T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HERON ÜÇGENLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Mehmet DARIYERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI
Konya-2006

T. C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HERON ÜÇGENLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Mehmet DARIYERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI

Bu tez 06.01.2006 tarihinde aşağıdaki juri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

……	……	……
Yrd. Doç. Dr.	Prof. Dr.	Yrd. Doç. Dr.
Ahmet CİHANGİR	Hasan ŞENAY	Saadet ARSLAN
(DANIŞMAN)	(JÜRİ)	(JÜRİ)

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HERON ÜÇGENLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Mehmet DARIYERİ

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İlköğretim Anabilim Dalı
Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR
2006, v + 45 Sayfa
Jüri : Prof. Dr. Hasan ŞENAY
Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR
Yrd. Doç. Dr. Saadet ARSLAN

Bu çalışmada; ilk olarak, Heron üçgenleri tanıtılarak, bunların temel özelliklerine yer verilmiştir. Daha sonra; aynı alana sahip Heron üçgenlerinin ve hatta aynı alan ve yarı çevreye sahip Heron üçgenlerinin varlığının tespiti ve verilen bir Heron üçgeninin iç teğet çemberi ile çevrel çemberinin yarıçaplarının özel durumları ele alınmıştır. Son olarak ise Heron üçgenlerinin alanının asal çarpanlarına yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Heron Üçgeni, Pisagor Üçgeni, Aritmetik Üçgen, Brahmagupta Üçgeni

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

A RESEARCH ON SOME PROPERTIES OF HERON TRIANGLES

Mehmet DARIYERİ

Selçuk Üniversity

Graduate School of Natural and Applied Science

Department of Primary Education

Supervisor : Asist. Prof. Dr. Ahmet CİHANGİR

2006, v + Page 45

Jury : Prof Dr. Hasan ŞENAY

Asist. Prof. Dr. Ahmet CİHANGİR

Asist. Prof. Dr. Saadet ARSLAN

In this study, heron triangles have been introduced at first and the basic characteristics of these have been mentioned. Later, the existence of Heron triangles with the same area and semi area has been found that and the inner tangent circle of Heron triangle and the special conditions of the radial of peripheral circle have been discussed. At last, prime multipliers of the areas of Heron triangles have been mentioned.

Key Words: Heronian Triangles, Pythagorean Triangles, Arithmetic Triangles, Brahmagupta Triangles.

ÖNSÖZ

İnsanoğlu doğumundan itibaren öğrenmeye açıktır. Ve her geçen gün öğrendiklerine yeni şeyler ilave ederek bir kar yumağı gibi öğrendiklerini artırdığı bilinen bir gerçekliktir. Bu gerçeklikten yola çıkarak Matematiğin aydınlanmamızda ve öğrendiklerimizi anlamlandırmamızda ne derece önemli olduğu Galileo'nun şu sözleriyle de ortaya konulmaktadır. *"...evren her an gözlemlerimize açıktır; ama onun dilini ve bu dilin yazıldığı harfleri öğrenmeden ve kavramadan, anlaşılamaz. Evren, Matematik diliyle yazılmıştır; harfleri üçgenler, daireler ve diğer geometrik biçimlerdir. Bunlar olmadan tek sözcüğü bile anlaşılamaz; bunlarsız ancak karanlık bir labirentte dolanılır."* Bu anlayış ve felsefeden yola çıkılarak günümüze kadar matematik alanında sayısız çalışma yapılmış ve insanlığın yükselmesi için kurulan merdivene birer basamak daha ilave edilmiştir.

Matematiğin de değişen dünya koşullarında değişmeden, gelişmeden durması düşünülemez. Bütün bilimlerde olduğu gibi Matematik de asırlardır çok çeşitli alanlarda gelişim göstermiştir. Ayrıca Matematiğin gelişiminin büyüleyici yönlerinden biri de sayılar teorisi ile geometri arasındaki ilişkilerdir.

Bu çalışma; A. V. Kramer ve F. Luca'nın "Some Remarks on Heron Triangles" ve F. Luca'nın "Fermat Primes and Heron Triangles with Prime Power Sides" başlıklı makaleleri üzerine kurulmuştur. Çalışmamızda bu kaynaklara dayanılarak Heron üçgenleri incelenmiş ve bazı özellikleri verilmiştir.

"Heron Üçgenlerinin Bazı Özellikleri Üzerine Bir Araştırma" adlı tez konusunun tespitinde ve hazırlanması sırasında benden yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR' e ayrıca yardımlarından dolayı abim ve aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

Mehmet DARIYERİ

Aralık-2005

KULLANILAN SEMBOLLER

$T = (x, y, z)$	– Kenar uzunlukları x,y ve z olan T üçgeni.
s	– Üçgenin çevre uzunluğunun yarısı.
A	– Üçgenin alanı.
r	– Üçgenin iç teğet çemberinin yarıçapı.
R	– Üçgenin çevrel çemberinin yarıçapı.
f_n	– n –inci Fibonacci sayısı.
F_n	– n –inci Fermat sayısı.
$d = (a, b)_{ebob}$	– a ve b pozitif tam sayılarının en büyük ortak böleni.
$(a,b)_{ebob}=1$	– a ve b pozitif tam sayıları aralarında asal.
$T(u, v)$	– Kenar uzunlukları u, v parametreleri ile tanımlanmış T üçgeni.
$d_{s,t} = (s, t)_{ebob}$	– s ve t pozitif tamsayıları için, s ve t nin en büyük ortak böleni.
$p \mid a$	– p , a yı böler.
$p^{\alpha} \parallel a$	– a yı bölen p nin en büyük kuvveti α dır.($p^{\alpha} \mid a$ ve $p^{\alpha+1} \nmid a$)
h_a	– Üçgenin A köşesinin karşısındaki a kenarına ait yükseklik.

İÇİNDEKİLER

ÖZET …… i
ABSTRACT …… ii
ÖNSÖZ …… iii
SEMBOLLER ……..... iv
İÇİNDEKİLER …… v

1. GİRİŞ …… 1
1.1. Kaynak Araştırması …….. 2
1.2. Ön Bilgiler …… 5
2. HERON ÜÇGENLERİNİN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ ...……10
3. HERON ÜÇGENLERİNİN ALAN VE ÇEVRE ÖZELLİKLERİ ……...19
4. İÇ TEĞET ÇEMBERİNİN YARIÇAPI VEYA ÇEVREL ÇEMBERİNİN YARIÇAPI TAMSAYI OLAN HERON ÜÇGENLERİ ……...…..……30
5. HERON ÜÇGENLERİNİN ALANLARININ ASAL ÇARPANLARI …….37
6. KAYNAKLAR …… 44

1. GİRİŞ

Kenar uzunluklarının yanı sıra alanı da rasyonel sayılar olan üçgenler yüzyıllar önce ilk olarak Heron of Alexandria tarafından çalışıldığından bu tip üçgenlere Heron üçgenleri denilmektedir. Heron üçgenleri üzerindeki çalışmaların, kenar uzunluklarının ortak payda ile çarpılmasıyla, tamsayı kenarlı ve tamsayı alanlı üçgenlerin çalışılmasına indirgenebileceğinden dolayı günümüzde artık Heron üçgeni denilince; kenar uzunlukları ve alanı tam sayılar olan üçgen anlaşılmaktadır.

Zamanla insanoğlu merak duyduğu konular üzerinde değişik irdelemeler yaparak farklı durumları ortaya çıkarma ihtiyacı duyar. Örneğin; dik kenar uzunlukları x ve y tam sayıları, hipotenüsünün uzunluğu da z tam sayısı olan bir Pisagor üçgeni; $x^2 + y^2 = z^2$ bağıntısını sağlar. 1637 de Diophantus' un "Arithmetica" adlı kitabının yeni çıkan Fransızca çevirisini okumakta olan Pierre De Fermat; Pisagor üçgenlerinin anlatıldığı sayfanın yanındaki boşluğa; "$n > 2$ için $x^n + y^n = z^n$ denkleminin bir tam sayı çözümünün olmadığını ve bu önermenin harikulade bir kanıtını bulduğunu ancak sayfa kenarında yeterince yer olmamasından dolayı bunu yazamayacağını" belirtir. Fermat' ın ölümünden sonra, bu kitap Fermat' ın kitaplığında bulunmuş, fakat önermenin ispatı bulunamamıştır. Bu önermenin ispatı ile dünyaca ünlü birçok Matematikçi uzun yıllar uğraşmıştır. Nihayet İngiliz matematikçi Wiles tarafından, 1995 yılında uzun bir makale ile bu konjektürün eliptik eğriler yardımıyla ispatı sunulmuştur.

Bu örneğe benzer olarak Heron üçgenleri ile de birçok matematikçi ilgilenmiş ve ilgilenmektedirler. Örneğin; Brahmagupta, Bhaskara, Hoppe, Aubry ve Rath gibi birçok matematikçi diophantine denklemlerinin çözümlerine bağlı olarak bu üçgenlerin üretilmesi üzerine bir çok araştırma yapmışlardır. Bu çalışmalar konuya yaklaşım tarzına göre çeşitlilik arz etmektedir. Konumuzla ilgili çalışmaların bazılarını tezimizde vermeye ve irdelemeye çalışacağız.

Bu çalışma beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; Pisagor üçgenleri, Aritmetik üçgenler, Fibonacci sayıları, Fermat asalları gibi konumuzla ilgili tanım ve teoremler asıl kaynaklarından alınarak verilmiş, ancak teoremlerin

ispatlarına girilmemiştir. İkinci bölümde; Heron üçgenleri tanıtılarak, bunların temel özelliklerine yer verilmiştir. Üçüncü bölümde; aynı alana sahip Heron üçgenleri ile aynı alan ve aynı yarı çevreye sahip Heron üçgenlerinin varlığının tespitine yer verilmiştir. Dördüncü bölümde; verilen bir Heron üçgeninin iç teğet çemberi ile çevrel çemberinin yarıçaplarının özel durumları ele alınmıştır. Son bölümde ise herhangi bir Heron üçgeninin alanı olan tamsayının çarpanları olan asalların bazı özellikleri verilmiştir.

1.1. Kaynak Araştırması

Heron, Mısır'ın İskenderiye şehrinde doğan ünlü Yunan Matematikçisidir. Bazı kaynaklara göre M.S. 50 yıllarında İskenderiye de doğduğu, bazılarına göre de M.Ö. 150 senelerinde Mısır a bağlı Ptolemaic de doğduğu belirtilmektedir. Heron' un; pek çok kaynak tarafından da temel kabul edilen kitapları mevcuttur. Bunlardan bazılarını şöyle özetleyebiliriz.

Metrica I de; 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11 ve 12 kenarlı düzlemsel şekillerin alanları ile 3 boyutlu cisimlerin yüzey alanları ele alınır. 2000 yıl önce Babilliler tarafından da kullanılan, bir sayının yaklaşık karekökü değerinin bulunması ile ilgili bir metot verilir.

Metrica II de; Heron tarafından, piramitler, prizmalar, koniler, silindirler, küreler gibi birçok 3-Boyutlu şekillerin hacimleri ele alınır.

Dioptra da; Ölçme (haritacılık) ve teodolitler ele alınır. Astronomi üzerine bir bölüm içerir. İskenderiye ve Roma arasındaki mesafeyi bulmak için, bu şehirlerden birinde bir ay tutulması gözlendiğinde, ikisinin arasındaki yerel saat farkının kullanıldığı bir metot verilir.

Catoptrica da; Aynalar ele alınır. Işığın en kısa yoldan doğrusal olarak gittiğini ve ışığın yüzeye geliş ve yansıma açılarının eşit olduğu belirtilir.

Pneumatica da; bir itfaiye tulumbası gibi, çeşitli uzunluktaki borulardan oluşan ve bu boruların içinden basınçlı hava geçirilmesiyle değişik tonlarda sesler çıkarabilen bir müzik aleti gibi bazı tasarımlar verilir.

Ayrıca; Heron, bir aracın aldığı yolun uzunluğunu göstermesi için kullanılan Yunanlılar ve Romalılar zamanına ait bir taksimetrenin, birbirini izleyen dişlilerin kullanıldığı dönen bir kol vasıtasıyla da az bir çaba harcayarak büyük ağırlıkları kaldırma imkanı sağlayan bir yük kaldırıcısının, itfaiyede kullanılan basınçlı su pompasının, buharla çalışan ilk motorların ve inşaatlarda kullanılan su terazisinin de tasarımcısı ve yapıcısıdır.

Kenar uzunlukları, x, y, z ve yarı çevresi de $s = \frac{1}{2} \cdot (x + y + z)$ olan üçgenin alan formülü;

$$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

dır. Bu ifadeye Heron formülü denir. Heron üçgeni tanımından dolayı Heron üçgenlerinin bulunması, üretilmesi, sayılması, kenar, alan, çevre özelliklerinin tespiti gibi bir çok problem ortaya çıkmıştır.

Dickson(1971) de; eserinin basım yılına kadar olan sayılar teorisi ile ilgili gelişmeleri, açık problemleri ve çalışmaları özetlemiştir. Konumuzla ilgili 19. y.y. da H. Rath, R. Hoppe ve L. Aubry' nin yaptığı çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmalarda; aritmetik üçgenler ile ilgili birçok özellik ortaya konulmuş ve bu üçgenleri parametrik olarak üreten formüller elde edilmiştir.

Guy(1994) te; Sayılar Teorisinin, geçmişten eserin yayınlandığı 1994 yılına kadar, çözülememiş problemler ile bu problemlerle ilgili yayınları ve özetlerini veren bir eser ortaya koymuştur. "Unsolved Problems in Number Theory" isimli bu eserin Diophantine Equations isimli bölümünün D18 inci kesiminde Perfect Cuboidlerle ilgili ve D21 inci kesiminde ise Heron üçgenleri ile ilgili çözülememiş problemleri vermiştir.

Buchholz ve Rathbun(1997) de; iki rasyonel kenarortaylı Heron üçgenlerinden oluşan kümenin sonsuz elemanlı olduğunu ortaya koymuşlardır.

Beauregard ve Suryanarayan(1997) de; kenar uzunlukları, elemanları tam sayılardan oluşan ve ardışık herhangi iki elemanı arasındaki farkı d olan bir aritmetik diziden alınan d-aritmetik üçgenlerini incelemişler ve Pisagor üçlülerinden d-aritmetik üçgenlerin ve d aritmetik üçgenlerden de Pisagor üçgenlerinin nasıl elde edilebileceğini göstermişlerdir.

Fleenor (1997) ise; en küçük Heron üçgeninin; alanı 6 birim kare olan (3, 4, 5) üçgeni olduğunu ve özellikle (3, 4, 5) üçgeninin kenarlarının uzunluklarının ardışık tam sayılar olmasından hareketle kenarları ardışık tam sayılardan oluşan diğer Heron üçgenlerinin varlığını incelemiştir.

Beauregard ve Suryanarayan (1998) ise, ardışık tam sayı kenarlı Heron üçgenlerinin Pell denklemine bağlı olarak nasıl üretildiğini ortaya koymuşlardır.

Rusen (1998) de eşit alanlı rasyonel üçgenlerin sonsuz sayıda olduğunu ve bu üçgenlerin verilen bir rasyonel üçgene bağlı olarak üretilebileceğini göstermiştir.

Beauregard ve Suryanarayan (2000) de, genel aritmetik üçgenlerin özel tip bir Pell denklemine bağlı olarak nasıl elde edilebileceğini belirlemişlerdir.

Luca (2000) de; "kenarları, köşegenleri ve cisim köşegeni tamsayı olan bir dikdörtgenler prizmasının(Perfect Cuboid) bulunması" probleminin, "kenarları tamsayıların karelerinden ve açı ortayları da tamsayılardan oluşan bir üçgen bulunması" problemine eşdeğer olduğunu ortaya koymuştur.

