T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

k-FİBONACCİ, *k*-LUCAS SAYILARININ ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Cennet BOLAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Konya – 2008

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

k-FİBONACCİ, *k*-LUCAS SAYILARININ ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Cennet BOLAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE

Konya – 2008

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

k-FİBONACCİ, *k*-LUCAS SAYILARININ ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Cennet BOLAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 03 /07 /2008 Tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile / ~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE
(Danışman)

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
(Üye)

Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA
(Üye)

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

k-FİBONACCİ, *k*-LUCAS SAYILARININ
ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Cennet BOLAT

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE
Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Bu çalışmada ilk olarak, Falco'n ve Plaza tarafından Fibonacci sayılarının yeni bir genelleştirilmesi olan *k*-Fibonacci sayıları tanımlandı ve bu tanımdan yararlanılarak Lucas sayılarının bir genelleştirilmesi olan *k*-Lucas sayıları elde edildi. Binet formülü ve matris cebirinden yararlanılarak, *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayıları için bazı önemli özellikler bulundu. Ardından *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayıları için üreten fonksiyonları içeren özdeşlikler elde edildi. Son olarak da bu sayıların sürekli kesirler cinsinden yazılabileceği gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci Sayıları, Lucas Sayıları, *k*-Fibonacci Sayıları, *k*-Lucas Sayıları, Sürekli Kesirler, Üreten Fonksiyonlar.

ABSTRACT

MS. THESIS

PROPERTIES AND APPLICATIONS OF
k-FIBONACCI, *k*-LUCAS NUMBERS

Cennet BOLAT

Selcuk Unıversıty
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Hasan KÖSE

Jury: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Assist. Prof. Dr. Hasan KÖSE
Assist. Prof. Dr. Necati TAŞKARA

In this study, first the *k*-Fibonacci numbers were defined as a new generalization of the Fibonacci numbers by Falco'n and Plaza. Using this definition, *k*-Lucas numbers were obtained as a generalization of Lucas numbers. We have found some important properties of *k*-Fibonacci and *k*-Lucas numbers. The generating functions including identities for *k*-Fibonacci and *k*-Lucas numbers were obtained by Binet formula and matrix algebra.

Finally, it was shown that these numbers can the written in the form of a continued fraction.

Key Words: Fibonacci Numbers, Lucas Numbers, *k*-Fibonacci Numbers, *k*-Lucas Numbers, Continue Fractions, Generating Functions.

ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE danışmanlığında yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmamız beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışma ile ilgili literatürden bahsedilmiş ve buna ek olarak Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, tamsayılarda bölünebilme ve bir karesel matrisin spektral ayrışımı verilmiştir.

İkinci bölümde; k-Fibonacci sayılarının tanımı ve bazı özdeşlikler, k- Fibonacci Sayıları İçin Binet Benzeri Formül ve k- Fibonacci Sayılarında Bölünebilme verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Fibonacci sayılarının genelleştirilmesi olarak tanımlanan k-Fibonacci sayılarına paralel olarak, Lucas sayılarının genelleştirilmesi olan k-Lucas sayıları tanımlandı. Aynı zamanda bu sayılar için gerçeklenen özdeşlikler de bulundu.

Dördüncü bölümde; Üreten fonksiyonların genel olarak tanımı ile k-Fibonacci ve k-Lucas sayılarının üreten fonksiyonlarla ilgili birtakım özellikleri ele alınmıştır.

Beşinci bölümde; Sürekli kesirlere ait temel bilgiler verilmiş ve bunlara ek olarak k-Fibonacci ve k-Lucas sayılarının sürekli kesir olarak ifade edilmesi üzerinde durulmuştur.

Altıncı bölümde ise; Çalışma ile ilgili sonuçlar verilmiş ve bu çalışmanın başka hangi alanlarda uygulanabileceği hakkında fikirler öne sürülmüştür.

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocalarım Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE ile Arş. Gör. Hacı CİVCİV'e ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim

Cennet BOLAT

03.07.2008

İÇİNDEKİLER

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGELER VE KISALTMALAR vi
1. GİRİŞ 1
1.1. Fibonacci Sayıları 2
1.2. Fibonacci Sayıları ile İlgili Özdeşlikler 5
1.3. Lucas Sayıları 8
1.4. Lucas Sayıları ile İlgili Özdeşlikler 9
1.5. Fibonacci ve Lucas Sayıları Arasındaki İlişkiler 10
1.6. Tamsayılarda Bölünebilme 10
1.7. Bir Karesel Matrisin Spektral Ayrışımı 12
2. *k*- FİBONACCİ SAYILARI 14
2.1. *k*- Fibonacci Sayıları İçin Özdeşlikler 15
2.2. *k*- Fibonacci Sayıları İçin Binet Benzeri Formül 17
2.3. *k*- Fibonacci Sayılarında Bölünebilme 24
3. *k*- LUCAS SAYILARI 29
4. ÜRETEN FONKSİYONLAR 45
4.1. Üreten Fonksiyon 45
4.2. Üreten Fonksiyonların Eşitliği 45
4.3. Üreten Fonksiyonların Çarpımı ve Toplamı 46
4.4. Fibonacci ve Lucas Dizileri için Üreten Fonksiyonların Listesi 46
4.5. F_{m+n} ve L_{m+n} için Üreten Fonksiyonlar 47
4.6. *k*- Fibonacci Dizileri için Üreten Fonksiyonlar 47
4.7. *k*- Lucas Dizileri için Üreten Fonksiyonlar 50
4.8. $F_{k,m+n}$ ve $L_{k,m+n}$ için Üreten Fonksiyonlar 51

5. SÜREKLİ KESİRLER 52
5.1. Fibonacci Sayılarının Sürekli Kesir Olarak İfade Edilmesi 55
5.2. Lucas Sayılarının Sürekli Kesir Olarak Gösterimi 56
5.3. *k*-Fibonacci Sayılarının Sürekli Kesir Olarak İfade Edilmesi 58
5.4. *k*-Lucas Sayılarının Sürekli Kesir Olarak İfade Edilmesi 60
6. SONUÇ ve ÖNERİLER 61
KAYNAKLAR 62

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
F_n	n. ci Fibonacci Sayısı
L_n	n. ci Lucas Sayısı
$F_{k,n}$	n. ci *k*-Fibonacci Sayısı
$L_{k,n}$	n. ci *k*-Lucas Sayısı
$\{F_n\}$	Fibonacci Dizisi
$\{L_n\}$	Lucas Dizisi
$\{F_{k,n}\}$	*k*-Fibonacci Dizisi
$\{L_{k,n}\}$	*k*-Lucas Dizisi
$n \mid m$	n tamsayısı m tamsayısını böler
Z^+	Pozitif tamsayılar
$[a,b]$	a ve b sayılarının sürekli kesir gösterimi
(a,b)	a ve b sayılarının en büyük ortak böleni
N	Doğal sayılar
$\lvert a \rvert$	a sayısının mutlak değeri
$\det A$	A matrisinin determinantı

1. GİRİŞ

Bu bölüm, diğer bölümler için temel teşkil edecek bilgilerin verildiği bir bölümdür. Ayrıca bu bölümde, çalışma konuma birinci derece katkısı olan bugüne kadar yapıla gelmiş çalışmalar hakkında da kısa bir bilgi verilecektir.

[7]'de Falco'n ve Plaza, genelleştirilmiş Fibonacci sayıları olan *k*-Fibonacci sayılarını tanımladılar ve Fibonacci dizisinin hem klasik hem de Pell dizisi arasında genelleştirilmesini ele aldılar. İyi bilinen 4TLE (four-triangle longest-edge) bölümündeki iki geometrik dönüşümün uygulanması ile $\{F_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ genel *k*-ıncı Fibonacci sayısı her *k* pozitif reel sayısı için $F_{k,0}=0,\ F_{k,1}=1$ başlangıç koşulları altında,

$$F_{k,n+1}=kF_{k,n}+F_{k,n-1} \qquad n\geq 1$$

olarak bulundu ve bu sayıların birçok özelliği elemanter matris cebirinden faydalanarak direkt belirlendi.

[8]'de *k*-Fibonacci sayıları için genelleştirilmiş Binet formülü ve bu sayıların birçok özelliği Pascal 2-üçgeni ile bağlantılı olarak verildi.

[9]'da, 3-boyutlu *k*-Fibonacci spiralleri sunularak bu spirallerin *k*-Fibonacci hiperbolik fonksiyonlarla olan ilişkileri incelendi. Bu çalışma *k*-Fibonacci sayıları için esas özelliklerin bir özetinden daha ziyade 3-boyutlu *k*-Fibonacci spirallerinin geometrik özellikleri üzerine odaklandı.

[10]'da Falco'n ve Plaza, *k*-Fibonacci hiperbolik fonksiyonlarını tanımlayarak, bu fonksiyonların klasik hiperbolik fonksiyonlarla olan ilişkilerini gösterdiler.

[11]'de Falco'n ve Plaza, *k*-Fibonacci polinomlarını, *k*-Fibonacci sayıları ve bu sayıların birçok özelliğinin doğal bir genişlemesi olarak tanımladılar. Ayrıca *k*-Fibonacci polinomlarının konvolüsyonu biçimindeki bu polinomların türevlerini elde ettiler ve gerçekte bunun tamsayılar ailesinin yeni bir dizisi olduğunu gösterdiler. Böylece, Fibonacci polinomlarının türevleri için birçok bağıntıyı da ispat etmiş oldular.

[13]'de Farrokhi, n ve m bilinmeyenlerine göre çözülebilen $F_n = kF_m$ denkleminin k doğal sayıları için gerekli bazı koşullarını vermiş, aynı zamanda $k > 1$ için $F_n = kF_m$ denkleminin (n, m) şeklinde en az bir çözümünün olduğunu göstermiştir.

[16]'da Stakhov ve Rozin "The Golden Shofar" olarak adlandırılan özel bir ikinci dereceden fonksiyona dayanan eğri-lineer uzayın bir matematiksel modelinin Fibonacci dizisine yaklaşarak sürekli devam ettiğini göstermişlerdir.

