T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN GLOBAL ASİMPTOTİK KARARLILIĞI VE PERİYODİKLİĞİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

İbrahim YALÇINKAYA
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya, 2006

T.C

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN GLOBAL ASİMPTOTİK KARARLILIĞI VE PERİYODİKLİĞİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

İBRAHİM YALÇINKAYA

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 24 / 03 / 2006 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile kabul edilmiştir

Prof. Dr. Hasan ŞENAY

(Başkan)

Prof. Dr. Eşref HATIR

(Üye)

Prof. Dr. Fatih NURAY

(Üye)

Yrd. Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR

(Danışman)

Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

(Üye)

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Doktora Tezi olarak sunulmuştur.

Doktora çalışmamı yönetmeyi kabul ederek karşılaştığım güçlüklerde değerli yardımlarını esirgemeyen, tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

İbrahim YALÇINKAYA

Konya, 2006

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

1. BÖLÜM

GİRİŞ…….....1

1.1. Maksimumlu Fark Denklemleri İle İlgili Yapılmış Çalışmalar.....2

1.2. Fark Denklemlerinin Global Asimptotik Kararlılığı İle İlgili Yapılmış Çalışmalar……..5

2. BÖLÜM

FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIMLAR.....13

3. BÖLÜM

$x_{n+1} = \max\{1/x_n, Ax_{n-1}\}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ…….....19

3.1. $A < 0$ durumu…….....19

3.2. $A > 0$ durumu…….....25

3.3. Nümerik Sonuçlar..…….....35

4. BÖLÜM

$x_{n+1} = \dfrac{1 + x_{n-1}^a + x_n x_{n-2}^a}{x_n + x_{n-1}^a + x_{n-2}^a}$ RASYONEL FARK DENKLEMİNİN GLOBAL ASİMPTOTİK KARARLILIĞI.....42

SONUÇ VE ÖNERİLER.......58

KAYNAKLAR 59

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI FARK DENKLEMLERİNİN GLOBAL ASİMPTOTİK KARARLILIĞI VE PERİYODİKLİĞİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

İbrahim YALÇINKAYA

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR

2006, 65 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Hasan ŞENAY

Prof. Dr. Fatih NURAY

Prof. Dr. Eşref HATIR

Yrd. Doç. Dr. Cengiz ÇİNAR

Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, maksimumlu fark denklemleri ve fark denklemlerinin global asimptotik kararlılığı ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verdik. İkinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremleri verdik.

Üçüncü bölümde, $x_{n+1} = \max\{1/x_n, Ax_{n-1}\}$ fark denklemini tanımladık, çözümlerini ve periyodikliğini inceledik. Son olarak da bu fark denklemi için nümerik örnekler verdik.

Dördüncü bölümde ise, $x_{n+1} = \dfrac{1 + x_{n-1}^a + x_n x_{n-2}^a}{x_n + x_{n-1}^a + x_{n-2}^a}$ rasyonel fark denklemini tanımladık, global asimptotik kararlılığını inceledik ve nümerik örnekler verdik.

Anahtar Kelimeler: Maksimumlu Fark Denklemi, Periyodiklik, Rasyonel Fark Denklemi, Denge Noktası, Yarı Dönme, Global Asimptotik Kararlılık.

1. BÖLÜM
GİRİŞ

Bu çalışmada, fark denklemlerinin iki ayrı konusu olan maksimumlu fark denklemleri ve fark denklemlerinin global asimptotik kararlılığı ele alınmıştır.

Maksimumlu fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan çalışmalardan büyük bir kısmı incelenmiştir. Bu kapsamlı araştırmanın ışığında, A parametresi herhangi bir reel sayı ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, Ax_{n-1}\right\}$ maksimumlu fark denklemi tanımlanmış ve çözümleri incelenmiştir. Bu denklem $A = 0$ iken, bilinen bir denklem olan $x_{n+1} = 1/x_n$ fark denklemine eşittir ve 2 periyotludur. Bu nedenle $A < 0$ ve $A > 0$ olma durumlarının ele alınması yeterli olmuştur. $A < 0$ durumu için verilen Teorem 3.1.1, $A > 0$ durumu için verilen Lemma 3.2.1, Lemma 3.2.2 ve Teorem 3.2.1 tamamen orijinaldir.

Ayrıca fark denklemlerinin global asimptotik kararlılığı ile ilgili yapılmış çalışmalardan büyük bir kısmı incelendikten sonra, $a \in [0,\infty)$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$ olmak üzere, $x_{n+1} = \frac{1 + x_{n-1}^a + x_n x_{n-2}^a}{x_n + x_{n-1}^a + x_{n-2}^a}$ rasyonel fark denklemi tanımlanmış ve çözümlerinin $\bar{x} = 1$ denge noktasında global asimptotik kararlı olduğu ispat edilmiştir. Bu amaçla ifade ve ispat edilen Lemma 4.1, Lemma 4.2, Lemma 4.3 ve Teorem 4.1 de orijinaldir.

Çalışmada kullanılan literatürün özeti iki ayrı kısımda ele alınmıştır.

1.1. Maksimumlu Fark Denklemleri İle İlgili Yapılmış Çalışmalar

Amleh (1998), G. Ladas yönetiminde yaptığı doktora tezinde; fark denklemlerinin üç farklı konusunu ele almıştır. İlk bölümde, $x_{n+1}=\max\left\{\frac{A}{x_n},\frac{B}{x_{n-1}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin sıfırdan farklı reel sayılar olan A,B parametreleri ve x_{-1},x_0 başlangıç şartları için periyodik olduğunu göstermiştir. İkinci bölümde, $x_{n+1}=\frac{x_n+x_{n-1}x_{n-2}}{x_nx_{n-1}+x_{n-2}}$ rasyonel fark denkleminin global asimptotik kararlılığını incelemiş ve son bölümde ise, Plant-Herbivore sisteminin çözümlerinin sınırlılığı üzerine çalışmıştır.

Amleh, Hoag ve Ladas (1998), $x_{n+1}=\max\left\{\frac{1}{x_n},\frac{A}{x_{n-1}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir. Bu çalışmada; A parametresi ve başlangıç şartlarının sıfırdan farklı reel sayılar olduğunu kabul etmişler. Bu fark denkleminin bütün çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ve ayrıca A parametresi ve başlangıç şartlarına bağlı olarak çözümlerin er geç 2, 3 ve 4 periyotlu olabileceğini göstermişlerdir.

Grove, Kent ve Ladas (1998), yaptıkları çalışmada; $x_{n+1}=\frac{a_nx_n+b_n}{x_{n-1}}$ otonom olmayan Lyness fark denklemi ile $x_{n+1}=\frac{\max\{a_nx_n,b_n\}}{x_{n-1}}$ maksimumlu fark denkleminde katsayıların negatif olmayan $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri olduğunu varsaymışlar, bu varsayımlar doğrultusunda bu denklemlerin bütün pozitif çözümlerinin sürekli ve sınırlı olabilmesi için yeter şartlar elde etmişlerdir. Ayrıca çalışmada zıt durumların her biri için örnekler vermişlerdir.

Janowski, Kocic, Ladas ve Tzanetopoulos (1998), yaptıkları çalışmada; $x_{n+1}=\frac{\max\{x_n^k, A\}}{x_{n-1}}$ maksimumlu rasyonel fark denkleminin çözümlerinin sınırlılık ve salınımlılık özelliklerini incelemişlerdir. Bu fark denkleminde A, k parametreleri ve başlangıç şartlarının pozitif sayı değerleri aldıklarını varsaymışlar ve çalışma sonucunda bu denklemin çözümlerinin sınırlı ve salınımlı olma şartlarını A, k parametreleri ile başlangıç şartlarına bağlı olarak elde etmişlerdir.

Valicenti (1999), yaptığı doktora tezinde; $x_{n+1}=\frac{a_n x_n + b_n}{x_{n-1}}$ otonom olmayan Lyness fark denklemi ile $x_{n+1}=\frac{\max\{a_n x_n, b_n\}}{x_{n-1}}$ maksimumlu fark denkleminin çözümlerinin periyodikliği ve global asimptotik kararlılığı üzerine çalışmıştır.

Teixeria (2000), yaptığı doktora tezinde; ilk olarak A herhangi bir reel sayı ve başlangıç şartları sıfır olmayan reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1}=\frac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir. İkinci bölümde ise, $x_{n+1}=\frac{a}{x_n}+\frac{b}{y_n}$, $y_{n+1}=\frac{c}{x_n}+\frac{d}{y_n}$ fark denklem sisteminin çözümlerini analiz etmiş ve sonuncu bölümde de $y_{n+1}=\frac{p+y_{n-1}}{qy_n+y_{n-1}}$ fark denkleminin pozitif parametreler ve başlangıç şartları altında global asimptotik kararlı olduğunu göstermiştir.

Papaschinopoulos ve Hatzifilippidis (2001), katsayılarını pozitif sayı dizileri ve başlangıç şartlarını pozitif sayı olarak aldıkları $x_{n+1}=\frac{\max\left\{a_n(\prod_{i=n-k+1}^{n} x_i), b_n\right\}}{\prod_{i=n-k}^{n} x_i}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin süreklilik, sınırlılık ve periyodiklik özelliklerini incelemişlerdir.

Mishev, Patula ve Voulov (2002), $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin periyodikliği üzerine yaptıkları çalışmada; A, B parametreleri ile başlangıç şartlarını pozitif sayı değerleri olarak kabul ederek denklemin bütün pozitif çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ispat etmişlerdir.

Voulov (2002), yaptığı iki çalışmadan birincisinde; G. Ladas tarafından verilen bir açık problemi çözmüştür. Bu çalışmada, A, B, C parametreleri negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $A + B + C > 0$ için $x_n = \max\left\{\frac{A}{x_{n-1}}, \frac{B}{x_{n-3}}, \frac{C}{x_{n-5}}\right\}$ fark denkleminin bütün çözümlerinin periyodik olduğunu göstermiştir. İkincisinde ise, A ile B parametreleri pozitif reel sayılar ve k ile m parametreleri pozitif tam sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_{n-k}}, \frac{B}{x_{n-m}}\right\}$ maksimumlu fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelemiştir. A, B, k ve m parametrelerine bağlı olarak denklemin bütün pozitif çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ispat etmiştir.

Papaschinopoulos ve arkadaşları (2003), yaptıkları çalışmada daha önce Feuer tarafından çalışılmış olan $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümleri, çözümlerinin periyodikliği ve sabit aralığı üzerine çalışmışlardır.

Feuer (2003), $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n^k, A\}}{x_n^l x_{n-1}}$ maksimumlu Lyness fark denklemi üzerinde yaptığı çalışmada; A'nın pozitif bir reel sayı, k, l ve başlangıç şartlarının da keyfi reel sayı değerleri olduğunu kabul ederek denklemin çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelemiştir.

Patula ve Voulov (2004), yaptıkları çalışmada; A_n, B_n pozitif terimli ve 3 periyotlu diziler olmak üzere, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A_n}{x_n}, \frac{B_n}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Çinar ve arkadaşları (2005), yaptıkları çalışmada; $A, B > 0$ olmak üzere, sıfırdan farklı başlangıç şartları için $x_{n+1} = \min\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir. Ayrıca, bu denklemi genelleştirerek elde ettikleri $x_{n+1} = \min\left\{\frac{A}{x_n x_{n-1} \ldots x_{n-k}}, \frac{B}{x_{n(k+2)} \ldots x_{n-(2k+2)}}\right\}$ fark denkleminin pozitif başlangıç şartları altında periyodik olma durumlarını incelemişlerdir.

1.2. Fark Denklemlerinin Global Asimptotik Kararlılığı İle İlgili Yapılmış Çalışmalar

Amleh ve arkadaşları (1999), aşağıdaki üç fark denklemini incelemişler:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}, \; x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + x_n x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}, \; x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-2} + x_{n-1}}.$$

Bu denklemlerin pozitif başlangıç şartları altında, pozitif denge noktaları olan $\bar{x} = 1$'de global asimptotik kararlı olduklarını göstermişlerdir. Ayrıca denklemlerin sıra değişikliği olmak üzere, pozitif yarı dönmelerinin bir veya iki terimli, negatif yarı dönmelerinin ise bir veya üç terimli olduğunu göstermişlerdir.

Devault ve Galminas (1999), yaptıkları çalışmada; $x_{-1}, x_0, A \in (0, \infty)$, $p > 1$ için $x_{n+1} = \frac{A}{x_n^p} + \frac{1}{x_{n-1}^{1/p}}$ fark denkleminin pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Kruse ve Nasemann (1999), yaptıkları çalışmada; $x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0$ pozitif başlangıç şartları altında $x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n-1} + x_{n-2}x_{n-3}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}}$ fark denkleminin $\bar{x} = 1$ denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Feuer ve arkadaşları (2000), yaptıkları çalışmalarında; A herhangi bir reel sayı ve başlangıç şartları sıfır olmayan reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca $A = 1$ için $(x_{-1}, x_0) \in (0, \infty)$ olmak üzere, denklemin sıfır olmayan bütün çözümlerinin 7 periyotlu olduğunu, $A > 1$ için sabit bölgenin

$$R_1 = \left\{(x, y) \in R^+ xR^+ : x, y \in [1/A, A], xy \geq 1\right\}$$

olduğunu ve $(x_{-1}, x_0) \in R_1$ için denklemin sıfır olmayan çözümlerinin 3 periyotlu olduğunu, $0 < A < 1$ içinde sabit bölgenin

$$R_2 = \left\{(x, y) \in R^+ xR^+ : x, y \in [1/A, A]\right\}$$

olduğunu ve $(x_{-1}, x_0) \in R_2$ için denklemin sıfır olmayan çözümlerinin 4 periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

Mishev ve Patula (2000), yaptıkları çalışmalarında; $A > 0$, $k \geq 2$ ve $n \geq 2k$ için $y_{n+1} = A + \dfrac{y_n y_{n-2} \cdots y_{n-(2k-2)}}{y_{n-1} y_{n-3} \cdots y_{n-(2k-1)}}$ fark denklemini incelemişler ve bu denklemin sıfır olmayan çözümlerinin $\bar{y} = 1 + A$ denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

El-Metwally ve arkadaşları (2001), $x_{n+1} = \alpha + \beta x_{n-1} e^{-x_n}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlı olduğunu göstermişler, ayrıca periyodikliğini de incelemişlerdir. Bu çalışmada, $\beta = e^{\alpha}$ için birde açık problem vermişlerdir.

