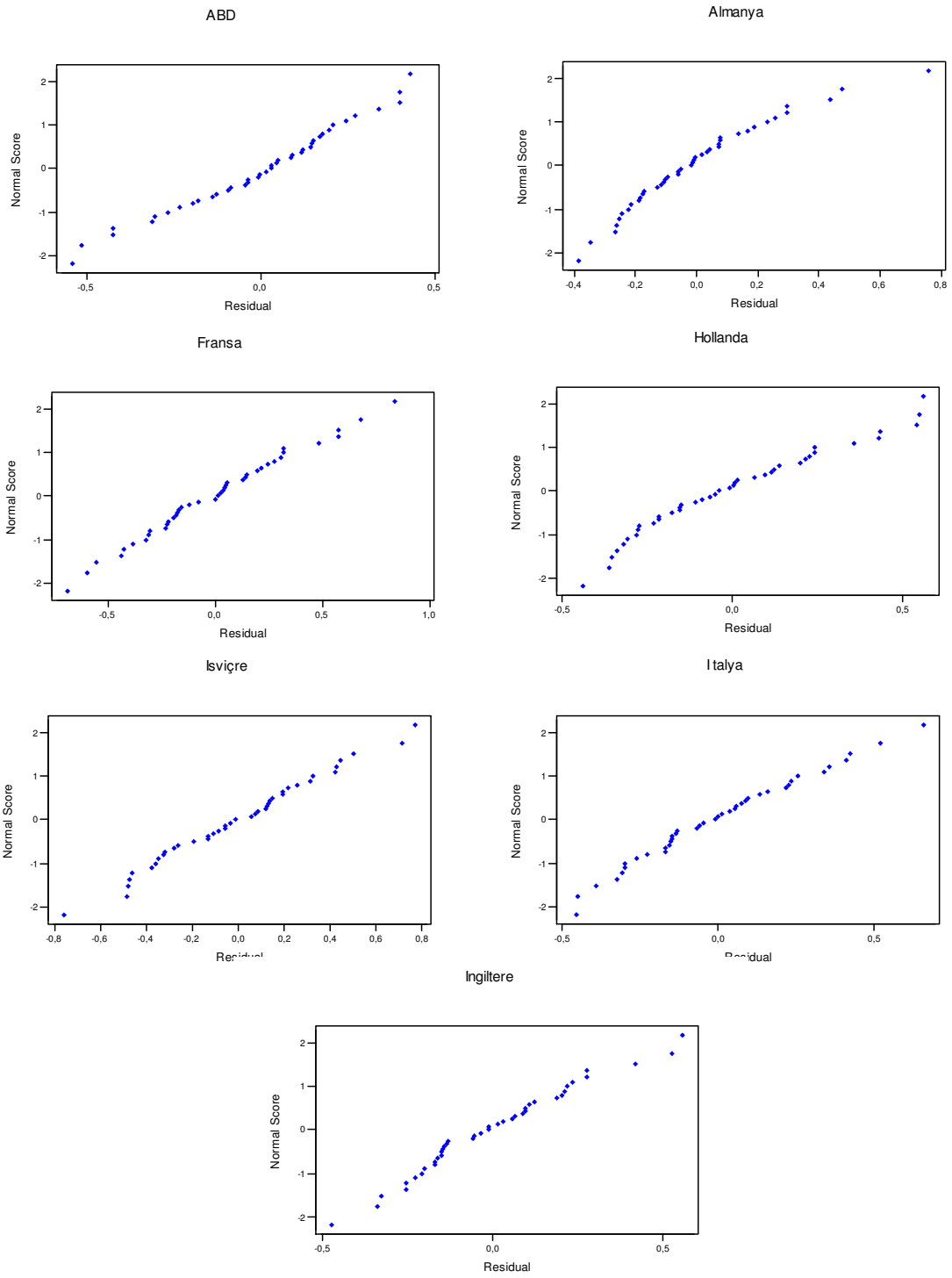
Grafik 4.1'de verilen saçılım grafikleri incelendiğinde hiç birinin regresyon denklemi için artıkların saçılımı megafon şeklinde değildir. Dolayısıyla Türkiye'nin seçili ülkeler için tahmin edilen ithalat regresyon denklemlerinde sabit varyanslılık varsayımının sağlandığı grafikler yardımıyla da görülmüştür.

Hataların normal dağılım varsayımı için Anderson-Darling test istatistiği sonuçları Tablo (4.5)'de verilmiştir.

Tablo 4.5. Anderson-Darling Testi Sonuçları

	Anderson-Darling Test istatistiği	*p*
ABD	0,309	0,544
Almanya	0,594	0,116
Fransa	0,215	0,837
Hollanda	0,531	0,165
İsviçre	0,196	0,885
İtalya	0,266	0,674
İngiltere	0,405	0,337

Tablo incelendiğinde tüm regresyon denklemlerinde hataların normal dağıldığı sonucuna ulaşılmaktadır. Normal dağılım varsayımı için başvurulan diğer bir yöntem de hataların normal dağılım grafiklerini oluşturmaktır. Uygulamadaki regresyon denklemleri için bu grafikler aşağıda verilmiştir.



Grafik 4.2. Hataların Normal Dağılım Grafikleri

Grafik 4.2'deki normal dağılım grafikleri incelendiğinde artıkların bir doğru üzerinde olduğu görülmektedir. Buna göre, Türkiye'nin seçili ülkeler için tahmin edilen ithalat regresyon denklemlerinin hatalarının normal dağılıma uygunluk gösterdiği grafik yardımıyla da görülmüştür.