Biz ise bu çalışma da aşağıda tanımları verilen Fibonacci, Lucas ve *k*-Fibonacci sayılarını ele alarak *k*- Lucas sayılarını tanımladık. Ayrıca bu sayılar için matris cebiri ve genelleştirilmiş Binet formülünü kullanarak birtakım özdeşlikler elde ettik. Bunların yanı sıra bu sayıların üreten fonksiyonlar ve sürekli kesirlerle olan ilişkilerini inceledik.

1.1 Fibonacci Sayıları

Pisalı Leonardo Fibonacci Rönesans öncesi Avrupası'nın en önde gelen matematikçisidir. Fibonacci için, "Matematiği Araplar'dan alıp, Avrupa'ya aktaran kişi" denilebilir.

Fibonacci'nin yaşamı hakkında matematik yazıları dışında pek az şey bilinmektedir. İlk ve en iyi bilinen kitabı Liber Abaci'nin yazıldığı 1202 tarihine bakılırsa, 1170 dolayında doğmuş olabileceği sanılıyor. Bu yönde pek kanıt olmamakla birlikte İtalya'nın Pisa kentinde doğmuş olması olasılığı var. Fibonacci henüz çocuk yaştayken, Pisa'lı bir tüccar olan babası Guglielmo, Pisalı tüccarların yaşadığı Bugia adlı Kuzey Afrika limanına Konsül olarak atanır. Babası burada oğluna hesap öğretmesi için bir Arap hoca tutar. Fibonacci daha sonra Liber Abaci'de hocasından "Dokuz Hint Rakamının Sanatını" öğrenirken duyduğu mutluluğu anlatacaktır.

Fibonacci'nin Liber Abaci adlı kitabının yayınlandığı yıllarda, Hindu-Arap sayıları, Avrupa'da Harzemli Muhammed Bin Musa'nın eserlerinin çevirilerini

okuyabilmiş bir kaç "aydın" dışında bilinmiyordu. Fibonacci, kitabında bu rakamları anlatmaya şöyle başlar:

Dokuz Hint Rakamı 9 8 7 6 5 4 3 2 1 dir. Bu dokuz rakama "0" işaretinin de eklenmesiyle, her hangi bir sayı yazılabilir.

Liber Abaci, 13.yy. Avrupa'sında büyük ilgi görür, çok sayıda kopya edilir ve kilisenin yasaklamasına karşın Arap sayıları İtalyan tüccarlar arasında yayılır. Kitap Kutsal Roma İmparatoru II. Frederick'in dikkatini çeker. Frederick bilime düşkün ve bilim adamlarını koruyan bir imparatordur. Bu nedenle kendisine Stupor Mudi (Dünya Harikası) denilmektedir. 1220 yılında Fibonacci huzura çağrılır ve Frederick'in bilim adamlarından biri tarafından sınava tabi tutulur. Sonunda Fibonacci göze girer. Yıllarca hem imparatorla, hem de imparatorun dostlarıyla yazışır. 1225 yılında yazdığı Liber Quadratornum'u (Kare Sayıların Kitabı) imparatora ithaf eder. Diyofantus Denklemleri'ne ayrılan bu kitap Fibonacci'nin başyapıtıdır. Her ne kadar Liber Abaci'ye göre çok daha dar bir çevrenin ilgisini çekse de kitap sayılar kuramına büyük katkı getirmiştir.

Leonardo Fibonacci, Arap Matematik'ini kullanışlı Hindu-Arap sayılarını Batı'ya tanıtmakla çok büyük bir katkıda bulundu. Ancak ilginçtir, çağımız matematikçileri Fibonacci'nin adını daha çok, Liber Abaci'de yer alan bir problemde ortaya çıkan bir sayı dizisi nedeniyle bilirler.

Liber Abaci'de yer alan problemin metni aşağı yukarı şöyledir:

-Adamın biri, dört bir yanı duvarla çevrili yere bir çift tavşan koymuş. Her çift tavşanın bir ay içinde yeni bir çift tavşan doğurduğu, her yeni çiftin de ergenleşmesi için bir ay gerektiği ve tavşanların ölmediği var sayılırsa, 100 ay sonunda dört duvarın arasında kaç çift tavşan olur?-

Fibonacci bu problemi, kitabına biyoloji biliminde bir uygulama olsun diye ya da nüfus patlaması sorununa bir çözüm getirsin diye koymamış; probleme, bir toplama alıştırması olarak bakmıştır. Buradan,

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots\}$$

sayı dizisini elde etmiştir. Bu sayı dizisinin her bir elemanına *"Fibonacci sayısı"* denir. Bu sayı dizisi, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},\ n \geq 1$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Bazı Fibonacci sayıları;

n	0	1	2	3	4	5	6	7	…
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	…

şeklinde verilebilir. Ayrıca Fibonacci sayıları geriye doğru $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ olmak üzere,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	…
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	…

şeklinde tanımlanır. **[18]**

Fibonacci sayıları ailesi üç ayrı nedenle, yüzyıllardan bu yana yoğun bir ilgi odağı olmuştur.

- Birincisi; dizinin daha küçük elemalarının doğada, beklenmedik yerlerde tekrar tekrar karşımıza çıkmasıdır; bitkilerde, böceklerde, çiçeklerde vb.
- İkinci neden; "$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ =Altın Oran" sayısının çok önemli bir sayı olmasıdır.

  Bu sayı, oyun kartlarının biçiminden Mısır'daki piramitlere kadar birçok şeyin matematiksel temelini oluşturmaktadır.
- Üçüncüsü; daha çok sayıların kendilerinin, sayılar teorisinde beklenmedik biçimde farklı birçok kullanımı olan ilginç özellikleriyle ilgilidir.

Önce doğada küçük Fibonacci sayılarıyla ne şekilde karşılaşıldığına bir bakalım. İlk olarak bir bitkinin sapındaki yaprakların, bir ağacın dallarının düzeninde hemen her zaman Fibonacci sayılarını bulursunuz. Eğer yapraklardan biri başlangıç noktası olarak alınmışsa ve bundan başlayarak, aşağıya veya yukarıya doğru, başlangıç noktasının tam olarak altında veya üstünde olan bir yaprak bulunana kadar yapraklar sayılırsa (sap çevresinde birden fazla dönmeye gerek olabilir) bulunan yaprak sayısı, farklı bitkiler, fidanlar ve ağaçlar için farklıdır, ancak her zaman bir Fibonacci

sayısıdır. Dahası yaprakları sayarken süreç kendini tamamlamadan önce yapılan devir sayısı da bir Fibonacci sayısıdır. Bir papatyanın yaprak sayısı genelde Fibonacci sayılarından 21, 34, 55 ve 89 dur.

Birçok matematikçi ve bilim insanının yıllar boyu ilgisini çeken ve araştırmalara konu olan bu rakama "*Altın oran*", "*Kutsal oran*", "*Mükemmel oran*" gibi isimler atfedilmektedir. Bunun nedeni bu orana göre yapılan ve oluşturulan resimlerin, mimari eserlerin, bir dikdörtgenin veya doğada bulunan bir çiçeğin yapraklarının insanın algılayabildiği en güzel göz nizamı olmasındandır. Altın Oran ile doğada hemen hemen her yerde karşılaşmaktayız;

- Sanatta ve mimaride Altın Oranı veren birçok eser bulabilmekteyiz. Eski Yunan Mimarisinden Leonardo Da Vinci, Raphael, Rubens, Boticelli gibi ünlü ressamlar da resimlerinde Altın Oran'ı kullananların başında gelmektedir.
- Bunun dışında Fibonacci sayı dizisinin ve altın oranın; şiir, müzik notaları, ekonomi gibi değişik ve birçok kullanım alanı bulunmaktadır. Aşağıdaki örnek bunlardan biri olan mimari alanındandır. Altın Oran'a özellikle eski Yunan mimarisinde sıkça rastlamaktayız.
- Mısır'daki piramitlerde de bu orana rastlanmaktadır. Piramitler hem kendi içlerinde bu kurala uymakta hem de birbirleri arasında bu orana uyan spiral içinde belli noktalarda konuşlandırıldıkları görülmektedir.
- Ayrıca Altın Oran birtakım firmalarca ürün dizaynı aşamasında da kullanılmaktadır. Bunlar sigara paketleri, kredi kartları, bazı ambalajlar ve benzerleridir.**[15–19–20]**

1.2 Fibonacci Sayıları İle İlgili Özdeşlikler

Yukarıda verilen Fibonacci sayılarının genel rekürans bağıntısından yararlanılarak aşağıda bu çalışma boyunca gerekli olacak bir takım özdeşlikler verildi. **[15]**

1. ***(Lucas, 1876)***

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

2. ***(Lucas, 1876)***

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$$

3. ***(Lucas, 1876)***

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$$

4. ***(Cassini's Formülü)***

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad n \geq 1$$

5. $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin kökleri $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ ve $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ olmak üzere,

$$\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

ve benzer şekilde $\beta^n = \beta F_n + F_{n-1}$ $(n \geq 1)$ dir.