Cohen (2000) de; kenarlarının uzunlukları ardışık tam sayılardan oluşan Heron üçgenlerinin sonsuz sayıda olduğunu kanıtlamıştır.

Aassila (2001) de; aynı alanlı kongruent olmayan Heron üçgen çiftlerinin varlığı ile aynı alan ve aynı yarı çevreli kongruent olmayan Heron üçgen çiftlerinin varlığına ilişkin olarak bazı sonuçlar vermiştir. İç teğet çemberinin ve çevrel çemberinin yarıçaplarının özel durumları için Heron üçgenlerinin varlığını kanıtlamıştır. Yani; iç teğet çemberinin yarıçapı pozitif bir tam sayı olan bir Heron üçgeni ile çevrel çemberinin yarıçap uzunluğu, $4k + 1$ biçiminde bir asal olan bir Heron üçgeninin varlığını kanıtlamıştır.

Kramer ve Luca (2001) de aynı alanlı kongruent olmayan Heron üçgen çiftlerinin varlığı ile aynı alan ve aynı yarı çevreli kongruent olmayan Heron üçgen

çiftlerinin varlığıyla ilgili olarak bazı sonuçları sunmuştur. İç teğet çemberinin ve çevrel çemberinin yarıçaplarının özel durumları için Heron üçgenlerinin varlığını kanıtlamıştır. Yani; iç teğet çemberinin yarıçapı pozitif bir tam sayı olan bir Heron üçgeninin varlığını ve çevrel çemberinin yarıçapı, 2 nin bir kuvveti veya $12k + 11$ biçiminde ki bir asalın kuvveti olan bir Heron üçgeninin var olmadığını ortaya koymuştur.

Sastry(2001) de bir Heron üçgenini üretmek için Gergonne – Cevian ve Kenarortay perspektifini ele alarak Heron üçgenlerinin λ – ailesini tanımlamıştır. Ayrıca bazı Heron problemlerinin elemanter çözümlerini vermiştir.

Gurbanlıyev(2003) de, Pisagor üçgenleri, Latisler, Kongruent sayılar ve Sürekli Kesirler ile Heron üçgenleri arasındaki ilişkileri incelemiştir. Ayrıca kenar uzunlukları birbirinden farklı Fibonacci sayılarından oluşan sadece Heron üçgenlerinin değil böyle hiçbir üçgenin mevcut olmadığını ve kenar uzunlukları tam sayı olan bir eşkenar üçgenin Heron üçgeni olamayacağını göstermiştir.

Luca(2003) de; herhangi negatif olmayan m tamsayısı için $F_m = 2^{2^m} + 1$, biçiminde tanımlanan m inci Fermat sayısı F_{m} olmak üzere, asal Fermat sayıları ile kenarları bir asalın kuvvetleri olan Heron üçgenleri arasındaki ilişkileri araştırmıştır.

Gaál, Járási ve Luca (2003) te; $\wp$, asalların sonlu bir kümesi, **S** de sadece $\wp$ kümesindeki asallar tarafından bölünebilen tam sayıların kümesi ve $x, y, z \in \mathbf{S}$ bir Heron üçgeninin kenar uzunlukları olmak üzere; $(x, y, z)_{ebob} = 1$ şartını sağlayan Heron üçgenlerinin sadece sonlu sayıda olduğunu kanıtlamışlardır.

1.2. Ön Bilgiler

Bu kesimde, daha sonraki bölümlerde faydalanılacak olan temel tanımlar ile teoremleri ispatsız vereceğiz.

Tanım 1.2.1. *a, b* $\in \mathbf{Z}^+$ olsun. $a = b.c$ olacak şekilde bir $c \in \mathbf{Z}$ varsa *b, a* yı *böler* denir ve $b \mid a$ biçiminde belirtilir (Şenay, 1989).

Tanım 1.2.2. *a, b, d* $\in \mathbf{Z}^+$ olsun. Eğer $d \mid a$ ve $d \mid b$ ise *d* ye *a* ile *b* nin bir *ortak böleni* denir.

Tanım 1.2.3. *a, b, c, d* $\in \mathbf{Z}^+$ olsun. Eğer;

i) $d|a$ ve $d|b$ ise,

ii) $c|a$ ve $c|b$ şartını sağlayan her *c* ortak böleni için $c|d$ oluyorsa,

d ortak bölenine, *a* ile *b* nin *en büyük ortak böleni (ebob)* denir ve $(a, b)_{ebob} = d$ biçiminde gösterilir (Şenay, 1989).

Ayrıca *a* ve *b* gibi iki tamsayısının en büyük ortak bölenleri 1 ise bu iki sayıya *aralarında asaldır* denir ve bu $(a, b)_{ebob} = 1$ biçiminde belirtilir (Şenay, 1989).

Lemma 1.2.1(Aritmetiğin Esas Ön Teoremi). $a| \ b.c$ ve $(a, b)_{ebob} = 1$ ise $a| \ c$ dir (Şenay, 1989).

Tanım 1.2.4. Pozitif bir p sayısına eğer,

i) $p > 1$

ii) *p*, kendisinden ve 1 den başka pozitif bölene sahip değilse *asaldır* denir.

Ayrıca birden büyük herhangi bir tamsayı asal değilse *bileşik sayı* adını alır (Şenay, 1989).

Tanım 1.2.5. Sabit ve sıfırdan farklı bir *m* tamsayısı *a* ve *b* gibi herhangi iki tamsayının $a - b$ farkını bölüyorsa ($m \mid a - b$ ise) *a, b* ye *m* modülüne göre *kongrüenttir* denir ve bu $a \equiv b \pmod{m}$ biçiminde belirtilir (Şenay, 1989).

Tanım 1.2.6. $x^2 \equiv a \pmod{p}$ kongrüansı bir çözüme sahipse *a* ya*, p* nin bir *ikinci dereceden kalanı* denir ve *aRp* şeklinde gösterilir; eğer, $x^2 \equiv a \pmod{p}$ kongrüansı hiç bir çözüme sahip değilse *a* ya*, p* nin bir *ikinci dereceden olmayan kalanı* denir ve *aNp* şeklinde gösterilir (Şenay, 1989).

Tanım 1.2.7. a bir tamsayı, p de 2 den büyük bir asal sayı olsun. Ayrıca $(a, p)_{ebob} = 1$ olarak verilsin. Bu durumda $\left(\frac{a}{p}\right)$ ile gösterilen *Legendre sembolü;*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{eger } p \nmid a \text{ ve } aRp \text{ ise,} \\ -1, & \text{eger } p \nmid a \text{ ve } aNp \text{ ise,} \\ 0, & \text{eger } p \mid a \text{ ise.} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır(Çallıalp, 1999).

Sonuç 1.2.1. –1 sayısı, $4.k + 1$ biçimindeki asallar için bir aRp ve $4.k + 3$ biçimindeki asallar için bir aNp dir (Şenay, 1989).

Teorem 1.2.1. p asal ve $p \mid a.b$ ise $p \mid a$ veya $p \mid b$ dir (Şenay, 1989).

Tanım 1.2.8. Kenar uzunlukları x, y, z tam sayıları ve alanı da tam sayı olan üçgene *Heron üçgeni*, (x, y, z) üçlüsüne de *Heron üçlüsü* denir (Kramer & Luca, 2001).

Tanım 1.2.9. Kenar uzunlukları x, y, z olan bir Heron üçgeni için $(x, y, z)_{ebob} = 1$ oluyorsa üçgene *primitif Heron üçgeni* denir (Kramer & Luca, 2001).

Tanım 1.2.10. Bir Heron üçgeninin; kenar uzunlukları, bir aritmetik diziden alınmışsa ve alanı da tam sayı oluyorsa bu üçgene *aritmetik üçgen* denir ve eğer bu aritmetik dizinin ardışık herhangi iki elemanı arasındaki fark d ise bu üçgene *d - aritmetik üçgen* denir. (Beauregard & Suryanarayan, 1997).

Tanım 1.2.11. x, y ve z doğal sayıları $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini sağlıyorsa o zaman dik kenar uzunlukları x ile y, hipotenüsünün uzunluğu da z olan bir dik üçgen vardır. Bu dik üçgene *Pisagor üçgeni;* Pisagor üçgeninin kenar uzunluklarından oluşan (x, y, z) üçlüsüne de *Pisagor üçlüsü* denir (Sierpinski, 1962).

Tanım 1.2.12. Eğer x, y dik kenarlı, z hipotenüslü bir Pisagor üçgenin x, y dik kenarları; $x > y$, $x + y \equiv 1 \pmod 2$ ve $(x, y)_{ebob} = 1$ şartlarını sağlıyorsa o zaman bu Pisagor üçgenine *primitif Pisagor üçgeni*, (x, y, z) üçlüsüne de *primitif Pisagor üçlüsü* denir (Sierpinski, 1962).

Tanım 1.2.13. İlk terimleri $f_0 = 0, f_1 = 1$ olan ve birden büyük her n pozitif tamsayısı için genel terimi;

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

formülü ile verilen diziye *Fibonacci dizisi* denir ve $(f_n)_{n\geq 0}$ biçiminde ifade edilir. Ayrıca f_n sayısına da n inci *Fibonacci Sayısı* denir (Kramer & Luca, 2001).

Tanım 1.2.14. $x, y \in \mathbf{Z}$, $m, n \in \mathbf{N}$ olmak üzere; $x^m - y^n = 1$ denklemine *Catalan denklemi* denir (Dickson, 1971).

Tanım 1.2.15. Bir Pisagor üçgeninin alanına bir *Pisagor sayısı* ve bir primitif Pisagor üçgeninin alanına *primitif Pisagor sayısı* denir (S. Mohanty and S. P. Mohanty,1992).

Teorem 1.2.2. $6\sum_{k=1}^{n} k^2$ sayısı bir primitif Pisagor sayısıdır ve bu sayılar Heron üçgenlerinin alanını temsil eder (S. Mohanty and S. P. Mohanty,1992).

Teorem 1.2.3. p, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ biçiminde bir asal ise iki karenin toplamı biçiminde yazılabilir (Şenay, 1989).

Teorem 1.2.4. Bir (x, y, z) üçgeni için $x = y$ ve z nin de çift sayı olması durumunda üçgen bir ikizkenar üçgen, h_z de bir tam sayı olur ve $(x, h_z, z / 2)$ bir Pisagor üçlüsü oluşturur (Luca, 2003).

Teorem 1.2.5. Herhangi bir ABC üçgeninin; alanı A, yarı çevresi s ve iç teğet çemberinin yarıçapı da r ile gösterilirse o zaman $\frac{A}{s} = r$ dir (Gustauson ve Frisk, 1991).

Tanım 1.2.16. İki üçgenin karşılıklı açıları eş ve karşılıklı kenar uzunlukları orantılı ise, bu üçgenlere *benzer üçgenler* denir (Gustauson ve Frisk, 1991).

Sonuç 1.2.2. $(a, b)_{\text{ebob}} = d$ ise $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)_{ebob} = 1$ dir (Şenay, 1989).

Teorem 1.2.6(Aritmetiğin Temel Teoremi). $n > 1$ tam sayısının standart biçimi tektir. Yani çarpanların sıra değişikliği dışında n sayısı asalların çarpımı biçiminde tek türlü yazılabilir (Şenay, 1989).

Tanım 1.2.17. Herhangi $m \geq 0$ sayısı için $F_m = 2^{2^m} + 1$ sayısına, *Fermat sayısı* denir. Asal olan Fermat sayısına, *Fermat asalı* denir (Luca, 2003).

Teorem 1.2.7. m bir pozitif tamsayı olmak üzere $2^m + 1$ sayısı asal ise m, 2 nin bir kuvvetidir. (Çallıalp,1999).

2. HERON ÜÇGENLERİNİN BAZI TEMEL ÖZELLİKLERİ

Fermat' ın son teoremi olarak bilinen "$n \geq 3$ ve n bir tam sayı olmak üzere $x^n + y^n = z^n$ denklemini sağlayan hiçbir x, y, z tam sayı çözümü yoktur." Biçimindeki ifadenin n = 2 için elde edilen

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{2.1}$$

ifadesine Pisagor denklemi denir. Pisagor denklemi üzerindeki çalışmalar ise aynı zamanda x ve y dik kenarlı, z hipotenüslü dik Pisagor üçgenlerinin de tespit edilmesine eşdeğerdir.

Öncelikle, $x^2 + y^2 = z^2$ eşitliğini sağlayan tam sayı çözümlerinin de bir üçgen olduğu düşünülerek her Pisagor üçgeninin bir Heron üçgeni olduğunu belirtelim. Bu özel Heron üçgeninin bazı özeliklerini verelim.

Bir primitif Pisagor üçgeni (x, y, z) olsun. O zaman primitif Pisagor üçgeni tanımından x ile y aralarında asal olacağından x ile y nin her ikisi de çift olamaz. Buna göre aklımıza "Acaba x ile y nin her ikisi de tek olabilir mi?" sorusu gelir. Bunun için her hangi bir k pozitif tam sayısı için tek sayıyı, $2k+1$ biçiminde alacak olursak, tek bir sayının karesi,

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1$$

olur. Burada $k, k + 1$ ardışık tam sayılar olduğundan k veya $k + 1$ den biri tek iken diğeri çift olur. Dolayısıyla k ile $k + 1$ den birisi 2 ile bölünebilir ki bu da $4k(k + 1)$ in 8 ile bölünebilmesi demektir. O zaman $(2k + 1)^2$, 8 ile bölündüğünde 1 kalanını vereceğinden, iki tek sayının karelerinin toplamı 8 ile bölündüğünde 2 kalanını verir ki bu toplam çift olup 4 ile bölünemez. Ancak bir çift sayının karesi 4 ile bölünebilirdir. O halde iki tek sayının kareleri toplamı, bir çift doğal sayının karesine eşit olamaz. Yani $x^2 + y^2 = z^2$ denklemi x ile y nin her ikisi de tek iken sağlanamaz. Bu durumda (x, y, z) Pisagor üçgeni primitif ise, x ve y nin biri tek iken, diğeri çift olmalıdır.

Bir Pisagor üçgeninin bütün kenarları bir doğal sayı ile çarpılırsa, o zaman yine kenarları doğal sayılar olan benzer bir dik üçgen elde edilir ki bu elde edilen üçgen de bir Pisagor üçgenidir. Gerçekten ; (x, y, z) verilen bir Pisagor üçgeni için

$k = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere (kx, ky, kz) üçlüsü Pisagor üçgeni ise $(kx)^2 + (ky)^2 = (kz)^2$ eşitliğini sağlar. Yani $k^2x^2 + k^2y^2 = k^2 (x^2 + y^2) = k^2z^2 = (kz)^2$ olur ki buda (kx, ky, kz) üçlüsünün bir Pisagor üçgeni olduğunu belirtir. Dolayısıyla $k = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere verilen bir (x, y, z) Pisagor üçgeninden sonsuz çoklukta benzer (kx, ky, kz) Pisagor üçgeni elde edilir.