Çoklu doğrusal regresyon analizi varsayımlarından çoklu doğrusal bağlantı olmaması ve otokorelasyon olmaması varsayımları sağlanamamıştır. Çoklu doğrusal bağlantı olması durumunda regresyon denklemi yardımıyla yapılacak çıkarsamalar yanlış yönlendirmelere ve hatalara neden olur. Örneğin veride çok küçük değişiklikler yapılması durumunda katsayılar da büyük değişiklikler olur. Ayrıca regresyon katsayılarına ilişkin standart hataların çok büyük çıkması, t değerlerinin küçük dolayısıyla anlamsız çıkmasına neden olur. Çoklu doğrusal bağlantının bir diğer etkisi de SEKK yöntemi ile elde edilen regresyon katsayıları üzerine olup, katsayıların mutlak değerleri olduğundan çok büyük çıkabilir (Alpar, 2003).

Çoklu doğrusal bağlantının ortadan kaldırılması için birbirleriyle ilişkili değişkenlerin birinin modelden çıkartılması veya değişkenler arasındaki bağımlılık yapısının yok edilmesi gerekir. Değişkenlerden birinin modelden çıkartılması bilgi kaybına neden olacağından çoklu doğrusal bağlantının yok edilmesinde bağımsız değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı Temel Bileşenler Analizi(TBA) ile yok edilecektir.

TBA sonrası elde edilen yeni bağımsız değişkenler kullanılarak kurulan regresyon denklemleri Tablo 4.6'de verilmiştir.

Tablo 4.6. Temel Bileşenler Regresyon Analizi Sonuçları

Ülke	**Regresyon Denklemlerinin Tahminleri**	R^2
ABD	IMA = 13.4 - 0.660 ABD1 + 0.364 ABD2 - 0.0057 ABD3 + 0.436 ABD4	0.96
Almanya	IMAL = 13.6 - 0.801 AL1 + 0.253 AL2 + 0.177 AL3 + 0.968 AL4	0.98
Fransa	IMFR = 12.5 - 0.916 FR1 + 0.232 FR2 + 0.081 FR3 - 0.735 FR4	0.96
Hollanda	IMH = 11.8 - 0.877 H1 - 0.318 H2 + 0.170 H3 + 1.16 H4	0.97
İngiltere	IMIN = 12.8 - 0.680 IN1 + 0.180 IN2 + 0.209 IN3 - 0.343 IN4	0.97
İsviçre	IMIS = 11.9 - 0.871 IS1 + 0.0887 IS2 + 0.036 IS3 + 0.199 IS4	0.96
İtalya	IMIT = 12.9 - 0.881 IT1 + 0.200 IT2 + 0.269 IT3 - 0.273 IT4	0.97

Temel Bileşenler Regresyon Analizi sonrasında parametrelerin anlamlılık testleri, otokorelasyonun tespitinde kullanılan Durbin Watson d istatistiği ve çoklu doğrusal bağlantının bir göstergesi olan Varyans Şişme Değerleri(VIF) değerleri Tablo 4.7' de verilmiştir.

Tablo 4.7. Parametrelerin anlamlılık sınamaları, VIF ve d değerleri

ABD	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	VIF
Sabit	13.3596	0.0401	332.75	<0.001*	1.0
ABD1	-0.65955	0.02278	-28.95	<0.001*	1.0
ABD2	0.36413	0.05181	7.03	<0.001*	1.0
ABD3	-0.00574	0.09716	-0.06	0.953	1.0
ABD4	0.4361	0.2479	1.76	0.087	1.0
Durbin-Watson **d =1.53**					
Almanya	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	VIF
Sabit	13.6392	0.0389	350.64	<0.001*	1.0
AL1	-0.80077	0.02154	-37.18	<0.001*	1.0
AL2	0.25312	0.05693	4.45	<0.001*	1.0
AL3	0.17664	0.09779	1.81	0.079	1.0
AL4	0.9675	0.2960	3.27	0.002*	1.0
Durbin-Watson **d =0.69**					
Fransa	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	VIF
Sabit	12.4875	0.0579	215.82	<0.001*	1.0
FR1	-0.91579	0.03235	-28.31	<0.001*	1.0
FR2	0.23222	0.08055	2.88	0.007*	1.0
FR3	0.0811	0.1432	0.57	0.574	1.0
FR4	-0.7352	0.3735	-1.97	0.057	1.0
Durbin-Watson **d =0.89**					
Hollanda	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	VIF
Sabit	11.8238	0.0451	261.97	<0.001*	1.0
H1	-0.87675	0.02498	-35.10	<0.001*	1.0
H2	-0.31770	0.06629	-4.79	<0.001*	1.0
H3	0.1697	0.1128	1.50	0.141	1.0
H4	1.1589	0.3742	3.10	0.004*	1.0
Durbin-Watson **d =0.79**					
İsviçre	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	VIF
Sabit	11,9322	0,0567	210,62	<0.001*	1.0
IS1	-0,87063	0,03164	-27,52	<0.001*	1.0
IS2	0,08865	0,08537	1,04	0,306	1.0
IS3	0,0364	0,1446	0,25	0,803	1.0
IS4	0,1992	0,1776	1,12	0,269	1.0
Durbin-Watson **d =0.92**					
İngiltere	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	VIF
Sabit	12,7921	0,0380	336,51	<0.001*	1.0
IN1	-0,67970	0,02157	-31,51	<0.001*	1.0
IN2	0,17975	0,04928	3,65	0,001*	1.0
IN3	0,20931	0,09337	2,24	0,031*	1.0
IN4	-0,3428	0,2016	-1,70	0,098	1.0
Durbin-Watson **d =1.17**					
İtalya	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	VIF
Sabit	12,8695	0,0439	293,23	<0.001*	1.0
IT1	-0,88102	0,02473	-35,62	<0.001*	1.0
IT2	0,20029	0,06008	3,33	0,002*	1.0
IT3	0,2695	0,1070	2,52	0,016*	1.0
IT4	-0,2731	0,1934	-1,41	0,167	1.0
Durbin-Watson **d =1.30**					