6. ***(Fibonacci Binet Formülü)*** $\alpha > 0$ ve $\beta < 0$ olmak üzere,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \qquad n \geq 1$$

7. ***(Catalan, 1879)*** k pozitif bir tamsayı olmak üzere,

$$F_{n+k}F_{n-k} - F_n^2 = (-1)^{n+k+1}F_k^2 \qquad n \geq k$$

8.
$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n \qquad n \geq 1$$

9. ***(d'Ocagne Özdeşliği)***

$$F_m F_{n+1} - F_n F_{m+1} = (-1)^n F_{m-n}$$

10. ***(Honsberger Formülü)***

$$F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$$

11. ***(Koshy, 1998)*** $k \geq 1$ ve her j tamsayısı için,

$$\sum_{i=0}^{n} F_{ki+j} = \begin{cases} \dfrac{F_{nk+k+j} - (-1)^k F_{nk+j} - F_j - (-1)^j F_{k-j}}{L_k - (-1)^k - 1} & j < k \\ \dfrac{F_{nk+k+j} - (-1)^k F_{nk+j} - F_j - (-1)^k F_{j-k}}{L_k - (-1)^k - 1} & \textit{Aksi taktirde} \end{cases}$$

12. ***(Koshy, 1998)***

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ki} = \frac{F_{nk+k} - (-1)^k F_{nk} - F_k}{L_k - (-1)^k - 1}$$

13. ***(Koshy, 1998)***

$$\sum_{i=0}^{n} F_{i+j} = \begin{cases} F_{n+j+2} - F_j - (-1)^j F_{1-j} & j < 1 \\ F_{n+j+2} - F_{j+1} & \textit{Aksi taktirde} \end{cases}$$

14. $\alpha > 0$ ve $\beta < 0$ Fibonacci rekürans bağıntısının kökleri olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$$

15. ***(Lucas)***

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_i = F_{2n} \quad n \geq 0$$

16. $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{i}F_i=(-1)^{n-1}F_n \qquad n\geq 0$$

17. ***(Honsberger 1985, pp. 109-110)***

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{k}F_k=F_{3n}$$

1.3 Lucas Sayıları

Bir sayı dizisinin elemanlarının, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ bağıntısını kullanarak hesaplandığı düşünülürse, ilk iki sayı seçilmeden diziyi oluşturan elemanların bilinemeyeceği açıktır. Fibonacci dizisi, $F_0=0$ ve $F_1=1$ ile başlar, diğer Fibonacci sayıları, verilen Fibonacci denklemine göre belirlenir. Ancak bu iki başlangıç sayısının özel bir yanı olmadığından, başlangıç için başka değerler de seçilebilir ve aynı tanımlayıcı denklemi kullanarak tümüyle farklı bir sayı dizisi elde edilebilir. Fransız matematikçi Edward Lucas, başlangıç sayıları için seçilebilecek ikinci en basit $L_0=2$ ve $L_1=1$ sayılarını seçerek ve

$$L_{n+1}=L_n+L_{n-1},\ n\geq 1$$

bağıntısını kullanarak, Fibonacci dizisine benzer bir sayı dizisi elde etmiştir. Bu şekilde tanımlanan sayılara "*Lucas sayıları*" denir. Bu sayılardan bazıları;

n	0	1	2	3	4	5	6	7	…
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	…

olup, burada $L_{-n}=(-1)^n L_n$ olmak üzere,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	…
L_{-n}	2	-1	3	-4	7	-11	18	-29	…

şeklinde tanımlanır.

Günümüze dek süregelen araştırmalar, bu iki sayı dizisi arasında ilginç bağıntıların olduğunu kanıtlamıştır. Bu sayılar da bazen doğada görülmektedir. Örneğin, 123 sağ sarmalı ve 76 sol sarmalı olan Lucas ayçiçekleri olduğu bilinmektedir. **[15–18-20]**

1.4 Lucas Sayıları İle İlgili Özdeşlikler

Bu bölümde Fibonacci sayılarında olduğu gibi Lucas sayılarının genel tanımından yararlanılarak çalışmanın ilerleyen kısımlarında kullanacağımız bazı önemli toplam formülleri ve özdeşlikler verildi. **[15]**

1. $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$

2. $\sum_{i=1}^{n} L_{2i-1} = L_{2n} - 2$

3. $\sum_{i=1}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} - 1$

4. $L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$

5. Lucas sayıları için Fibonacci Binet formülünün benzeri ($\alpha > 0$ ve $\beta < 0$),

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \qquad n \geq 1$$

6. $L_{-n} = (-1)^n L_n \qquad n \geq 1$

7. $\alpha > 0$ ve $\beta < 0$ olmak üzere ardışık iki Lucas sayısının birbirine oranının limiti,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \alpha$$

8. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} L_i = L_{2n} \qquad n \geq 0$

9. $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i L_i = (-1)^n L_n \qquad n \geq 0$

10. ***(Honsberger 1985, p. 113)***

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k F_k = F_{3n}$$

1.5 Fibonacci ve Lucas Sayıları Arasındaki İlişkiler

Bu kısımda Fibonacci ve Lucas sayıları arasındaki temel ilişkiler verildi. **[15]**

$$L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n$$

$$F_{n+r} = L_r F_n + (-1)^{r+1} F_{n-r}$$

$$F_{2n} = F_n L_n$$

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$$

$$L_n = F_{n+2} - F_{n-2}$$

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$$

1.6 Tamsayılarda Bölünebilme

Tanım 1.6.1. $a \neq 0$ ve b tam sayıları için, $b = ac$ olacak şekilde c tamsayısı varsa "a , b 'yi böler" denir ve $a \mid b$ şeklinde gösterilir.

Lemma 1.6.1. $a, b, c, x, y, z \in Z$ için;

i. $a \neq 0$ olmak üzere $a \mid 0$ ve $a \mid a$ dır.

ii. $a|b$ ise $a|bc$ dir.

iii. $a \neq 0$ için $ab|ac$ ise $b|c$ dir.

iv. $a|b$ ve $a|c$ ise $a|bx+cy$ dir. **[1]**

Lemma 1.6.2. $a(a \neq 0), b, c \in Z$ için, $a|bc$ ve $(a,b)=1$ ise $a|c$ dir. **[1]**

İspat. $(a,b)=1$ olduğundan $1=ax+by$ olacak şekilde x, y tamsayıları vardır. Bu eşitliğin her iki tarafı c tamsayısı ile çarpılırsa $c=cax+cby$ elde edilir. Buradan, $a|bc$ ve $a|a$ olduğundan, Lemma 1.6.1-(iv) den, $a|cax+cby=c$ olduğu görülür.

Lemma 1.6.3. $a(a \neq 0), b, c \in Z$ için, $a|c$, $b|c$ ve $(a,b)=1$ ise $ab|c$ dir. **[1]**

İspat. $a|c$, $b|c$ olduğundan $c=ar$ ve $c=bs$ olacak şekilde r, s tamsayıları vardır. Buradan $b|ar$ ve $(a,b)=1$ olduğundan $b|r$ olur ki $r=bt\ (t \in N)$'dir. r'nin bu değeri $c=ar$ de yerine yazılırsa $c=abt$ olur. Böylece, $ab|c$ sonucu elde edilir.

Teorem 1.6.1 ***(Euclid Algoritması).*** a , b tamsayılar ve $b>0$ olsun. r_n sıfırdan farklı son kalan sayı olmak üzere bölme işlemi arka arkaya uygulanarak;

$$\begin{aligned}
a &= bq_1 + r_1 && 0 \le r_1 < b \\
b &= r_1 q_2 + r_2 && 0 \le r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2 q_3 + r_3, && 0 \le r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n, && 0 \le r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= r_n q_{n+1} + 0 .
\end{aligned}$$

dizisi elde edilsin. Bu takdirde, $(a,b)=r_n$ dir. **[4]**

1.7 Bir Karesel Matrisin Spektral Ayrışımı

A $n \times n$ matrisi, bir Λ köşegen matrise benzer ise, o takdirde A matrisine köşegenleştirilebilirdir denir. Diğer bir ifade ile, Λ bir $n \times n$ köşegen matris olmak üzere,

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

olacak şekilde terslenebilir bir n-kare P matrisi varsa, o zaman A matrisine köşegenleştirilebilir denir. **[4]**

Teorem 1.7.1. Terslenebilir n-kare P matrisi için, bir $n \times n$ A matrisinin

$$P^{-1}AP = \Lambda$$

olacak şekilde bir Λ köşegen matrisine benzer olması için gerek ve yeter şart A matrisinin n tane lineer bağımsız öz vektöre sahip olmasıdır.

Örnek 1.7.1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin spektral ayrışımını elde edelim.

A matrisinin karakteristik polinomu,

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 5\lambda$$

olup, matrisin öz değerleri $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ ve $\lambda_3 = 5$ olur.

Bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler ise sırasıyla,

$$v_1 = \left[1, -\frac{3}{2}, 1\right]^T, \; v_2 = [1,1,-3]^T \text{ ve } v_3 = [1,1,1]^T$$

dır.

Buradan

$$P=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ -3 & 2 & 2\\ 2 & -6 & 2\end{bmatrix}$$

dir. $\det P\neq 0$ olup, P matrisi terslenebilirdir ve tersi

$$P^{-1}=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}8 & -8 & 0\\ 5 & 0 & -5\\ 7 & 8 & 5\end{bmatrix}$$

dir. Böylece $\Lambda=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$P^{-1}AP=\Lambda \tag{1.1}$$

dir. (1.1)' den

$$A=P\Lambda P^{-1} \tag{1.2}$$

yazılır. (1.2) formu, A matrisinin spektral ayrışımıdır.

2. *k*-FİBONACCİ SAYILARI

Bu bölümde Fibonacci sayılarının yeni bir genelleştirilmesi olarak *k*-Fibonacci sayıları ele alındı. Öncelikle *k*-Fibonacci sayıları ile ilgili [7], [8], [9], [10], [11] ve [12]'deki Falco'n ve Plaza tarafından verilen bilgiler incelendi ardından bu sayıları içeren birtakım özdeşlikler elde edildi ve bunlara ek olarak *k*-Fibonacci sayılarının bölünebilme ile ilgili özellikleri ele alındı.

Tanım 2.1 (*Falco'n ve Plaza, 2007,[7]*).

Her $k > 0$ reel sayısı için $F_{k,0} = 0$, $F_{k,1} = 1$ olmak üzere

$$F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}, \quad n \geq 1 \tag{2.1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{F_{k,n}\}_{n \in N}$ dizisine ***k*-Fibonacci dizisi** denir.

k-Fibonacci dizisinin her bir elemanına, *k*-Fibonacci sayısı denir. *k*'nın bazı özel tamsayı değerleri için, $\{F_{k,n}\}_{n \in N}$ *k*-Fibonacci dizisi, sayılar teorisinde önemli yere sahip olan tamsayı dizilerine dönüşmektedir.

Örneğin $\{F_{k,n}\}_{n \in N}$ *k*-Fibonacci dizisinde;

$k = 1$ alınırsa $\{F_n\}_{n \in N} = \{0,1,1,2,3,5,8,...\}$ Fibonacci dizisi;

$k = 2$ alınırsa $\{P_n\}_{n \in N} = \{0,1,2,5,12,29,70,...\}$ Pell dizisi elde edilir.