Teorem 2.1. *Bir (x, y, z) Pisagor üçgeni verilsin. Bu (x, y, z) Pisagor üçgeninin kendisine benzer Pisagor üçgenlerinin en küçüğü olması için gerek ve yeter şart x ile y nin aralarında asal olmasıdır (Mohanty, S. , Mohanty, S.P., 1992).*

İspat. Gerek Şart: Eğer x ile y aralarında asal değilse , o zaman $(x, y)_{ebob} = d > 1$ olacak şekilde bir d doğal sayısı vardır. Dolayısıyla en büyük ortak bölen tanımından, x_1, y_1 aralarında asal doğal sayılar olmak üzere $x = dx_1$, $y = dy_1$ olarak yazılabilir. Buradan da,

$$z^2 = x^2 + y^2 = (dx_1)^2 + (dy_1)^2 = d^2 (x_1^2 + y_1^2)$$

elde edilir ki d^2, z^2 yi böler, böylece de d, z nin bir bölenidir. Yani $z = dz_1$ olacak şekilde bir z_1 doğal sayısı vardır. O halde, $x = dx_1$, $y = dy_1$ ve $z = dz_1$ ise $x^2 + y^2 = z^2$ olduğundan

$$x_1^2 + y_1^2 = z_1^2$$

dir. Böylece $x_1 < x$, $y_1 < y$ ve $z_1 < z$ olup (x_1, y_1, z_1) Pisagor üçgeni, (x, y, z) Pisagor üçgeninden daha küçüktür ve (x, y, z) Pisagor üçgenine benzerdir. Bu da (x, y, z) nin en küçük olması kabulü ile çelişir. Dolayısıyla benzer Pisagor üçgenlerinden en küçüğünün kenarları aralarında asal olmalıdır.

Yeter Şart: (x, y, z) Pisagor üçgeninin x ve y kenarları aralarında asal iken daha küçük olan bir (a, b, c) Pisagor üçgeninin var olduğunu kabul edelim. Eğer (a, b, c) bir benzer Pisagor üçgeni ise, üçgenlerin benzerliğinden $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ olur. Ancak x ile y aralarında asal olduğundan $\frac{x}{y}$ kesri indirgenemez. Böylece $x \le a$, $y \le b$ elde edilir. Dolayısıyla, (a, b, c) üçgeni, (x, y, z) Pisagor üçgenine benzer daha büyük bir Pisagor üçgenidir. Bu da kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla (x, y, z) Pisagor üçgeni kenarları aralarında asal olan en küçük üçgendir.

Eğer (x, y, z) Pisagor üçgeninde x ile y aralarında asal ise (x, y, z) primitif Pisagor üçgenidir. Bu tespitlerden dolayı tüm Pisagor üçgenlerin tespiti yerine sadece

primitif Pisagor üçgenlerin tespiti yeterlidir. Çünkü diğer Pisagor üçgenleri primitif Pisagor üçgenlerin benzerleridir. Fakat iki primitif Pisagor üçgeni asla benzer olamaz.

Primitif Pisagor üçgeninin tanımından x ile y kenarları aralarında asal $x > y$ ve $x + y \equiv 1 \pmod 2$ şartlarını sağladığını tekrar hatırlayalım. Bu durumda x ve y nin biri tek iken diğerinin çift olacağını tespit etmiştik.

Farz edelim ki y çift olsun. O zaman x ve z tektir. $x^2 + y^2 = z^2$ denklemini;

$$y^2 = z^2 - x^2 = (z + x).(z - x) \tag{2.2}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $z + x$ ve $z - x$ sayıları, iki farklı tek sayının toplamı ve farkı olacağından dolayı $z + x$ ve $z - x$ sayılarının her ikisi de çifttir. Bu durumda a ve b doğal sayılar olmak üzere, $z + x$ ve $z - x$ ifadeleri,

$$z + x = 2a\ ,\ z - x = 2b \tag{2.3}$$

biçiminde temsil edilebilirler. O halde,

$$z = a + b,\quad x = a - b$$

olur. Burada a ve b nin aralarında asal olması gerekir. Eğer a ile b aralarında asal değilse yani; $(a, b)_{ebob} = d$ ve $d > 1$ ise, d, z ile x in dolayısıyla $z + x$ ile $z - x$ in de ortak böleni olur ki, bu da $y^2 = (z + x).(z - x)$ eşitliğinden d^2, y^2 nin de bir bölenidir. Buradan $d \mid y$ olacağından d, x ve y nin de bir ortak böleni olur yani $(x, y)_{ebob} = d$ elde edilir. Bu durum x ve y nin aralarında asal olmasıyla çelişir. Dolayısıyla a ve b aralarında asal olmalıdır. Yani $d = 1$ dir.

Varsayımımıza göre y çift olduğundan c bir doğal sayı olmak üzere, $y = 2c$ olarak yazılabilir. Buradan $y^2 = (z + x).(z - x)$ ve $z + x = 2a$, $z - x = 2b$ olduğundan $4c^2 = 4ab$ ve dolayısıyla $c^2 = ab$ bulunur. $(a, b)_{ebob} = 1$ olduğundan ve $c^2 = ab$ ise aralarında asal iki sayının çarpımı bir doğal sayının karesine eşitse o zaman onların her biri bir doğal sayının karesine eşit olacağından, $c^2 = ab$ ifadesinde $a = m^2$ ve $b = n^2$ alabiliriz. Burada $(a, b)_{ebob} = 1$ olduğundan $(m, n)_{ebob} = 1$ dir. Ayrıca, $z = a + b$, $x = a - b$ eşitliklerinde değerler yerine yazılırsa, $x = a - b = m^2 - n^2$, $y^2 = 4c^2 = 4\, m^2n^2$, $z = a + b = m^2 + n^2$ ve buradan da;

$$x = m^2 - n^2\ ,\quad y = 2m.n\ ,\quad z = m^2 + n^2 \tag{2.4}$$

olarak elde edilir. Böylece m ve n aralarında asal olduğundan, her ikisi de kesinlikle çift olamaz. Eğer her ikisi de tek ise $x = m^2 - n^2$ eşitliğinden iki tek sayının kareleri farkı 4' e bölünebileceği nedeniyle x çifttir. Buradan bir çelişki elde edilir. Yani m ile n nin her ikisi de tek olamaz. Bundan dolayı m ve n nin biri tek iken diğeri çift olmalıdır. Buna göre $y = 2mn$ olduğundan y, 4'e bölünebilir.

Şimdi de m ve n nin biri tek iken diğeri çift $m > n$ ve aralarında asal m, n sayıları için $x = m^2 - n^2$, $y = 2m.n$ ve $z = m^2 + n^2$ ile verilen x, y ve z sayılarından oluşan (x, y, z) üçgeninin primitif Pisagor üçgeni olduğunu gösterelim.

$(m^2 - n^2)^2 + (2m.n)^2 = (m^2 + n^2)^2$ olduğundan $x = m^2 - n^2$, $y = 2m.n$ ve $z = m^2 + n^2$ ile verilen (x, y, z) üçgeninin Pisagor üçgeni olduğu açıktır. Primitif Pisagor üçgeni olduğunu göstermek için x ve y nin aralarında asal olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bunun için $(x, y) = d > 1$ olduğunu farzedelim. $x^2 + y^2 = z^2$ olduğundan d, z nin bir bölenidir. O halde; d, x ve z nin bir ortak böleni olduğundan $m^2 - n^2$ ve $m^2 + n^2$ nin ortak bölenidir. Aynı zamanda d, $2m^2$ toplamı ve $2n^2$ farkının da bir ortak böleni olur. x'in tek olması sebebiyle d'nin çift olamayacağı açıktır. Buna göre d, m^2 ve n^2 nin ortak bölenidir. m ve n aralarında asal olduğundan m^2 ve n^2 nin en büyük ortak böleninin de 1'den büyük olamayacağı dikkate alınırsa bu $d > 1$ kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla ispatını yaptığımız şu teoremi verebiliriz.

Teorem 2.2. *x, y, z tam sayıları y kenarı çift olan bir primitif Pisagor üçgeninin kenar uzunlukları olsun. O zaman x, y, z tam sayıları; m, n pozitif sayılar ve* $(m, n)_{ebob} = 1$ *olmak üzere;*

$$x = m^2 - n^2 , \; y = 2mn , \; z = m^2 + n^2 \tag{2.5}$$

biçiminde verilir (Sierpinski, 1962).

Burada elde edilen bilgiler ışığında şu sonuçları verelim.

Sonuç 2.1. *Her primitif Pisagor üçgeninin ve dolayısıyla her Pisagor üçgeninin kenar uzunluklarından en az biri 4 ile bölünebilirdir (Sierpinski, 1962).*

Bu sonucu aşağıda verilen tablodaki primitif Pisagor üçgenlerinin y kenar uzunluğu için doğrulandığını görmek mümkündür.

Tablo 2.1

x	y	z	x	y	z
3	4	5	21	20	29
5	12	13	21	220	221
7	24	25	25	312	313
9	40	41	35	12	37
11	60	61	79	3120	3121
13	84	85	117	44	125
15	112	113	3059	8580	9109
17	144	145	4485	5852	7373
19	180	181			

Sonuç 2.2. *Kenarlarının hepsi asal olan hiçbir Pisagor üçgeni yoktur, fakat hipotenüsü ve bir dik kenarı asal olan sonsuz sayıda Pisagor üçgeni vardır (Sierpinski, 1962).*

Örneğin ; (3, 4, 5), (19, 180, 181), (79, 3120, 3121) dir. Ancak asal sayıların sayısı sonsuz olduğundan dolayı bu tip üçgenlerin sonsuz çoklukta olacağı açıktır.

(3, 4, 5) üçgeninin kenarları ardışık doğal sayılardır. Bu özelliği sağlayan sadece bir tek primitif Pisagor üçgeni vardır. $n > 1$ doğal sayısı için $n-1$, n ve $n+1$ kenarlarına sahip olan bir Pisagor üçgeni, $(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2$ eşitliğini sağlamalıdır. Buna göre buradan $n^2 = 4n$ elde edilir ki bu da sadece $n = 4$ için sağlanır. Böylece (3, 4, 5) üçgeni elde edilir. O halde hem primitif Pisagor üçgeni hem de aritmetik üçgen olan yegane üçgen (3, 4, 5) primitif Pisagor üçgenidir. Dolayısıyla bu üçgen kenar uzunlukları ardışık tam sayı olan bir Heron üçgenidir. Ayrıca ardışık tam sayı kenarlı Heron üçgenlerine Brahmagupta üçgenleri de denildiğinden (3, 4, 5) üçgeni ilk Brahmagupta üçgenidir. Bu üçgenlerin Brahmagupta üçgenleri olarak adlandırılmasının sebebi ise, Hintli-Astronom ve matematikçi Brahmagupta nın yaklaşık olarak ondört asır önce, bu tip üçgenler üzerinde çalışması ve ilk sekiz tanesini bulmasıdır (Beauregard, Suryanarayan, 1998). Ardışık tam sayı kenarlı Heron üçgenleri üzerine bazı çalışmalar yapılmış ve bu özelliğe sahip n inci Brahmagupta üçgeni (x_n, y_n, z_n) üçlüsü ile gösterilerek ilk on altı Heron üçgeni aşağıdaki tabloda belirtilmiştir (Fleenor, 1996).

Tablo 2.2

n	$x-1$	x	$x+1$	A
1	3	4	5	6
2	13	14	15	84
3	51	52	53	1170
4	193	194	195	16296
5	723	724	725	226974
6	2701	2702	2703	3161340
7	10083	10084	10085	44031786
8	37633	37634	37635	613283664
9	140451	140452	140453	8541939510
10	524173	524174	524175	118973869476
11	1956243	1956244	1956245	1657092233154
12	7300801	7300802	7300803	23080317394680
13	27246963	27246964	27246965	321467351292366
14	101687053	101687054	101687055	4477462600698444
15	379501251	379501252	379501253	62363009058465850
16	1416317953	1416317954	1416317955	868604664218103456

Şimdi ise verilen üç pozitif tamsayının bir üçgen belirtip belirtmediğini eğer bir üçgen belirtiyorsa Heron üçgeni olup olmadığını ele alacağız.

Teorem 2.3. *(x, y, z) üçlüsü herhangi bir Heron üçgeni olsun. O taktirde* $k \in Z^+$ *için (kx, ky, kz) üçlüsü de bir Heron üçgenidir (Gurbanlıyev, 2003).*

İspat. (*x, y, z*) Heron üçgeni olduğundan;

$$s = \frac{1}{2}\cdot(x+y+z) \quad \text{ve} \quad A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

aynı zamanda tam sayılardır. Bu durumda (*kx, ky, kz*) üçgeni için (s_1) yarı çevre uzunluğunun ve (A_1) alanının da tam sayı olduğunun gösterilmesi gerekir.

$$s_1 = \frac{1}{2}(kx+ky+kz) = \frac{1}{2}k(x+y+z) = k\left(\frac{1}{2}(x+y+z)\right) = ks \tag{2.6}$$

olur teoremimizin hipotezi ve tanım gereği s, bir tam sayı ve $k \in Z^+$ olduğundan *k.s* de bir tam sayıdır.

$$A_1 = \sqrt{s_1(s_1-kx)(s_1-ky)(s_1-kz)} = \sqrt{ks(ks-kx)(ks-ky)(ks-kz)}$$

$$= \sqrt{ksk(s-x)k(s-y)k(s-z)} = \sqrt{k^4 s(s-x)(s-y)(s-z)}$$

olur ki

$$A_1 = \sqrt{k^4}\cdot\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)} = k^2\cdot A \tag{2.7}$$

olur ki A_1 alanı da teoremimizin hipotezi ve tanım gereği, bir tam sayı olur. Bu da teoremi ispatlar.

Teorem 2.4. *Kenar uzunlukları tam sayı olan eşkenar üçgenler Heron üçgenleri değildir (Gurbanlıyev, 2003).*

İspat. Üçgenimiz eşkenar üçgen olduğundan $x = y = z$ alınır. Bu durumda; Heron üçgeninin yarı çevre ve alan formüllerinden;

$$s = \frac{1}{2} \cdot (x + y + z) = \frac{1}{2}(x + x + x) = \frac{1}{2} 3x = \frac{3x}{2} \tag{2.8}$$

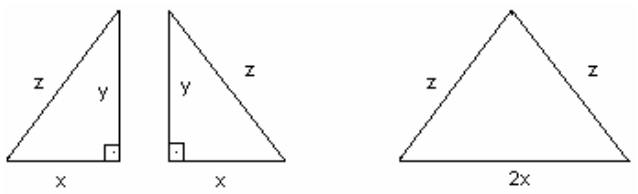
ve $$A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)} = \sqrt{s(s-x)^3} \tag{2.9}$$

elde edilir. O zaman *s* nin değerini yerine yazarsak

$$A = \sqrt{\frac{3x}{2}\left(\frac{3x}{2} - x\right)^3} = \sqrt{\frac{3x}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{x^3}{2^3}} = \sqrt{\frac{3x^4}{2^4}} = \frac{x^2}{2^2}\sqrt{3} \tag{2.10}$$

olur ki $\sqrt{3}$ ün irrasyonel bir sayı olmasından, Heron üçgeninin tanımı gereği eşkenar üçgen bir Heron üçgeni olamaz.

(*x*, *y*, *z*) primitif Pisagor üçgeni olmak üzere eş iki primitif Pisagor üçgeninin aynı dik kenarları çakışacak şekilde birleştirilmesi ile ikizkenar bir üçgen elde edilir. Buradan elde edilen üçgen, (*z*, 2*x*, *z*) ikizkenar üçgenidir. (*x*, *y*, *z*) primitif Pisagor üçgeni olduğundan Teorem 2.2. den, (*z*, 2*x*, *z*) = ($m^2 + n^2$, $2(m^2 - n^2)$, $m^2 + n^2$) olup, üçgenin yarı çevresi $s = z + x = 2m^2$ ve alanı da Heron formülünden; $A = \sqrt{s.(s-z).(s-2x).(s-z)} = 2mn.(m^2 + n^2)$ biçiminde elde edilir. Buradan (*z*, 2*x*, *z*) üçgeninin hem yarı çevresinin hem de alanının bir tam sayı olacağı açıktır. O halde; $m>n$, $(m,n)_{ebob} = 1$, $m \not\equiv n \ (mod\ 2)$ olmak üzere ($m^2 + n^2$, $2(m^2 - n^2)$, $m^2 + n^2$) ikizkenar Heron üçgenlerini verir (Sastry, K. R. S., 2001).