Tablo 4.7 incelendiğinde tahmin edilen regresyon denklemlerinde çoklu doğrusal bağıntıdan kurtulduğu görülmektedir. Otokorelasyonun var olup olmadığına kara vermek için, $\alpha = 0{,}05$, $n = 41$ ve 4 bağımsız değişken için yaklaşık $d_L = 1{,}29$ ve $d_u = 1{,}72$ olarak belirlenir. Buna göre hala, ABD ve İtalya için belirlenen Türkiye'nin ithalat denkleminde otokorelasyonun olup olmadığına karar verilemezken diğer ülkeler için belirlenen denklemlerin pozitif otokorelasyon içerdiği görülmüştür.

Otokorelasyonun yok edilmesinde Durbin-Watson d istatistiği ile ρ arasındaki ilişkiden yararlanılacaktır. Durbin-Watson d istatistiği kullanılarak ρ aşağıdaki eşitlik ile tahmin edilir (Gujarati, 1999).

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{d}{2} \tag{4.1}$$

Elde edilen $\hat{\rho}$ değeri, (4.3) nolu eşitlikte kullanılarak otokorelasyon yok edilmeye çalışılır.

$$Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} = \hat{\beta}_0 (1 - \hat{\rho}) + \hat{\beta}_1 (X_t - \hat{\rho} X_{t-1}) + \varepsilon_t \tag{4.2}$$

Otokorelasyonun yok edilmesi için gerekli dönüşümler yapıldıktan sonra elde edilen Türkiye'nin seçili ülkeler için ithalat regresyon denklemleri Tablo 4.8'de verilmiştir.

Tablo 4.8. Türkiye'nin seçili ülkeler için tahmin edilen İthalat regresyon denklemleri

Ülke	**Regresyon Denklemlerinin Tahminleri**	R^2
ABD	IMA = 10.2 - 0.649 ABD1 + 0.365 ABD2 + 0.0392 ABD3 + 0.231 ABD4	0.94
Almanya	IMAL = 4.70 - 0.809 AL1 + 0.281 AL2 + 0.182 AL3 + 0.955 AL4	0.89
Fransa	IMFR = 5.57 - 0.883 FR1 + 0.284 FR2 - 0.062 FR3 - 0.326 FR4	0.86
Hollanda	IMH = 4.67 - 0.879 H1 - 0.366 H2 + 0.232 H3 + 1.03 H4	0.89
İngiltere	IMIN = 7.49 - 0.660 IN1 + 0.223 IN2 + 0.216 IN3 - 0.200 IN4	0.92
İsviçre	IMIT = 8.37 - 0.864 IT1 + 0.229 IT2 + 0.339 IT3 - 0.321 IT4	0.84
İtalya	IMIS = 5.50 - 0.813 IS1 - 0.060 IS2 + 0.198 IS3 + 0.114 IS4	0.94

Seçili ülkeler için elde edilen regresyon denklemlerinin genel anlamlılığının test edildiği varyans analizi sonuçları Tablo 4.9'da verilmiştir.

Tablo 4.9. Varyans Analizi Sonuçları

Ülke	Regresyon Kareler Ortalaması	Hata Kareler Ortalaması	F	p
ABD	8.1548	0.0624	130.76	<0.001
Almanya	2.4822	0.0359	69.05	<0.001
Fransa	5.0040	0.0922	54.34	<0.001
Hollanda	3.8866	0.0535	72.71	<0.001
İngiltere	4.7919	0.0881	98.02	<0.001
İsviçre	4.1381	0.0489	46.94	<0.001
İtalya	9.8942	0.0691	143.20	<0.001

Tablo 4.9 incelendiğinde elde edilen regresyon denklemlerinin hepsinin istatistiksel olarak anlamlı olduğu görülmektedir. Başka bir ifade ile, regresyon denklemlerinde yer alan parametre tahminlerinden en az bir tanesi istatistiksel olarak anlamlıdır.

Türkiye'nin seçili ülkeler için ithalat regresyon denklemlerindeki parametrelerin anlamlılık testleri, otokorelasyonun tespitinde kullanılan Durbin Watson d istatistiği ve çoklu doğrusal bağlantının bir göstergesi olan Varyans Şişme Değerleri(VIF) değerleri Tablo 4.10' da verilmiştir.

Tahmin edilen regresyon denklemlerinde otokorelasyonun var olup olmadığına kara vermek için, $\alpha = 0{,}05$, $n = 40$ ve 4 bağımsız değişken için $d_L = 1.29$ ve $d_u = 1{,}72$ olarak belirlenir. Tablo 4.10 incelendiğinde, İsviçre için elde edilen ithalat regresyon denklemi için otokorelasyon olup olmadığına karar verilemez iken, diğer ülkeler için elde edilen regresyon denklemlerinde otokorelasyondan yok edilmiştir.