(2.1) ile verilen denklem, sabit katsayılı II. mertebeden bir fark denklemi olup karakteristik denklemi,

$$r^2 = kr + 1 \tag{2.2}$$

şeklindedir. r_1 ve r_2; $r_1 > r_2$ olacak şekilde karakteristik denklemin kökleri olmak üzere,

i) $r_1 = \dfrac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, $r_2 = \dfrac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ (2.3)

ii) $r_2 < 0 < r_1$, $|r_2| < r_1$

iii) $r_1 + r_2 = k$, $r_1 r_2 = -1$, $r_1 - r_2 = \sqrt{k^2+4}$

bağıntıları mevcuttur.

Bu çalışma boyunca; $F_{k,n}$, n-inci k-Fibonacci sayısını, r_1 ve r_2 ise (2.3) ile verilen ifadeleri gösterecektir.

2.1 *k*- Fibonacci Sayıları İçin Özdeşlikler

[7], [8] ve [9]'da, Falco'n ve Plaza k-Fibonacci sayıları için aşağıda verilen özdeşlikleri ve de toplam formüllerini elde etmişlerdir.

Teorem 2.1.1 (***Falco'n ve Plaza, 2007,[8]***)**.**

$$F_{k,n-r}\,F_{k,n+r} - F_{k,r}^2 = (-1)^{n-r+1} F_{k,r}^2$$

dir.

Teorem 2.1.2 (***Falco'n ve Plaza, 2007,[8]***)**.**

$$F_{k,r+s} = F_{k,r+1}F_{k,s} + F_{k,r}F_{k,s-1}$$

dir.

Teorem 2.1.3 (***Falco'n ve Plaza, 2007,[8]***)**.** $m > n$ olmak üzere

$$F_{k,m}F_{k,n+1} - F_{k,m+1}F_{k,n} = (-1)^n F_{k,m-n}$$

dir.

Teorem 2.1.4 (***Falco'n ve Plaza, 2007,[8]***).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{k,n}}{F_{k,n-1}}=r_1$$

dir.

Teorem 2.1.5 (***Falco'n ve Plaza, 2007,[7]***).

$$\sum_{i=0}^{n}F_{k,i}=\frac{1}{k}\left[F_{k,n+1}+F_{k,n}-1\right]$$

dir.

Teorem 2.1.6 (***Falco'n ve Plaza, 2007,[7]***).

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{F_{k,j}}{p^j}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{F_{k,j}}{p^j}=\frac{p}{p^2-kp-1},\ p>r_1$$

dir.

Teorem 2.1.7 (***Falco'n ve Plaza, 2007,[7]***).

$$\sum_{i=1}^{n}F_{k,2i}=\frac{1}{k}(F_{k,2n+1}-1)$$

dir.

Teorem 2.1.8 (***Falco'n ve Plaza, 2007,[7]***).

$$\sum_{i=0}^{n}F_{k,2i+1}=\frac{1}{k}F_{k,2n+2}$$

dir.

Teorem 2.1.9 (***Falco'n ve Plaza, 2007,[7]***).

$$\sum_{i=0}^{n}F_{k,4i+1}=\frac{1}{k}F_{k,2n+1}F_{k,2n+2}$$

dir.

Teorem 2.1.10 (*Falco'n ve Plaza, 2007,[9]*).

$$F_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2i+1} k^{n-1-2i} \left(k^2+4\right)^i \qquad n \geq 1$$

dir.

Teorem 2.1.11 (*Falco'n ve Plaza, 2007, [9]).*

$$F_{k,n} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i} k^{n-1-2i} \qquad n \geq 1$$

dir.

2.2 *k*- Fibonacci Sayıları İçin Binet Benzeri Formül

Bilindiği üzere, Fibonacci ve Lucas sayıları için ilginç özdeşlikler ve formüller elde edilmesinde, Binet'in formülü sıkça kullanılmaktadır. Bu kısımda, genelleştirilmiş Binet formülü verilecektir.

Lemma 2.2.1 (*Kei Nakamura*). $\varphi = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ olmak üzere her n doğal sayısı için;

1. $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$

2. $\left(1-\varphi\right)^{n+2} = \left(1-\varphi\right)^{n+1} + \left(1-\varphi\right)^n$

dir.

Lemma 2.2.2. Her n doğal sayısı için

i) $r_1^{n+2} = kr_1^{n+1} + r_1^n$

ii) $r_2^{n+2} = kr_2^{n+1} + r_2^n$

dir.

İspat. r_1 ve r_2,

$$r^2 = kr + 1$$

karakteristik denkleminin kökleri olduğundan,

$$\begin{aligned} r_1^2 &= kr_1 + 1 \\ r_2^2 &= kr_2 + 1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

olacaktır. (2.4)'de verilen denklemlerin her iki yanının sırasıyla r_1^n ve r_2^n ile çarpılması, Lemma'nın (i) ve (ii) deki özdeşliklerini verir. ■

Teorem 2.2.1 (*Genelleştirilmiş Binet Formülü*).

$$F_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$$

dir.

İspat. İspatı matematiksel tümevarım yöntemi ile yapalım. İlk olarak $n = 0$ ve $n = 1$ için

$$\frac{1}{r_1 - r_2}\left(r_1^0 - r_2^0\right) = \frac{1}{r_1 - r_2}(1-1) = 0 = F_{k,0}$$

$$\frac{1}{r_1 - r_2}\left(r_1^1 - r_2^1\right) = \frac{1}{r_1 - r_2}\left(r_1 - r_2\right) = 1 = F_{k,1}$$

bulunur ve $n = 0$ ve $n = 1$ için verilen özdeşlik doğrudur.

Varsayalım ki, $0 \le i \le l + 1$ aralığındaki her *i* için

$$F_{k,i} = \frac{1}{r_1 - r_2}\left(r_1^i - r_2^i\right)$$

olsun.

k -Fibonacci sayılarının tanımı ve Lemma 2.2.1' den

$$F_{k,l+2} = kF_{k,l+1} + F_{k,l}$$

$$= \frac{k}{r_1 - r_2}\left(r_1^{l+1} - r_2^{l+1}\right) + \frac{1}{r_1 - r_2}\left(r_1^{l} - r_2^{l}\right)$$

$$= \frac{kr_1^{l+1} - kr_2^{l+1} + r_1^{l} - r_2^{l}}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{r_1^{l}\left(kr_1 + 1\right) - r_2^{l}\left(kr_2 + 1\right)}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{r_1^{l+2} - r_2^{l+2}}{r_1 - r_2}$$

bulunur. Böylece her n doğal sayısı için $F_{k,n} = \frac{r_1^{n} - r_2^{n}}{r_1 - r_2}$ ifadesi elde edilmiş olur. ■

Teorem 2.2.2.

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^{i}F_{k,i} = F_{k,2n} \qquad n \geq 0$$

dır.

İspat. Teorem 2.2.1'den hareketle,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^{i}F_{k,i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^{i}\left(\frac{r_1^{i} - r_2^{i}}{r_1 - r_2}\right)$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(kr_1\right)^{i} - \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(kr_2\right)^{i}\right]$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[\left(1 + kr_1\right)^{n} - \left(1 + kr_2\right)^{n}\right]$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[r_1^{2n} - r_2^{2n}\right]$$

$$= F_{k,2n}$$

dir. ■

Teorem 2.2.3. $k\sum_{i=1}^{n} F_{k,i} = F_{k,n+1} + F_{k,n-1} - 1$ dir.

İspat. *k*-Fibonacci dizisinin genel rekürans bağıntısı olan;

$$F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}, \quad n \geq 1$$

ifadesinden yararlanılarak

$$\sum_{i=1}^{n} F_{k,i+1} = k\sum_{i=1}^{n} F_{k,i} + \sum_{i=1}^{n} F_{k,i-1}$$

$$F_{k,n} + F_{k,n+1} = k\sum_{i=1}^{n} F_{k,i} + F_{k,0} + F_{k,1}$$

elde edilir ve $F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1$ olduğundan

$$k\sum_{i=1}^{n} F_{k,i} = F_{k,n+1} + F_{k,n-1} - 1$$

sonucuna varılır. ■

Teorem 2.2.4.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{k,mi} = \frac{F_{k,mn+m} - (-1)^m F_{k,mn} - F_{k,m}}{r_1^m + r_2^m - (-1)^m - 1}$$

dir.

İspat. Teorem 2.2.1'den

$$\sum_{i=1}^{n} F_{k,mi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_1^{mi} - r_2^{mi}}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[\sum_{i=1}^{n} r_1^{mi} - \sum_{i=1}^{n} r_2^{mi}\right]$$

Geometrik toplam formülü ve $r_1 - r_2 = k$, $r_1 r_2 = -1$ özelliklerinden

$$\sum_{i=1}^{n} F_{k,mi} = \frac{F_{k,mn+m} - (-1)^m F_{k,mn} - F_{k,m}}{r_1^m + r_2^m - (-1)^m - 1}$$

ispat tamamlanır. ■

$k=1$ için,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{mi} = \frac{F_{mn+m} - (-1)^m F_{mn} - F_m}{r_1^m + r_2^m - (-1)^m - 1}$$

elde edilir.

Teorem 2.2.5.

$$\sum_{i=0}^{n} F_{k,mi+j} = \frac{F_{k,mn+m+j} - (-1)^m F_{k,mn+j} + (-1)^m F_{k,j-m} - F_{k,j}}{r_1^m + r_2^m - (-1)^m - 1}$$

dir.