Sundarapandian (2002), yaptığı çalışmasında; $x \in R^n$, $w \in R^m$ olmak üzere, aynı kompleks vektör uzayı üzerinde tanımlı $f : R^n x\, R^m \to R^n$ ve $s : R^m \to R^m$ fonksiyonları için $\dot{x} = f(x,w)$, $\dot{w} = s(w)$ lineer olmayan cascade sisteminin $(x,w) = (0,0)$ denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu ispatlamıştır.

Li ve Zhu (2003), yaptıkları iki ayrı çalışmadan birincisinde $a \in [0,\infty)$ ve başlangıç şartları $x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$ olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{x_n x_{n-1} + a}{x_n + x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin global asimptotik kararlı olduğunu ve ikincisinde ise, $a \in [0,\infty)$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$ olmak üzere, aşağıdaki iki fark denklemini incelemişler:

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + x_{n-2} + a}{x_n + x_{n-1} x_{n-2} + a} \text{ ve } x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + x_n x_{n-2} + a}{x_n x_{n-1} + x_{n-2} + a}$$

Bu rasyonel fark denklemlerinin çözümlerinin $\bar{x} = 1$ pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir. Ancak, Yang (2005) yaptığı çalışmada; Li ve Zhu' nun çalışmasında bulunan ve algılanması güç olan bazı hataları saptamış ve bu hataları düzelterek $x_{n+1} = \dfrac{x_n x_{n-1} + x_{n-2} + a}{x_n + x_{n-1} x_{n-2} + a}$ fark denkleminin global asimptotik kararlılığını tekrar incelemiştir.

Yan ve Li (2003), yaptıkları iki çalışmadan birincisinde; $\alpha \geq 0$ ve $\beta, \gamma > 0$ için $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \beta\, x_n}{\gamma - x_{n-1}}$ rasyonel fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini, değişmez aralığını ve global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir ve bu denklemin periyodik ve global asimptotik kararlı olma şartlarını tek tek ele almışlardır. İkincisinde ise, $\alpha \geq 0$ ve $\beta, \gamma > 0$ için $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - \beta\, x_n}{\gamma - x_{n-1}}$ rasyonel fark denklemini incelemişler ve bu denklemin, $\alpha \geq 0$, $\beta, \gamma > 0$, $\beta < \gamma$ ve $0 < \alpha < \beta\ (\gamma - \beta)$ şartları sağlandığında pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Çinar ve arkadaşları (2004), $k \in N$ için $x_{n+1} = \dfrac{1 + x_n \sum_{i=1}^{k} x_{n-i}}{x_n + x_{n-1} + x_n \sum_{i=2}^{k} x_{n-i}}$ fark denklem ailesinde denklemlerin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

El-Afifi (2004), yaptığı çalışmasında; negatif olmayan katsayılar ve pozitif başlangıç şartları altında $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \beta\, x_n + \gamma\, x_{n-1}}{Bx_n + Cx_{n-1}}$ rasyonel fark denkleminin denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermiştir. Ayrıca bu denklemin pozitif ve negatif yarı dönmeleri ile değişmez aralığını incelemiştir.

El-Owaidy ve arkadaşları (2004), yaptıkları iki çalışmadan birincisinde; $\alpha \in [1, \infty)$, $k = 1, 2, \ldots$ ve pozitif reel sayılar olan başlangıç şartları altında $x_{n+1} = \alpha + \dfrac{x_{n-k}}{x_n}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodik karakterli olduğunu ve bu çözümlerin global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir. İkincisinde ise, $\alpha, \beta > 0$ için $x_{n+1} = \dfrac{\alpha - \beta\, x_{n-1}}{\gamma + x_n}$ fark denkleminin pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Papaschinopoulos ve Schinas (2004), yaptıkları çalışmalarında $k = 1, 2, \ldots$ ve $x_{-k}, x_{-k+1}, \ldots, x_{-1}, x_0$ pozitif başlangıç şartları altında, $i \neq j$, $j - 1$ ve $j = 1,2,\ldots,k$ olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{\sum_{i=0}^{k} x_{n-i} + x_{n-j+1} x_{n-j} + 1}{\sum_{i=0}^{k} x_{n-i}}$ fark denklem ailesini incelemişler. Bu ailenin pozitif çözümlerinin salınımlı olduğunu ve $\bar{x} = 1$ denge noktasında global asimptotik kararlı olduklarını göstermişlerdir.

Li ve Zhu (2004), $a,b\in[0,\infty)$ ve başlangıç şartları $x_{-2},x_{-1},\ x_0\in(0,\infty)$ olmak üzere, yaptıkları iki çalışmadan birincisinde, $x_{n+1}=\dfrac{x_n x_{n-2}+a}{x_n+x_{n-2}}$ fark denklemi ve $x_{n+1}=\dfrac{x_{n-1}x_{n-2}+a}{x_{n-1}+x_{n-2}}$ fark denkleminin, ikincisinde ise, $x_{n+1}=\dfrac{x_n x_{n-1}^b+x_{n-2}^b+a}{x_{n-1}^b+x_n x_{n-2}^b+a}$ fark denkleminin $\bar{x}=1$ pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olduklarını göstermişlerdir.

Sun ve Xi (2004), $k\in\{0,1,2,...\}$, $j,l,s,t\in Z_{k+2}\equiv\{0,1,...,k+2\}$, $j\neq l$, $s\neq t$, A negatif olmayan ve $x_{-k-2},x_{-k-1},...,x_0$ başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1}=\dfrac{\sum_{i\in Z_{k+2}-\{j,l\}} x_{n-i}+x_{n-j}x_{n-l}+A}{\sum_{i\in Z_{k+2}-\{s,t\}} x_{n-i}+x_{n-s}x_{n-t}+A}$ fark denkleminin $\bar{x}=1$ denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Yan ve Li (2004), yaptıkları çalışmada; $A,b,b_k\in(0,\infty)$, $a,b_0,b_1,...,b_k\in[0,\infty)$ ve $k=1,2,...$ için $x_{n+1}=\dfrac{a-bx_n}{A-\sum_{i=0}^{k} b_i x_{n-i}}$ yüksek mertebeden lineer olmayan rasyonel fark denkleminin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Yang ve arkadaşları (2004), yaptıkları iki çalışmadan birincisinde; $a,b\geq 0$ ve $c,d>0$ için $x_n=\dfrac{a+bx_{n-1}+cx_{n-1}^2}{d-x_{n-2}}$ fark denkleminin pozitif denge noktasında, ikincisinde ise, $A_1,A_2,A_3,A_4,B_1,B_2,B_3,B_4$ pozitif sabitleri $A_1+A_2+A_3+A_4=B_1+B_2+B_3+B_4$ şartını sağlamak üzere, başlangıç şartları da pozitif sayılar iken $x_{n+1}=\dfrac{A_1x_n+A_2x_{n-1}+A_3x_{n-2}x_{n-3}+A_4}{B_1x_nx_{n-1}+B_2x_{n-2}+B_3x_{n-3}+B_4}$ Putnam-Type rasyonel fark denkleminin global asimptotik kararlı olduklarını göstermişlerdir.

Wan-Tong (2004), $p \in (0,1)$, $q, r \in (0,\infty)$, $p < q/r < 1+p$, $m \in (0,\infty)$ ve $k = 1, 2, \ldots$ olmak üzere $x_n - x_{n-1} = -px_n + \dfrac{qx_n}{r + x_{n-k}^m}$ fark denkleminin belirli başlangıç şartları altında bütün pozitif çözümlerinin, pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Aloqeili (2005), çalışmasında $x_{-1}, x_0 \in R$ ve $a > 0$ için $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{a - x_{n-1}x_n}$ rasyonel fark denkleminin çözümlerinin kararlılık özelliklerini ve yarı dönmelerini incelemiştir. Ayrıca bu denklemin bazı şartlarda çözümlerini genelleştirmiş ve periyodik olduğu durumları incelemiştir.

Camouzis (2005), çalışmasında β, δ, A ve başlangıç şartları negatif olmayan reel sayılar, $\beta + \delta > 0$, $B, C > 0$ ve paydası her zaman pozitif olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{\beta\, x_n + \delta x_{n-2}}{\mathrm{A} + Bx_n + Cx_{n-1}}$ rasyonel fark denkleminin pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermiştir.

Dehghan ve Douraki (2005), yaptıkları çalışmada B, C ve α, β, γ pozitif, $k = 1, 2, \ldots$ ve başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{\alpha + \beta\, x_{n-k+1} + \gamma x_{n-2k+1}}{Bx_{n-k+1} + Cx_{n-2k+1}}$ fark denkleminin pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

El-Owaidy ve arkadaşları (2005), α, β ve başlangıç şartları negatif olmayan sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \dfrac{\alpha\, x_{n-1}}{\beta + \gamma\, x_{n-2}^p}$ fark denkleminin pozitif denge noktasında global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Hamza (2005), çalışmasında α, x_{-1}, x_0 negatif sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}}{x_n}$ fark denkleminin global asimptotik kararlılığını ve salınımlılığını incelemiştir.

Kocic (2005), çalışmasında $\{K_n\}$ pozitif elemanlı sınırlı bir dizi olmak üzere, $x_{n+1} = \frac{rK_n x_x}{K_n + (r-1)x_n}$ Beverton-Holt denkleminin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlılığını incelemiş, ayrıca $\lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_n \le \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} K_n$ olduğunu ispatlamıştır.

Li (2005), yaptığı çalışmada; $a \in [0,\infty)$, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, $x_0 \in (0,\infty)$ olmak üzere, $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} x_{n-3} + x_n + x_{n-1} + x_{n-3} + a}{x_n x_{n-1} + x_n x_{n-3} + x_{n-1} x_{n-3} + 1 + a}$ dördüncü mertebeden fark denkleminin global asimptotik kararlı olduğunu göstermiştir.

Li ve Zhu (2005), yaptıkları çalışmada; $a \in [0,\infty)$, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, $x_0 \in (0,\infty)$ için $x_{n+1} = \frac{x_n^b x_{n-2} + x_{n-3}^b + a}{x_n^b + x_{n-2} x_{n-3}^b + a}$ rasyonel fark denkleminin global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Saleh ve Aloqeili (2005), yaptıkları iki çalışmadan birinde, $y_{-k}, y_{-k+1}, \ldots, y_0 \in (0,\infty)$, $A < 0$ ve $k = 1, 2, \ldots$ için ve diğerinde de $y_{-k}, y_{-k+1}, \ldots, y_0, A \in R$ için $y_{n+1} = A + \frac{y_n}{y_{n-k}}$ fark denkleminin negatif denge noktası olan $\bar{y} = 1 + A$ da global asimptotik kararlı olduğunu göstermişlerdir.

Stevic (2005), yaptığı çalışmada; pozitif başlangıç şartları altında $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^p}$ fark denkleminin sınırlılığını, global asimptotik kararlılığını ve salınımlılığını incelemiştir.

Yan ve arkadaşları (2005), çalışmalarında; $\alpha \in R$ ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları rasgele reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \alpha - \frac{x_n}{x_{n-1}}$ fark denkleminin sınırlılığını, periyodikliğini ve global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Yang ve arkadaşları (2005), yaptıkları çalışmada; a negatif olmayan bir sabit olmak üzere, $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2} + a}{x_n x_{n-1} + x_{n-2} + a}$ ve $x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} + x_{n-2} + a}{x_{n-1} + x_n x_{n-2} + a}$ rasyonel fark denklemlerinin salınımlılık özelliklerini ve global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Zeng ve arkadaşları (2005), çalışmalarında $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ ve $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı $g(x)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olmak üzere, $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma + g(x_{n-k})}$ fark denkleminin global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

2. BÖLÜM
FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIMLAR

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan genel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin sürekli olduğu durumda, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x), ...$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x'in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x'in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemler üzerinde duracağız.

Tanım 2.1. n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişkende y olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $E(y), E^2(y), E^3(y), ..., E^n(y), ...$ gibi farklarını içeren bağıntılara Fark Denklemi denir. Dikkat edilirse, fark denklemlerinin n'in sürekli olduğu durumda diferansiyel denklemler ile arasında büyük benzerlikler vardır.

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$$

Birinci mertebeden fark denklemidir.

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + a_2 y(n+1) = g(n)$$

İkinci mertebeden fark denklemidir. Denklemin mertebesinin belirlenmesinde, y'nin hesaplanabilmesi için gerekli olan başlangıç şartı sayısı göz önüne alınmaktadır.

Teorem 2.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I \, x \, I \to I$ sürekli diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her $x_{-1}, x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}), \quad n = 0,1,2,... \tag{2.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 2.2. Eğer $\bar{x}$ noktası için (2.1) denkleminde $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x})$ ise, $\bar{x}$'e (2.1) denkleminin denge noktası denir. Eğer her $n \geq 0$ için $\bar{x} = x_n$ ise, $\bar{x}$'e f'nin sabit noktası denir.

Tanım 2.3. Eğer her $n > 0$ için $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $x_n \in J$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ alt aralığı varsa, bu aralığa (2.1) denkleminin değişmez aralığı denir.

Tanım 2.4. $\bar{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası olmak üzere:

(a) Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$ iken her $n \geq 0$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

(b) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde, $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(c) Eğer her $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise, $\bar{x}$ denge noktasına çekim noktası denir.

(d) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise, $\bar{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.

(e) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır denir.

(f) Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $\left|x_0 - \bar{x}\right| + \left|x_{-1} - \bar{x}\right| < r$ ve bazı $N \geq -1$ sayıları için $\left|x_N - \bar{x}\right| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktasına repeller denir.