Tablo 4.10. Parametrelerin anlamlılık sınamaları, VIF ve d değerleri

ABD	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	*VIF*
Sabit	10.2239	0.039617	258.07	<0.001*	
ABD1	-0.64854	0.02984	-21.73	<0.001*	1.0
ABD2	0.36469	0.06498	5.61	<0.001*	1.0
ABD3	0.03920	0.09869	0.40	0.694	1.0
ABD4	0.2309	0.2778	0.83	0.411	1.0
Durbin-Watson **d =1.83**					
Almanya	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	*VIF*
Sabit	4.70006	0.03059	153.65	<0.001*	
AL1	-0.80904	0.04984	-16.23	<0.001*	1.1
AL2	0.28110	0.09410	2.99	0.005*	1.1
AL3	0.18198	0.08501	2.14	0.039*	1.4
AL4	0.9551	0.3318	2.88	0.007*	1.5
Durbin-Watson **d =1.750**					
Fransa	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	*VIF*
Sabit	5.57118	0.04855	114.76	<0.001*	
FR1	-0.88260	0.06229	-14.17	<0.001*	1.1
FR2	0.2842	0.1325	2.14	0.039*	1.1
FR3	-0.0623	0.1295	-0.48	0.634	1.2
FR4	-0.3259	0.3689	-0.88	0.383	1.4
Durbin-Watson **d =1.83**					
Hollanda	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	*VIF*
Sabit	4.66629	0.03712	125.70	<0.001*	
H1	-0.87886	0.05308	-16.56	<0.001*	1.1
H2	-0.3665	0.1081	-3.39	0.002*	1.1
H3	0.23228	0.09989	2.33	0.026*	1.3
H4	1.0331	0.4549	2.27	0.029*	1.3
Durbin-Watson **d =1.82**					
İsviçre	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	*VIF*
Sabit	5.50067	0.04749	115.82	<0.001*	
IS1	-0.81264	0.05979	-13.59	<0.001*	1.0
IS2	-0.0601	0.1352	-0.44	0.659	1.1
IS3	0.1978	0.1229	1.61	0.117	1.1
IS4	0.1138	0.1683	0.68	0.504	1.1
Durbin-Watson **d =1.62**					
İngiltere	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	*VIF*
Sabit	7.48987	0.03516	212.99	<0.001*	
IN1	-0.66035	0.03436	-19.22	<0.001*	1.0
IN2	0.22338	0.07213	3.10	0.004*	1.0
IN3	0.21636	0.09079	2.38	0.023*	1.1
IN4	-0.1996	0.2289	-0.87	0.389	1.1
Durbin-Watson **d =1.73**					
İtalya	$\hat{b}_i$	$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	t_{hesap}	p	*VIF*
Sabit	8.36912	0.04176	200.40	<0.001*	
IT1	-0.86397	0.03687	-23.43	<0.001*	1.0
IT2	0.22912	0.08296	2.76	0.009*	1.0
IT3	0.3388	0.1111	3.05	0.004*	1.1
IT4	-0.3208	0.2224	-1.44	0.158	1.1
Durbin-Watson **d =1.87**					

4.3. Parametre Tahminlerinin GİR Yöntemi ile Elde Edilmesi

GİR analizinde denklemlerin hataları arasındaki korelasyon katsayıları göz önünde bulundurularak SEKK tahmin edicilerine göre daha etkin tahmin ediciler elde edilmektedir. Türkiye'nin seçili ülkeler için tahmin edilen ithalat regresyon denklemlerinin hataları arasındaki korelasyon katsayıları Tablo 4.11'da verilmiştir.

Tablo 4.11. Denklemlerin hataları arasındaki korelasyon katsayıları

	ABD	ALMANYA	FRANSA	HOLLANDA	İTALYA	İNGİLTERE	İSVİÇRE
ABD	1						
ALMANYA	0.22	1					
FRANSA	0.27	0.61	1				
HOLLANDA	0.20	0.62	0.34	1			
İTALYA	0.40	0.54	0.56	0.31	1		
İNGİLTERE	0.38	0.69	0.46	0.68	0.71	1	
İSVİÇRE	0.26	0.60	0.47	0.48	0.60	0.58	1

Tablo 4.11 incelendiğinde hatalar arasındaki ilişkilerin göz ardı edilemeyecek kadar yüksek olduğu görülmektedir. Hatalar arasındaki en yüksek korelasyon İtalya ile İngiltere arasındadır. İtalya ile İngiltere için elde edilen ithalat regresyon denklemlerinin hataları arasındaki korelasyon katsayısı 0.71'dir. En düşük korelasyon katsayısı ise 0,20 ile Hollanda ile ABD arasındadır.

Korelasyon katsayıları incelendiğinde ABD ile diğer seçilen ülkeler arasındaki korelasyonun Avrupa'da yer alan ülkeler arasındaki korelasyon katsayılarından genelde daha düşük olduğu görülmektedir.