İspat. Teorem 2.2.1'de verilen genelleştirilmiş Binet formülünden hareketle,

$$\sum_{i=0}^{n} F_{k,mi+j} = \sum_{i=0}^{n} \frac{r_1^{mi+j} - r_2^{mi+j}}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[r_1^j \sum_{i=0}^{n} r_1^{mi} - r_2^j \sum_{i=0}^{n} r_2^{mi} \right]$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[r_1^j \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{r_1^{m(n+1)} - 1}{r_1^m - 1} \right) - r_2^j \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{r_2^{m(n+1)} - 1}{r_2^m - 1} \right) \right]$$

olup gerekli işlemler yapıldığında,

$$\sum_{i=0}^{n} F_{k,mi+j} = \frac{F_{k,mn+m+j} - (-1)^m F_{k,mn+j} + (-1)^m F_{k,j-m} - F_{k,j}}{r_1^m + r_2^m - (-1)^m - 1}$$

sonucu elde edilir. ■

Teorem 2.2.6.

$$\sum_{i=0}^{n} F_{k,i+j} = -\frac{1}{k}\left[-F_{k,n+j} - F_{k,n+j+1} + F_{k,j} + F_{k,j-1} \right]$$

dir.

İspat. İspatı, genelleştirilmiş Binet formülünden açıkça görülmektedir. ■

Teorem 2.2.7.

$$F_{k,-n} = (-1)^{n+1} F_{k,n} \qquad n \geq 1$$

dir.

İspat. İspatı *k*-Fibonacci sayıları için Binet benzeri formülden yararlanarak yapılacaktır.

$$F_{k,-n} = \frac{r_1^{-n} - r_2^{-n}}{r_1 - r_2} = \frac{\frac{1}{r_1^n} - \frac{1}{r_2^n}}{r_1 - r_2} \quad , \quad r_1 r_2 = -1$$

$$= \frac{\frac{r_2^n - r_1^n}{(r_1 r_2)^n}}{r_1 - r_2} = \frac{(-1)(r_1^n - r_2^n)}{(-1)^n}$$

$$= (-1)^{n+1} F_{k,n} .$$

olur ki, ispat tamamlanır. Verilen özdeşlikte $F_{k,-n} = F_{k,n}$ eşitliğinin olması için gerek ve yeter şart n 'nin tek sayı olmasıdır. ■

İspatın bir sonucu olarak $k = 1$ için;

$$F_{k,-n} = (-1)^{n+1} F_{k,n} \qquad n \geq 1$$

özdeşliği elde edilir. Eğer n tek ise; $F_{-n} = F_n$ 'dir.

Lemma 2.2.3. $r_1^n = r_1 F_n + F_{n-1}$, $n \geq 1$ dir.

İspat. Tanım 2.1'de verilen r_1 ve r_2 köklerinin $r_1 + r_2 = k$, $r_1 r_2 = -1$ özelliklerinden yararlanarak;

$$r_1^2 = r_1(k - r_2) = r_1 k - r_1 r_2 = r_1 k + 1$$

$$r_1^3 = r_1(r_1 k + 1) = r_1^2 k + r_1 = r_1(k^2 + 1) + k$$

$$\vdots$$

şeklinde işleme devam edilirse;

$$r_1^n = r_1 F_{k,n} + F_{k,n-1}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Benzer şekilde $r_2^n = r_2 F_{k,n} + F_{k,n-1}$ içinde aynı durum geçerlidir. ■

Lemma 2.2.4. $\forall a,b,c \in N$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) $F_{k,a+b-1} = F_{k,a}F_{k,b} + F_{k,a-1}F_{k,b-1}$

ii) $F_{k,a+b-2} = \frac{1}{k}\left[F_{k,a}F_{k,b} - F_{k,a-2}F_{k,b-2} \right]$

iii) $F_{k,a+b-3} = \frac{1}{k}\left[F_{k,a}F_{k,b}F_{k,c} + kF_{k,a-1}F_{k,b-1}F_{k,c-1} - F_{k,a-2}F_{k,b-2}F_{k,c-2} \right]$

İspat. i) $F_{k,a+b-1} = F_{k,a}F_{k,b} + F_{k,a-1}F_{k,b-1}$ olduğu Teorem 2.1.2'den açıktır.

ii) *k*-Fibonacci dizisinin genel tanımından yararlanarak,

$$\begin{aligned} F_{k,a+b-2} &= F_{k,a}F_{k,b-1} + F_{k,a-1}F_{k,b-2} = F_{k,a}\left(\frac{F_{k,b} - F_{k,b-2}}{k} \right) + \left(\frac{F_{k,a} - F_{k,a-2}}{k} \right) F_{k,b-2} \\ &= \frac{1}{k}\left[F_{k,a}F_{k,b} - F_{k,a-2}F_{k,b-2} \right] \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

iii) *k*-Fibonacci dizisinin genel tanımından yararlanarak,

$$\begin{aligned} F_{k,a+b-3} &= F_{k,a-1}F_{k,b+c-3} + F_{k,a}F_{k,b+c-2} \\ &= F_{k,a-1}\left(F_{k,b-2}F_{k,c-2} + F_{k,b-1}F_{k,c-1} \right) + F_{k,a}\left(\frac{F_{k,b}F_{k,c} - F_{k,b-2}F_{k,c-2}}{k} \right) \end{aligned}$$

olur. Buradan birtakım cebirsel işlemler sonucu

$$F_{k,a+b-3} = \frac{1}{k}\left[F_{k,a}F_{k,b}F_{k,c} + kF_{k,a-1}F_{k,b-1}F_{k,c-1} - F_{k,a-2}F_{k,b-2}F_{k,c-2} \right]$$

ispat tamamlanmış olur. ■

2.3 *k*- Fibonacci Sayılarında Bölünebilme

Bu bölümde *k*-Fibonacci sayıları ile ilgili bölünebilme özellikleri verilmeden önce Fibonacci sayılarındaki bölünebilme özellikleri incelendi ve bunlardan yararlanılarak da *k*-Fibonacci sayıları ile ilgili bölünebilme özellikleri verildi.

Teorem 2.3.1. Herhangi ardışık iki Fibonacci sayısı aralarında asaldır. Yani;

$$\left(F_n, F_{n-1}\right) = 1$$

dir. **[15]**

Teorem 2.3.2. $n \geq 0$ için $F_m \left| F_{mn} \right.$ dir. **[15]**

Teorem 2.3.3. $m, n \in Z^+$ için, $m \left| n \right.$ ise $F_m \left| F_n \right.$ dir. **[15]**

Teorem 2.3.4. $\left(F_{qn-1}, F_n\right) = 1$ dir. **[15]**

Teorem 2.3.5. $m, q, n, r \in Z^+$ için, $m = qn + r$ olmak üzere $\left(F_m, F_n\right) = \left(F_n, F_r\right)$ dir. **[15]**

Teorem 2.3.6. İki Fibonacci sayısının en büyük ortak böleni genellikle bir Fibonacci sayısıdır. Kısacası,

$$\left(F_m, F_n\right) = F_{(m,n)}$$

dir. **[1–15–17]**

Yukarıda verilen Fibonacci sayılarında bölünebilme ile ilgili özelliklerden ve birinci bölümde verilen tamsayılardaki bölünebilme kurallarından yararlanılarak *k*-Fibonacci sayıları için aşağıdaki teoremler sağlanır.

Teorem 2.3.7. $\left(F_{k,n}, F_{k,n-1}\right)=1$ dir.

İspat. $F_{k,n}=kF_{k,n-1}+F_{k,n-2}$ bağıntısı ve de tamsayılardaki bölme algoritmasından

$$F_{k,n}=kF_{k,n-1}+F_{k,n-2}$$

$$F_{k,n-1}=kF_{k,n-2}+F_{k,n-3}$$

$$F_{k,n-2}=kF_{k,n-3}+F_{k,n-4}$$

$$\vdots$$

$$F_{k,4}=kF_{k,3}+F_{k,2}$$

$$F_{k,3}=kF_{k,2}+F_{k,1}$$

$$F_{k,2}=kF_{k,1}+0$$

yazılır.

Böylece

$$\left(F_{k,n}, F_{k,n-1}\right)=F_{k,1}=1$$

dir. ■

Teorem 2.3.8. $n\geq 0$ tamsayısı için $F_{k,m}\left|F_{k,mn}\right.$ dir.

İspat. İspatı, n üzerinden tümevarımla yapalım. $F_{k,m}\left|0\right.$ ve $F_{k,m}\left|F_{k,m}\right.$ olduğundan, $n=0$ ve de $n=1$ için $F_{k,m}\left|F_{k,mn}\right.$ ifadesi doğrudur. Şimdi, her $l>1$ tamsayı değeri için $F_{k,m}\left|F_{k,mi}\right.$, $1\leq i\leq l$, olduğunu kabul edelim. O halde, $F_{k,m}\left|F_{k,m(l+1)}\right.$ olduğu gösterilecektir.

$$F_{k,r+s}=F_{k,r-1}F_{k,s}+F_{k,r}F_{k,s+1}$$

özdeşliğinden

$$F_{k,m(l+1)} = F_{k,ml+m} = F_{k,ml-1}F_{k,m} + F_{k,ml}F_{k,m+1} \tag{2.5}$$

yazılır. Böylece, $F_{k,m} \mid F_{k,ml}$ olduğundan, (2.5)'den, her $n \geq 1$ tamsayı değeri için $F_{k,m} \mid F_{k,mn}$ olacağı sonucuna ulaşılır. ■

Sonuç 2.3.1. $m,n \in Z^+$ için, $m \mid n$ ise $F_{k,m} \mid F_{k,n}$ dir.

İspat. *k*-Fibonacci dizisinin genel terimi

$$F_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \quad \text{ve} \quad F_{k,m} = \frac{r_1^m - r_2^m}{r_1 - r_2}$$

dır. $m \mid n$ olduğundan $n = mq \left(q \in Z^+\right)$ yazılır. Bu durumda,

$$F_{k,n} = F_{k,mq} = \frac{r_1^{mq} - r_2^{mq}}{r_1 - r_2} = \frac{\left(r_1^m\right)^q - \left(r_2^m\right)^q}{r_1 - r_2}$$

elde edilir. $x - y$ farkı $\left(x \neq y\right)$ farkını böleceğinden dolayı $F_{k,m} \mid F_{k,n}$ dir. ■

Teorem 2.3.9. $\left(F_{k,qn-1}, F_{k,n}\right) = 1$ dir.