Şekil 2.1

Sonuç 2.3. $m,\ n \in \mathbf{Z}^+,\ m > n,\ (m,\ n)_{ebob} = 1$ ve $m \not\equiv n\ (mod\ 2)$ olmak üzere $(m^2+n^2,\ 4mn,\ m^2+n^2)$ ve $(m^2+n^2,\ 2(m^2-n^2),\ m^2+n^2)$ ikizkenar Heron üçgenlerini verir (Sastry, K. R. S., 2001).

Örnek 2.1. Sonuç 2.3. için m ve n değerlerini ardışık sayıların; $m>n,\ (m,\ n)_{ebob} = 1$ ve $m \not\equiv n\ (mod\ 2)$ biçiminde seçilebileceğinden hareketle n parametresinin ilk on değeri için ikizkenar Heron üçgenlerini bulalım.

Tablo 2.3

m	n	$x=m^2+n^2$	$y=2(m^2-n^2)$	$z=m^2+n^2$
2	1	5	6	5
3	2	13	10	13
4	3	25	14	25
5	4	41	18	41
6	5	61	22	61
7	6	85	26	85
8	7	113	30	113
9	8	145	34	145
10	9	181	38	181
11	10	221	42	221

Tablo 2.4

m	n	$x=m^2+n^2$	$y=4mn$	$z=m^2+n^2$
2	1	5	8	5
3	2	13	24	13
4	3	25	48	25
5	4	41	80	41
6	5	61	120	61
7	6	85	168	85
8	7	113	224	113
9	8	145	288	145
10	9	181	360	181
11	10	221	440	221

Teorem 2.5. *Kenar uzunlukları bir birinden farklı Fibonacci sayıları olan hiçbir üçgen yoktur (Gurbanlıyev, 2003).*

İspat. İspata başlamadan üçgen olma şartlarını hatırlayalım. Verilen x, y, z uzunlukları için,

$$|x-y| < z \quad ,\ z < x+y \tag{2.11}$$

eşitsizliklerinin sağlanması durumunda x, y, z uzunluklarının bir üçgen oluşturduğu bilinmektedir. O halde ispatı üç ayrı durum için ele alalım.

Durum 1. Kenarları ardışık $f_n,\ f_{n+1},\ f_{n+2}$ Fibonacci sayıları olan üçlüyü göz önüne alalım. Bunların üçgen oluşturması için $f_n + f_{n+1} > f_{n+2}$ olmalıdır. Ancak Fibonacci sayılarının tanımı gereği $f_n + f_{n+1} = f_{n+2}$ olur ki bunlar üçgen oluşturmaz.

Durum 2. Kenarları ardışık olmayan, yani $n,\ k$ pozitif tam sayıları ve $n > k$ olmak üzere $f_n,\ f_{n+k-1},\ f_{n+k}$ şeklindeki Fibonacci sayılarını göz önüne alalım. O zaman açık olarak, $f_{n+k} = f_{n+k-1} + f_{n+k-2}$ ve $f_{n+k-1} > f_{n+k-2} > f_n$ olup buradan;

$$f_{n+k} = f_{n+k-1} + f_{n+k-2} > f_{n+k-1} + f_n \tag{2.12}$$

bulunur ki bu da üçgen olma şartları ile çelişir.

Durum 3. Şimdi genel olarak kenarları f_n, f_{n+k-s}, f_{n+k} olan bir üçgenin bulunup bulunmadığını araştıralım.

$$\begin{aligned} f_{n+k} &= f_{n+k-1} + f_{n+k-2} \\ &= 2f_{n+k-2} + f_{n+k-3} \\ &= 3f_{n+k-3} + 2f_{n+k-4} \\ &= 5f_{n+k-4} + 3f_{n+k-5} \\ &= 8f_{n+k-5} + 5f_{n+k-6} \\ &\quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad \cdot \quad \cdot \\ &\quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

$$f_{n+k} = f_{s+1} f_{n+k-s} + f_s f_{n+k-s-1}; \tag{2.13}$$

bulunur. Buradan $f_1 = 1, f_n < f_{n+1}$ ve Fibonacci sayısı tanımı ve (2.13) ten

$$f_{n+k} = f_{s+1} f_{n+k-s} + f_s f_{n+k-s-1} > f_{n+k-s} + f_n \tag{2.14}$$

elde edilir ki, bu da teoremi ispatlar.

Sonuç 2.4. Kenar uzunluğu bir birinden farklı Fibonacci sayıları olan hiçbir Heron üçgeni yoktur.

3. HERON ÜÇGENLERİNİN ALAN VE ÇEVRE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, aynı alanlı Heron üçgenleri ve aynı alan ve aynı yarı çevreli inkongruent Heron üçgenleri incelenecektir.

(21, 20, 29) ve (35, 12, 37) kenarları farklı primitif Pisagor üçgenlerinin alanları eşit ve değeri 210 dur. Bunlardan daha küçük farklı hipotenüslü ve aynı alanlı farklı primitif Pisagor üçgenleri yoktur.

Gerçekten eğer hipotenüsü 37 den küçük olan Pisagor üçgenlerini incelemek istersek o zaman (3, 4, 5), (5, 12, 13) ve (15, 8, 17) primitif Pisagor üçgenlerine kongruent olan üçgenleri de göz önüne almamız gerekir.

Tablo 3.1

x	***y***	***z***	***A***
3	4	5	6
6	8	10	24
9	12	15	54
12	16	20	96
15	20	25	150
18	24	30	216
21	28	35	294
5	12	13	30
10	24	26	120
15	8	17	60
30	16	34	240

Tabloda verilen üçgenleri incelersek; hipotenüsü 37 den ve alanı da 210 dan küçük olup da alanları eşit olan farklı Pisagor üçgenleri mevcut değildir. Bundan dolayı; farklı hipotenüs ve eşit alanlı primitif Pisagor üçgenlerinin en küçük çifti (21, 20, 29) ve (35, 12, 37) üçgen çiftleridir.

R. Guy ın 1994 yılında yayınlanan "Unsolved Problems in Number Theory" adlı kitabının D21 bölümünde, aynı alana sahip kaç tane primitif Pisagor üçgeninin mevcut olduğunun bilinmediğine dikkat çekilmiştir. Çünkü her bir primitif Pisagor üçgeni; $m > n$ ve $m \not\equiv n \pmod 2$ olacak şekilde aralarında asal m ve n pozitif tam sayıları için

$$m^2 - n^2 \, , \, 2mn \, , \, m^2 + n^2$$

biçiminde temsil edilebilirdir. Burada bahsedilen problem ise, $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, t\}$ için (m_i, n_i), (m_j, n_j) üreteç çiftleri olmak üzere aynı alana sahip olmaları nedeniyle;

$$\frac{\left(m_i^{\,2} - n_i^{\,2}\right)2m_i n_i}{2} = \frac{\left(m_j^{\,2} - n_j^{\,2}\right)2m_j n_j}{2}$$

veya $(m_i^2 - n_i^2).m_i n_i = (m_j^2 - n_j^2).m_j n_j$

şartını da sağlayacak şekildeki en büyük t değerini bulmaya denktir. t = 3 için;

m_i	n_i	x_i	y_i	z_i	A_i
77	38	4485	5852	7373	13123110
78	55	3059	8580	9109	13123110
138	5	19019	1380	19069	13123110

değerleri Shedd tarafından,

m_i	n_i	x_i	y_i	z_i	A_i
1610	869	1836939	2798180	3347261	2570042985510
2002	1817	706515	7275268	7309493	2570042985510
2622	143	6854435	749892	6895333	2570042985510
2035	266	4070469	1082620	4211981	2203385574390
3306	61	10925915	403332	10933357	2203385574390
3422	55	11707059	376420	11713109	2203385574390
2201	1166	3484845	5132732	6203957	8943387723270
2438	2035	1802619	9922660	10085069	8943387723270
3565	198	12670021	1411740	12748429	8943387723270

değerleri Rathbun tarafından ve

m_i	n_i	x_i	y_i	z_i	A_i
7238	2465	46312419	35683340	58464869	826290896699730
9077	1122	81133045	20368788	83650813	826290896699730
10434	731	108333995	15254508	109402717	826290896699730

değerleri de Rathbun ve Hoey tarafından bulunduğu bilinen örneklerdir. Ancak t = 3 için bu şekildeki üçgenlerin sonsuz sayıda bulunup bulunmadığı ve ayrıca da t = 4 için bir örneğin bulunup bulunmadığı bilinmemektedir.

Öte yandan eğer eşit alanlı Pisagor üçgenleri aynı hipotenüslü dik üçgenler ise bu üçgenler kongruent olmalıdır. Gerçekten eğer $x_1 \geq y_1$, $x_2 \geq y_2$ olmak üzere (x_1, y_1, z_1) ve (x_2, y_2, z_2) böyle üçgenler ise hipotezimize göre alanların eşitliğinden

$x_1 . y_1 = x_2 . y_2$ ve aynı hipotenüslü olduğundan $z_1 = z_2$ olur. Buna göre $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$ dir ve dolayısıyla ;

$$(x_1 - y_1)^2 = (x_2 - y_2)^2 \text{ ve } (x_1 + y_1)^2 = (x_2 + y_2)^2$$

elde edilir. Bu da $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olması demektir.

(15, 112, 113) primitif Pisagor üçgeninin alanı 840 olup, 840 = 4.210 olduğundan bu, (21, 20, 29) ve (35, 12, 37) üçgenlerinin alanlarının dört katıdır. Böylece (15, 112, 113) üçgeninin alanı sırası ile (21, 20, 29), (35, 12, 37) üçgenlerinin kenar uzunluklarının 2 ile çarpılması ile elde edilen (42, 20, 58) ve (70, 24, 74) üçgenlerinin her birinin alanına eşit olduğundan farklı hipotenüslü ve eşit alanlı (15, 112, 113), (42, 20, 58), (70, 24, 74) Pisagor üçgenleri elde edilir. Bu üçgenlerden sadece bir tanesi primitiftir. Ancak alanı 13123110 olan üç farklı primitif Pisagor üçgenlerinin (4485, 5852, 7373), (19019, 1380, 19069) ve (3059, 8580, 9109) biçiminde olduğu 1945 yılında Shedd tarafından gösterilmiştir. Ayrıca bu alandan daha küçük alanlı ve üçü de primitif olan Pisagor üçgenlerinin bulunmadığı yine Shedd tarafından gösterilmiştir.

Şimdi farklı hipotenüslü ve aynı alanlı keyfi çoklukta Pisagor üçgeninin elde edilip edilemeyeceğini Fermat ın şu teoremi ile verebiliriz.

Teorem 3.1. *Her bir n doğal sayısı için farklı hipotenüslü ve eşit alanlı n tane Pisagor üçgeni vardır (Sierpinski, W., 1962).*

Bu teorem tümevarım metodu ile aşağıdakilerden çıkarılabilir.

Lemma 3.1. *Eğer n tane farklı hipotenüslü ve aynı alanlı Pisagor üçgeni verilir ve bu üçgenlerden en az birinin hipotenüsü tek ise o zaman n + 1 tane farklı hipotenüslü ve aynı alanlı Pisagor üçgeni bulunabilir ki bu üçgenlerden de an az birinin hipotenüsü tektir. (Sierpinski, W., 1962).*

İspat. n bir doğal sayı, k = 1,2,…,n ve $x_k < y_k < z_k$ olmak üzere (x_k, y_k, z_k) n Pisagor üçgeni olsun. Bu Pisagor üçgenlerinin hipotenüsleri farklı , alanları eşit ve z_1 tek sayı olsun. Ayrıca k = 1, 2, …,n için,

$$x_k` = 2(y_1^2 - x_1^2).z_1.x_k \,, \quad y_k` = 2(y_1^2 - x_1^2).z_1.y_k \,, \quad z_k` = 2(y_1^2 - x_1^2).z_1.z_k \quad (3.1)$$

ve

$$x_{n+1}` = (y_1^2 - x_1^2)^2 , \quad y_{n+1}` = 4x_1y_1z_1^2 , \quad z_{n+1}` = 4x_1^2y_1^2 + z_1^4 \tag{3.2}$$

olarak alalım. k = 1, 2, …, n için ($x_k`$, $y_k`$, $z_k`$) üçgenleri Pisagor üçgenleridir. Gerçekten onların kenarları doğal sayılardır ve bu üçgenler ($x_k$, $y_k$, $z_k$) Pisagor üçgenlerine kongruenttir. ($x_{n+1}`$, $y_{n+1}`$, $z_{n+1}`$) üçgeni de (3.2) formülünden dolayı bir Pisagor üçgenidir. Çünkü $x^2 + y^2 = z^2$ olmak üzere,

$$(y^2 - x^2)^4 + 16x^2y^2(x^2 + y^2)^2 = [4x^2y^2 + (x^2 + y^2)^2]^2$$

veya

$$[(y^2 - x^2)^2]^2 + [4xyz^2]^2 = [4x^2y^2 + (z^2)^2]^2$$

eşitliği gerçeklendiğinden dolayı ($x_{n+1}`$, $y_{n+1}`$, $z_{n+1}`$) Pisagor üçgeni olur. Dolayısıyla $(x_{n+1}`)^2 + (y_{n+1}`)^2 = (z_{n+1}`)^2$ dir. Şimdi k = 1, 2, …, n, n + 1 için ($x_k`$, $y_k`$, $z_k`$) üçgenlerinin şartları sağladığını göstermeliyiz. Bu durumda k = 1, 2, …, $n$ için ($x_k$, $y_k$, $z_k$) üçgenlerinin her birinin alanını $A$ ile gösterirsek $x_k.y_k = 2A$ olur ve (3.1) den k = 1, 2, …, $n$ için ($x_k`$, $y_k`$, $z_k`$) üçgenlerinin alanı,

$$\frac{1}{2}x_k' \cdot y_k' = \frac{4(y_1^2 - x_1^2)^2 z_1^2 x_k y_k}{2} = 2(y_1^2 - x_1^2)^2 z_1^2 x_k y_k = 4(y_1^2 - x_1^2)^2 z_1^2 A$$

olur. Öte yandan (3.2) ifadesiyle verilen ($x_{n+1}`$, $y_{n+1}`$, $z_{n+1}`$) üçgeninin alanı da,

$$\frac{1}{2}x_{n+1}' \cdot y_{n+1}' = \frac{1}{2}(y_1^2 - x_1^2)^2 4x_1y_1z_1^2 = 4(y_1^2 - x_1^2)^2 z_1^2 A$$

olarak bulunur. Böylece k = 1, 2, …, n, n + 1 için ($x_k`$, $y_k`$, $z_k`$) üçgenlerinin aynı alanlara sahip olduğu görülür.

k = 1, 2, …, n için ($x_k`$, $y_k`$, $z_k`$) üçgenlerinin hipotenüsleri farklıdır. Gerçekten; (3.1) de verilen ($x_k`$, $y_k`$, $z_k`$) üçgenlerinin z_k hipotenüslerinin hepsi farklı olduğundan dolayı ($x_k`$, $y_k`$, $z_k`$) üçgenlerinin hipotenüsleri farklıdır. Bununla beraber hipotezimize göre $z_1$ tek olarak verildiğinden (3.2) den $z_{n+1}`$ de tektir. Böylece , k = 1, 2, …, n, n + 1 için bütün $z_k`$ sayıları birbirinden farklı olur ki bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.1. Yukarıdaki lemmada n = 1 ve x_1 = 3, y_1 = 4, z_1 = 5 değerleri için ($x_1`$, $y_1`$, $z_1`$) ve ($x_2`$, $y_2`$, $z_2`$) Pisagor üçgenlerini aşağıdaki biçimde elde ederiz.