Tanım 2.5. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 2.6. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 2.7. (2.1) denkleminde, $f(x_n, x_{n-1})$ fonksiyonunu $f(u,v)$ şeklinde düşünelim:

$$r = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial u} \quad \text{ve} \quad s = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial v}$$

olmak üzere,

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1} \tag{2.2}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme $\bar{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(2.2) denkleminin karakteristik denklemi:

$$\lambda^2 - r\lambda - s = 0 \tag{2.3}$$

dır.

Teorem 2.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

(a) Eğer (2.3) denkleminin her iki kökü de mutlak değerce 1'den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(b) Eğer (2.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

(c) (2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart $|r| < 1 - s < 2$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(d) (2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1'den büyük olması için gerek ve yeter şartlar $|s| > 1$ ve $|r| < |1 - s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası repellerdir.

(e) (2.3) denkleminin, bir kökünün mutlak değerce 1'den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şartlar $r^2 + 4s > 0$ ve $|r| > |1 - s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır (Chatterjee ve arkadaşları, 2003).

Benzer şekilde, mertebesi 3 olan fark denklemleri için Teorem 2.2. aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}), \quad n = 0,1,2,... \tag{2.4}$$

fark denklemini ele alalım.

(2.4) denkleminde, $f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$ fonksiyonunu $f(u,v,w)$ şeklinde düşünelim:

$$r = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\bar{x})}{\partial u},\ s = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\bar{x})}{\partial v} \text{ ve } t = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\bar{x})}{\partial w}$$

olmak üzere,

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1} + ty_{n-2} \tag{2.5}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme $\bar{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(2.5) denkleminin karakteristik denklemi:

$$\lambda^3 - r\lambda^2 - s\lambda - t = 0 \tag{2.6}$$

dır.

Teorem 2.3. (Lineer Kararlılık Teoremi)

(a) Eğer (2.6) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(b) Eğer (2.6) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

(c) (2.6) denkleminin bütün köklerinin mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şartlar $|r+t| < 1-s$, $|r-3t| < 3+s$ ve $t^2 - s - rt < 1$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır (Chatterjee ve arkadaşları, 2003).

Tanım 2.8. $\bar{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası olsun. $l \geq -1$, $m \leq \infty$ olmak üzere, $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından büyük veya eşit, $l = -1$ veya $l > -1$ için $x_{l-1} < \bar{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} < \bar{x}$ oluyorsa,

$\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde, $l \geq -1$, $m \leq \infty$ olmak üzere, $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından küçük, $l = -1$ veya $l > -1$ için $x_{l-1} \geq \bar{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} \geq \bar{x}$ oluyorsa, $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir.

Tanım 2.9. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden ne pozitif nede negatif ise, bu çözümlere sıfır civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir.

Tanım 2.10. $\{x_n - \bar{x}\}$ dizisi salınımlı ise, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne $\bar{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir.

Tanım 2.11. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisine sınırlıdır denir.

Teorem 2.4. (Clark Teoremi) $p, q \in R$ ve $k, n \in \{1,2,...\}$ olmak üzere;

$$x_{n+1} + px_n + qx_{n-k} = 0$$

fark denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $|p| + |q| < 1$ olmasıdır.

3. BÖLÜM

$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, Ax_{n-1}\right\}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde, A parametresi herhangi bir reel sayı ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, Ax_{n-1}\right\}, \; n = 0,1,2,... \tag{3.1}$$

maksimumlu fark denklemi tanımlanmış ve çözümleri incelenmiştir.

Eğer (3.1) denkleminde $A = 0$ olarak kabul edilirse, denklem bilinen bir denklem olan $x_{n+1} = 1/x_n$ şekline dönüşür ki bu denklem 2 periyotludur. Bu nedenle $A < 0$ ve $A > 0$ olma durumlarının ele alınması yeterlidir.

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda $A < 0$, ikinci kısımda ise $A > 0$ durumunda (3.1) denkleminin çözümleri incelenmiştir. Üçüncü ve son kısımda da (3.1) denklemi için nümerik örnekler verilmiştir.

3.1. $A < 0$ durumu

Bu kısımda, $A < 0$ durumunda (3.1) denkleminin çözümleri incelenmiştir. Aşağıdaki teorem, $A < 0$ iken (3.1) denkleminin bütün çözümlerini tam anlamıyla açıklar niteliktedir.

Teorem 3.1.1. (3.1) denkleminde $A<0$ olsun. Bu durumda denklemin çözümleri:

(a) Eğer $x_{-1}<0$, $x_0>0$ ve $x_1=\frac{1}{x_0}$ ise,

$$(x_n)=(x_{-1},x_0,\frac{1}{x_0},...,x_0,\frac{1}{x_0},...)$$

.

(b) Eğer $x_{-1}<0$, $x_0>0$ ve $x_1=Ax_{-1}$ ise,

$$(x_n)=(x_{-1},x_0,Ax_{-1},\frac{1}{Ax_{-1}},...,Ax_{-1},\frac{1}{Ax_{-1}},...).$$

(c) Eğer $x_{-1}>0$, $x_0<0$, $x_1=\frac{1}{x_0}$ ve $A\in(-\infty,-1]$ ise,

$$(x_n)=(x_{-1},x_0,\frac{1}{x_0},Ax_0,\frac{A}{x_0},\frac{x_0}{A},...,\frac{A}{x_0},\frac{x_0}{A},...).$$

(d) Eğer $x_{-1}>0$, $x_0<0$, $x_1=\frac{1}{x_0}$ ve $A\in(-1,0)$ ise,

$$(x_n)=(x_{-1},x_0,\frac{1}{x_0},Ax_0,\frac{1}{Ax_0},...,Ax_0,\frac{1}{Ax_0},...).$$

(e) Eğer $x_{-1}>0$, $x_0<0$, $x_1=Ax_{-1}$ ve $\frac{1}{Ax_0}\geq A^2x_{-1}$ ise,

$$(x_n)=(x_{-1},x_0,Ax_{-1},Ax_0,\frac{1}{Ax_0},...,Ax_0,\frac{1}{Ax_0},...).$$

(f) Eğer $x_{-1}>0$, $x_0<0$, $x_1=Ax_{-1}$ ve $\frac{1}{Ax_0}<A^2x_{-1}$ ise,

$$(x_n)=(x_{-1},x_0,Ax_{-1},Ax_0,A^2x_{-1},\frac{1}{A^2x_{-1}},...,A^2x_{-1},\frac{1}{A^2x_{-1}},...).$$

(g) Eğer $x_{-1}, x_0 > 0$ ise,

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, ..., x_0, \frac{1}{x_0}, ...) .$$

(h) Eğer $x_{-1}, x_0 < 0$ ve $\frac{1}{Ax_{-1}} \leq Ax_0$ ise,

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, Ax_{-1}, Ax_0, \frac{1}{Ax_0}, ..., Ax_0, \frac{1}{Ax_0}, ...) .$$

(i) Eğer $x_{-1}, x_0 < 0$ ve $\frac{1}{Ax_{-1}} > Ax_0$ ise,

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, Ax_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_{-1}, ..., \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_{-1}, ...) .$$

şeklindedir.

İspat. (a), (b) İlk olarak $x_{-1} < 0$ ve $x_0 > 0$ olsun. O zaman

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, Ax_{-1}\right\} > 0$$

olur. Buradan, iterasyonla kolaylıkla görülebilir ki her $n \geq 0$ için $x_n > 0$'dır. Dolayısıyla, eğer $x_1 = \frac{1}{x_0} \geq Ax_{-1}$ ise, her $n \geq 1$ için,

$$x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, Ax_{n-1}\right\} = \frac{1}{x_n}$$

dir. Bu durumda denklemin bütün çözümleri 2 periyotludur ve bu çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, ..., x_0, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

Eğer $x_1 = Ax_{-1}$ ise, çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, Ax_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, ..., Ax_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, ...)$$

şeklindedir.

(c)-(f) Eğer $x_{-1} > 0$ ve $x_0 < 0$ ise,

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, Ax_{-1}\right\} < 0,$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, Ax_0\right\} = Ax_0 > 0$$

ve

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, Ax_1\right\} = \max\left\{\frac{1}{Ax_0}, \min\left\{\frac{A}{x_0}, A^2 x_{-1}\right\}\right\} > 0$$

dır. İterasyonla her $n \geq 2$ için $x_n > 0$ elde edilir. Dolayısıyla, her $n \geq 3$ için $x_{n+1} = \frac{1}{x_n}$ olur ki sonuç olarak bu durumdaki bütün çözümler er geç 2 periyotludur.

Eğer $x_1 = \frac{1}{x_0}$ ve $A \in (-\infty, -1]$ ise, $Ax_{-1} \leq \frac{1}{x_0}$ olduğundan $A^2 x_{-1} \geq \frac{A}{x_0}$ olup sonuç olarak

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{Ax_0}, \frac{A}{x_0}\right\} = \frac{A}{x_0}$$

olur. Dolayısıyla çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{A}{x_0}, \frac{x_0}{A}, ..., \frac{A}{x_0}, \frac{x_0}{A}, ...)$$

şeklindedir.

Eğer $x_1 = \dfrac{1}{x_0}$ ve $A \in (-1,0)$ ise $x_2 = Ax_0$,

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{Ax_0}, \frac{A}{x_0}\right\} = \frac{1}{Ax_0}$$

olur. Dolayısıyla çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{1}{Ax_0}, ..., Ax_0, \frac{1}{Ax_0}, ...)$$

şeklindedir.

Eğer $x_1 = Ax_{-1} \geq \dfrac{1}{x_0}$ ise, $A^2 x_{-1} \leq \dfrac{A}{x_0}$ ve eğer $\dfrac{1}{Ax_0} \geq A^2 x_{-1}$ ise,

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{Ax_0}, A^2 x_{-1}\right\} = \frac{1}{Ax_0}$$

olur. Dolayısıyla çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, Ax_{-1}, Ax_0, \frac{1}{Ax_0}, ..., Ax_0, \frac{1}{Ax_0}, ...)$$

şeklindedir.

Eğer $x_1 = Ax_{-1}$ ve $\dfrac{1}{Ax_0} < A^2 x_{-1}$ ise, $x_3 = A^2 x_{-1}$ olur. Dolayısıyla çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, Ax_{-1}, Ax_0, A^2 x_{-1}, \frac{1}{A^2 x_{-1}}, ..., A^2 x_{-1}, \frac{1}{A^2 x_{-1}}, ...)$$

şeklindedir.

(g) Eğer $x_{-1}, x_0 > 0$ ise, $x_1 = \dfrac{1}{x_0} > 0$ olur. İterasyonla her $n \geq -1$ için $x_n > 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak her $n \geq 0$ için $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n}$ dir. Dolayısıyla çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, ..., x_0, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(h)-(i) Eğer $x_{-1}, x_0 < 0$ ise, $x_1 = Ax_{-1} > 0$ ve

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, Ax_0\right\} = \max\left\{\frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0\right\} > 0$$

olur. İterasyonla her $n \geq 1$ için $x_n > 0$ olduğu görülür. Sonuç olarak, her $n \geq 2$ için $x_{n+1} = \frac{1}{x_n}$ sağlanır. Dolayısıyla, eğer $\frac{1}{Ax_{-1}} \leq Ax_0$ ise, çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, Ax_{-1}, Ax_0, \frac{1}{Ax_0}, ..., Ax_0, \frac{1}{Ax_0}, ...)$$

şeklindedir. Öte yandan, eğer $\frac{1}{Ax_{-1}} > Ax_0$ ise, çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, Ax_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_{-1}, ..., \frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_{-1}, ...)$$

şeklinde olur ki böylece ispat tamamlanmış olur.

$A < 0$ durumunda (3.1) denkleminin her bir çözümü sonuçta pozitiftir. O halde (3.1) denklemi x_n ile çarpılır ve $y_n = x_n x_{n-1}$ dönüşümü yapılırsa, $n \geq n_0$ ve $y_{n_0} > 0$ için $y_{n+1} = \max\{Ay_n, 1\}$ denklemi elde edilir. Dolayısıyla, $y_{n_0+1} = 1$ olur. Buradan, iterasyonla $n \geq n_0 + 1$ için $y_n = 1$'dir. (y_n, $n \geq n_0$ için $x_{n+1} = \frac{1}{x_n}$'e eşittir.) Bu da (3.1) denkleminin her bir çözümünün er geç iki periyotlu olduğunu gösterir.

3.2. $A > 0$ durumu

Bu kısımda, $A > 0$ durumunda (3.1) denkleminin çözümleri incelenmiştir. Öncelikle, $A > 0$ durumunda (3.1) denkleminin çözümlerinin irdelenmesinde kullanılacak iki lemma tanımlanmış ve ispat edilmiştir. Daha sonra verilen teorem bu durumda (3.1) denkleminin bütün çözümlerini tam anlamıyla açıklar niteliktedir.

Lemma 3.2.1. $y_0 > 0$ olmak üzere, aşağıdaki fark denklemini alalım

$$y_{n+1} = \max\{Ay_n, 1\} \tag{3.2.1}$$

Bu denklem için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(a) Eğer $A \in (0,1]$ ise, (3.2.1) denkleminin her bir y_n çözümü er geç sabittir. Üstelik, eğer $A \in (0,1)$ veya $A = 1$ ve $y_0 \in (0,1]$ ise, er geç $y_n = 1$'dir. Ayrıca, eğer $A = 1$ ve $y_0 > 1$ ise, er geç $y_n = y_0$'dır.

(b) Eğer $A > 1$ ise, (3.2.1) denkleminin her bir y_n çözümü er geç $y_{n+1} = Ay_n$ fark denklemini sağlar.

İspat. (a) İlk olarak $A \in (0,1)$ olduğunu kabul edelim. Eğer $y_0 \in (0, \frac{1}{A}]$ ise, $y_0 A \le 1$ olduğundan $y_1 = 1$ elde edilir. Ardından, $y_1 A < 1$ olduğundan $y_2 = 1$'dir. İterasyonla her $n \ge 1$ için $y_n = 1$ elde edilir.