İspat. $d = \left(F_{k,qn-1}, F_{k,n}\right)$ olsun. O halde $d \mid F_{k,qn-1}$ ve $d \mid F_{k,n}$ dir. $F_{k,n} \mid F_{k,qn}$ olduğundan, $d \mid F_{k,qn}$ dir. Böylece $d \mid F_{k,qn-1}$ ve $d \mid F_{k,qn}$ olur. $\left(F_{k,qn-1}, F_{k,qn}\right) = 1$ olduğu göz önüne alınırsa, $d \mid 1$ elde edilir. En büyük ortak bölen tanımı gereği, $d = 1$ olur ki, Teorem 2.3.9'un ispatı tamamlanır. ■

Teorem 2.3.10. $m,q,n,r \in Z^+$ için, $m = qn + r$ olmak üzere

$$\left(F_{k,m}, F_{k,n}\right) = \left(F_{k,n}, F_{k,r}\right)$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}\left(F_{k,m},F_{k,n}\right)&=\left(F_{k,qn+r},F_{k,n}\right)\\&=\left(F_{k,qn-1}F_{k,r}+F_{k,qn}F_{k,r+1},F_{k,n}\right)\\&=\left(F_{k,qn-1}F_{k,r},F_{k,n}\right)\\&=\left(F_{k,r},F_{k,n}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 2.3.11. $\left(F_{k,m},F_{k,n}\right)=F_{k,(m,n)}$ dir.

İspat. Farz edelim ki $m\geq n$ olsun. Euclid bölme algoritmasından,

$$\begin{aligned}m&=q_0n+r_1 && 0\leq r_1<n\\n&=q_1r_1+r_2 && 0\leq r_2<r_1\\r_1&=q_2r_2+r_3 && 0\leq r_3<r_2\\&\vdots\\r_{n-2}&=q_{n-1}r_{n-1}+r_n && 0\leq r_n<r_{n-1}\\r_{n-1}&=q_nr_n+0\end{aligned}$$

olur ve Teorem 2.3.5'den

$$\left(F_{k,m},F_{k,n}\right)=\left(F_{k,n},F_{k,r_1}\right)=\left(F_{k,r_1},F_{k,r_2}\right)=\ldots=\left(F_{k,r_{n-1}},F_{k,r_n}\right)$$

dir. Ayrıca $r_n\left|r_{n-1}\right.$ olduğundan Sonuç 2.3.1 gereği $F_{k,r_n}\left|F_{k,r_{n-1}}\right.$ olur. Buradan $\left(F_{k,r_{n-1}},F_{k,r_n}\right)=F_{k,r_n}$ dir. Böylece $\left(F_{k,m},F_{k,n}\right)=F_{k,r_n}$ olur. Ayrıca yukarıdaki bölme algoritmasına göre sıfırdan farklı son kalan olan r_n; verilen m,n tamsayılarının en büyük ortak bölenidir. Yani, $r_n=(m,n)$ dir. Böylece, $\left(F_{k,m},F_{k,n}\right)=F_{k,(m,n)}$ sonucu elde edilir. ■

Örnek 2.3.1. $F_{k,6}=k^5+4k^3+3k$ ve $F_{k,8}=k^7+6k^5+10k^3+4k$ dır. Polinomlardaki bölme algoritmasından,

$$k^7+6k^5+10k^3+4k=(k^2+2)(k^5+4k^3+3k)-k^3-2k$$

$$k^5+4k^3+3k=(k^2+2)\left(k^3+2k\right)-k$$

$$k^3+2k=\left(k^2+2\right)k+0$$

yazılır. Buradan görülmektedir ki,

$$\left(F_{k,6},F_{k,8}\right)=F_{k,(6,8)}=F_{k,2}=k$$

dır.

Teorem 2.3.12. $m,n\in Z^+$ için, $(m,n)=1$ olmak üzere $F_{k,m}F_{k,n}\left|F_{k,mn}\right.$ dir.

İspat. Teorem 2.3.2'den,

$$F_{k,m}\left|F_{k,mn}\right. \text{ ve } F_{k,n}\left|F_{k,mn}\right.$$

ifadesi, Teorem 2.3.11' den

$$\left(F_{k,m},F_{k,n}\right)=F_{k,(m,n)}=F_{k,1}=1$$

eşitliği ve Lemma 1.6.3' den $F_{k,m}F_{k,n}\left|F_{k,mn}\right.$ sonucu elde edilir. ■

3. *k* - LUCAS SAYILARI

Bu bölümde, Fibonacci sayılarının genelleştirilmesi olarak tanımlanan *k*-Fibonacci sayılarına paralel olarak, Lucas sayılarının genelleştirilmesi olan *k*-Lucas sayıları tanımlandı. Bu sayılar için, gerçeklenen özdeşlikler bulundu.

Tanım 3.1. Her *k* pozitif reel sayısı için $L_{k,0}=2$, $L_{k,1}=1$ olmak üzere

$$L_{k,n+1}=kL_{k,n}+L_{k,n-1}, \quad n\geq 1 \tag{3.1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{L_{k,n}\}_{n\in N}$ dizisine ***k*-Lucas dizisi** denir. *k*-Lucas dizisinin her bir elemanına, *k*-Lucas sayısı denir. **[5-6]**

Görülmektedir ki, $k=1$ için *k*-Lucas dizisi $\{L_{k,n}\}_{n\in N}$, $\{L_n\}_{n\in N}$ Lucas dizisine dönüşür. Şimdi, matris cebirinden faydalanarak, *k*-Lucas dizisi için özdeşlikler elde edilecektir.

Teorem 3.1. $M=\begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ matrisini göz önüne alalım. O takdirde her $n\geq 1$ için

$$M^n=\begin{pmatrix} L_{k,n+1}-3F_{k,n} & L_{k,n}-2F_{k,n-1} \\ * & * \end{pmatrix}$$

dir.

İspat. Teoremin ispatını matematiksel tümevarım metodu ile yapalım.

$$F_{k,0}=0, F_{k,1}=1, L_{k,1}=1,\ L_{k,2}=k+2$$

olduğundan,

$$M=\begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} L_{k,2}-3F_{k,1} & L_{k,1}-2F_{k,0} \\ * & * \end{pmatrix}$$

olarak yazılır.

O halde, iddia $n=1$ için doğrudur. Varsayalım ki, iddia $n-1$ için doğru olsun. Yani,

$$M^{n-1}=\begin{pmatrix} L_{k,n}-3F_{k,n-1} & L_{k,n-1}-2F_{k,n-2} \\ * & * \end{pmatrix}$$

olduğunu kabul edelim. O zaman,

$$M^n = M^{n-1}M$$

$$=\begin{pmatrix} L_{k,n}-3F_{k,n-1} & L_{k,n-1}-2F_{k,n-2} \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (k-1)\left(L_{k,n}-3F_{k,n-1}\right)+k\left(L_{k,n-1}-2F_{k,n-2}\right) & L_{k,n}-3F_{k,n-1}+L_{k,n-1}-2F_{k,n-2} \\ * & * \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} L_{k,n+1}-3F_{k,n} & L_{k,n}-2F_{k,n-1} \\ * & * \end{pmatrix}$$

olur ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.2. $X=\dfrac{2+r_1}{r_1}$, $Y=\dfrac{2+r_2}{r_2}$ olmak üzere,

$$L_{k,n}=\frac{Xr_1^{\,n}-Yr_2^{\,n}}{r_1-r_2} \tag{3.2}$$

dir.

İspat 1. (3.1) rekürans ilişkisi bir fark problemi gibi düşünülürse, C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere *k*-Lucas dizisinin genel terimi

$$L_{k,n}=C_1r_1^{\,n}+C_2r_2^{\,n} \tag{3.3}$$

olarak ifade edilir.

(3.3)' e, $L_{k,0}=2$ ve $L_{k,1}=1$ başlangıç koşullarının uygulanması ile

$$2=C_1+C_2$$
$$1=C_1r_1+C_2r_2$$

sistemi elde edilir. Buradan, C_1 ve C_2 bilinmeyenleri

$$C_1=\frac{1-2r_2}{r_1-r_2},\quad C_2=\frac{2r_1-1}{r_1-r_2} \tag{3.4}$$

olarak bulunur.

Böylece, (3.3) ve (3.4)' den

$$L_{k,n}=\frac{1-2r_2}{r_1-r_2}r_1^{\,n}+\frac{2r_1-1}{r_1-r_2}r_2^{\,n} \tag{3.5}$$

olur. (3.5)' de, $X=\frac{2+r_1}{r_1}$ ve $Y=\frac{2+r_2}{r_2}$ için,

$$L_{k,n}=\frac{Xr_1^{\,n}-Yr_2^{\,n}}{r_1-r_2}$$

bağıntısı elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

İspat 2. $M=\begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin spektral ayrışımını elde edelim. M matrisinin karakteristik polinomu

$$\det(M-\lambda I)=\begin{vmatrix} k-1-\lambda & 1 \\ k & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

dır. Buradan öz değerler,

$$\lambda_1=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\quad \text{ve}\quad \lambda_2=\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$$

olarak bulunur.

Şimdi bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörleri bulalım.

$\lambda_1 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$ için öz vektör, $u_1 = (\frac{\lambda_1 - 1}{k}, 1)^T$ dir. Benzer şekilde $\lambda_2 = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$ için öz vektör $u_2 = (\frac{\lambda_2 - 1}{k}, 1)$ olarak bulunur.

Böylece, $P = [u_1 \quad u_2]$ matrisi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 - 1}{k} & \frac{\lambda_2 - 1}{k} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olacaktır. $k>0$ olduğundan,

$$\det P = \frac{\lambda_1 - 1}{k} - \frac{\lambda_2 - 1}{k}$$
$$= \frac{\sqrt{k^2+4}}{k} \neq 0$$

olup, P^{-1} matrisi mevcuttur ve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{k}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{2-k+\lambda_1-\lambda_2}{2(\lambda_1-\lambda_2)} \\ \frac{-k}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{k-2+\lambda_1-\lambda_2}{2(\lambda_1-\lambda_2)} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir. $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere, M matrisinin spektral ayrışımı

$$M = P \Lambda P^{-1}$$

dir. Karesel bir matrisin kuvveti hesabından,

$$M^n = \underbrace{(P \Lambda P^{-1}).(P \Lambda P^{-1})...(P \Lambda P^{-1})}_{n \text{ tane}}$$
$$= P \Lambda^n P^{-1} \qquad (3.6)$$

$$= P\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n} \end{pmatrix} P^{-1}$$

şeklinde bir matris eşitliği bulunur.