SAS paket program aracılığı ile gerçekleştirilen GİR analizi sonucunda elde edilen parametre tahminleri ve standart hataları Tablo 4.12'de verilmiştir. Ayrıca Tablo 4.12'de GİR ile elde edilen standart hataların SEKK tahmin edicilerin standart hatalarına göre (4.3) eşitliği ile hesaplanan azalma oranı değerlerine yer verilmiştir.

$$Azalma\ Oranı = 1 - \frac{G\dot{I}\dot{I}\ \hat{\sigma}_{b_i}}{EKK\ \hat{\sigma}_{b_i}} \qquad (4.3)$$

Tablo 4.12. GİR parametre tahminleri ve standart hataları

ABD	**GİR** $\hat{b}_i$	**GİR** $\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	**EKK** $\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	**A. ORANI**
Sabit	10.22532	0.039615	0.039617	0.000005048
ABD1	-0.64004	0.029770	0.02984	0.002345845
ABD2	0.375848	0.064614	0.06498	0.005632502
ABD3	0.045349	0.098131	0.09869	0.005664201
ABD4	-0.06086	0.255661	0.2778	0.079694024
Almanya	**GİR** $\hat{b}_i$	**GİR** $\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	**EKK** $\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	**A. ORANI**
Sabit	4.700756	0.030577	0.03059	0.000424975
AL1	-0.78313	0.048619	0.04984	0.024498395
AL2	0.274386	0.090095	0.09410	0.042561105
AL3	0.245118	0.078634	0.08501	0.075002941
AL4	0.189275	0.228698	0.3318	0.310735383
Fransa	**GİR** $\hat{b}_i$	**GİR** $\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	**EKK** $\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	**A. ORANI**
Sabit	5.574809	0.048520	0.04855	0.00061792
FR1	-0.85653	0.061131	0.06229	0.018606518
FR2	0.307890	0.127666	0.1325	0.036483019
FR3	-0.10863	0.123875	0.1295	0.043436293
FR4	0.194698	0.291627	0.3689	0.209468691
Hollanda	**GİR** $\hat{b}_i$	**GİR** $\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	**EKK** $\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	**A. ORANI**
Sabit	4.667414	0.037109	0.03712	0.000296336
H1	-0.86329	0.052158	0.05308	0.017370008
H2	-0.36639	0.103984	0.1081	0.038075856
H3	0.261759	0.094210	0.09989	0.056862549
H4	0.450713	0.341864	0.4549	0.248485381
İsviçre	**GİR** $\hat{b}_i$	**GİR** $\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	**EKK** $\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	**A. ORANI**
Sabit	5.506490	0.047440	0.04749	0.001052853
IS1	-0.77981	0.058070	0.05979	0.028767352
IS2	-0.08918	0.130244	0.1352	0.036656805
IS3	0.194258	0.119741	0.1229	0.025703824
IS4	-0.14261	0.129032	0.1683	0.23332145
İngiltere	**GİR** $\hat{b}_i$	**GİR** $\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	**EKK** $\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	**A. ORANI**
Sabit	7.492219	0.035153	0.03516	0.00019909
IN1	-0.64339	0.033842	0.03436	0.015075669
IN2	0.239129	0.068715	0.07213	0.047345071
IN3	0.249416	0.086425	0.09079	0.048077982
IN4	0.253033	0.145690	0.2289	0.363521188
İtalya	**GİR** $\hat{b}_i$	**GİR** $\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	**EKK** $\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$	**A. ORANI**
Sabit	8.372305	0.041748	0.04176	0.000287356
IT1	-0.84235	0.036316	0.03687	0.015025766
IT2	0.251756	0.080644	0.08296	0.027917068
IT3	0.408836	0.105370	0.1111	0.051575158
IT4	0.109508	0.152171	0.2224	0.315777878
Sistemin Ağırlıklı Hata Kareler Ortalaması				0.9083
Serbestlik Derecesi				245
Sistem R^2				0.82

Tablo 4.12 incelendiğinde GİR ile elde edilen parametre tahmin edicilerinin SEKK tahmin edicilerine daha küçük standart hatalara sahip olduğu dolayısıyla daha etkin parametre tahminlerinin bulunacağı görülmüştür. Azalma oranlarına bakıldığında özellikle her bir ülke için dördüncü parametrede %30'lara varan küçülme saptanmıştır.

SONUÇ

Bu çalışmada hata terimleri ilişkili regresyon denklemlerinin parametre tahminleri için geliştirilen GİR tahmin yöntemi ele alınmıştır. Her biri çoklu doğrusal regresyon modelinden meydana gelen denklemlerin hata terimleri arasında bir ilişki söz konusu ise denklemlere ayrı ayrı SEKK yöntemi uygulayarak parametre tahminlerini elde etmek yerine tüm denklemleri bir bütün olarak ele alarak parametre tahminlerinin elde edilmesini amaçlayan GİR tahmin yönteminin kullanılması daha etkin parametre tahminlerinin elde edilmesini sağlamaktadır.

Tezin ilk üç bölümünde SEKK, GİR regresyon yönteminin temelini oluşturan GEKK ve tezin asıl amacı olan GİR tahmin yöntemleri hakkında bilgi verilmiştir. Burada her bir yöntemin özellikleri, varsayımları ve tahmin edicilerin elde edilmesi ele alınmıştır. GEKK ve GİR yöntemleri için regresyona dahil edilen hata terimi varyans-kovaryans matrisinin nasıl elde edileceği hakkında bilgi verilmiştir.

Tezin uygulama kısmında ise GİR yöntemi kullanılarak, hata terimleri ilişkili denklemlerin SEKK yöntemine göre daha etkin parametre tahminleri elde edileceğini göstermek amacıyla 1960-2000 yılları arasında Türkiye'nin ABD, Almanya, Fransa, İtalya, Hollanda, İsviçre ve İngiltere'ye ithalat regresyon denklemi ele alınan değişkenler için incelenmiştir. Denklemlerin hata terimleri arasında ilişki olduğu görülmüştür. Öncelikle, her bir denklemin (ülkenin) kendi içinde tüm varsayımları sağlaması gerekliliği koşulu altında tüm varsayımlar incelenmiştir. Elde edilen test istatistikleri ve grafikler incelendiğinde denklemlerde çoklu bağlantı ve otokorelasyon varsayımlarında bozulma olduğu görülmüştür. Bunun için, çoklu bağlantı varsayımının bozulumu için Temel Bileşenler Analizi uygulanırken otokorelasyonun giderilmesi için Durbin-Watson testi kullanılarak hata terimleri arasındaki ardışık bağımlılık giderilmiştir. Varsayımlar sağlandıktan sonra yedi tane çoklu doğrusal regresyon denklemi için ayrı ayrı SEKK tahmin yöntemi ve GİR tahmin yöntemi kullanılarak parametre tahminleri yapılmıştır.