$x_k` = 2(y_1^2 - x_1^2).z_1.x_k$ , $y_k` = 2(y_1^2 - x_1^2).z_1.y_k$, $z_k` = 2(y_1^2 - x_1^2).z_1.z_k$ ve $2(y_1^2 - x_1^2).z_1 = 2.(4^2 - 3^2).5 = 2.7.5 = 70$ olduğundan ;

$x_1` = 70.x_k = 70.3 = 210$

$y_1` = 70.y_k = 70.4 = 280$

$z_1` = 70.z_k = 70.5 = 350$

olarak elde edilir. Ayrıca $x_{n+1}` = (y_1^2 - x_1^2)^2$ , $y_{n+1}` = 4x_1y_1z_1^2$, $z_{n+1}` = 4x_1^2y_1^2 + z_1^4$ olduğundan;

$x_2` = (4^2 - 3^2)^2 = 7^2 = 49$

$y_2` = 4.3.4.5^2 = 48.25 = 1200$

$z_2` = 4.3^2.4^2 + 5^4 = 36.16 + 625 = 1201$ bulunur.

Buradan (210, 280, 350) ve (49, 1200, 1201) üçgenleri farklı hipotenüslü ve alanları 29400 e eşit Pisagor üçgenleridir. Ayrıca (49, 1200, 1201) primitif Pisagor üçgenidir.

Şimdi alanları bir Fibonacci dizisinin aynı ardışık terimlerinin çarpımına eşit olan ve kongruent olmayan bir Heron üçgen çiftinin var olup olmadığını araştıracağız. Bu sorunun cevabı aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 3.2. *n bir pozitif tamsayı, f_n n-inci Fibonacci sayısı olsun. O zaman alanları*

$$A = f_n \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2} \cdot f_{n+3} \cdot f_{n+4} \cdot f_{n+5}$$

biçiminde olan bir inkongruent Heron üçgen çifti vardır (Kramer & Luca, 2001).

İspat. u ve v iki pozitif tamsayı ve $u \geq 2$ olsun. Bu durumda kenarları,

$$\begin{aligned} x &= u^2 + v^2 \\ y &= (uv)^2 + 1 \\ z &= (uv)^2 + u^2 - v^2 - 1 \end{aligned} \qquad (3.3)$$

biçiminde olan bir $T(u, v)$ üçgeni seçilebilir. Gerçekten; $x + z$ ve $x - z$ yi yukarıdaki eşitlerden yazarsak; $x + z = u^2 + v^2 + (uv)^2 + u^2 - v^2 - 1 = (uv)^2 + 2u^2 - 1$ olup $u \geq 2$ olduğundan $(uv)^2 + 2u^2 - 1 > (uv)^2 + 1$ elde edilir. Böylece $z + x > y$ olur. Ayrıca $(uv)^2 + 1 > (uv)^2 - 2v^2 > (uv)^2 - 2v^2 - 1$ olup $z - x = (uv)^2 - 2v^2 - 1$ olduğundan $y > z - x$ elde edilir ki $T(u, v)$ nin kenar uzunluklarının bir üçgen belirttiği görülür.

$T(u, v)$ üçgeninin alanı da ;

$$A = uv(u^2 - 1)(v^2 + 1) \tag{3.4}$$

olarak $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$ (3.5)

formülünden hemen elde edilir.

$$(u,v) \in \begin{cases} \{(f_{n+1}, f_{n+4}), (f_{n+2}, f_{n+3})\}, & \text{n çift ise} \\ \{(f_{n+4}, f_{n+1}), (f_{n+3}, f_{n+2})\}, & \text{n tek ise} \end{cases} \tag{3.6}$$

seçimine karşılık gelen $T(u,v)$ üçgenlerinin inkongruent olduğunu, ayrıca A alanlarının $f_n \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2} \cdot f_{n+3} \cdot f_{n+4} \cdot f_{n+5}$ olacak şekilde (u, v) sıralı ikililerinin yukarıdaki gibi iki farklı şekilde seçilebileceğini göstermemiz ispatı tamamlar.

Burada ispatı sadece n'nin çift olması durumu için yapacağız. Çünkü; n nin tek olması durumunda da benzer durumlar geçerlidir. Her pozitif n tamsayısı için; çok iyi bilinen

$$f_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} = f_n f_{n+2} \tag{3.7}$$

ve

$$f_{n+2}^2 + (-1)^{n+1} = f_n f_{n+4} \tag{3.8}$$

formülleri kullanılarak, n çift olmak üzere $(u,v) = (f_{n+2}, f_{n+3})$ parametreli T_2 üçgeninin alanını,

$$A = f_{n+2} f_{n+3}(f_{n+2}^2 - 1)(f_{n+3}^2 + 1) = f_{n+2} f_{n+3}(f_n f_{n+4})(f_{n+1} f_{n+5}) = f_n f_{n+1} \cdots f_{n+5}$$

olarak; $(u,v) = (f_{n+1}, f_{n+4})$ parametreli T_1 üçgeninin alanını da

$$A = f_{n+1} f_{n+4}(f_{n+1}^2 - 1)(f_{n+4}^2 + 1) = f_{n+1} f_{n+4}(f_n f_{n+2})(f_{n+3} f_{n+5}) = f_n f_{n+1} \cdots f_{n+5}$$

olarak buluruz. Bu durumda T_1 ve T_2 üçgenlerinin A alanları aynıdır.

T_1 ile T_2 nin inkongruent olduğunu göstermek için (3.3) formülü ile verilen x in üçgenin en kısa kenarı olduğuna işaret etmek yeterlidir. Yani;

$$f_{n+1}^2 + f_{n+4}^2 \neq f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 \tag{3.9}$$

olduğunu ispatlamak yeterlidir. Bunun için, $f_{n+1}^2 + f_{n+4}^2 > f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2$ olduğunu gösterelim. Bu,

$$f_{n+4}^2 - f_{n+3}^2 > f_{n+2}^2 - f_{n+1}^2$$

ifadesine veya

$$(f_{n+4} - f_{n+3})(f_{n+4} + f_{n+3}) > (f_{n+2} - f_{n+1})(f_{n+2} + f_{n+1})$$

ifadesine veya

$$f_{n+2}.f_{n+5} > f_n.f_{n+3}$$

ifadesine denktir. Bu son eşitsizlik daima geçerlidir. Çünkü her n pozitif tamsayısı için $f_{n+2} > f_n$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek 3.2. n parametresinin ilk beş değeri için teoremi uygulayarak alanları $A = f_n \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2} \cdot f_{n+3} \cdot f_{n+4} \cdot f_{n+5}$ biçiminde olan inkongruent Heron üçgen çiftlerini bulalım.

Tablo 3.2

n	(u, v)	***u***	***v***	***x***	***y***	***z***	***A***
1	$(u, v) = (f_5, f_2)$	5	1	26	26	48	240
	$(u, v) = (f_4, f_3)$	3	2	13	37	40	240
2	$(u, v) = (f_3, f_6)$	2	8	68	257	195	3120
	$(u, v) = (f_4, f_5)$	3	5	34	226	208	3120
3	$(u, v) = (f_7, f_4)$	13	3	178	1522	1680	65520
	$(u, v) = (f_6, f_5)$	8	5	89	1601	1638	65520
4	$(u, v) = (f_5, f_8)$	5	21	466	11026	10608	1113840
	$(u, v) = (f_6, f_7)$	8	13	233	10817	10710	1113840
5	$(u, v) = (f_9, f_6)$	34	8	1220	73985	75075	20420400
	$(u, v) = (f_8, f_7)$	21	13	610	74530	74800	20420400

Buradan akla şu soru gelebilir. " Acaba hem alanı aynı hem de yarı çevresi aynı Heron üçgen çiftleri var mıdır?" Bu sorunun cevabı; (24, 35, 53) ve (48, 14, 50) üçgen çiftlerinin her ikisi de $A = 336$ alanına ve $s = 56$ yarı çevresine sahip olduklarından olumludur. Bu örnekten hareketle; böyle üçgen çiftlerinin sonsuz bir parametrik ailesini bulabiliriz. Bu aile aşağıdaki teoremle açık bir şekilde ifade edilir.

Teorem 3.3. *t, herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere; T(t) üçgeninin kenarları;*

$$\begin{cases} x = t^8 + 5t^6 + 9t^4 + 7t^2 + 2 \\ y = t^{10} + 5t^8 + 10t^6 + 10t^4 + 6t^2 + 3 \\ z = t^{10} + 6t^8 + 15t^6 + 19t^4 + 11t^2 + 1 \end{cases} \tag{3.10}$$

biçiminde ve $T_1(t)$ de üçgeninin kenarları da;

$$\begin{cases} x_1 = t^{10} + 6t^8 + 14t^6 + 16t^4 + 9t^2 + 2 \\ y_1 = t^6 + 4t^4 + 6t^2 + 3 \\ z_1 = t^{10} + 6t^8 + 15t^6 + 18t^4 + 9t^2 + 1 \end{cases} \tag{3.11}$$

olarak verilsin. O zaman T(t) ve $T_1(t)$; "aynı yarı çevreye" yani,

$$s = t^{10} + 6t^8 + 15t^6 + 19t^4 + 12t^2 + 3 \tag{3.12}$$

ve "aynı alana" yani

$$A = t(t^2+1)^4.(t^2+2).(t^4+3t^2+3) \tag{3.13}$$

sahip inkongruent Heron üçgenleridir (Kramer & Luca, 2001).

İspat. t $\in Z^+$ olduğundan x, y, z ve x_1, y_1, z_1 kenarlarının pozitif birer tam sayı olacağı açıktır. Bunun yanı sıra ; $s = \frac{x+y+z}{2}$ ve $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$ formüllerinden yukarıdaki t parametresine bağlı kenar uzunlukları yerine yazılırsa bu üçgenlerin $s = t^{10} + 6t^8 + 15t^6 + 19t^4 + 12t^2 + 3$ yarı çevreye ve $A = t(t^2+1)^4.(t^2+2).(t^4+3t^2+3)$ alanına sahip Heron üçgen çiftleri oldukları görülür. $t \in Z^+$ olduğundan $s,\ A \in Z^+$ dır.

x, y, z kenarlı ve s yarı çevreli bir T üçgeni için, $a = s - x$, $b = s - y$, $c = s - z$ olduğunu kabul edelim. Bu notasyonlarla, $x = b + c$, $y = a + c$, $z = a + b$, $s = a + b + c$ ve $A = \sqrt{abc(a+b+c)}$ elde ederiz.

Teorem 3.3 öncesinde (24, 35, 53) ve (48, 14, 50) üçgen çiftlerinden söz etmiştik. Yukarıdaki kabulümüze göre;

$$a = 32,\ b = 21,\ c = 3 \tag{3.14}$$

ve

$$a_1 = 8,\ b_1 = 42,\ c_1 = 6 \tag{3.15}$$

değerlerini elde ederiz. (3.14) ve (3.15) değerleri ile verilen örneği genellemek için, u, v, λ, m, n ve k tam sayı değerli parametreler olmak üzere;

$$a = \lambda^n\ ,\ b = uv\ ,\ c = u \tag{3.16}$$

ve

$$a_1 = \lambda^m\ ,\ b_1 = \lambda^k uv\ ,\ c_1 = \lambda^k u \tag{3.17}$$

değerlerine sahip aynı alanlı ve aynı yarı çevreli Heron üçgen çiftlerini elde edebiliriz. Buradan iki üçgen aynı yarı çevre ve aynı alana sahip olduğu için, $abc = a_1 b_1 c_1$ sonucuna ulaşırız. Buna göre; $m + 2k = n$ dir. Sonuçta;

$$a + b + c = a_1 + b_1 + c_1$$

olduğundan,

$$\lambda^n + uv + u = \lambda^m + \lambda^k uv + \lambda^k u$$

eşitliğini veya

$$\lambda^m(\lambda^{n-m} - 1) = (\lambda^k - 1)(uv + u) \tag{3.18}$$

eşitliğini elde ederiz. $n - m = 2k$ olduğu için (3.18) denkleminden;

$$\lambda^m(\lambda^{2k} - 1) = (\lambda^k - 1)(uv + u)$$

eşitliği veya

$$\lambda^m(\lambda^k + 1) = u(v + 1) \tag{3.19}$$

eşitliği elde edilir. Bu noktada $u = \lambda^k + 1$ ve $v = \lambda^m - 1$ değerlerini seçebiliriz ve (3.19) denklemini sağlar. Son şart olarak; iki üçgenin alanının ortak değerinin gerçekten bir tam sayı olduğunu garanti altına alma gereksinimiz vardır. Dolayısıyla,

$$abc(a + b + c)$$

sayısının tam bir kare olması gerekir. Yukarıda verilenlerin yerine yazılmasıyla;

$$\begin{aligned} abc(a+b+c) &= \lambda^n u^2 v(\lambda^n + u(v+1)) = \lambda^n(\lambda^k+1)^2(\lambda^m-1)(\lambda^n + \lambda^m(\lambda^k+1)) \\ &= \lambda^{m+n}(\lambda^k+1)^2(\lambda^m-1)(\lambda^{2k} + \lambda^k + 1) \\ &= \lambda^{2m+2k}(\lambda^k+1)^2(\lambda^m-1)(\lambda^{2k} + \lambda^k + 1) \end{aligned} \tag{3.20}$$

ifadesini elde ederiz. (3.20) formülü ile verilen sayının tam bir kare olması için

$$(\lambda^m - 1)(\lambda^{2k} + \lambda^k + 1) \tag{3.21}$$

ifadesi tam bir kare olacak şekilde uygun λ, k ve m seçilmesi yeterlidir. Eğer, $m = 3k$ seçersek (3.21) formülü ile verilen sayı,

$$(\lambda^{3k} - 1)(\lambda^{2k} + \lambda^k + 1) = (\lambda^k - 1)(\lambda^{2k} + \lambda^k + 1)^2 \tag{3.22}$$

olur. Şimdi (3.22) formülü ile verilen sayı; $k = 1$ ve herhangi bir bazı pozitif t tam sayısı için, $\lambda = t^2 + 1$ iken tam bir karedir. Böylece; m = 3, n = 5, $\lambda = (t^2 + 1)$ için $u = \lambda + 1 = t^2 + 2$ ve $v = \lambda^3 - 1 = (t^2+1)^3 - 1 = t^6 + 3t^4 + 3t^2$ olur. $a = s - x$, $b = s - y$, $c = s - z$ olduğunu da dikkate alarak (3.16) ve (3.17) formülleri ile verilen eşitliklerde bu değerleri yerine yazarsak tam olarak Teorem 3.3. ile verilen kenar uzunluklarını elde ederiz. Gerçekten; m = 3, n = 5, $\lambda = (t^2 + 1)$ için $a = \lambda^n = (t^2 + 1)^5$, $b = uv = (t^2 + 2).(t^6 + 3t^4 + 3t^2)$, $c = u = t^2 + 2$ ve $a_1 = \lambda^m = (t^2 + 1)^3$, $b_1 = \lambda^k uv = (t^2 + 1)(t^2 + 2)(t^6 + 3t^4 + 3t^2)$, $c_1 = \lambda^k u = (t^2 + 1)(t^2 + 2)$ elde edilir. Böylece;

$$x = b + c = (t^2 + 2).(t^6 + 3t^4 + 3t^2) + t^2 + 2 = t^8 + 5t^6 + 9t^4 + 7t^2 + 2$$

$$y = a + c = (t^2 + 1)^5 + t^2 + 2 = t^{10} + 5t^8 + 10t^6 + 10t^4 + 6t^2 + 3$$
$$z = a + b = (t^2 + 1)^5 + (t^2 + 2).(t^6 + 3t^4 + 3t^2) = t^{10} + 6t^8 + 15t^6 + 19t^4 + 11t^2 + 1$$

ve

$$x_1 = b_1 + c_1 = (t^2 + 1)(t^2 + 2)(t^6 + 3t^4 + 3t^2) + (t^2 + 1)(t^2 + 2)$$
$$= t^{10} + 6t^8 + 14t^6 + 16t^4 + 9t^2 + 2$$
$$y_1 = a_1 + c_1 = (t^2 + 1)^3 + (t^2 + 1)(t^2 + 2) = t^6 + 4t^4 + 6t^2 + 3$$
$$z_1 = a_1 + b_1 = (t^2 + 1)^3 + (t^2 + 1)(t^2 + 2)(t^6 + 3t^4 + 3t^2)$$
$$= t^{10} + 6t^8 + 15t^6 + 18t^4 + 9t^2 + 1$$

olduğu görülür.