(3.6) ile verilen eşitliğinin her iki yanının $v = (1,0)^T$ vektörü ile çarpımından,

$$M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda^n{}_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n} \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

matris eşitliği elde edilir. Teorem 3.1 ve (3.7)' den,

$$\begin{pmatrix} L_{k,n+1} - 3F_{k,n} \\ * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(\lambda_1 - 1)\lambda_1^{\,n} - (\lambda_2 - 1)\lambda_2^{\,n}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ * \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

dır. Böylece, $X = \dfrac{2+\lambda_1}{\lambda_1}$ ve $Y = \dfrac{2+\lambda_2}{\lambda_2}$ olmak üzere, (3.8)' den

$$L_{k,n+1} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1^{n+1} - \lambda_1^n - \lambda_2^{n+1} + \lambda_2^n + 3\lambda_1^n - 3\lambda_2^n\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1^{n+1}\left(1 + \frac{2}{\lambda_1}\right) - \lambda_2^{n+1}\left(1 + \frac{2}{\lambda_2}\right)\right)$$

$$= \frac{X\lambda_1^{n+1} - Y\lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

olarak bulunur. ■

Tanım 3.2 (*Companion Matris*). $p(\lambda) = \lambda^k - a_{k-1}\lambda^{k-1} - a_{k-2}\lambda^{k-2} - \ldots - a_1\lambda - a_0$ şeklinde *k*-yıncı dereden monik bir polinom ise o taktirde

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{k-2} & a_{k-1} \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisine $p(\lambda)$ polinomunun Companion matrisi denir. **[3-14]**

Teorem 3.3. $L_{k,0}=2$ ve $L_{k,1}=1$ olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} L_{k,n+1} \\ L_{k,n} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} L_{k,1} \\ L_{k,0} \end{bmatrix}$$

dır.

İspat. İspatı *n* üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. $n=1$ için bu eşitliğin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{bmatrix} L_{k,2} \\ L_{k,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} L_{k,1} \\ L_{k,0} \end{bmatrix}$$

yani

$$\begin{bmatrix} L_{k,2} \\ L_{k,1} \end{bmatrix} = A . \begin{bmatrix} L_{k,1} \\ L_{k,0} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

olduğundan $n=1$ için eşitliğin doğruluğu açıktır. Bu eşitlik $n-1$ için doğru olsun yani;

$$\begin{bmatrix} L_{k,n} \\ L_{k,n-1} \end{bmatrix} = A^{n-1} \begin{bmatrix} L_{k,1} \\ L_{k,0} \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

olsun. Buradan hareketle *n* için doğru olduğunu göstermeliyiz. (3.9) ve (3.10)'dan

$$\begin{bmatrix} L_{k,n+1} \\ L_{k,n} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} L_{k,1} \\ L_{k,0} \end{bmatrix}$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Örnek 3.1. $L_{k,4}$, 4. *k*-Lucas sayısını Companion matris yardımıyla hesaplayalım.

Teorem 3.3'e göre hesaplamak istersek $\begin{bmatrix} L_{k,n+1} \\ L_{k,n} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} L_{k,1} \\ L_{k,0} \end{bmatrix}$ eşitliğinde $n=3$ almamız yeterli olacaktır. Buna göre $n=3$ için;

$$\begin{bmatrix} L_{k,4} \\ L_{k,3} \end{bmatrix} = A^3 \begin{bmatrix} L_{k,1} \\ L_{k,0} \end{bmatrix}$$

olup, burada

$$A^3 = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} k^3 + 2k & k^2 + 1 \\ k^2 + 1 & k \end{bmatrix}$$

değerini yerine yazarsak

$$\begin{bmatrix} L_{k,4} \\ L_{k,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_{k,4} \\ L_{k,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^3 + 2k & k^2 + 1 \\ k^2 + 1 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} L_{k,4} \\ L_{k,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^3 + 2k^2 + 2k + 2 \\ k^2 + 2k + 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Teorem 3.4.

$$\sum_{i=0}^{n} L_{k,i} = \frac{1}{k}(L_{k,n+1} + L_{k,n} + 2k - 3)$$

dir.

İspat. $S_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} L_{k,i}$ olsun. O takdirde, $X = \frac{2 + r_1}{r_1}$ ve $Y = \frac{2 + r_2}{r_2}$ olmak üzere (3.2)'den,

$$S_{k,n} = \frac{1}{r_1 - r_2} \sum_{i=0}^{n} (X r_1^{\,i} - Y r_2^{\,i})$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2} \left[X \sum_{i=0}^{n} r_1^{\,i} - Y \sum_{i=0}^{n} r_2^{\,i} \right]$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2} \left[X \frac{r_1^{\,n+1} - 1}{r_1 - 1} - Y \frac{r_2^{\,n+1} - 1}{r_2 - 1} \right]$$

$$= \frac{1}{k} \left[\frac{X r_1^{\,n+1} - Y r_2^{\,n+1}}{r_1 - r_2} + \frac{X r_1^{\,n} - Y r_2^{\,n}}{r_1 - r_2} + 2 \frac{r_1^{\,2} - r_2^{\,2}}{r_1 - r_2} - 3 \frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_2} \right]$$

$$= \frac{1}{k}\left[L_{k,n+1} + L_{k,n} + 2\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 - r_2} - 3\frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_2} \right]$$

$$= \frac{1}{k}\left[L_{k,n+1} + L_{k,n} + 2F_{k,2} - 3 \right]$$

$$= \frac{1}{k}\left[L_{k,n+1} + L_{k,n} + 2k - 3 \right]$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.5.

$$L_{k,n-1}L_{k,n+1} - L_{k,n}^2 = (-1)^{n+1}(2k+3)$$

dir.

İspat .

$$L_{k,n}x + L_{k,n-1}y = L_{k,n+1}$$

$$L_{k,n+1}x + L_{k,n}y = L_{k,n+2}$$

sistemini göz önüne alalım.

$A = \begin{pmatrix} L_{k,n} & L_{k,n-1} \\ L_{k,n+1} & L_{k,n} \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ve $b = \begin{pmatrix} L_{k,n+1} \\ L_{k,n+2} \end{pmatrix}$ olmak üzere, sistem matris-vektör formunda,

$$Au = b$$

ile ifade edilir. Verilen sistemin bir çözümünün $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}$ olduğu açıktır. Ayrıca,

$$\det A = \begin{vmatrix} L_{k,n} & L_{k,n-1} \\ L_{k,n+1} & L_{k,n} \end{vmatrix}$$

$$= L_{k,n}^2 - L_{k,n-1}L_{k,n+1} \neq 0$$

dir. Böylece Cramer metodundan

$$y=\frac{\begin{vmatrix} L_{k,n} & L_{k,n+1} \\ L_{k,n+1} & L_{k,n+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{k,n} & L_{k,n-1} \\ L_{k,n+1} & L_{k,n} \end{vmatrix}}=1 \tag{3.11}$$

dir. (3.11)' den,

$$L_{k,n+2}L_{k,n}-L_{k,n+1}^2=L_{k,n}^2-L_{k,n-1}L_{k,n+1}$$

veya

$$L_{k,n+2}L_{k,n}-L_{k,n+1}^2=-\left(L_{k,n-1}L_{k,n+1}-L_{k,n}^2\right) \tag{3.12}$$

bağıntıları bulunur.

$$P_{k,n}=L_{k,n+2}L_{k,n}-L_{k,n+1}^2 \tag{3.13}$$

olsun. Buradan, $n=1$ için

$$P_{k,1}=L_{k,0}L_{k,2}-L_{k,1}^2=2k+3$$

dir.

(3.12) ve (3.13)' den,

$$P_{k,n-1}=-P_{k,n},\ n\geq 1$$

şeklinde rekürans bağıntısı bulunur. Bu bağıntı, başlangıç koşulu $P_{k,1}$ olan bir fark denklemi problemidir. O halde, bu fark probleminin çözümünden,

$$P_{k,n}=(-1)^{n+1}\left(2k+3\right)$$

veya

$$L_{k,n-1}L_{k,n+1}-L_{k,n}^2=(-1)^{n+1}(2k+3)$$

bağıntıları elde edilir. ■

Aşağıda verilecek olan Teorem, Teorem 3.5'in bir genelleştirilmesidir.

Teorem 3.6.

$$L_{k,n-r}L_{k,n+r} - L_{k,n}^2 = (2k+3)(-1)^{n-r}F_{k,r}^2$$

dir.

İspat. (3.2)'den,

$$L_{k,n-r}L_{k,n+r} - L_{k,n}^2 = \left(\frac{Xr_1^{n-r} - Yr_2^{n-r}}{r_1 - r_2}\right)\left(\frac{Xr_1^{n+r} - Yr_2^{n+r}}{r_1 - r_2}\right) - \left(\frac{Xr_1^{n} - Yr_2^{n}}{r_1 - r_2}\right)^2$$

$$= \frac{XY}{(r_1 - r_2)^2}\left[-r_1^{n-r}r_2^{n+r} - r_2^{n-r}r_1^{n+r} + 2r_1^n r_2^n\right]$$

$$= -\frac{(3+2k)}{(r_1 - r_2)^2}\left(-(r_1r_2)^n\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^r - (r_1r_2)^n\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^r + 2(r_1r_2)^n\right)$$

$$= (3+2k)(-1)^n\left(\frac{r_1^{2r} + r_2^{2r}}{(r_1r_2)^r} - 2\right)$$

$$= (3+2k)(-1)^{n-r}F_{k,r}^2$$

olur ki, ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.1.

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^{\,2} = 5(-1)^{n+1}$$

dir.