Eğer $y_0 > 1/A$ ise, $y_1 = Ay_0$'dır. Eğer $A^2 y_0 \le 1$ ise, $y_2 = 1$ olur ve sonuç olarak, her $n \ge 2$ için $y_n = 1$ olur. Aksine, $y_2 = A^2 y_0$ olsun. $A \in (0,1)$ olduğundan $n \to \infty$ için $A^n \to 0$ olur. Dolayısıyla, $A^{n_0} y_0 \le 1$ ve $A^{n_0 - 1} y_0 > 1$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ doğal sayısı vardır. Buradan da her $n \ge n_0$ için $y_n = 1$ olduğunu görmek kolaydır ve bu istenen sonuçtur.

Eğer $A=1$ ise, $y_0 \in (0,1]$ için $y_1 = 1$ olur ve sonuç olarak, her $n \geq 1$ için $y_n = 1$ elde edilir. Eğer $y_0 > 1$ ise, $y_1 = y_0 > 1$ olur ve iterasyonla her $n \geq 0$ için $y_n = y_0$ elde edilir ki böylece ispat tamamlanmış olur.

(b) Eğer $y_0 \in (0, \frac{1}{\mathrm{A}}]$ ise, $y_1 = 1$ olur. Ayrıca,

$$y_2 = \max\{Ay_1, 1\} = Ay_1 = A > 1 = y_1$$

olur ve iterasyonla her $n \geq 1$ için $y_{n+1} \geq y_n$ elde edilir ki buradan da her $n \geq 1$ için $y_{n+1} = Ay_n$ elde edilir.

Eğer $y_0 > 1/A$ ise, $y_1 = Ay_0 > 1$ olur. Buradan her $n \geq 0$ için $y_{n+1} = Ay_n$ olduğunu görmek kolaydır ve ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.2.2. $y_0 > 0$ olmak üzere, aşağıdaki fark denklemini alalım.

$$y_{n+1} = \min\{Ay_n, 1\} \tag{3.2.2}$$

Bu denklem için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(a) Eğer $A \in (0,1)$ ise, (3.2.2) denkleminin her bir y_n çözümü er geç $y_{n+1} = Ay_n$ fark denklemini sağlar.

(b) Eğer $A \geq 1$ ise, (3.2.2) denkleminin her bir y_n çözümü er geç sabittir. Üstelik, eğer $A > 1$ veya $A = 1$ ve $y_0 > 1$ ise er geç $y_n = 1$ ve eğer $A = 1$ ve $y_0 \in (0,1]$ ise, er geç $y_n = y_0$ 'dır.

İspat. (a) Eğer $y_0 \in (0, \frac{1}{A}]$ ise, $y_1 = Ay_0 \le 1$ olur. Dolayısıyla, iterasyonla her $n \ge 0$ için $y_{n+1} = Ay_n$ elde edilir. Eğer $y_0 > 1/A$ ise, $y_1 = 1$ ve $y_2 = A < 1$ olur ve iterasyonla her $n \ge 1$ için $y_{n+1} = Ay_n$ elde edilir.

(b) İlk olarak $A = 1$ olsun. Eğer $y_0 \in (0,1]$ ise, $y_1 = y_0$ olur ve her $n \ge 0$ için $y_n = y_0$ elde edilir. Eğer $y_0 > 1$ ise, $y_1 = 1$ olur ve her $n \ge 1$ için $y_n = 1$ elde edilir.

Eğer $A > 1$ ve $y_0 > 1/A$ ise, $y_1 = 1$ olur ve her $n \ge 1$ için $y_n = 1$ elde edilir. Eğer $y_0 \in (0, \frac{1}{A}]$ ise, $y_1 = Ay_0$ olur. Eğer $A^2 y_0 > 1$ ise, $y_2 = 1$ ve sonuçta her $n \ge 2$ için $y_n = 1$ elde edilir. Aksine, $y_2 = Ay_1 = A^2 y_0 \le 1$ olsun. $n \to \infty$ için $A^n \to 0$ olduğundan $A^{m_0} y_0 > 1$ ve $A^{m_0 - 1} y_0 \le 1$ olacak şekilde bir $m_0 \in N$ doğal sayısı vardır. Bu şekilde seçilen m_0 için $y_{m_0} = 1$ olur ki bu her $n \ge m_0$ için $y_n = 1$ olmasını sağlar ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.1. (3.1) denkleminde, $A > 0$ olsun. Bu durumda denklemin çözümleri:

(a) Eğer $x_{-1} < 0$, $x_0 > 0$ ve $A \in (0,1]$ ise,

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, ..., x_0, \frac{1}{x_0}, ...).$$

(b) Eğer $x_{-1} < 0$, $x_0 > 0$ ve $A > 1$ ise,

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{A}{x_0}, A^2 x_0, \frac{A^2}{x_0}, ...).$$

(c) Eğer $x_{-1} > 0$, $x_0 < 0$ ve $A \in (0,1]$ ise,

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, Ax_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, ..., Ax_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, ...).$$

(d) Eğer $x_{-1} > 0$, $x_0 < 0$ ve $A > 1$ ise,

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, Ax_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, A^2 x_{-1}, \frac{1}{x_{-1}}, ..., \frac{A^{n-2}}{x_{-1}}, A^{n+1} x_{-1}, ...).$$

(e) Eğer $x_{-1}, x_0 > 0$, $x_1 = \frac{1}{x_0}$ ve $A \in (0,1]$ ise,

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, ..., x_0, \frac{1}{x_0}, ...).$$

(f) Eğer $x_{-1}, x_0 > 0$, $x_1 = \frac{1}{x_0}$ ve $A > 1$ ise,

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{A}{x_0}, ..., A^n x_0, \frac{A^n}{x_0}, ...).$$

(g) Eğer $x_{-1}, x_0 > 0$, $x_1 = Ax_{-1}$ ve $A \geq 1$ ise,

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, Ax_{-1}, Ax_0, A^2 x_{-1}, ..., A^n x_{-1}, A^n x_0, ...).$$

(h) Eğer $x_{-1}, x_0 > 0$, $x_1 = Ax_{-1}$ ve $A \in (0,1)$ ise, x_n çözümleri er geç 2 periyotludur.

(i) Eğer $x_{-1}, x_0 < 0$, $x_1 = \frac{1}{x_0}$ ve $A \in (0,1]$ ise,

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{A}{x_0}, ..., A^n x_0, \frac{A^n}{x_0}, ...).$$

(j) Eğer $x_{-1}, x_0 < 0$, $x_1 = \frac{1}{x_0}$ ve $A > 1$ ise,

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, ..., x_0, \frac{1}{x_0}, ...).$$

(k) Eğer $x_{-1}, x_0 < 0$, $x_1 = Ax_{-1}$ ve $A \in (0,1]$ ise,

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, Ax_{-1}, Ax_0, A^2 x_{-1}, ..., A^n x_0, A^{n+1} x_{-1}, ...).$$

(l) Eğer $x_{-1}, x_0 < 0$, $x_1 = Ax_{-1}$ ve $A > 1$ ise, x_n çözümleri er geç 2 periyotludur.

şeklindedir.

İspat. (a), (b) İlk olarak $x_{-1} < 0$, $x_0 > 0$ olsun. O zaman,

$$x_1 = \frac{1}{x_0} > 0$$

ve

$$x_2 = \max\{x_0, Ax_0\} = x_0 \max\{1, A\} > 0$$

olur. Bu yüzden, eğer $A \in (0,1]$ ise, $x_2 = x_0$ ve

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{A}{x_0}\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur. İterasyonla her $n \geq 2$ için

$$x_{2n} = \max\{x_0, Ax_0\} = x_0$$

ve

$$x_{2n-1} = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{A}{x_0}\right\} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. Dolayısıyla, çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, ..., x_0, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

Eğer $A > 1$ ise, $x_2 = Ax_0$ ve

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, Ax_1\right\} = \max\left\{\frac{1}{Ax_0}, \frac{A}{x_0}\right\} = \frac{A}{x_0} > 0$$

olur ve iterasyonla her $n \geq 1$ için $x_{2n-1} = \frac{A^{n-1}}{x_0}$ ve $x_{2n} = A^n x_0$ elde edilir. Dolayısıyla, çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{A}{x_0}, A^2 x_0, \frac{A^2}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

(c)-(d) Eğer $x_{-1} > 0$, $x_0 < 0$ ise,

$$x_1 = Ax_{-1} > 0,$$

$$x_2 = \frac{1}{Ax_{-1}} > 0$$

ve

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, Ax_1\right\} = Ax_{-1} \max\{1, A\}$$

olur. Bu durumda kolaylıkla görülebilir ki her $n \geq 1$ için $x_n > 0$'dır.

Eğer $A \in (0,1]$ ise,

$$x_3 = Ax_{-1}$$

ve

$$x_4 = \frac{1}{Ax_{-1}}$$

olur ve iterasyonla her $n \geq 1$ için

$$x_{2n-1} = Ax_{-1}$$

ve

$$x_{2n} = \frac{1}{Ax_{-1}}$$

elde edilir. Dolayısıyla, çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, Ax_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, ..., Ax_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, ...)$$

şeklindedir.

Eğer $A > 1$ ise,

$$x_3 = A^2 x_{-1}$$

ve

$$x_4 = \frac{1}{x_{-1}}$$

olur ve iterasyonla her $n \geq 2$ için

$$x_{2n-1} = A^n x_{-1}$$

ve

$$x_{2n} = \frac{A^{n-2}}{x_{-1}}$$

elde edilir. Dolayısıyla, çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, Ax_{-1}, \frac{1}{Ax_{-1}}, A^2 x_{-1}, \frac{1}{x_{-1}}, ..., \frac{A^{n-2}}{x_{-1}}, A^{n+1} x_{-1}, ...)$$

şeklindedir.

(e)-(h) Eğer $x_{-1}, x_0 > 0$ ise,

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, Ax_{-1}\right\}$$

olur. Eğer $x_1 = \frac{1}{x_0}$ ise,

$$x_2 = \max\{x_0, Ax_0\}$$

olur. Bu durumda, eğer $A \in (0,1]$ ise,

$$x_3 = \frac{1}{x_0}$$

olur ve iterasyonla her $n \geq 1$ için

$$x_{2n-1} = \frac{1}{x_0}$$

ve

$$x_{2n} = x_0$$

elde edilir. Dolayısıyla, çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, ..., x_0, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

Eğer $A \in (1, \infty)$ ise,

$$x_2 = Ax_0$$

ve

$$x_3 = \frac{A}{x_0}$$

olur ve iterasyonla her $n \geq 1$ için

$$x_{2n-1} = \frac{A^{n-1}}{x_0}$$

ve

$$x_{2n} = A^n x_0$$

elde edilir. Dolayısıyla, çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{A}{x_0}, ..., A^n x_0, \frac{A^n}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

Eğer $x_1 = Ax_{-1} \geq \dfrac{1}{x_0}$ ve $A \in [1,\infty)$ ise,

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0\right\} = Ax_0$$

ve

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{Ax_0}, A^2x_{-1}\right\} = A^2x_{-1}$$

olur ve iterasyonla her $n \geq 1$ için

$$x_{2n-1} = A^n x_{-1}$$

ve

$$x_{2n} = A^n x_0$$

elde edilir. Dolayısıyla, çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, Ax_{-1}, Ax_0, A^2x_{-1}, A^2x_0, ..., A^n x_{-1}, A^n x_0, ...)$$

şeklindedir.

$x_1 = Ax_{-1} \geq \dfrac{1}{x_0}$ ve $A \in (0,1)$ olduğu durum daha karışıktır. Çünkü her $n \geq -1$ için $x_n > 0$'dır. (3.1) denkleminde eşitliğin her iki yanı x_n ile çarpılır ve $y_n = x_n x_{n-1}$ dönüşümü yapılırsa, (3.1) denklemi (3.2.1) denklemine dönüşür. Bu durumda Lemma 3.2.1'in iddiaları sağlandığından y_n çözümleri er geç sabittir ki bu da (3.1) denkleminin x_n çözümlerinin er geç 2 periyotlu olduğu anlamına gelir.

(i)-(l) Eğer $x_{-1}, x_0 < 0$ ise, her $n \geq -1$ için $x_n < 0$ dır. Eğer

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, Ax_{-1}\right\} = \frac{1}{x_0}$$

ve $A \in (0,1]$ ise,

$$x_2 = \max\{x_0, Ax_0\} = Ax_0$$

ve

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{Ax_0}, \frac{A}{x_0}\right\} = \frac{A}{x_0}$$

olur ve iterasyonla her $n \geq 1$ için

$$x_{2n-1} = \frac{A^{n-1}}{x_0}$$

ve

$$x_{2n} = A^n x_0$$

elde edilir. Dolayısıyla, çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{A}{x_0}, ..., A^n x_0, \frac{A^n}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

Eğer $x_{-1}, x_0 < 0$, $x_1 = \frac{1}{x_0}$ ve $A > 1$ ise,

$$x_2 = x_0$$

ve

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{A}{x_0}\right\} = \frac{1}{x_0}$$

olur ve iterasyonla her $n \geq 1$ için

$$x_{2n-1} = \frac{1}{x_0}$$

ve

$$x_{2n} = x_0$$

elde edilir. Dolayısıyla, çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, \frac{1}{x_0}, ..., x_0, \frac{1}{x_0}, ...)$$

şeklindedir.

$x_{-1}, x_0 < 0$ ve $x_1 = Ax_{-1}$ olmak üzere, Eğer $A \in (0,1]$ ise,

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{Ax_{-1}}, Ax_0\right\} = Ax_0$$

ve

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{Ax_0}, A^2 x_{-1}\right\} = A^2 x_{-1}$$

olur ve iterasyonla her $n \geq 1$ için

$$x_{2n-1} = A^n x_{-1}$$

ve

$$x_{2n} = A^n x_0$$

elde edilir. Dolayısıyla çözümler:

$$(x_n) = (x_{-1}, x_0, Ax_{-1}, Ax_0, A^2 x_{-1}, ..., A^n x_0, A^{n+1} x_{-1}, ...)$$

şeklindedir.