Teorem 3.2. nin ifadesi, $(T(t),\ T_1(t))_{t\geq 1}$ çiftleri, farklı t değerleri için benzer olmadığı anlamında trivial olmayan bir çözümdür. Gerçekten, (24, 35, 53) ve (48, 14, 50) Heron üçgenleri aynı alanlı ve aynı yarı çevreye sahip olduğundan, herhangi bir pozitif t tam sayısı için de; aynı alanlı ve aynı yarı çevreye sahip ($24t$, $35t$, $53t$) ve ($48t$, $14t$, $50t$) Heron üçgenleri elde edilir. Elbette, bu çok ilginç bir aile değildir. (3.10) formülü ile verilen ifadede z nin daima tek olduğundan hareketle Teorem 3.3. deki ifadenin niçin trivial olmadığını görürüz. Özel olarak; $T(t)$ üçgeni için $(x,y,z)_{ebob} = (a,b,c)_{ebob}$ tir. Ancak; (3.16) formülünden ve Teorem 3.3. ün ispatından elde edilenlerden dolayı,

$$(a,b,c)_{ebob} = (a,u)_{ebob} = (\lambda^n, \lambda^k + 1)_{ebob} = 1$$

ifadeleri elde edilir. Özel olarak; $T(t)$ Heron üçgeni daima primitiftir. Ancak, $T_1(t)$ üçgeninin primitif olamayacağı (3.17) formülünden hemen görülür.

Örnek 3.3. Teorem 3.3 te verilen formüllerden; t parametresinin ilk 5 değeri için elde edilen aynı alan ve aynı yarı çevreye sahip inkongruent T(t) = (x, y, z) ve T_1(t) = (x_1, y_1, z_1) Heron üçgen çiftlerini şöyle verebiliriz.

Tablo 3.3

t	T(t) = (x, y, z)	T_1(t) = (x_1, y_1, z_1)	A	S
1	(24, 35, 53)	(48, 14, 50)	336	56
2	(750,3131,3869)	(3750,155,3845)	232500	3875
3	(11000,100011,110989)	(110000,1110,1108909)	36630000	111000
4	(88434,1419875,1508273)	(1503378,5219,1507985)	1846148184	1508291
5	(474552,11881403,12355901)	(12338352,18278,12355226)	43369307280	12355928

Teorem 3.2 aynı alana ve aynı yarı çevreye sahip Heron üçgeni çiftlerinin sonsuz bir ailesinin varlığını ispatlar. Fakat bu teorem yoluyla bu özellikteki Heron üçgenlerinin tamamını üretemeyiz.

Örneğin; {(51, 52, 101), (17, 87, 100)} veya {(20, 21, 29), (17, 25, 28)}yada {(17, 28, 39), (12, 35, 37)} Heron üçgeni çiftleri aynı alanlara ve aynı yarı çevreye sahip olmalarına rağmen bunlar (3.10) ve (3.11) formülleri ile elde edilemezler.

4. İÇ TEĞET ÇEMBERİNİN YARIÇAPI VEYA ÇEVREL ÇEMBERİNİN YARIÇAPI TAMSAYI OLAN HERON ÜÇGENLERİ

Bu bölüm de; iç teğet çemberinin veya çevrel çemberinin yarıçapı tam sayı olan Heron üçgenlerini inceleyeceğiz. Ayrıca bir heron üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapını r ve çevrel çemberinin yarıçapını da R ile göstereceğiz.

Teorem 4.1. *k pozitif bir tamsayı olsun. O zaman r = k olacak şekilde bir T Heron üçgeni vardır (Kramer & Luca,2001).*

İspat. Önceki bölümlerde olduğu gibi $a = s - x$, $b = s - y$, $c = s - z$ gösterimlerini kullanalım. Buna göre, Teorem 1.2.5 den; r = A/s olduğundan;

$$r = \frac{A}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s},$$

$$\frac{abc}{a+b+c} = k^2 \tag{4.1}$$

denkleminin bir a, b, c pozitif çözümünün bulunduğunu göstermek yeterlidir. $c = 1$ seçersek (4.1) denklemi,

$$ab = k^2(a + b + 1)$$

veya

$$a(b - k^2) = k^2(b + 1)$$

yada

$$a = \frac{k^2(b+1)}{b-k^2} \tag{4.2}$$

biçimine dönüşür. (4.2) denkleminde $b = k^2 + 1$ seçersek, $a = k^4 + 2k^2$ olacağı açıktır. Böylece kenarları x, y, z olan Heron üçgeninin kenarları, $x = b + c$, $y = a + c$, $z = a + b$ olduğu da dikkate alınarak $r = k$ parametresine bağlı olarak

$$x = k^2 + 2,\ y = k^4 + 2k^2 + 1 \text{ ve } z = k^4 + 3k^2 + 1$$

biçiminde elde edilmiş olur ki o zaman bu Heron üçgeninin iç teğet çemberinin yarıçapı tamsayı olur.

Örnek 4.1. k parametresinin ilk 10 değeri için iç teğet çemberinin yarıçapı r = k olan Heron üçgenlerini bulalım.

Tablo 4.1

k	*x*	*y*	*z*	r
1	3	4	5	1
2	6	25	29	2
3	11	100	109	3
4	18	289	305	4
5	27	676	701	5
6	38	1369	1405	6
7	51	2500	2549	7
8	66	4225	4289	8
9	83	6724	6805	9
10	102	10201	10301	10

Bir Heron üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı ile ilgili olan teoreme geçmeden önce; aşağıdaki Lemmayı verelim.

Lemma 4.1. *A alanlı ve s yarı çevreli herhangi bir T = (x, y, z) Heron üçgeni için a = s – x, b = s – y, c = s – z olsun. Ayrıca* $D = (a,b,c)_{ebob}$ *,* $(u, v, w)_{ebob} = 1$ *olmak üzere; a = Du, b = Dv ve c = Dw olarak verilsin. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.*

***a**) u, v, w sayılarından birisi tek ve onlardan birisi de çifttir. Özel olarak* $D = (x,y,z)_{ebob}$ *dir.*

***b**) Eğer* $p \mid (u + v, u + w)_{ebob}$ *olacak şekilde bir p asalı varsa o zaman* $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$ *olur (Kramer & Luca,2001).*

İspat. *a*) $(u,v,w)_{ebob} = 1$ olduğundan, *u, v, w* sayılarından en az birisi tektir. Şimdi onların tamamının tek olamayacağını gösterelim. Gerçekten $x = b + c$, $y = a + c$ ve $z = a + b$ olduğu için $D \mid (x,y,z)_{ebob}$ olur ki buradan da $x_1 = \frac{x}{D}$, $y_1 = \frac{y}{D}$, $z_1 = \frac{z}{D}$ kenarlı üçgen bir Heron üçgenidir. O halde (x_1, y_1, z_1) üçgeni için; $s_1 = \frac{s}{D}$,

$s_1 - x_1 = \frac{s}{D} - \frac{x}{D} = \frac{s-x}{D} = \frac{a}{D} = \frac{Du}{D} = u$ ve benzer şekilde $s_1 - y_1 = v$, $s_1 - z_1 = w$ elde

edilir. Buradan da $s_1 = u + v + w$ olduğundan $A_1 = \sqrt{s_1(s_1 - x_1)(s_1 - y_1)(s_1 - z_1)}$ formülünden A_1 alanı,

$$u.v.w.(u + v + w) = A_1^2 \tag{4.3}$$

olarak elde edilir. Teorem 1.2.2. den dolayı $6 \mid A_1$ olduğundan *u, v, w* sayılarından birisi çift olur. Dolayısıyla $D = (x, y, z)_{ebob}$ olduğu hemen görülür.

b) $p \mid (u + v, u + w)_{\text{ebob}} = (z_1, y_1)_{\text{ebob}}$ olacak şekilde p bir tek asal olsun. (x_1, y_1, z_1) üçgeninin A_1 alanı için bulunan (4.3) ifadesi;

$$-x_1^4 - y_1^4 - z_1^4 + 2x_1^2y_1^2 + 2x_1^2z_1^2 + 2y_1^2z_1^2 = A_1^2 \tag{4.4}$$

biçiminde yeniden yazılır. (4.4) denklemi mod p ye göre indirgenirse;

$$-x_1^4 \equiv A_1^2 \pmod{p} \tag{4.5}$$

ifadesine ulaşılır. $p \mid (z_1, y_1)_{\text{ebob}}$ ve $(x_1, y_1, z_1)_{\text{ebob}} = 1$ olduğundan $p \nmid x_1$ bulunur. Böylece (4.5) ifadesinin bir çözüme sahip olabilmesi için Tanım 1.2.6 ve Sonuç 1.2.1 den dolayı $p \equiv 1 \pmod 4$ olması demektir.

Teorem 4.2. *p, $p \equiv 1$ (mod 4) olacak şekilde bir asal olsun. O zaman $R = p$ biçiminde olan bir Heron üçgeni vardır (Kramer & Luca,2001).*

İspat. *p,* mod 4 e göre 1 e kongruent olan bir asal olsun. O halde p iki karenin bir toplamı olduğundan m > n için $p = m^2 + n^2$ biçiminde yazılabilir. O zaman (x, y, z) üçlüsü;

$$x = 2(m^2 + n^2), \quad y = 2(m^2 - n^2), \quad z = 4mn \tag{4.6}$$

kenarlı üçgen Heron üçgenidir ve $R = m^2 + n^2 = p$ olur. Yukarıdaki üçgenin dik açılı bir üçgen ve hipotenüsünün yarısının da R olduğuna dikkat edelim. Buradan da $p \equiv 1 \pmod 4$ biçiminde sonsuz sayıda asal bulunduğundan, çevrel çemberinin yarıçapı $R = p$ olan sonsuz sayıda Heron üçgeninin bulunduğu sonucuna ulaşırız.

Eğer k bir p asalının katı biçiminde keyfî bir pozitif tamsayı ise o zaman $R = k$ yarıçaplı bir Heron üçgeni vardır. Bunu görmek için $R = k$ yarıçaplı Heron üçgenini, (4.6) ile verilen üçgene benzer bir üçgen olarak düşünmek yeterlidir. Ayrıca bu üçgenin kenarları k/*p* kez uzar. O halde çevrel çemberinin yarıçapı bir tam sayı olan sonsuz sayıda Heron üçgeni elde edilebilir.

Teorem 4.3. *Bir Heron üçgenini çevrel çemberinin yarıçapı R olsun. R; 2 nin bir kuvveti veya $p \equiv 11 \pmod{12}$ olacak şekildeki bir p asalı için p nin kuvveti olamaz. (Kramer & Luca,2001).*

İspat. R si tamsayı olan Heron üçgenlerine dair bazı genel bilgiler ile başlayalım ve sonra da R nin; 2 nin bir kuvveti veya $p \equiv 11 \pmod{12}$ biçiminde bir asalın kuvveti olması durumunu inceleyelim.

A alanlı ve *s* yarı çevreli herhangi bir $T = (x, y, z)$ Heron üçgeni için yine $a = s - x$, $b = s - y$, $c = s - z$ olsun ve ayrıca $D = (a,b,c)_{ebob}$, $(u, v, w)_{ebob} = 1$ olmak üzere; $a = Du$, $b = Dv$ ve $c = Dw$ olduğunu varsayalım. Bu varsayımlar altıda Heron üçgenleri ile ilgili birkaç temel bilgi verelim. Bunun için herhangi bir üçgen için $A = \frac{xyz}{4R}$ olduğundan,

$$4.R.A = x.y.z \tag{4.7}$$

formülünü elde ederiz. Buradan $A_1^2 = u.v.w.(u + v + w)$, $x = b + c$, $y = a + c$, $z = a + b$ olduğunu da dikkate alarak (4.7) formülü;

$$16.R^2.u.v.w.(u + v + w) = D^2.(u + v)^2.(u + w)^2.(v + w)^2 \tag{4.8}$$

biçiminde yeniden yazılabilir.

İspatın devamında; *s* ve *t* pozitif tamsayıları için, *s* ve *t* nin en büyük ortak bölenini $d_{s,t}$ ile göstereceğiz. Yani; $d_{s,t} = (s, t)_{ebob}$ olsun. $(u, v, w)_{ebob} = 1$ olduğundan;

$$(d_{u,v}, d_{u,w})_{ebob} = (d_{v,u}, d_{v,w})_{ebob} = (d_{w,u}, d_{w,v})_{ebob} = 1 \tag{4.9}$$

ve

$$(d_{u+v,w}, d_{u,v} . d_{u,w} . d_{v,w})_{ebob} = (d_{u+w,v}, d_{u,v} . d_{u,w} . d_{v,w})_{ebob}$$
$$= (d_{v+w,u}, d_{u,v} . d_{u,w} . d_{v,w})_{ebob} = 1 \tag{4.10}$$

olduğuna dikkat edelim. Şimdi (4.8) eşitliğinin her iki yanında bazı kısaltmalar yapabiliriz ve

$$16R^2 \frac{u}{d_{u,v} \cdot d_{u,w} \cdot d_{u,v+w}} \cdot \frac{v}{d_{v,u} \cdot d_{v,w} \cdot d_{v,u+w}} \cdot \frac{w}{d_{w,u} \cdot d_{w,v} \cdot d_{w,u+v}} \cdot \frac{u+v+w}{d_{u,v+w} \cdot d_{v,u+w} \cdot d_{w,u+v}}$$
$$= D^2 \cdot \left(\frac{u+v}{d_{u,v} \cdot d_{u+v,w}} \right)^2 \cdot \left(\frac{u+w}{d_{u,w} \cdot d_{u+w,v}} \right)^2 \cdot \left(\frac{v+w}{d_{v,w} \cdot d_{v+w,u}} \right)^2 \tag{4.11}$$

ifadesine ulaşırız. (4.11) eşitliği (4.8) eşitliğinden daha karmaşık olmakla beraber; (4.11) denkleminin sol tarafında $16R^2$ bir çarpan olduğundan (4.11) denkleminin sağ tarafındaki son üç çarpanın her birisinin de $16R^2$ yi bölmesi gerektiği anlaşılır. Çünkü (4.11) in sol tarafındaki kalan çarpanlar ile bunlar aralarında asaldır. Buradan;

$$\left(\frac{u+v}{d_{u,v}\cdot d_{u+v,w}}\right).\left(\frac{u+w}{d_{u,w}\cdot d_{u+w,v}}\right).\left(\frac{v+w}{d_{v,w}\cdot d_{v+w,u}}\right) \;\Big|\; 4R \tag{4.12}$$

sonucuna ulaşırız. (4.12) ile verilen ifadenin,

$$\left(\frac{u+v}{d_{u,v}\cdot d_{u+v,w}}\right) \quad , \quad \left(\frac{u+w}{d_{u,w}\cdot d_{u+w,v}}\right) \quad , \quad \left(\frac{v+w}{d_{v,w}\cdot d_{v+w,u}}\right) \tag{4.13}$$