SEKK ve GİR yöntemleri kullanılarak elde edilen parametre tahminleri için standart hatalar incelendiğinde GİR yöntemi ile elde edilen parametre tahminlerinin daha etkin olduğu görülmüştür (Tablo 4.12).

Sonuçta, hata terimleri ilişkili regresyon denklemlerinden meydana gelen bir regresyon denklemleri sisteminde, GİR tahmin yönteminin etkinlikteki kazancının kesim 3.7'de teorik olarak ispatı ile çalışmanın uygulama kısmında elde edilen sonuçların benzerlik gösterdiği görülmüştür.

KAYNAKLAR

1. Ağaoğlu, E., (1998), "Görünüşte İlişkisiz Regresyon Denklemlerinin Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Yöntemiyle Kestirimi", Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Dergisi, Sayı 4, 39-52.

2. Akdeniz, F., Öztürk, F., (1996), Lineer Modeller, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara.

3. Akkaya, Ş., (1991), Ekonometri II, Anadolu Matbaacılık, İzmir.

4. Aktaş, C., Seydanoğlu, D., (2004), "Türkiye'nin AB Ülkelerine İlişkin İhracat Talep Fonksiyonlarının Görünüşte İlişkisiz Regresyon Analiziyle Belirlenmesi*",* Doğuş Üniversitesi Dergisi, 5. cilt, 2. sayı, 137-146.

5. Alpar, R., (2003), Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemlere Giriş-I, Nobel Yayın Dağıtım.

6. Carlson, R.L., (1978), "Seemingly Unrelated Regression and the Demand for Automobiles of Different Sizes, 1965-75: A Disaggregate Approach", The Journal of Business, 2, 243-262.

7. Conniffe, D., (1982), "Covariance Analysis and Seemingly Unrelated Regressions", The American Statistician, 36, 169-171.

8. Conniffe, D., (1982), "A note on Seemingly Unrelated Regressions", Econometrica, 50, 229-233.

9. Doğan, N., (1998), Görünüşte İlişkisiz Regresyon Modeli ve Türkiye İhracat Fonksiyonu Üzerine Bir Uygulama, Gazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Ekonometri Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

10. Fiyat İndeksleri ve Enflasyon, Sorularla İstatistikler Dizisi 7. (www.tuik.gov.tr)

11. Graybill, F.A., (1961), An Introduction to Linear Statistical Models, McGraw-Hill, New York.

12. Gujarati, D. N., (1999), Temel Ekonometri, Literatür Yayınları, İstanbul.

13. Han, E., (2000), İktisada Giriş, Eskişehir.

14. İstatistik Göstergeler, 1923-2004. (www.tuik.gov.tr)

15. İstatistik Yıllığı, 2005. (www.tuik.gov.tr)

16. Kakwani, N.C., (1967), "The Unbiadness of Zellner's Seemingly Unrelated Regression Equations Estimators", JASA, 62, 141-142.

17. Kariya, T., (1981), "Tests for the Independence Between Two Seemingly Unrelated Regression Equations", The Annals of Statistics, 9, 381-390.

18. Kmenta, J., Gilbert, F.R., (1968), "Small Sample Properties of Alternative Estimators of Seemingly Unrelated Regressions", JASA, 63, 1180-1200.

19. Kmenta, J., Gilbert, F.R., (1970), "Estimation of Seemingly Unrelated Regressions with Autoregressive Disturbances", JASA, 65, 186-197.

20. Myers, R.H., (1990), Classical and Modern Regression with Application, Duxbury Pres, California.

21. Özkazanç, Ö., 81997), Ekonometriye Giriş, Anadolu Üniversitesi Basımevi, Eskişehir.

22. Parks, R. W., (1967), *"Efficient Estimation of a System of Regression Equations When Disturbances are Both Serially and Contemporaneously",* JASA, 62, 500-509.

23. Revankar, N. S., (1976), "Use of Restricted Residuals in SUR Systems:Some Finite Sample Results", JASA, 71, 183-188.

24. Seber, G. A. F., (1984), Multivariate Observations, John Wiley& Sons, USA.

25. Srivastava, V.K. and Giles, D.E.A., (1987), Seemingly Unrelated Regression Equations Models, Marcel Dekker, Inc., New York.

26. Srivastava, A. K., Tracy, D. S., (1986), "Computation of Standart Errors in Seemingly Unrelated Regression Equation Models", Communations in Statistics: Theory and Methods, 15 (12), 3583-3588.

27. Tarı, R., (1999), Ekonometri, Alfa Basım Yayım Dağıtım, İstanbul.

28. Timm, H. N., (2002), Applied Multivariate Analysis, Springer Verlag, New York, Inc.

29. Uysal, M., (1997), Görünüşte İlişkisiz Regresyon Denklemleri Modeli ve Tarımsal Üretim Üzerine Bir Uygulama, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı Doktora Tezi, Ankara.