Son olarak; Eğer $x_{-1}, x_0 < 0$, $x_1 = Ax_{-1}$ ve $A > 1$ ise, her $n \geq -1$ için $x_n < 0$ olduğundan, (3.1) denkleminde eşitliğin her iki yanı x_n ile çarpılır ve $y_n = x_n x_{n-1}$ dönüşümü yapılırsa, (3.1) denklemi (3.2.2) denklemine dönüşür. Bu durumda Lemma 3.2.2'in iddiaları sağlanır ve her $n \geq 0$ için $y_n > 0$'dır. $A > 1$ olduğundan Lemma 3.2.2'den y_n çözümleri er geç sabittir ki bu da (3.1) denkleminin x_n çözümlerinin er geç 2 periyotlu olduğu anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.3. Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.2.1'in iddialarına dair nümerik örnekler verilmiştir.

Örnek 3.3.1. ($A < 0$ durumu)

a) (3.1) denkleminde; $A = -2$ ve başlangıç şartları $x_{-1} = -1$, $x_0 = 0{,}2$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	5	6	0,2
2	0,2	7	5
3	5	8	0,2
4	0,2	9	5
5	5	10	0,2

b) (3.1) denkleminde; $A = -2$ ve başlangıç şartları $x_{-1} = -2$, $x_0 = 3$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	4	6	0,25
2	0,25	7	4
3	4	8	0,25
4	0,25	9	4
5	4	10	0,25

c) (3.1) denkleminde; $A = -3$ ve başlangıç şartları $x_{-1} = 1$, $x_0 = -2$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	-0,5	6	0,6666666667
2	6	7	1,5
3	1,5	8	0,6666666667
4	0,6666666667	9	1,5
5	1,5	10	0,6666666667

d) (3.1) denkleminde; $A = -0{,}5$ ve başlangıç şartları $x_{-1} = 2$, $x_0 = -3$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	-0,3333333333	6	1,5
2	1,5	7	0,6666666667
3	0,6666666667	8	1,5
4	1,5	9	0,6666666667
5	0,6666666667	10	1,5

e) (3.1) denkleminde; $A=-2$ ve başlangıç şartları $x_{-1}=0{,}1$, $x_0=-0{,}3$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	-0,2	6	0,5999999999
2	0,6	7	1,66666666667
3	1,66666666667	8	0,5999999999
4	0,5999999999	9	1,66666666667
5	1,66666666667	10	0,5999999999

f) (3.1) denkleminde; $A=-3$ ve başlangıç şartları $x_{-1}=0{,}2$, $x_0=-1$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	-0,6	6	0,5555555559
2	3	7	1,8
3	1,8	8	0,5555555559
4	0,5555555559	9	1,8
5	1,8	10	0,5555555559

g) (3.1) denkleminde; $A=-4$ ve başlangıç şartları $x_{-1}=5$, $x_0=6$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	0,1666666667	6	5,9999999999
2	5,9999999999	7	0,1666666667
3	0,1666666667	8	5,9999999999
4	5,9999999999	9	0,1666666667
5	0,1666666667	10	5,9999999999

h) (3.1) denkleminde; $A=-3$ ve başlangıç şartları $x_{-1}=-2$, $x_0=-1$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	6	6	3
2	3	7	0,3333333333
3	0,3333333333	8	3
4	3	9	0,3333333333
5	0,3333333333	10	3

i) (3.1) denkleminde; $A=-2$ ve başlangıç şartları $x_{-1}=-0{,}4$, $x_0=-0{,}01$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	0,8	6	1,25
2	1,25	7	0,8
3	0,8	8	1,25
4	1,25	9	0,8
5	0,8	10	1,25

Örnek 3.3.2. ($A>0$ durumu)

a) (3.1) denkleminde; $A=0{,}2$ ve başlangıç şartları $x_{-1}=-3$, $x_0=2$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	0,5	6	2
2	2	7	0,5
3	0,5	8	2
4	2	9	0,5
5	0,5	10	2

b) (3.1) denkleminde; $A=2$ ve başlangıç şartları $x_{-1}=-0{,}2$, $x_0=0{,}3$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	3,3333333333	6	2,4
2	0,6	7	26,6666666666
3	6,6666666666	8	4,8
4	1,2	9	53,3333333332
5	13,333333333	10	9,6

c) (3.1) denkleminde; $A=1$ ve başlangıç şartları $x_{-1}=0{,}5$, $x_0=-1$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	0,5	6	2
2	2	7	0,5
3	0,5	8	2
4	2	9	0,5
5	0,5	10	2

d) (3.1) denkleminde; $A = 2$ ve başlangıç şartları $x_{-1} = 3$, $x_0 = -2$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	6	6	0,6666666668
2	0,1666666667	7	48
3	12	8	1,3333333334
4	0,3333333334	9	96
5	24	10	2,6666666668

e) (3.1) denkleminde; $A = 0{,}8$ ve başlangıç şartları $x_{-1} = 1$, $x_0 = 0{,}5$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	2	6	0,5
2	0,5	7	2
3	2	8	0,5
4	0,5	9	2
5	2	10	0,5

f) (3.1) denkleminde; $A = 3$ ve başlangıç şartları $x_{-1} = 0{,}1$, $x_0 = 0{,}5$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	2	6	13,5
2	1,5	7	54
3	6	8	40,5
4	4,5	9	162
5	18	10	121,5

g) (3.1) denkleminde; $A = 1$ ve başlangıç şartları $x_{-1} = 7$, $x_0 = 5$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	7	6	5
2	5	7	7
3	7	8	5
4	5	9	7
5	7	10	5

h) (3.1) denkleminde; $A = 0{,}9$ ve başlangıç şartları $x_{-1} = 10$, $x_0 = 5$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	9	6	3,645
2	4,5	7	6,561
3	8,1	8	3,2805
4	4,05	9	5,9049
5	7,29	10	2,95245

i) (3.1) denkleminde; $A = 0{,}7$ ve başlangıç şartları $x_{-1} = -2$, $x_0 = -3$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	-0,3333333333	6	-1,029
2	-2,1	7	-0,1143333333
3	-0,222222223	8	-0,7203
4	-1,47	9	-0,0080333331
5	-0,1633333333	10	-0,50421

j) (3.1) denkleminde; $A = 2$ ve başlangıç şartları $x_{-1} = -2$, $x_0 = -1$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	-2	6	-0,5
2	-0,5	7	-2
3	-2	8	-0,5
4	-0,5	9	-2
5	-2	10	-0,5

k) (3.1) denkleminde; $A = 0{,}6$ ve başlangıç şartları $x_{-1} = -5$, $x_0 = -0{,}2$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	-3	6	-0,0432
2	-0,12	7	-0,648
3	-1,8	8	-0,02592
4	-0,72	9	-0,3888
5	-1,08	10	-0,15552

I) (3.1) denkleminde; $A = 2$ ve başlangıç şartları $x_{-1} = -0{,}5$, $x_0 = -3$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	-0,3333333333	6	-3
2	-3	7	-0,3333333333
3	-0,3333333333	8	-3
4	-3	9	-0,3333333333
5	-0,3333333333	10	-3

4. BÖLÜM

$x_{n+1}=\frac{1+x_{n-1}^{a}+x_n x_{n-2}^{a}}{x_n+x_{n-1}^{a}+x_{n-2}^{a}}$ RASYONEL FARK DENKLEMİNİN GLOBAL ASİMPTOTİK KARARLILIĞI

Bu bölümde; $a\in[0,\infty)$ ve $x_{-2},\ x_{-1},\ x_0\in(0,\infty)$ olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{1+x_{n-1}^{a}+x_n x_{n-2}^{a}}{x_n+x_{n-1}^{a}+x_{n-2}^{a}},\ n=0,1,2,... \tag{4.1}$$

rasyonel fark denklemi tanımlanmış ve çözümlerinin $\bar{x}=1$ denge noktasında global asimptotik kararlı olduğu ispat edilmiştir. Ayrıca bu fark denklemi için nümerik örnekler verilmiştir.

(4.1) denkleminde; $a=0$ olduğu zaman, $n=0,1,2,...$ için $x_{n+1}=1$ olduğu açıktır. Bu nedenle $a>0$ olma durumunun ele alınması yeterlidir. Bu bölümde $a>0$ durumunda (4.1) denkleminin çözümlerinin global asimptotik kararlılığı incelenmiştir. Öncelikle, bu konuda kullanılacak üç lemma tanımlanmış ve ispat edilmiştir. Daha sonra verilen teoremde, (4.1) denkleminin çözümlerinin global asimptotik kararlı olduğu ispatlanmıştır.

Lemma 4.1. (4.1) denkleminin $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ pozitif çözümlerinin er geç 1'e eşit olması için gerek ve yeter şart:

$$(x_0-1)(x_{-1}-1)(x_{-2}-1)=0 \tag{4.2}$$

olmasıdır.

İspat. (4.2) eşitliğinin sağlandığını kabul edelim. Bu durumda, (4.1) denkleminden aşağıdaki ifadelerin doğru olduğu kolaylıkla görülebilir.

a) Eğer $x_0 = 1$ ise $n \geq 0$ için $x_n = 1$'dir,

b) Eğer $x_{-1} = 1$ ise $n \geq 2$ için $x_n = 1$'dir,

c) Eğer $x_{-2} = 1$ ise $n \geq 1$ için $x_n = 1$'dir.

(4.1) denkleminden $x_1 = \dfrac{1 + x_{-1}^a + x_0 x_{-2}^a}{x_0 + x_{-1}^a + x_{-2}^a}$ olarak elde edilir. Eğer $x_1 = 1$ ise,

$$x_0 + x_{-1}^a + x_{-2}^a = 1 + x_{-1}^a + x_0 x_{-2}^a \quad \Rightarrow \quad x_0 + x_{-2}^a - 1 - x_0 x_{-2}^a = 0$$

$$(x_0 - 1) - x_{-2}^a (x_0 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_0 - 1)(1 - x_{-2}^a) = 0$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde, $x_2 = \dfrac{1 + x_0^a + x_1 x_{-1}^a}{x_1 + x_0^a + x_{-1}^a}$ olarak elde edilir. Eğer $x_2 = 1$ ise,

$$x_1 + x_0^a + x_{-1}^a = 1 + x_0^a + x_1 x_{-1}^a \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_{-1}^a - 1 - x_1 x_{-1}^a = 0$$

$$(x_1 - 1) - x_{-1}^a (x_1 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_1 - 1)(1 - x_{-1}^a) = 0$$

olduğu görülür. Bu durumda, (4.1) denklemine göre yukarıdaki ifadeler doğrudur.

Karşıt olarak,

$$(x_0 - 1)(x_{-1} - 1)(x_{-2} - 1) \neq 0 \tag{4.3}$$

olduğunu kabul edelim ve her $n \geq 1$ için $x_n \neq 1$ olduğunu gösterelim.

Kabulümüze ters olarak, bazı $N \geq 1$ değerleri için

$$x_N = 1 \text{ ve } -2 \leq n \leq N - 1 \text{ için } x_n \neq 1 \tag{4.4}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$1 = x_N = \frac{1 + x_{N-2}^a + x_{N-1}x_{N-3}^a}{x_{N-1} + x_{N-2}^a + x_{N-3}^a} \quad \Rightarrow \quad x_{N-1} + x_{N-2}^a + x_{N-3}^a = 1 + x_{N-2}^a + x_{N-1}x_{N-3}^a$$

$$x_{N-1} + x_{N-3}^a - 1 - x_{N-1}x_{N-3}^a = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_{N-1} - 1) - x_{N-3}^a(x_{N-1} - 1) = 0$$

Buradan, $(x_{N-1} - 1)(1 - x_{N-3}^a) = 0$ elde edilir ki buda $x_{N-1} = 1$ veya $x_{N-3} = 1$ anlamına gelip (4.4) eşitliğine ters düşer. Böylece ispat tamamlanmış olur. Sonuç olarak diyebiliriz ki:

Eğer başlangıç şartları (4.2) eşitliğini sağlamıyorsa, $n \geq -2$ için $x_n \neq 1$ ve $n \geq 0$ için $x_n \neq x_{n-1}$ olur.

Lemma 4.2. $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümleri (4.1) denkleminin 1'e eşit olmayan pozitif çözümleri olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler doğrudur.

a) Her $n \geq 0$ için, $(x_{n+1} - x_n)(x_n - 1) < 0$,

b) Her $n \geq 0$ için $(x_{n+1} - 1)(x_n - 1)(x_{n-2} - 1) > 0$.

İspat. (a) (4.1) denkleminden,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1 + x_{n-1}^a + x_n x_{n-2}^a}{x_n + x_{n-1}^a + x_{n-2}^a} - x_n = \frac{1 + x_{n-1}^a + x_n x_{n-2}^a - x_n^2 - x_n x_{n-1}^a - x_n x_{n-2}^a}{x_n + x_{n-1}^a + x_{n-2}^a}$$

$$\Rightarrow \frac{1 - x_n^2 + x_{n-1}^a(1 - x_n)}{x_n + x_{n-1}^a + x_{n-2}^a} = \frac{(1 - x_n)(1 + x_n) + x_{n-1}^a(1 - x_n)}{x_n + x_{n-1}^a + x_{n-2}^a}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x_n = \frac{(1 - x_n)(1 + x_n + x_{n-1}^a)}{x_n + x_{n-1}^a + x_{n-2}^a}, \; n = 0,1,2,...$$

eşitliği elde edilir. Elde ettiğimiz eşitliğin her iki tarafı $(1 - x_n)$ ile çarpılırsa,

$$(x_{n+1}-x_n)(1-x_n)=\frac{(1-x_n)^2(1+x_n+x_{n-1}^a)}{x_n+x_{n-1}^a+x_{n-2}^a}>0$$

eşitsizliği elde edilir, bu ise $n\geq 0$ için $(x_{n+1}-x_n)(x_n-1)<0$ anlamına gelir.