çarpanlarına bakalım. Yukarıdaki Lemma 4.1.*a* dan dolayı, (4.13) ile verilen sayıların en az ikisinin tek olduğunu görürüz. Yukarıdaki Lemma 4.1.b den dolayı da, (4.13) te verilen herhangi iki sayının en büyük ortak böleni, sadece mod 4 e göre 1 e kongruent olan asallar ile bölünebilirdir. Bu bilgilerden; eğer R, 2 nin bir kuvveti ise α nın 0 veya pozitif tam sayı değerleri için; (4.13) te verilen her üç sayının alabileceği değerler sadece;

$$1, \quad 1, \quad 2^{\alpha} \tag{4.14}$$

olur. Eğer R = q sayısı, $p \equiv 11(\text{mod } 12)$ olacak şekildeki bir p asalının kuvveti ise (4.13) listesindeki ilk sayıyı 1 kabul edebiliriz ve $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ için her üç sayının alabileceği değerler;

$$1, 2^{\alpha}, \; q \text{ veya } 1, 1, \; 2^{\alpha}q \tag{4.15}$$

olup, şimdi bu durumları inceleyelim. O halde $(\alpha, \beta)_{ebob} = 1$ için;

$$d_{u,\,v} = d, \qquad u = d.\alpha\,, \quad v = d.\beta\,, \quad w = (\alpha+\beta).\gamma\,, \tag{4.16}$$

olarak yazabiliriz. $(u, v, w)_{ebob} = 1$ olduğundan;

$$d_{u,\,w} = (d\alpha\,, (\alpha+\beta).\gamma)_{ebob} = (\alpha, (\alpha+\beta).\gamma)_{ebob} = d_{\alpha,\gamma,} \tag{4.17}$$

ve

$$d_{u+w,\,v} = (d.\alpha + (\alpha+\beta).\gamma,\; d.\beta)_{ebob} = ((d+\gamma).\alpha + \beta.\gamma,\; \beta)_{ebob} = d_{d+\gamma,\,\beta} \tag{4.18}$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde;

$$d_{v,\,w} = (d.\beta,\; (\alpha+\beta).\gamma)_{ebob} = (\beta,\; (\alpha+\beta).\gamma)_{ebob} = d_{\beta,\,\gamma} \tag{4.19}$$

ve

$$d_{v+w,\,u} = (d.\beta + (\alpha + \beta).\gamma,\ d.\alpha)_{ebob} = ((d+\gamma).\beta + \alpha.\gamma,\ \alpha)_{ebob} = d_{d+\gamma,\,\alpha} \qquad (4.20)$$

olduğu gösterilebilir. Bu formüller ile, (4.13) listesindeki ikinci ve üçüncü sayılar kolaylıkla;

$$\left(\frac{u+w}{d_{u,w}\cdot d_{u+w,v}}\right) = \frac{d\cdot\alpha + (\alpha+\beta)\cdot\gamma}{d_{\alpha,\gamma}\cdot d_{d+\gamma,\beta}} = \frac{\alpha\cdot(d+\gamma)}{d_{\alpha,\gamma}\cdot d_{d+\gamma,\beta}} + \frac{\gamma\cdot\beta}{d_{\alpha,\gamma}\cdot d_{d+\gamma,\beta}} \qquad (4.21)$$

ve

$$\left(\frac{v+w}{d_{v,w}\cdot d_{v+w,u}}\right) = \frac{d\cdot\beta + (\alpha+\beta)\cdot\gamma}{d_{\beta,\gamma}\cdot d_{d+\gamma,\alpha}} = \frac{\beta\cdot(d+\gamma)}{d_{\beta,\gamma}\cdot d_{d+\gamma,\alpha}} + \frac{\gamma\cdot\alpha}{d_{\beta,\gamma}\cdot d_{d+\gamma,\alpha}} \qquad (4.22)$$

biçiminde elde edilir. (4.21) ve (4.22) formülleri ile verilen sayıların veya (4.13) ile verilen son iki sayının her birinin 1 den büyük olduğunu doğrudan söyleyebiliriz. Çünkü onların her biri iki pozitif tam sayının toplamı biçimindedir. Özellikle, bu kurallar R nin 2 nin bir kuvveti olması durumu dışında geçerlidir. Şimdi; R nin $p \equiv 11 (\text{mod } 12)$ biçiminde bir p asalının kuvveti olamayacağını ispatlamak için bu durumun aksini doğru kabul edelim. (4.15) formülü ve yukarıdaki kabullerden; (4.13) listesindeki sayılar için mümkün olan durumlar;

$$1,\quad 2,\ q \quad \text{veya } 1,\ 4,\ q \qquad (4.23)$$

olur. Eğer (4.13) listesindeki ikinci sayı 2 ise, o zaman (4.21) formülünü kullanarak;

$$\left(\frac{\alpha}{d_{\alpha,\gamma}}\right)\cdot\left(\frac{(d+\gamma)}{d_{d+\gamma,\beta}}\right) = \left(\frac{\gamma}{d_{\alpha,\gamma}}\right)\cdot\left(\frac{\beta}{d_{d+\gamma,\beta}}\right) = 1 \qquad (4.24)$$

elde ederiz. (4.24) formülü $\alpha = \gamma$ ve $\beta = d + \gamma$ olmasını gerektirir. Son formülden $d = \beta - \gamma$ elde edilir, böylece;

$$u = (\beta - \gamma).\gamma, \quad v = (\beta - \gamma).\beta, \quad w = (\beta + \gamma).\gamma \qquad (4.25)$$

ve $(u, v, w) = 1$ olduğundan $\gamma \neq \beta (\text{mod } 2)$ elde edilir. Buradan

$$v + w = (\beta - \gamma).\beta + (\beta + \gamma).\gamma = \beta^2 + \gamma^2 \qquad (4.26)$$

bulunur. Üstüne üstlük;

$$d_{v,\,w} = d_{\beta,\,\gamma} = ((\beta - \gamma).\beta,\ (\gamma + \beta).\gamma)_{ebob} = 1 \qquad (4.27)$$

ve $$d_{v+w,\,u} = d_{d+\gamma,\,\alpha} = (\gamma^2 + \beta^2,\ (\beta - \gamma).\gamma)_{ebob} = 1 \qquad (4.28)$$

olur. Çünkü $d_{\beta,\gamma} = 1$ ve β ile γ mod 2 ye göre kongruent değildir. Böylece (4.13) listesindeki son sayı,

$$q = \beta^2 + \gamma^2 \qquad (4.29)$$

dır. *q;* $p \equiv 3 \pmod 4$ biçiminde bir p asalının kuvveti olmasından dolayı (4.29) denklemini sağlayan γ ve β doğal sayıları bulunamaz.

(4.13) listesindeki ikinci sayı 4 olduğu zaman bu 4 sayısını (4.21) formülünü kullanarak hesaplayacak olursak; olabilecek olanlar sadece;

$$\left(\left(\frac{\alpha}{d_{\alpha,\gamma}}\right)\cdot\left(\frac{(d+\gamma)}{d_{d+\gamma,\beta}}\right),\left(\frac{\gamma}{d_{\alpha,\gamma}}\right)\cdot\left(\frac{\beta}{d_{d+\gamma,\beta}}\right)\right) \in \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} \qquad (4.30)$$

dir. Yukarıdaki durumlar mod 2 ye göre β ile γ nın gösterimlerinden dolayı şartları sağlayacak durumlar değildir.

(4.13) listesindeki ikinci sayı 2 olduğunda, q nun temsilinden, $q = \gamma^2 + 3\delta^2$ biçiminde gösterimine bağlı olarak, q; 2 değerini alamaz. Çünkü q; $p \equiv 11 \pmod{12}$ biçiminde bir p asalının kuvveti olduğundan $q = \gamma^2 + 3\delta^2$ biçiminde temsil edilemez. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1. Eğer p; $p \equiv 5 \pmod{12}$ biçiminde bir asal ise o zaman R = p olacak şekilde bir tek Heron üçgeni vardır ki o da (6, 8, 10) Pisagor üçgeni olup R = 5 olan bir tek Heron üçgenidir (Kramer & Luca, 2001).

5. HERON ÜÇGENLERİNİN ALANLARININ ASAL ÇARPANLARI

Bu bölümde bir Heron üçgeninin alanının ve kenar uzunluklarının çarpanlarının özelliklerini inceleyeceğiz. $\wp$ asalların sonlu bir kümesi olmak üzere **S** kümesi,

$$\mathbf{S} = \left\{ n \geq 1 : n = \prod_{p \in \wp} p^{\alpha_p},\ \alpha_p \geq 0 \quad için \right\} \tag{5.1}$$

biçiminde tanımlansın. Yani; asal sayıların belirlenmiş sonlu bir $\wp$ kümesi için, $\wp$ ye ait asal çarpanlardan oluşan bütün pozitif tam sayılarının kümesini **S** kabul ettik. Öncelikle; $A \in$ **S** alanına sahip bütün Heron üçgenlerin bulunması problemini araştıracağız. İlk olarak; eğer $T = (x, y, z)$, $A \in$ **S** alanına sahip bir Heron üçgeni ise o zaman, $d = (x, y, z)_{ebob} \in$ **S** olduğuna dikkat çekmeliyiz. Üstüne üstlük, eğer $x = dx_1$, $y = dy_1$ ve $z = dz_1$ ise o zaman, $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de bir Heron üçgenidir ve onun A_1 alanı için, $A_1 \in$ **S** dir. Dolayısıyla dikkatlerimizi $T = (x, y, z)$ primitif Heron üçgenlerine sınırlandırmamız yeterlidir. Böyle primitif Heron üçgenlerinin sonlu sayıda olduğu aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 5.1. *Asal sayıların sonlu bir kümesi $\wp$ olsun ve* **S** *kümesi de (5.1) deki gibi verilsin. O zaman, $A \in$* **S** *alanına sahip sadece sonlu sayıda primitif Heron üçgeni vardır (Kramer & Luca, 2001).*

İspat. $T = (x, y, z)$ nin $A \in$ **S** i sağladığını ve $a = s - x$, $b = s - y$, $c = s - z$ olduğunu varsayalım. T nin primitif olmasından $(a, b, c)_{ebob} = 1$ elde edilir. Şimdi

$$a.b.c\,.(a + b + c) = A^2 \tag{5.2}$$

ve $A \in$ **S** olduğundan, $a, b, c \in$ **S** olmak üzere

$$a + b + c \in \mathbf{S} \tag{5.3}$$

olmasını gerektirir. (5.3) denklemi **S** - *birim denklemi* olarak bilinir ki bu denklemin $(a, b, c)_{ebob} = 1$ şartını sağlayan sadece sonlu sayıda çözümlerinin bulunduğu Evertse (1984) tarafından gösterildi. Bir Heron üçgeninin alanı A ise o zaman, $6 \mid A$ olduğu Teorem 1.2.2 den kolayca görülebilir. Buradan $2, 3 \in \wp$ olmalıdır.

Teorem 5.1 in bu sonucundan; $\wp = \{2, 3\}$ olması durumunda $A \in \mathbf{S}$ alanlı bütün Heron Üçgenlerinin tanımlanıp tanımlanamayacağı sorusu aklımıza gelir. Bunu da aşağıdaki teorem verir.

Teorem 5.2. *Negatif olmayan α, β tam sayıları için $A = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$ ya sahip bir T primitif Heron üçgeni olduğunu varsayalım. O zaman, T;*

(3, 4, 5), (3, 25, 26), (4, 13, 15), (5, 5, 6), (5, 5, 8), (5, 29, 30),

(9, 10, 17), (9, 73, 80), (13, 244, 255), (17, 65, 80) (5.4)

biçimindeki 10 Heron üçgeninden birisine kongruenttir. (Kramer & Luca, 2001).

İspat. $T = (x, y, z)$ nin $A \in \mathbf{S}$ i sağladığını ve $a = s - x$, $b = s - y$, $c = s - z$ olduğunu varsayalım (5.2) ve (5.3) denklemlerinden dolayı, $A = 2^{\alpha}.3^{\beta}$ alanlı her bir primitif $T = (x, y, z)$ Heron üçgeni ilk olarak;

$$a + b + c = w \tag{5.5}$$

denkleminin çözümünden bulunabilir ki burada $(a, b, c)_{\text{ebob}} = 1$ ve a, b ve c; {2, 3} kümesinde $a.b.c.w$ nın bir tam kare olması şartını sağlayan asal çarpanlara sahiptir. Yukarıdaki denklem $a.b.c.w$ nın tamkare olması şart ile birlikte De Ze ve Tijdeman(1992) tarafından Baker metoduna bağlı olarak , 2 ve 3 asallarının çarpımının 200 değerini geçmeyecek şekilde kuvvet çiftlerinden oluştuğunu bir bilgisayar programı kullanarak gösterdiler. Alex ve Foster 1992 ve 1995 de yayınlanan makalelerinde ise, {2, 3} asallar kümesinin {2, 3, 5} asallar kümesine genişletildiğinde de (5.5) denkleminin elemanter anlamda çözülebilir olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca Alex ve Foster yine aynı makalelerinde; yukarıdaki şartlar altında verilen bütün çözümlerin listesi incelendiğinde Teorem 5.2. nin hipotezini sağlayan Heron üçgenlerinin (5.4) deki listesinden ibaret olduğunu göstermişlerdir.

Şimdi birinci bölümde; $m \geq 0$ sayısı için $F_m = 2^{2^m} + 1$ biçiminde verilen m –inci F_m Fermat sayısından hareketle Heron üçgenleri ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 5.3. *$x \geq y \geq z$ olmak üzere x, y, z tamsayıları bir Heron Üçgeninin kenarlarının uzunlukları olsun. Eğer x, y ve z sayıları asalların kuvvetleri*

biçiminde ise o zaman ya (x, y, z) = (5, 4, 3) tür ya da m ≥ 1 için F_m *asal olmak üzere (x, y, z) =* (F_m, F_m, $4(F_{m-1} - 1)$) *dir (Luca, 2003).*

İspat. Bir Heron üçgeninin kenarlarının uzunlukları olan x, y ve z sayılarını üç asalın kuvvetleri olduğunu varsayalım. Şimdilik bu üç tamsayı arasında herhangi bir sıralamayı dikkate almıyoruz. Bir Heron üçgeninin eşkenar üçgen olamayacağından hareketle iki durum irdelenmelidir.

Durum 1: Üçgenin bir ikizkenar üçgen olduğunu varsayalım.