30. Viraswami, K., (1998), "Some efficiency results on seemingly unrelated regression equations, Working Paper 98-05, University of Waterloo, Waterloo.

31. Zellner, A., (1962), *"*An Efficient Method of Estimating SUR and Tests for Agregation Bias*"*, JASA, 57, 348-368.

32. Zellner, A., (1963), "*Estimators for Seemingly Unrelated RegressionEquations: Some Exact Finite Sample Results",* JASA, 58, 977-992.

33. www.econ.uiuc.edu

34. www.central.sussex.uk

35. www.londonmet.ac.uk

36. www.puplic.asu.edu

37. www.uta.edu

EKLER

Tablo Ek 1. 1960-200 yılları arasında Türkiye'nin seçili ülkelerden gerçekleştirdiği ithalat tutarı(1000$)

YILLAR	ABD	Almanya	Fransa	Hollanda	İsviçre	İtalya	İngiltere
1960	120609	98132	16354	12116	6529	30069	52882
1961	139473	84709	17619	12010	7448	42691	66752
1962	180436	105902	28677	11958	7049	33239	69796
1963	210689	103980	34107	13323	8494	34862	76736
1964	154556	80213	20667	13028	9306	31942	55749
1965	160639	83844	21359	13376	12377	36878	55352
1966	172597	112695	43327	15831	18555	53808	78741
1967	122732	133656	27110	15229	19299	50020	87986
1968	120618	155659	26999	18684	22968	67102	98457
1969	154526	147609	26624	19741	35170	75499	94710
1970	206045	176277	32460	24827	44911	74135	90982
1971	171974	209865	75430	26205	57670	120728	111502
1972	191819	301423	104686	45627	73467	165850	170231
1973	185443	437308	133581	99830	125334	170206	223959
1974	350363	680930	244870	116200	206321	270702	266892
1975	425748	1057712	278640	138877	281327	357940	344265
1976	437879	945589	308695	168025	280430	386120	409874
1977	502780	944870	327661	154185	335489	454407	402838
1978	285332	820854	361285	101336	268382	290885	201210
1979	374087	663103	324675	86340	254025	459076	239590
1980	432357	845735	380152	206435	331640	284432	321865
1981	589359	958126	400039	166322	532948	372045	433655
1982	813521	1009105	263222	158462	330439	414971	433798
1983	695116	1052849	218341	181659	265808	510274	440680
1984	1073474	1172465	242514	212369	230397	630343	444964
1985	1150061	1368779	513936	218254	186565	658173	468429
1986	1176966	1771866	545317	264067	285368	865981	518924
1987	1366900	2108828	607833	366754	365184	1076006	697035
1988	1519739	2054385	828814	384896	343566	1005690	739111
1989	2094356	2203987	744905	445249	411500	1070964	727720
1990	2281647	3496831	1340354	572939	536647	1727064	1013686
1991	2255349	3232028	1226566	641650	489022	1845372	1165598
1992	2600541	3754465	1350861	698094	687947	1918569	1187330
1993	3350614	4532910	1952364	869799	650442	2557823	1545696
1994	2429464	3645617	1458206	740002	472632	2008524	1169767
1995	3723986	5547588	1995845	1084328	816276	3193129	1829761
1996	3515963	7813503	2771466	1448604	1014743	4285793	2510395
1997	4329642	8021174	2967222	1484889	1104028	4463083	2763149
1998	4053750	7316337	3034051	1446440	1017738	4221740	2683336
1999	3080267	5880055	3127160	1314946	748911	3192081	2189973
2000	3911022	7198209	3531817	1584461	890977	4332788	2747746

Tablo Ek 2. 1960-200 yılları arasında Türkiye'nin seçili ülkelerle döviz kuru(TL)

YILLAR	ABD $	F. Alman Markı	Fransız Frangı	Hollanda Florini	İsviçre Frangı	100 İtalyan Lireti	İngiliz Sterlini
1960	9	0.67	1.82	0.74	2.06	1.44	25.2
1961	9	2.14	1.82	2.37	2.06	1.44	25.2
1962	9	2.25	1.82	2.49	2.06	1.44	25.2
1963	9	2.25	1.82	2.49	2.06	1.44	25.2
1964	9	2.25	1.82	2.49	2.06	1.44	25.2
1965	9	2.25	1.82	2.49	2.06	1.44	25.2
1966	9	2.25	1.82	2.49	2.06	1.44	25.2
1967	9	2.25	1.82	2.49	2.06	1.44	21.6
1968	9	2.25	1.82	2.49	2.06	1.44	21.6
1969	9	2.46	1.82	2.49	2.06	1.44	21.6
1970	14.85	4.09	2.69	4.13	3.46	2.39	35.94
1971	14	4.34	2.74	4.31	3.65	2.41	36.48
1972	14	4.34	2.74	4.31	3.65	2.41	32.9
1973	14	5.25	3.04	5.03	4.34	2.28	32.3
1974	13.85	5.65	2.98	5.4	5.22	2.04	31.82
1975	15	5.95	3.48	5.77	5.6	2.21	31.05
1976	16.5	6.85	3.33	6.5	6.8	1.9	26.4
1977	19.25	8.6	3.9	7.81	8.85	2.18	34.7
1978	25	13.87	5.97	12.66	16.67	3.09	50.1
1979	35	20.22	8.6	18.33	21.85	4.33	79.02
1980	89.25	45.15	19.54	41.65	50.2	9.53	210.12
1981	132.3	58.35	23.07	53.03	73.38	10.94	250.25
1982	184.9	78.25	27.6	70.63	93.05	13.58	300.55
1983	280	101.75	33.25	90.5	127.97	16.75	401.38
1984	442.5	141.2	46.09	124.91	171.51	23.02	516.18
1985	574	233.15	76.08	207	276.76	34.21	826.56
1986	755	387.95	117.15	343.2	464.6	55.72	1109.28
1987	1018.35	638.65	188.3	567.77	788.5	86.52	1892.6
1988	1813.02	1022.86	299.92	905.61	1207.87	139.03	3276.12
1989	2311.37	1364.45	399.06	1208.88	1497.97	182.04	3730.54
1990	2927.13	1947.53	573.1	1728.46	2283.25	258.87	5612.78
1991	5074.83	3339.81	978.28	2963.23	3748.03	441.1	9482.32
1992	8555.85	5302.66	1556.46	4721.25	5862.18	582.53	12957.84
1993	14458.03	8347.59	2458.64	7463.36	9789.44	846.74	21370.4
1994	38418	24683	7143	22055	29193	2357	59663
1995	61054	42600	12439	38054	52920	3757	94952
1996	107505	69073	20481	61555	79503	7034	181533
1997	204750	114240	34120	101250	140610	11570	338870
1998	312720	187340	55843	166130	228350	18811	522790
1999	540098	277169	82642	245993	337292	27997	872501
2000	671765	316265	94299	280690	407884	31946	993878