(b) Yine (4.1) denkleminden,

$$x_{n+1}-1=\frac{1+x_{n-1}^a+x_nx_{n-2}^a}{x_n+x_{n-1}^a+x_{n-2}^a}-1=\frac{1+x_{n-1}^a+x_nx_{n-2}^a-x_n-x_{n-1}^a-x_{n-2}^a}{x_n+x_{n-1}^a+x_{n-2}^a}$$

$$\Rightarrow \frac{1-x_n+x_{n-2}^a(x_n-1)}{x_n+x_{n-1}^a+x_{n-2}^a}=\frac{(x_n-1)(x_{n-2}^a-1)}{x_n+x_{n-1}^a+x_{n-2}^a}$$

$$\Rightarrow x_{n+1}-1=\frac{(x_n-1)(x_{n-2}^a-1)}{x_n+x_{n-1}^a+x_{n-2}^a},\ n=0,1,2,...$$

eşitliği elde edilir, bu ise $n\geq 0$ için $(x_{n+1}-1)(x_n-1)(x_{n-2}-1)>0$ anlamına gelir.

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.3. (4.1) denklemi için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(A) (4.1) denkleminin sonsuz elemanlı ve monoton olarak $\bar{x}=1$ denge noktasına yakınsayan bir pozitif yarı dönmesi mevcuttur.

(B) (i) Her pozitif yarı dönme bir veya iki uzunluğundadır,

(ii) Her negatif yarı dönme bir veya üç uzunluğundadır,

(iii) İki uzunluğundaki her pozitif yarı dönmeyi üç uzunluğundaki negatif yarı dönme takip eder,

(iv) Bir uzunluğundaki her pozitif yarı dönmeyi bir uzunluğundaki negatif yarı dönme takip eder,

(v) Üç uzunluğundaki her negatif yarı dönmeyi bir uzunluğundaki pozitif yarı dönme takip eder,

(vi) Bir uzunluğundaki her negatif yarı dönmeyi iki uzunluğundaki pozitif yarı dönme takip eder.

İspat. (A) Eğer $x_{-2} > 1$, $x_{-1} > 1$ ve $x_0 > 1$ ise, Lemma 4.2.(b)'den $n = 0,1,2,...$ değerleri için

$$(x_1 - 1)\underbrace{(x_0 - 1)}_{+}\underbrace{(x_{-2} - 1)}_{+} > 0 \Rightarrow x_1 > 1 \quad P$$

$$(x_2 - 1)\underbrace{(x_1 - 1)}_{+}\underbrace{(x_{-1} - 1)}_{+} > 0 \Rightarrow x_2 > 1 \quad P$$

$$(x_3 - 1)\underbrace{(x_2 - 1)}_{+}\underbrace{(x_0 - 1)}_{+} > 0 \Rightarrow x_3 > 1 \quad P$$

$$(x_4 - 1)\underbrace{(x_3 - 1)}_{+}\underbrace{(x_1 - 1)}_{+} > 0 \Rightarrow x_4 > 1 \quad P$$

$$(x_5 - 1)\underbrace{(x_4 - 1)}_{+}\underbrace{(x_2 - 1)}_{+} > 0 \Rightarrow x_5 > 1 \quad P$$

$$(x_6 - 1)\underbrace{(x_5 - 1)}_{+}\underbrace{(x_3 - 1)}_{+} > 0 \Rightarrow x_6 > 1 \quad P$$

$$(x_7 - 1)\underbrace{(x_6 - 1)}_{+}\underbrace{(x_4 - 1)}_{+} > 0 \Rightarrow x_7 > 1 \quad P$$

$$(x_8 - 1)\underbrace{(x_7 - 1)}_{+}\underbrace{(x_5 - 1)}_{+} > 0 \Rightarrow x_8 > 1 \quad P$$

$$(x_9 - 1)\underbrace{(x_8 - 1)}_{+}\underbrace{(x_6 - 1)}_{+} > 0 \Rightarrow x_9 > 1 \quad P$$

.

.

.

olduğu görülür. Bu durumda, $n \geq -2$ için $x_n > 1$ olur ki bu pozitif yarı dönme sonsuz elemanlıdır. Ayrıca, Lemma 4.2(a)'dan $n \geq 0$ için x_n çözümleri azalandır. Dolayısıyla, $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ limiti vardır ve sonludur. (4.1) denkleminde eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1 + \lim_{n\to\infty} x_{n-1}^a + \lim_{n\to\infty}(x_n x_{n-2}^a)}{\lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} x_{n-1}^a + \lim_{n\to\infty} x_{n-2}^a}$$

olmak üzere,

$$l = \frac{l^{a+1} + l^a + 1}{l + 2l^a}$$

elde edilir ve $l = 1$ dir.

(B) 1. Durum : $x_{N-2} > 1$**,** $x_N > 1$ ve $x_{N-1} < 1$

Lemma 4.2(b)'den $n = N, N+1, N+2, \ldots$ değerleri için

$$(x_{N+1} - 1)\underbrace{(x_N - 1)}_{+}\underbrace{(x_{N-2} - 1)}_{+} > 0 \Rightarrow x_{N+1} > 1 \quad P$$

$$(x_{N+2} - 1)\underbrace{(x_{N+1} - 1)}_{+}\underbrace{(x_{N-1} - 1)}_{-} > 0 \Rightarrow x_{N+2} < 1 \quad N$$

$$(x_{N+3} - 1)\underbrace{(x_{N+2} - 1)}_{-}\underbrace{(x_N - 1)}_{+} > 0 \Rightarrow x_{N+3} < 1 \quad N$$

$$(x_{N+4} - 1)\underbrace{(x_{N+3} - 1)}_{-}\underbrace{(x_{N+1} - 1)}_{+} > 0 \Rightarrow x_{N+4} < 1 \quad N$$

$$(x_{N+5} - 1)\underbrace{(x_{N+4} - 1)}_{-}\underbrace{(x_{N+2} - 1)}_{-} > 0 \Rightarrow x_{N+5} > 1 \quad P$$

$$(x_{N+6} - 1)\underbrace{(x_{N+5} - 1)}_{+}\underbrace{(x_{N+3} - 1)}_{-} > 0 \Rightarrow x_{N+6} < 1 \quad N$$

$$(x_{N+7} - 1)\underbrace{(x_{N+6} - 1)}_{-}\underbrace{(x_{N+4} - 1)}_{-} > 0 \Rightarrow x_{N+7} > 1 \quad P$$

$$(x_{N+8}-1)\underbrace{(x_{N+7}-1)}_{+}\underbrace{(x_{N+5}-1)}_{+}>0\Rightarrow x_{N+8}>1 \quad P$$

$$(x_{N+9}-1)\underbrace{(x_{N+8}-1)}_{+}\underbrace{(x_{N+6}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+9}<1 \quad N$$

$$(x_{N+10}-1)\underbrace{(x_{N+9}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+7}-1)}_{+}>0\Rightarrow x_{N+10}<1 \quad N$$

$$(x_{N+11}-1)\underbrace{(x_{N+10}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+8}-1)}_{+}>0\Rightarrow x_{N+11}<1 \quad N$$

$$(x_{N+12}-1)\underbrace{(x_{N+11}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+9}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+12}>1 \quad P$$

$$(x_{N+13}-1)\underbrace{(x_{N+12}-1)}_{+}\underbrace{(x_{N+10}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+13}<1 \quad N$$

$$(x_{N+14}-1)\underbrace{(x_{N+13}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+11}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+14}>1 \quad P$$

$$(x_{N+15}-1)\underbrace{(x_{N+14}-1)}_{+}\underbrace{(x_{N+12}-1)}_{+}>0\Rightarrow x_{N+15}>1 \quad P$$

$$(x_{N+16}-1)\underbrace{(x_{N+15}-1)}_{+}\underbrace{(x_{N+13}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+16}<1 \quad N$$

$$(x_{N+17}-1)\underbrace{(x_{N+16}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+14}-1)}_{+}>0\Rightarrow x_{N+17}<1 \quad N$$

$$(x_{N+18}-1)\underbrace{(x_{N+17}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+15}-1)}_{+}>0\Rightarrow x_{N+18}<1 \quad N$$

$$(x_{N+19}-1)\underbrace{(x_{N+18}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+16}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+19}>1 \quad P$$

.

.

.

elde edilir. Böylece 1. durumda Lemma 4.3(B)'nin iddiaları doğrulanır.

2. Durum : $x_{N-2}<1$, $x_{N-1}<1$ ve $x_N<1$

Lemma 4.2(b)'den $n=N,N+1,N+2,...$ değerleri için

$$(x_{N+1}-1)\underbrace{(x_N-1)}_{-}\underbrace{(x_{N-2}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+1}>1 \quad P$$

$$(x_{N+2}-1)\underbrace{(x_{N+1}-1)}_{+}\underbrace{(x_{N-1}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+2}<1 \quad N$$

$$(x_{N+3}-1)\underbrace{(x_{N+2}-1)}_{-}\underbrace{(x_N-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+3}>1 \quad P$$

$$(x_{N+4}-1)\underbrace{(x_{N+3}-1)}_{+}\underbrace{(x_{N+1}-1)}_{+}>0\Rightarrow x_{N+4}>1 \quad P$$

$$(x_{N+5}-1)\underbrace{(x_{N+4}-1)}_{+}\underbrace{(x_{N+2}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+5}<1 \quad N$$

$$(x_{N+6}-1)\underbrace{(x_{N+5}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+3}-1)}_{+}>0\Rightarrow x_{N+6}<1 \quad N$$

$$(x_{N+7}-1)\underbrace{(x_{N+6}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+4}-1)}_{+}>0\Rightarrow x_{N+7}<1 \quad N$$

$$(x_{N+8}-1)\underbrace{(x_{N+7}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+5}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+8}>1 \quad P$$

$$(x_{N+9}-1)\underbrace{(x_{N+8}-1)}_{+}\underbrace{(x_{N+6}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+9}<1 \quad N$$

$$(x_{N+10}-1)\underbrace{(x_{N+9}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+7}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+10}>1 \quad P$$

$$(x_{N+11}-1)\underbrace{(x_{N+10}-1)}_{+}\underbrace{(x_{N+8}-1)}_{+}>0\Rightarrow x_{N+11}>1 \quad P$$

$$(x_{N+12}-1)\underbrace{(x_{N+11}-1)}_{+}\underbrace{(x_{N+9}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+12}<1 \quad N$$

$$(x_{N+13}-1)\underbrace{(x_{N+12}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+10}-1)}_{+}>0\Rightarrow x_{N+13}<1 \quad N$$

$$(x_{N+14}-1)\underbrace{(x_{N+13}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+11}-1)}_{+}>0\Rightarrow x_{N+14}<1 \quad N$$

$$(x_{N+15}-1)\underbrace{(x_{N+14}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+12}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+15}>1 \quad P$$

$$(x_{N+16}-1)\underbrace{(x_{N+15}-1)}_{+}\underbrace{(x_{N+13}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+16}<1 \quad N$$

$$(x_{N+17}-1)\underbrace{(x_{N+16}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+14}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+17}>1 \quad P$$

$$(x_{N+18}-1)\underbrace{(x_{N+17}-1)}_{+}\underbrace{(x_{N+15}-1)}_{+}>0\Rightarrow x_{N+18}>1 \quad P$$

$$(x_{N+19}-1)\underbrace{(x_{N+18}-1)}_{+}\underbrace{(x_{N+16}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+19}<1 \quad N$$

$$(x_{N+20}-1)\underbrace{(x_{N+19}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+17}-1)}_{+}>0\Rightarrow x_{N+20}<1 \quad N$$

$$(x_{N+21}-1)\underbrace{(x_{N+20}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+18}-1)}_{+}>0\Rightarrow x_{N+21}<1 \quad N$$

$$(x_{N+22}-1)\underbrace{(x_{N+21}-1)}_{-}\underbrace{(x_{N+19}-1)}_{-}>0\Rightarrow x_{N+22}>1 \quad P$$

.

.

.

elde edilir. Böylece 2. durumda da Lemma 4.3(B)'nin iddiaları doğrulanır.

Teorem 4.1. (4.1) denkleminin $\bar{x}=1$ denge noktası global asimptotik kararlıdır.

İspat. (4.1) denkleminin $\bar{x}=1$ denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu ispatlamak için hem lokal asimptotik kararlı hem de çekim noktası olduğunu göstermeliyiz. (4.1) denkleminin $\bar{x}=1$ denge noktası civarında lineer denklemi :

$$z_{n+1}=0.z_n+0.z_{n-1}+0.z_{n-2}$$

şeklindedir ve Teorem 2.3'den $\bar{x}=1$ denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğu açıktır. Bu durumda, ispatı tamamlamak için (4.1) denkleminin $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ pozitif çözümünün $n\to\infty$ iken $\bar{x}=1$ denge noktasına yakınsadığını yani :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x} = 1 \tag{4.5}$$

olduğunu göstermeliyiz. Eğer (4.1) denkleminin $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümü $\bar{x} = 1$ denge noktası civarında salınımlı değil ise, Lemma 4.1 ve Lemma 4.3'e göre diyebiliriz ki bu çözüm ya er geç 1'e eşittir ya da er geç pozitiftir ki pozitif ise sonsuz elemanlıdır ve monoton olarak $\bar{x} = 1$ denge noktasına yakınsar. Bu yüzden (4.5) eşitliği sağlanır. Dolayısıyla, (4.5) eşitliğinin (4.1) denkleminin tam olarak salınımlı çözümleri için sağlandığını göstermek yeterlidir. Şimdi $\{x_n\}_{n=-2}^{\infty}$ çözümünü, (4.1) denkleminin $\bar{x} = 1$ denge noktası civarında salınımlı olarak ele alalım. Lemma 4.2(b) ve Lemma 4.3'den bu çözümün baştan birkaç eleman ihmal edilmek üzere, bütün pozitif yarı dönmelerinin bir veya iki uzunluğunda ve bütün negatif yarı dönmelerinin de bir veya üç uzunluğunda olduğu açıktır. Ayrıca, her bir uzunluğundaki pozitif yarı dönmeyi, bir uzunluğunda negatif yarı dönme ve her iki uzunluğundaki pozitif yarı dönmeyi, üç uzunluğunda negatif yarı dönme takip eder. Benzer şekilde, her bir uzunluğundaki negatif yarı dönmeyi, iki uzunluğunda pozitif yarı dönme ve her üç uzunluğundaki negatif yarı dönmeyi, bir uzunluğunda pozitif yarı dönme takip eder. Burada, genelliği bozmaksızın bu yarı dönmeleri aşağıdaki gibi sembolize edebiliriz.