Örneğin, $x = y$ olduğunu kabul edelim. $x = F_m$ ve $z = 4(F_{m-1} - 1)$ olacak şekilde bir $m \geq 1$ pozitif tamsayının mevcut olduğunu göstermemiz gerekir. $x = y$ olduğu için z nin bir çift sayı olduğu ortaya çıkar. Böylece; $\gamma \geq 2$ olmak üzere $z = 2^{\gamma}$ bulunur. Bir α pozitif tamsayısı ve bir p asal sayısı için $x = p^{\alpha}$ olarak yazalım. Teorem 1.2.4 e göre;

$$p^{2\alpha} = h_z^{\,2} + 2^{2(\gamma-1)} \tag{5.6}$$

ifadesi elde edilir. Eğer $p = 2$ ise o zaman $\alpha > \gamma$ ve $2^{\gamma-1} \mid h_z$ olduğu sonucunu çıkarırız. Herhangi bir k tamsayısı için $h_z = 2^{\gamma-1}k$ yazalım. (5.6) formülünün her iki tarafını $2^{2(\gamma-1)}$ ya bölersek;

$$2^{2(\alpha-\gamma+1)} = k^2 + 1 \tag{5.7}$$

sonucunu elde ederiz ki bu imkansızdır. Çünkü ardışık sıfırdan farklı iki sayının kareleri farkı tam olarak 1 den büyüktür. Eğer p, 2 den büyükse bir tek sayı olacağından ve (5.6) den dolayı $(x, h_z, z/2)$ üçlüsünün indirgenmesini gerektirir. Yani x, h_z, $z/2$ sayılarının en büyük ortak böleni 1 dir. Her primitif Pisagor üçlüsünün klasik parametrizasyonundan;

$$p^{\alpha} = m^2 + n^2 \ , \ h_z = m^{\,2} - n^2 , \ 2^{\gamma-1} = 2mn \tag{5.8}$$

olacak şekilde aralarında asal ve biri tek iken diğeri çift olan m ile n ($m > n$) tamsayılarının olduğu sonucu ortaya çıkar, (5.8) deki $2^{\gamma-1} = 2mn$ denkleminden $m = 2^{\gamma-2}$ ve $n = 1$ olması gerektiği sonucu çıkar. Böylece (5.8) deki ilk denklem;

$$p^{\alpha} = 2^{2(\gamma-2)} + 1 \tag{5.9}$$

ifadesine dönüşür. (5.9) daki denkleminden ve p nin tek sayı olması gerçeğinden $\gamma > 2$ olduğu elde edilir. $\alpha > 1$ olduğu zaman (5.9) denklemi; x, y, u ve w pozitif

tamsayılar ve $\min(u, w) > 1$ olmak üzere, $x^u = y^w + 1$ biçiminde verilen Catalan denkleminin özel bir durumudur (Ribenboim, 1994). Catalan denkleminin bütün çözümleri henüz bilmemekle birlikte; *w* nin çift sayı olma durumunda bu denklemin çözülemediği V. A. Lebesgue (1850) tarafından gösterilmiştir. Dolayısıyla buradan, α nın 1 den büyük olamayacağı elde edilir. Bu nedenle (5.9) denklemi;

$$p = 2^{2(\gamma-2)} + 1 \tag{5.10}$$

ifadesine indirgenir. Eğer *p* asalsa, $w \geq 1$ olmak üzere, sadece $2^w + 1$ formundaki p asallarının Fermat asalları olduğu bilinmektedir. Yani $m \geq 0$ için $p = F_m$ dir. (5.10) denkleminden dolayı p iki karenin toplamı olduğundan $m \geq 1$ olduğuna dikkat çekelim. Bu nedenle $m \geq 1$ için F_m in asal olduğu durumda $p = F_m$ ve $\gamma - 2 = 2^{m-1}$ dir. Böylece F_m asal sayısı için;

$$(x, y, z) = (F_m, F_m, 2^{2^{m-1}+2}) = (F_m, F_m, 4(F_{m-1} - 1))$$

sonucuna ulaşırız ki bu da ispatı tamamlar.

İspatın ikinci durumuna başlamadan önce ispatta kullanacağımız aşağıdaki Lemmayı ve ispatını verelim.

Lemma 5.1. *x, y ve z nin herhangi bir Heron üçgeninin kenar uzunlukları olduğunu varsayalım. Ayrıca pozitif α tamsayısı ve $p = 2$ ya da $p \equiv 3 \pmod 4$ biçimindeki herhangi bir p asal sayısı için $p^\alpha \,||\, x$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda; $p = 2$ ise $p^{\alpha+1} \,|\, ((y^2 - z^2),\ 4A)_{ebob}$ dır ve $p > 2$ ise $p^\alpha \,|\, ((y^2 - z^2),\ A)_{ebob}$ dir (Luca, 2003).*

İspat. Sadece $p > 2$ durumunu ele alıyoruz. Çünkü $p = 2$ durumu da benzer şekilde ele alınabilir. Bunun için ilk olarak; $A = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$ nin her iki tarafının karesini alıp; *s* yerine değerini yazar ve düzenlersek;

$$2x^2z^2 + 2y^2z^2 + 2x^2y^2 - x^4 - y^4 - z^4 = (4A)^2 \tag{5.11}$$

elde ederiz. (5.11) denklemini tekrar;

$$2x^2(y^2 + z^2) - x^4 - (y^2 - z^2)^2 = (4A)^2 \tag{5.12}$$

biçiminde düzenleriz. Sonra (5.12) denklemini $p^{2\alpha}$ modülüne göre indirgersek;

$$-(y^2 - z^2)^2 \equiv (4A)^2 \pmod{p^{2\alpha}} \tag{5.13}$$

buluruz. $y = z$ olamaz. O halde $y \neq z$ olduğunu varsayalım. (5.13) ifadesindeki bütün kalanlardan $p^{\alpha} \mid (y^2 - z^2)$ elde ederiz. Bunu görmek için durumun böyle olmadığını (yani $p^{\alpha} \nmid (y^2 - z^2)$ olduğunu) kabul edelim. O zaman şu sonuç ortaya çıkar: Eğer $p^{\delta} \| (y^2 - z^2)$ ise (yani $p^{\delta} \mid (y^2 - z^2)$ iken $p^{\delta+1} \nmid \left(y^2 - z^2\right)$ ise) o halde $\delta < \alpha$ dır. (5.13) denkleminin her iki tarafını $p^{2\delta}$ ile bölersek;

$$-\left(\frac{y^2 - z^2}{p^{\delta}}\right)^2 \equiv \left(\frac{4A}{p^{\delta}}\right)^2 (\text{mod } p^{2(\alpha-\delta)}) \tag{5.14}$$

sonucuna ulaşırız. Ancak; (5.14) kongrüansı imkansızdır. Çünkü –1 sayısı p modülüne göre ikinci dereceden bir kalan değildir. Böylece p^{α}; hem $(y^2 - z^2)$ yi, hem de A yı böler. Böylece ispat biter.

Şimdi teoremin ikinci durumunun ispatına dönebiliriz.

Durum 2: Şimdi de Heron üçgenin kenar uzunlukları olan x, y ve z nin üçünün de bir birlerinden farklı olduğu durumu inceleyelim. Yani üçgen ikiz kenarlı olmasın. Üç sayıdan en az birisi çift olduğundan x, y veya z den birisi çift olması gerektiğinden $\gamma \geq 2$ için $z = 2^{\gamma}$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca $x = p^{\alpha}$ ve $y = q^{\beta}$ olarak alalım. İlk olarak p ve q nün her ikisinin de tek sayı olduğunu görürüz. Eğer değilse o zaman x ve y çifttir ve bizi $p = q = 2$ ye ulaştırır. Ayrıca $x < y + z$ üçgen eşitsizliğinden ve $x \geq y \geq z$ olduğundan $2^{\alpha} \geq 2^{\beta} \geq 2^{\gamma}$ ve $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ olur. $2^{\alpha} < 2^{\beta} + 2^{\gamma}$ eşitsizliğinin her iki tarafı 2^{γ} ile bölünürse $2^{\alpha-\gamma} < 2^{\beta-\gamma} + 1$ ve dolayısıyla $\alpha = \beta$ elde edilir ki bu bizi ikizkenar Heron üçgenine götürür. Bu durum daha önce incelenmişti. Bundan dolayı hem p hem de q tek sayıdır. $2^{\gamma} \| z$ asal sayı kuvvetine Lemma 5.1 in uygulanmasıyla; $2^{\gamma+1} \mid (x^2 - y^2)$ ve $2^{\gamma+1} \mid 4A$ sonucu elde edilir. Böylece $z \mid 2A$ olduğunu görürüz. Öte yandan $2^{\gamma+1} \mid (x^2 - y^2) = (x - y)(x + y)$ olduğu sonucuna ulaşırız.

x ve y nin her ikisi de tek ve $z = 2^{\gamma}$ olduğu için; ya $z \mid (x - y)$ yada $z \mid (x + y)$ sonucu ortaya çıkar. $0 < |x - y| < z$ üçgen eşitsizliğinden dolayı $z \mid (x - y)$ durumu imkansızdır. Bu nedenle $2^{\gamma} \mid (x + y)$ dir. $\gamma \geq 2$ olduğu için, x veya y sayılarından

birinin 4 modülüne göre 1 e ve diğerinin 4 modülüne göre 3 e kongrüent olduğu sonucuna varırız. O halde $x = p^{\alpha} \equiv 1 \pmod 4$ ve $y = q^{\beta} \equiv 3 \pmod 4$ olduğunu varsayalım. 4k + 3 biçimindeki asalların tek kuvvetlerinin 4k + 3 biçiminde olmasından dolayı, özel olarak $q \equiv 3 \pmod 4$ ve β tek sayıdır.

Şimdi lemmayı uygulayabiliriz. $q^{\beta} \| y$ olduğunu işaret ederek $y = q^{\beta} \mid A$ olduğu görülür. O halde $y \mid 2A$ dır. Ayrıca $z \mid 2A$ olduğundan $yz \mid 2A$ olur. Buradan $A \geq yz / 2$ elde ederiz. Böylece Â, x kenarının karşısındaki açı olmak üzere $A = y.z.\sin(\hat{A})/2$ olduğundan $\sin(\hat{A}) \geq 1$ sonucu ortaya çıkar. Bu ise bizi $\hat{A} = \pi / 2$ olduğu sonucuna ulaştırır. Böylece üçgenimizin Â açısı bir dik açı olur. Bu suretle (x, y, z) nin bir Pisagor üçlüsü olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$p^{2\alpha} = q^{2\beta} + 2^{2\gamma} \tag{5.15}$$

olur.

Primitif Pisagor üçlülerinin standart parametrizasyonundan;

$$p^{\alpha} = m^2 + n^2 \ , \ q^{\beta} = m^2 - n^2 , \ 2^{\gamma-1} = 2mn \tag{5.16}$$

olacak şekilde $m > n$, $(m, n)_{ebob} = 1$ ve $m \equiv n \pmod 2$ için tamsayılarının olduğu sonucu ortaya çıkar.

(5.16) daki son formül; $m = 2^{\gamma-1}$ ve $n = 1$ olmasını gerektirir. (5.16) daki ikinci formül; $q^{\beta} = m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$ sonucuna götürür. $m-1$ ve $m+1$ aralarında asal iki tek tamsayı olduğundan $\gamma = 2$ için $m = 2$ ve $m - 1 = 1$ elde edilir. Ayrıca $q^{\beta} = 2^2 - 1 = 3$ olduğundan $q = 3$ ve $\beta = 1$ olur. Son olarak (5.16) daki ilk eşitlikten $p^{\alpha} = 2^2 + 1 = 5$ olması gerekir. O halde $p = 5$ ve $\alpha = 1$ dir. Dolayısıyla $(x, y, z) = (5, 3, 4)$ elde edilir.

5.1.Açık Problemler

1. Her Pisagor üçgeni bir Heron üçgeni olduğuna göre acaba alanı $A = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$ olan Heron üçgenleri var mıdır?

2. Her Pisagor üçgeni bir Heron üçgeni olduğuna göre acaba alanı $A = 3^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$ olan Heron üçgenleri var mıdır?

3. Her Pisagor üçgeni bir Heron üçgeni olduğuna göre acaba alanı $A = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma}$ olan Heron üçgenleri var mıdır? Böyle üçgenlerin sayısı sonlu mudur? Bunun varlığı (5, 12, 13) primitif Pisagor üçgeninin alanı, 30 = 2.3.5 olduğundan dolayı açıktır.

4. Her Pisagor üçgeni bir Heron üçgeni olduğuna göre acaba alanı $A = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 7^{\gamma}$ olan Heron üçgenleri var mıdır? Böyle üçgenlerin sayısı sonlu mudur? Bunun varlığı (7, 24, 25) primitif Pisagor üçgeninin alanı, $84 = 2^2.3.7$ olduğundan dolayı açıktır.

Bu şekilde sonsuz sayıda problem üretilebilir.

6. KAYNAKLAR

[1] Aassila, M., 2001, Some Results on Heron Triangles, Elem. Math. 56, p.143-146.

[2] Alex, L.J., Foster, L.L., 1995, On the diophantine equation $w + x + y = z$ with $xyz = 2^r.3^s.5^t$, Rev. Mth. Complut. Madrid, 8, p. 13-48.

[3] Beauregard, R. A., Suryanarayan, E. R., 1997, Arithmetic Triangles, Mathematics Magazine, v.70, n.2, p.105-115.

[4] Beauregard, R. A., Suryanarayan, E. R., 1998, The Brahmagupta Triangles, The College Mathematics Journal, v.29, n.1, p.13-17.

[5] Beauregard, R. A., Suryanarayan, E. R., 2000, General Arithmetics Triangles and Bhaskara's Equation, The College Mathematics Journal, v.31, n.2, p.111-115.

[6] Buchholz, R. H., Rathbun, R. L., 1997, An Infinite Set of Heron Triangles with Two Rational Mediands, American Mathematics, v.104, n.2, p.107-115.

[7] Cohen, M. P., 1999-2000, Generating Heronian Triangles with Consecutive Integer Sides, J. Recretional Mathematics, vol.30(2), p.121-124.

[8] Çallıalp, F., 1999, "Sayılar Teorisi", Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi, İstanbul.

[9] De Ze, M., Tijdeman, R., 1992, Exponential Diophantine equations with four terms, Indag. Math., 3, p. 47-52.

[10] Dickson, L. E., 1971, History of the Theory of Numbers, v.2, Strechert, New York.

[11] Evertse, J. H.,1984, On Sums of **S**-units and linear recurrences, Compositio Math., 53, p. 225-244.

[12] Fleenor, C. R., 1996-1997, Heronian Triangles with Consecutive Integer Sides, J. Recreational Mathematics, vol.28(2), p.113-115.

[13] Gaál, I., Járási, I., Luca, F., 2003, A Remark on Prime Divisors of Lengths of Sides of Heron Triangles, Experimental Mathematics, vol.12, No.3, p.303-310.

[14] Gurbanlıyev, A., 2003, Heron Üçgenleri Üzerine, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya

[15] Gustauson, R. D., Frisk, P. D., 1991, Elementary Geometry, Third Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York.

[16] Guy, R. K., 1994, Unsolved Problems in Number Theory, Springer – Verlag, New York.

[17] Kramer, A. V., Luca, F., 2001, Some Remarks on Heron Triangles, Acta. Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae 27, p.25-38.

[18] Luca, F., 2000, Perfect Cuboids and Perfect Square Triangles, Mathematics Magazine, vol.73, n.2, p.400-401.

[19] Luca, F., 2003, Fermat Primes and Heron Triangles with Prime Power Sides, American Mathematics Monthly, vol.110.1, p.46-49.

[20] Mohanty, S. , Mohanty, S.P., 1992, Pythagorean Numbers, Fibonacci Quarterly, v.28, p. 31-42

[21] Rusin, D. C., 1998, Rational Triangles with Equal Area, New York Journal of Mathematics, v.4, p.1-15.

[22] Sastry, K. R. S., 2001, Heron Triangles: A Gergonne – Cevian – Median Perspective, Forum Geometricorum, vol.1, p.17-24.

[23] Sierpinski, W., 1962, Pythagorean Triangles, Graduate School of Science, New York

[24] Şenay, H., 1989, "Sayılar Teorisine Giriş", Selçuk Ü. Fen-Ed. Fak., Konya.

[25] Wilson, J. W., 1986, Problem Solving with Heron's Formula, Northwest Mathematics Conference, October 8-10,1986.

[26] The Math Forum, http://mathforum.org/library/dr.math/view/52532.html

[27] The Math Forum, http://mathforum.org/library/dr.math/view/54957.html

[28] The Math Forum, http://mathforum.org/library/dr.math/view/51608.html

[29] The Math Forum, http://mathforum.org/library/dr.math/view/54846.html

[30] http://survey.libqual.org/digiqual/index.cfm?ID=729109