Tablo Ek 3. 1960-200 yılları arasında Türkiye'nin seçili ülkelerden gerçekleştirdiği ihracat tutarı(1000$)

YILLAR	ABD	Almanya	Fransa	Hollanda	İsviçre	İtalya	İngiltere
1960	58544	47540	16324	5971	9500	27663	30986
1961	65205	51086	23857	5808	15459	34190	29743
1962	74897	67415	14042	7275	18707	51510	35806
1963	49783	61859	16105	7559	21103	43409	47104
1964	72987	62082	24940	7155	23507	28745	44576
1965	82329	72162	19974	11215	14169	30454	41302
1966	80240	76453	24586	12098	19651	31784	46768
1967	92932	84219	28921	11189	27088	36234	34241
1968	72533	86408	21809	15317	26768	24194	33939
1969	59885	112440	27675	16366	28465	42897	30286
1970	56235	117376	39466	21268	44154	38968	33740
1971	68846	131012	48870	24440	64819	39412	32183
1972	103506	186567	50829	27437	76024	53266	45659
1973	130810	221261	72717	41045	115829	115448	100550
1974	144196	342988	66601	52438	94226	90332	81604
1975	147120	304934	61936	50831	95790	82120	70078
1976	191411	376720	108351	63742	179613	171511	137600
1977	121823	388810	94118	57484	108769	163286	94303
1978	153150	506672	127383	76871	113430	175240	113734
1979	104499	495070	137294	75378	113743	212970	103035
1980	127390	603969	163897	84380	125385	218448	104533
1981	267931	643245	215721	95963	263731	246096	147961
1982	251598	707449	194826	104750	323858	327493	189029
1983	231720	837766	180450	140850	286472	422688	247039
1984	368169	1279699	200610	181102	358248	501160	261045
1985	505992	1390989	215281	213317	128374	502216	538724
1986	549333	1443985	298680	222380	162278	579841	334213
1987	714087	2183644	499603	280240	355834	850614	541407
1988	760661	2148978	498571	351054	264843	954748	576142
1989	970961	2175425	594795	406867	173158	978078	615923
1990	967622	3063574	736799	435355	292788	1106319	744786
1991	912870	3412921	688657	474866	246327	971581	676045
1992	865026	3660428	808881	499785	222771	942713	796311
1993	986138	3654177	771205	517022	215891	750298	835075
1994	1520068	3934285	851187	621037	238900	1033619	888890
1995	1513831	5036174	1033072	736770	237979	1457002	1135657
1996	1639301	5186833	1053178	769735	275717	1446662	1260724
1997	2027132	5253479	1162803	779169	318218	1387225	1511299
1998	2233347	5460333	1304738	888601	244200	1557137	1739619
1999	2436658	5474589	1569848	932302	268334	1682556	1829400
2000	3135162	5179844	1656968	874182	238684	1789307	2036826

Tablo Ek 4. 1960-200 yılları arasında Türkiye'deki sabit fiyatlarla kişi başına düşen milli gelir (TL) ve tüketici fiyat endeksi değerleri

YILLAR	KBMG	TUFE
1960	2576.2	5.2
1961	2560.3	1.6
1962	2652.8	3.4
1963	2838.9	7.9
1964	2882.8	1.2
1965	2901	5.8
1966	3162	5.7
1967	3220.2	8.3
1968	941944.2	3.7
1969	958207.4	7.8
1970	975867.7	8.1
1971	1018842	16.5
1972	1084758	13.7
1973	1109871	16
1974	1117768	18.6
1975	1154634	19.8
1976	1232750	16.4
1977	1243640	28
1978	1233165	47.2
1979	1202026	56.8
1980	1144739	115.6
1981	1170770	33.9
1982	1177245	21.9
1983	1196703	31.4
1984	1250251	48.4
1985	1271997	45
1986	1328231	34.6
1987	1427282	38.9
1988	1416888	73.7
1989	1409056	63.3
1990	1505110	60.3
1991	1481321	63.8
1992	1546592	72.3
1993	1641872	66.1
1994	1514346	106.3
1995	1606454	93.6
1996	1691943	84.9
1997	1838576	91
1998	1880016	54.3
1999	1741293	62.9
2000	1766124	32.7