İlk bir uzunluğundaki pozitif yarı dönmeyi x_p ile gösterelim. Bu durumda, ardından gelen bir uzunluğundaki negatif yarı dönme x_{p+1} ile gösterilir. Bunları takip eden iki uzunluğundaki pozitif yarı dönme x_{p+2}, x_{p+3} ve negatif yarı dönme ise $x_{p+4}, x_{p+5}, x_{p+6}$ şeklindedir. Sonuçta tekrar bir uzunluğundaki pozitif yarı dönme x_{p+7} olur.

$n = 0,1,2,...$ için aşağıdaki pozitif ve negatif yarı dönmeleri elde ederiz:

Pozitif yarı dönmeler: $\{x_{p+7n}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{x_{p+7n+2}, x_{p+7n+3}\}_{n=0}^{\infty}$.

Negatif yarı dönmeler: $\{x_{p+7n+1}\}_{n=0}^{\infty}$, $\{x_{p+7n+4}, x_{p+7n+5}, x_{p+7n+6}\}_{n=0}^{\infty}$.

Bu durumda, aşağıdaki ifadeleri verebiliriz.

a) $x_{p+7n+2} > x_{p+7n+3}$, $x_{p+7n+4} < x_{p+7n+5} < x_{p+7n+6}$

b) $x_{p+7n+1}x_{p+7n+2} < 1$, $x_{p+7n+3}x_{p+7n+4} > 1$, $x_{p+7n+6}x_{p+7n+7} < 1$

c) $x_{p+7n+7}x_{p+7n+8} > 1$

Aslında, (a) daki ifadeler Lemma 4.2(a)'dan açıktır. (4.1) denkleminde n yerine sırasıyla $(p+7n+1)$, $(p+7n+3)$, $(p+7n+6)$ ve $(p+7n+7)$ yazarak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz.

(4.1) denkleminde $n = p+7n+1$ olarak alınırsa:

$$x_{p+7n+2} = \frac{1+x_{p+7n}^{a}+x_{p+7n+1}x_{p+7n-1}^{a}}{x_{p+7n+1}+x_{p+7n}^{a}+x_{p+7n-1}^{a}} < \frac{1+x_{p+7n}^{a}+x_{p+7n+1}x_{p+7n-1}^{a}}{x_{p+7n+1}+x_{p+7n+1}x_{p+7n}^{a}+x_{p+7n+1}^{2}x_{p+7n-1}^{a}} = \frac{1}{x_{p+7n+1}}$$

olduğu görülür ki $x_{p+7n+2} < \dfrac{1}{x_{p+7n+1}}$ elde edilir.

(4.1) denkleminde $n = p+7n+3$ olarak alınırsa:

$$x_{p+7n+4} = \frac{1+x_{p+7n+2}^{a}+x_{p+7n+3}x_{p+7n+1}^{a}}{x_{p+7n+3}+x_{p+7n+2}^{a}+x_{p+7n+1}^{a}} > \frac{1+x_{p+7n+2}^{a}+x_{p+7n+3}x_{p+7n+1}^{a}}{x_{p+7n+3}+x_{p+7n+3}x_{p+7n+2}^{a}+x_{p+7n+3}^{2}x_{p+7n+1}^{a}} = \frac{1}{x_{p+7n+3}}$$

olduğu görülür ki $x_{p+7n+4} > \dfrac{1}{x_{p+7n+3}}$ elde edilir.

(4.1) denkleminde $n = p+7n+6$ olarak alınırsa:

$$x_{p+7n+7} = \frac{1+x_{p+7n+5}^{a}+x_{p+7n+6}x_{p+7n+4}^{a}}{x_{p+7n+6}+x_{p+7n+5}^{a}+x_{p+7n+4}^{a}} < \frac{1+x_{p+7n+5}^{a}+x_{p+7n+6}x_{p+7n+4}^{a}}{x_{p+7n+6}+x_{p+7n+6}x_{p+7n+5}^{a}+x_{p+7n+6}^{2}x_{p+7n+4}^{a}} = \frac{1}{x_{p+7n+6}}$$

olduğu görülür ki $x_{p+7n+7} < \dfrac{1}{x_{p+7n+6}}$ elde edilir.

Son olarak yine benzer şekilde (4.1) denkleminde $n = p+7n+7$ olarak alınırsa:

$$x_{p+7n+8} = \frac{1+x_{p+7n+6}^{a}+x_{p+7n+7}x_{p+7n+5}^{a}}{x_{p+7n+7}+x_{p+7n+6}^{a}+x_{p+7n+5}^{a}} > \frac{1+x_{p+7n+6}^{a}+x_{p+7n+7}x_{p+7n+5}^{a}}{x_{p+7n+7}+x_{p+7n+7}x_{p+7n+6}^{a}+x_{p+7n+7}^{2}x_{p+7n+5}^{a}} = \frac{1}{x_{p+7n+7}}$$

olduğu görülür ki $x_{p+7n+8} > \dfrac{1}{x_{p+7n+7}}$ elde edilir.

Böylece (b) ve (c)'nin iddiaları da doğrulanır. Şuana kadar elde ettiğimiz veriler doğrultusunda aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$x_{p+7n+1} < \frac{1}{x_{p+7n+2}} < \frac{1}{x_{p+7n+3}} < x_{p+7n+4} < x_{p+7n+5} < x_{p+7n+6} < \frac{1}{x_{p+7n+7}} < x_{p+7n+8} \tag{4.6}$$

(4.6) eşitsizliğinden $\left\{x_{p+7n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$ in artarak 1'e yakınsadığı görülür. Bu yüzden, $\lim_{n\to\infty} x_{p+7n+1} = L$ limiti vardır ve sonludur. (4.6) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} x_{p+7n+4} = \lim_{n\to\infty} x_{p+7n+5} = \lim_{n\to\infty} x_{p+7n+6} = L$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} x_{p+7n+2} = \lim_{n\to\infty} x_{p+7n+3} = \lim_{n\to\infty} x_{p+7n+7} = 1/L$$

dir.

(4.1) denkleminden,

$$x_{p+7n+6} = \frac{1+x_{p+7n+4}^{a}+x_{p+7n+5}x_{p+7n+3}^{a}}{x_{p+7n+5}+x_{p+7n+4}^{a}+x_{p+7n+3}^{a}}$$

olduğu biliniyor. Her iki tarafın limiti alınırsa,

$$L = \frac{1 + L^a + L.(1/L)^a}{L + L^a + (1/L)^a}$$

olup, buradan da $L = 1$ elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

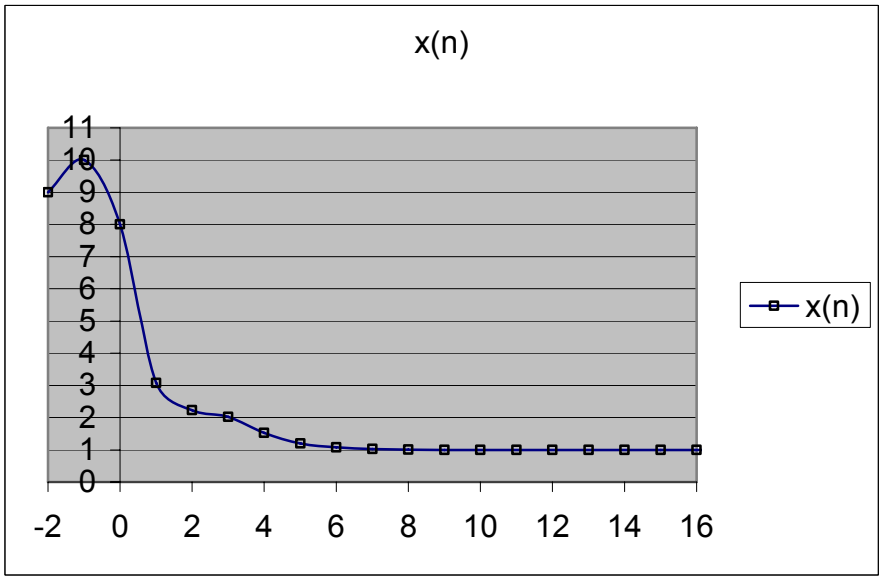
Örnek 4.1. $n = 0,1,2,...$ için $a = 1$ ve $a = 2$ olma durumlarında başlangıç şartları aşağıdaki gibi verildiğinde (4.1) denkleminin çözümlerini inceleyelim.

Başlangıç Şartları

$x_{-2} = 9$ P	$x_{-1} = 10$ P	$x_0 = 8$ P

x_n **Çözümleri (** $a = 1$ **)**

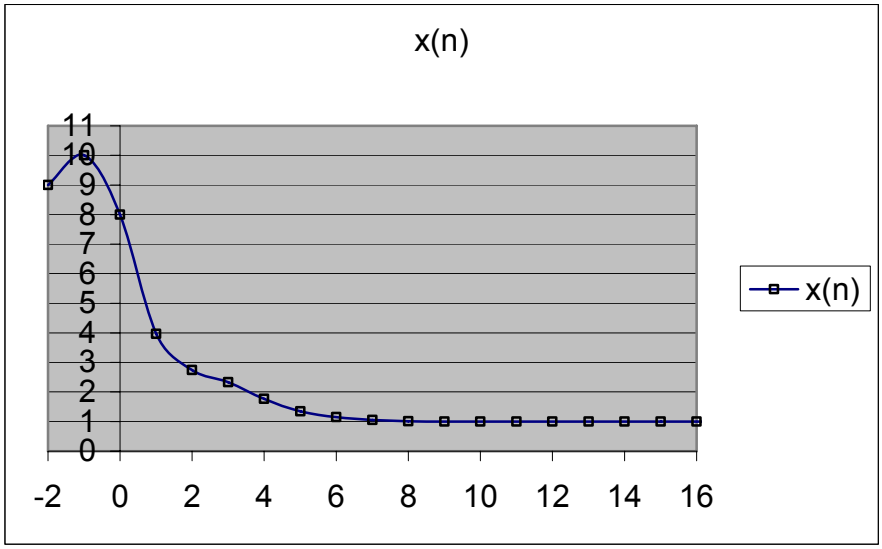
n	x_n	+/-	n	x_n	+/-	n	x_n	+/-
1	3,074074	P	6	1,080018	P	11	1	P
2	2,228996	P	7	1,021952	P	12	1	P
3	2,023095	P	8	1,002625	P	13	1	P
4	1,525810	P	9	1,000136	P	14	1	P
5	1,197092	P	10	1	P	15	1	P



Şekil 4.1 ($a = 1$ **)**

x_n **Çözümleri (** $a = 2$ **)**

n	x_n	+/-	n	x_n	+/-	n	x_n	+/-
1	3,962963	P	6	1,152639	P	11	1	P
2	2,746417	P	7	1,053365	P	12	1	P
3	2,334412	P	8	1,010164	P	13	1	P
4	1,767039	P	9	1,000968	P	14	1	P
5	1,340028	P	10	1	P	15	1	P



Şekil 4.2 ($a = 2$ **)**

(4.1) denkleminde başlangıç şartlarının hepsi birden pozitif yani $x_{-2} > 1$, $x_{-1} > 1$ ve $x_0 > 1$ şeklinde seçilirse, o zaman sonsuz elemanlı ve monoton olarak $\bar{x} = 1$ denge noktasına yakınsayan bir pozitif yarı dönme mevcuttur. Bu durum Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de açıkça görülmektedir.

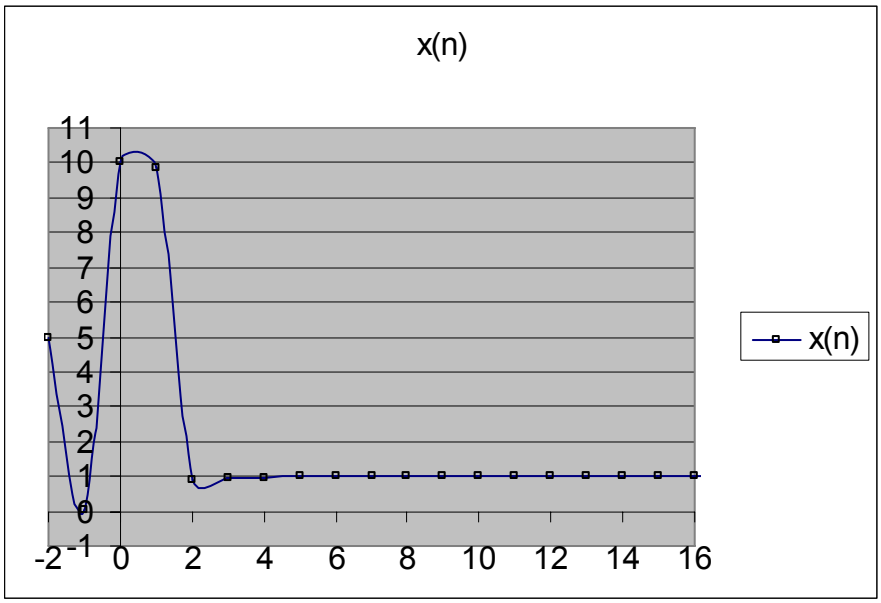
Örnek 4.2. $n = 0,1,2,...$ için $a = 4$ olma durumunda başlangıç şartları aşağıdaki gibi verildiğinde (4.1) denkleminin çözümlerini inceleyelim.

Başlangıç Şartları

$x_{-2} = 5$ P	$x_{-1} = 0,02$ N	$x_0 = 10$ P

x_n **Çözümleri (** $a = 4$ **)**

n	x_n	+/-	n	x_n	+/-	n	x_n	+/-
1	9,844094	P	6	0,999939	N	11	1	P
2	0,919518	N	7	1,000002	P	12	1	P
3	0,959723	N	8	1	P	13	1	P
4	0,960868	N	9	1	P	14	1	P
5	1,002217	P	10	1	P	15	1	P



Şekil 4.3 ($a = 4$ **)**

(4.1) denkleminde başlangıç şartlarının bazıları pozitif bazıları negatif örneğin, $x_{-2} > 1$, $x_{-1} < 1$ ve $x_0 > 1$ şeklinde seçilirse, o zaman $PNPPNNN$, $PNPPNNN$ şeklinde bir veya iki uzunluğunda pozitif yarı dönmeler ve bir veya üç uzunluğunda negatif yarı dönmeler mevcuttur. Denklemin çözümleri salınımlı olmak üzere, $\bar{x} = 1$ denge noktasına yakınsar. Bu durum Şekil 4.3'de açıkça görülmektedir.

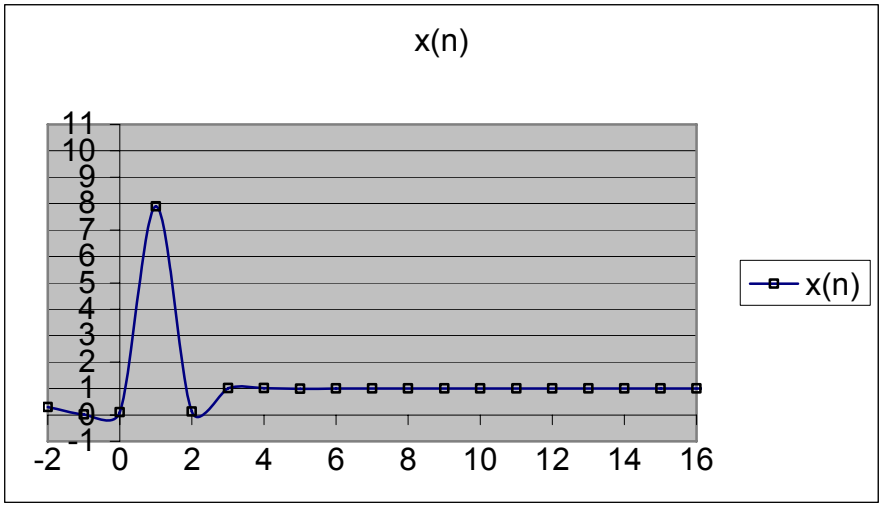
Örnek 4.3. $n = 0,1,2,...$ için $a = 3$ olma durumunda başlangıç şartları aşağıdaki gibi verildiğinde (4.1) denkleminin çözümlerini inceleyelim.

Başlangıç Şartları

$x_{-2} = 0{,}3$ N	$x_{-1} = 0{,}02$ N	$x_0 = 0{,}01$ N

x_n Çözümleri ($a = 3$)

n	x_n	+/-	n	x_n	+/-	n	x_n	+/-
1	7,894841	P	6	0,999942	N	11	1	P
2	0,128163	N	7	0,999999	N	12	1	P
3	1,013817	P	8	1	P	13	1	P
4	1,013375	P	9	1	P	14	1	P
5	0,993607	N	10	1	P	15	1	P



Şekil 4.4 ($a = 3$)

(4.1) denkleminde başlangıç şartlarının hepsi birden negatif yani $x_{-2} < 1$, $x_{-1} < 1$ ve $x_0 < 1$ şeklinde seçilirse, o zaman $PNPPNNN$, $PNPPNNN$ şeklinde bir veya iki uzunluğunda pozitif yarı dönmeler ve bir veya üç uzunluğunda negatif yarı dönmeler mevcuttur. Denklemin çözümleri salınımlı olmak üzere, $\overline{x} = 1$ denge noktasına yakınsar. Bu durum Şekil 4.4'de açıkça görülmektedir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, herhangi bir reel sayı olan A parametresi ve sıfırdan farklı reel sayılar olan x_{-1}, x_0 başlangıç şartları için $x_{n+1} = \max\{1/x_n, Ax_{n-1}\}$ maksimumlu fark denklemi tanımlanmış, çözümleri incelenmiş, farklı durumlar için genel çözümler elde edilmiş ve periyodikliği incelenmiştir. Bu fark denkleminde A parametresinin yerine herhangi bir dizi alınabileceği gibi denklemin eleman sayısı da artırılabilir ve oluşturulan yeni fark denklemlerinin çözümleri ve periyodikliği incelenebilir.

Ayrıca yine bu çalışmada, $a \in [0,\infty)$ ve $x_{-2}, x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$ olmak üzere $x_{n+1} = \dfrac{1 + x_{n-1}^a + x_n x_{n-2}^a}{x_n + x_{n-1}^a + x_{n-2}^a}$ rasyonel fark denklemi tanımlanmış ve bu fark denkleminin $\bar{x} = 1$ denge noktasında global asimptotik kararlı olduğu ispat edilmiştir. Bu denklemde eleman sayısı artırılabileceği gibi katsayılar farklı parametreler olmak üzere yeni denklemler elde edilebilir ve oluşturulan yeni denklemlerin global asimptotik kararlılığı incelenebilir.

KAYNAKLAR

Aloqeili, M., 2005, Dynamics of rational difference equation, *Applied Mathematics and Computation*, (in press).

Amleh, A. M., 1998, Boundedness Periodicity and Stability of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Amleh, A. M., Hoag, J. and Ladas, G., 1998, A difference equation with eventually periodic solutions, *Computers & Mathematics with Applications*, 36, 401-404.

Amleh, A. M., Kruse, N. and Ladas, G., 1999, On a class of difference equations with strong negative feedback, *Journal of Difference Equations and Applications*, 5, 497-515.

Camouzis, E., 2005, Global analysis of solutions of $x_{n+1} = \frac{\beta x_n + \delta x_{n-2}}{A + Bx_n + Cx_{n-1}}$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 316, 2, 616-627.

Chatterjee, E., Grove, E. A., Kostrov, Y. and Ladas, G., 2003, On the trichotomy character of $x_{n+1} = (\alpha + \gamma x_{n-1}) \ / \ (A + Bx_n + x_{n-2})$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 9, 1113-1128.

Çinar, C., Stevic, S. and Yalçınkaya, İ., 2004, A Note on Global Asymptotic Stability of a Family of Rational Equations, *Rostock. Math. Kolloq.*, 59, 40-48.

Çinar, C., Stevic, S. and Yalçınkaya, İ., 2005, On positive solutions of reciprocal difference equation with minimum, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 17(1-2), 307-314.

Dehghan, M. and Douraki, M. J., 2005, On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_{n-k+1} + \gamma x_{n-2k+1}}{Bx_{n-k+1} + Cx_{n-2k+1}}$, *Applied Mathematics and Computation*, 170, 2, 1045-1066.

Devault, R., 1996, Permanence and Stability In Models of a Perannial Grass, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Devault, R. and Galminas, L., 1999, Global stability of $x_{n+1} = \frac{A}{x_n^p} + \frac{1}{x_{n-1}^{1/p}}$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 231, 459-466.

Elaydi, S., 1996, An Introduction to Difference Equations, Spinger-Verlag, New York.

El-Afifi, M. M., 2004, On the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{Bx_n + Cx_{n-1}}$, *Applied Mathematics and Computation*, 147, 617-628.

El-Metwally, H., Grove, E. A., Ladas, G., Levins, R. and Radin, M., 2001, On the Difference Equation $x_{n+1} = \alpha + \beta x_{n-1} e^{-x_n}$, *Nonlinear Analysis*, 47, 4623-4634.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Elsady, Z., 2004, Global attractivity of the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_{n-1}}{\gamma + x_n}$, *Applied Mathematics and Computation*, 151, 827-833.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Mousa, M. S., 2004, On asymptotic behaviour of the difference equation $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-k}}{x_n}$, *Applied Mathematics and Computation*, 147, 163-167.

Feuer, J., 1998, Invariants and Invariant Regions of Lyness-Type Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Feuer, J., Janowski, E. J., Ladas, G. and Teixeira, C., 2000, Global behaviour of solutions of $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 2, 237-252.

Feuer, J., 2003, Periodic solutions of the Lyness max equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 288, 147-160.

Grove, E. A., Kent, C. M. and Ladas, G., 1998, Boundedness and persistence of the nonautonomous lyness and max equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 3, 241-258.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. and Youssef, A. M., 2005, The dynamics of the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha x_{n-1}}{\beta + \gamma x_{n-2}^p}$, *Applied Mathematics Letters*, 18, 9, 1013-1018.

Hamza, A. E., 2005, On the recursive sequence $x_{n+1} = \alpha + x_{n-1} / x_n$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, (in press).

Janowski, E. J., Kocic, V. L., Ladas, G. and Tzanetopoulos, G., 1998, Global behaviour of solutions of $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n^k, A\}}{x_{n-1}}$, *Journal of Difference Equations and Applications*, 3, 297-310.

Kent, C. M., 1998, Stability and Periodicity of Some Difference Equations and Applications, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Kocic, V. L., 2005, A note on the nonautonomous Beverton-Holt model, *Journal of Difference Equations and Applications*, 11(4-5), 415-422.

Kruse, N. and Nasemann, T., 1999, Global asymptotic stability in some discrete dynamical systems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 235, 151-158.

Kulenevic, M. R. S. and Ladas, G., 2002, Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjecture, Boca Raton, London.

Li, X. and Zhu, D., 2003, Global asymptotic stabilitiy in a rational equation, *Journal of Difference Equations and Applications*, 9, 833-839.

Li, X. and Zhu, D., 2004, Two Rational Recursive Sequences, *Computers & Mathematics with Applications*, 47, 1487-1494.

Li, X. and Zhu, D., 2004, Global asymptotic stabilitiy for two recursive difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 150, 481-492.

Li, X. and Zhu, D., 2004, Global asymptotic stabilitiy of nonlinear recursive sequence, *Computers & Mathematics with Applications*, 17, 833-838.

Li, X., 2005, Qualitative properties for a fourth-order rational difference equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 311, 2, 462-488.

Li, X. and Zhu, D., 2005, The Rule of Semicycle and Global Asymptotic Stability for a Fourth-Order Rational Difference Equation, *Computers & Mathematics with Applications*, 49, 723-730.

Li, W. T., 2004, Global stability and oscillation in nonlinear difference equations of population dynamics, *Applied Mathematics and Computation*, 157, 115-125.

McGrath, L. C., 2002, Existence Stability Boundedness and Periodicity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Mishev, D. P. and Patula, W. T., 2000, Oscillation and global asymptotic stability, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 252, 364-375.

Mishev, D. P., Patula, W. T. and Voulov, H. D., 2002, A reciprocal difference equation with maximum, *Computers & Mathematics with Applications*, 43, 1021-1026.

Moybe, L. A., 2000, Difference Equations with Public Health Applications, New York, USA.

Papaschinopoulos, G. and Hatzifilippidis, V., 2001, On a max difference equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 258, 258-268.

Papaschinopoulos, G., Schinas, J. and Hatzifilippidis, V., 2003, Global behaviour of the solutions of a max-equation and of a system of two max-equation, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 5, 2, 237-247.

Papaschinopoulos, G. and Schinas, J., 2004, Global asymptotic stability and oscillation of a family of difference equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 294, 614-620.

Patula, W. T. and Voulov, H. D., 2004, On a max type recursive relation with periodic coefficients, *Journal of Difference Equations and Applications*, 10, 3, 329-338.

Prokup, N., 2000, Boundedness Global Stability and Periodicity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Radin, M. A., 2001, The Global Stability Boundedness and Periodicity Character of Certain Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Saleh, M. and Aloqeili, M., 2005, On the difference equation $y_{n+1} = A + y_n / y_{n-k}$ with $A < 0$, *Applied Mathematics and Computation*, (in press).

Saleh, M. and Aloqeili, M., 2005, On the rational difference equation $y_{n+1} = A + y_n / y_{n-k}$, *Applied Mathematics and Computation*, (in press).

Stevic, S., 2005, On The Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha + \frac{x_{n-1}^p}{x_n^p}$, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 18(1-2), 229-234.

Sun, T. and Xi, H., 2004, Global asymptotic stabilitiy of a family of difference equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 309, 2, 724-728.

Sundarapandian, V., 2002, Global asymptotic stabilitiy of nonlinear cascade systems, *Applied Mathematics Letters*, 151, 275-277.

Teixeria, C. T., 2000, Existence Stability Boundedness and Periodicity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Valicenti, S., 1999, Periodicity and Global Attractivity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Voulov, H. D., 2002, On the periodic character of some difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications*, 8, 799-810.

Voulov, H. D., 2002, Periodic solutions to a difference equation with maximum, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131, 2155-2160.

Yan, X. and Li, W. T., 2003, Global attractivity in a rational recursive sequence, *Applied Mathematics and Computation*, 145, 1, 1-12.

Yan, X. and Li, W. T., 2003, Global attractivity in the recursive sequence $x_{n+1} = \frac{\alpha - \beta x_n}{\gamma - x_{n-1}}$, *Applied Mathematics and Computation*, 138, 415-423.

Yan, X. and Li, W. T., 2004, Global attractivity for a class higher order nonlinear difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, 149, 533-546.

Yan, X., Li, W. T. and Zhao, Z., 2005, On the Recursive Sequence $x_{n+1} = \alpha - x_n / x_{n-1}$, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 17(1-2), 269-282.

Yang, X., 2005, On the global asymptotic stabilitiy of the difference equation $x_n = \frac{x_{n-1}x_{x-2} + x_{n-3} + a}{x_{n-1} + x_{x-2}x_{n-3} + a}$, *Applied Mathematics and Computation*, 171, 2, 859-863.

Yang, X., Evans, D. J. and Megson, G. M., 2005, On two rational difference equations, *Applied Mathematics and Computation*, (in press).

Yang, X., Evans, D. J. and Megson, G. M., 2005, Global asymptotic stabilitiy in a class of Putnam-type equations, *Nonlinear Analysis*, 64, 1, 42-50.

Yang, X., Hongjian, L., Evans, D. J. and Megson, G. M., 2004, Global asymptotic stabilitiy in a rational recursive sequence, *Applied Mathematics and Computation*, 158, 703-716.

Zeng, X. Y., Shi, B. and Zhang, D. C., 2005, Stability of solutions for the recursive sequence $x_{n+1} = (\alpha + \beta x_n)/(\gamma + g(x_{n-k}))$, *Journal of Computational Analysis and Applications*, 176, 283-291.