Teorem 3.7 (*d'Ocagne Özdeşliği*). $m > n$ için,

$$L_{k,m}L_{k,n+1} - L_{k,m+1}L_{k,n} = XY(-1)^n F_{k,m-n}$$

dir.

İspat. *k*-Lucas sayılarının genel rekürans bağıntısından elde edilen (3.2) ifadesini kullanarak,

$$L_{k,m}L_{k,n+1} - L_{k,m+1}L_{k,n} = \frac{Xr_1^m - Yr_2^m}{r_1 - r_2}.\frac{Xr_1^{n+1} - Yr_2^{n+1}}{r_1 - r_2} - \frac{Xr_1^{m+1} - Yr_2^{m+1}}{r_1 - r_2}.\frac{Xr_1^n - Yr_2^n}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{XY\left(r_1^m r_2^n\right)\left(r_1 - r_2\right) - XY\left(r_1^n r_2^m\right)\left(r_1 - r_2\right)}{\left(r_1 - r_2\right)^2}$$

$$= \frac{XY\left(r_1^m r_2^n\right) - XY\left(r_1^n r_2^m\right)}{\left(r_1 - r_2\right)}$$

$$= \frac{XY\left(r_1 r_2\right)^n \left(r_1^{m-n}\right) - XY\left(r_1 r_2\right)^n \left(r_2^{m-n}\right)}{\left(r_1 - r_2\right)}$$

$$= XY(-1)^n F_{k,m-n}$$

sonucu elde edilir. ■

Teorem 3.8. r_1 (3.2)'de verilen rekürans denkleminin kökleri olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{k,n}}{L_{k,n-1}} = r_1$$

dir.

İspat 1. $|r_2| < r_1$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n = 0$ dır. Bu bilgi ve (3.2)'den

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{k,n}}{L_{k,n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{Xr_1^n - Yr_2^n}{r_1 - r_2}}{\dfrac{Xr_1^{n-1} - Yr_2^{n-1}}{r_1 - r_2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{X - Y\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^n}{X\dfrac{1}{r_1} - Y\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^n \dfrac{1}{r_2}} = r_1$$

elde edilir. ■

İspat 2. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{L_{k,n}}{L_{k,n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ reel dizisi yakınsaktır. Bu dizinin yakınsadığı reel sayı x olsun. $\frac{L_{k,n+1}}{L_{k,n}} = k + \frac{L_{k,n-1}}{L_{k,n}}$ ve $k > 0$ olduğundan $x > 0$ olacaktır. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{k,n+1}}{L_{k,n}} = k + \lim_{n\to\infty} \frac{L_{k,n-1}}{L_{k,n}}$$

$$= k + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{L_{k,n}}{L_{k,n-1}}} \tag{3.14}$$

yazılır.

Bir reel dizi ile onun herhangi bir alt dizisinin yakınsadığı sayı aynı olacağından, (3.14)'den

$$x^2 - kx - 1 = 0$$

denklemi elde edilir. Hatırlanmalıdır ki, elde edilen denklem, (2.2)'de verilen denklemdir. $k > 0$ olduğundan, $r_1 > 0$ ve $r_2 < 0$ dır. O halde, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ reel dizisinin limitinin pozitif olması gerekliliği

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{k,n}}{L_{k,n-1}} = r_1$$

sonucunu verir. ■

Teorem 3.9. Her p $(p > r_1)$ reel sayısı için,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{L_{k,j}}{p^j} = \frac{p+2}{p^2 - kp - 1}$$

dir.

İspat. $p > r_1 > 0 > r_2$ olduğundan (3.2)'den

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{L_{k,j}}{p^j} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{\frac{Xr_1^{\,j} - Yr_2^{\,j}}{r_1 - r_2}}{p^j}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{X\left(\frac{r_1}{p}\right)^j - Y\left(\frac{r_2}{p}\right)^j}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2} \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{j=1}^{n} X\left(\frac{r_1}{p}\right)^j - Y\left(\frac{r_2}{p}\right)^j \right]$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2} \lim_{n\to\infty} \left[X\left(\frac{r_1}{p} . \frac{\left(\frac{r_1}{p}\right)^n - 1}{\frac{r_1}{p} - 1} \right) - Y\left(\frac{r_2}{p} . \frac{\left(\frac{r_2}{p}\right)^n - 1}{\frac{r_2}{p} - 1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2} \left(X . \frac{r_1}{p} . \frac{p}{p - r_1} - X . \frac{r_2}{p} . \frac{p}{p - r_2} \right)$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2} \left(\frac{2 + r_1}{r_1} \frac{r_1}{p - r_1} - \frac{2 + r_2}{r_2} \frac{r_2}{p - r_2} \right)$$

$$= \frac{p + 2}{p^2 - pk - 1}$$

sonucu elde edilir. ■

Teorem 3.10.

i) $\sum_{i=0}^{n} L_{k,2i} = \frac{1}{k}\left(L_{k,2n+1} + 2k - 1 \right)$

ii) $\sum_{i=0}^{n} L_{k,2i+1} = \frac{1}{k}\left[L_{k,2n+2} - 2 \right]$

iii) $\sum_{i=0}^{n} L_{k,4i+1} = \frac{1}{k^2\left(k^2+4\right)}\left[L_{k,4n+5} - L_{k,4n+1} - 2k^3 + k^2 - 4k \right]$

dir.

İspat. $X=\dfrac{2+r_1}{r_1}$ ve $Y=\dfrac{2+r_2}{r_2}$ olsun.

i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_{k,2i}=\sum_{i=0}^{n}\frac{Xr_1^{2i}-Yr_2^{2i}}{r_1-r_2}$

$$=\frac{1}{r_1-r_2}\left[X\sum_{i=0}^{n} r_1^{2i}-Y\sum_{i=0}^{n} r_2^{2i}\right]$$

$$=\frac{1}{r_1-r_2}\left[X\frac{r_1^{2n+2}-1}{r_1^2-1}-Y\frac{r_2^{2n+2}-1}{r_2^2-1}\right]$$

$$=\frac{1}{k}\left(L_{k,2n+1}+2k-1\right),$$

ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_{k,2i+1}=\sum_{i=0}^{n}\frac{X\,r_1^{2i+1}-Y\,r_2^{2i+1}}{r_1-r_2}$

$$=\frac{1}{r_1-r_2}\left[X\sum_{i=0}^{n} r_1^{2i+1}-Y\sum_{i=0}^{n} r_2^{2i+1}\right]$$

$$=\frac{1}{r_1-r_2}\left[X\,r_1\sum_{i=0}^{n} r_1^{2i}-Y\,r_2\sum_{i=0}^{n} r_2^{2i}\right]$$

$$=\frac{1}{r_1-r_2}\left[X\,r_1\frac{r_1^{2n+2}-1}{r_1^2-1}-Y\,r_2\frac{r_2^{2n+2}-1}{r_2^2-1}\right]$$

$$=\frac{1}{k}\left[L_{k,2n+2}-2\right],$$

iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} L_{k,4i+1}=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{X\,r_1^{4i+1}-Y\,r_2^{4i+1}}{r_1-r_2}\right]$

$$=\frac{1}{r_1-r_2}\left[X\,r_1\sum_{i=0}^{n} r_1^{4i}-Y\,r_2\sum_{i=0}^{n} r_2^{4i}\right]$$

$$=\frac{1}{r_1-r_2}\left[X\,r_1\frac{r_1^{4n+4}-1}{r_1^4-1}-Y\,r_2\,\frac{r_2^{4n+4}-1}{r_2^4-1}\right]$$

$$=\frac{1}{k^2\left(k^2+4\right)}\left[L_{k,4n+5}-L_{k,4n+1}-2k^3+k^2-4k\right]$$

elde edilir. ■

Sonuç 3.2.

i) $\sum_{i=0}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} + 1$

ii) $\sum_{i=0}^{n} L_{2i+1} = L_{2n+2} - 2$

iii) $\sum_{i=0}^{n} L_{4i+1} = \frac{1}{5}\left[L_{4n+5} - L_{4n+1} - 5\right]$

dir.

Teorem. 3.11.

$$\sum_{i=1}^{n} L_{k,mi} = \frac{L_{k,mn+m} - (-1)^m L_{k,mn} - L_{k,m} + 2(-1)^m}{r_1^m + r_2^m - 1 - (-1)^m}$$

dir.

İspat. $X = \frac{2+r_1}{r_1}$, $Y = \frac{2+r_2}{r_2}$, $r_1 - r_2 = k$, $r_1 r_2 = -1$ özelliklerini ve (3.2)'ni kullanarak

$$\sum_{i=1}^{n} L_{k,mi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X r_1^{mi} - Y r_2^{mi}}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[X \sum_{i=1}^{n} r_1^{mi} - Y \sum_{i=1}^{n} r_2^{mi} \right]$$

Geometrik toplam formülü ve birtakım cebirsel işlemler sonucu

$$\sum_{i=1}^{n} L_{k,mi} = \frac{L_{k,mn+m} - (-1)^m L_{k,mn} - L_{k,m} + 2(-1)^m}{r_1^m + r_2^m - 1 - (-1)^m}$$

elde edilir.

- $k = 1$ için,

$$\sum_{i=1}^{n} L_{mi} = \frac{L_{mn+m} - (-1)^m L_{mn} - L_m + 2(-1)^m}{r_1^m + r_2^m - 1 - (-1)^m}$$

dir. ■

Teorem. 3.12.

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^i L_{k,i} = L_{k,2n}, \qquad n \geq 0$$

dir.

İspat. Teorem 3.2'den,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^i L_{k,i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}k^i \left(\frac{Xr_1^i - Yr_2^i}{r_1 - r_2}\right)$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[X\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(kr_1)^i - Y\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(kr_2)^i\right]$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[X(1+kr_1)^n - Y(1+kr_2)^n\right]$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[Xr_1^{2n} - Yr_2^{2n}\right]$$

$$= L_{k,2n}$$

elde edilir ki, istenilendir. ■

4. ÜRETEN FONKSİYONLAR

Üreten fonksiyonlar; sabit katsayılı lineer indirgeme dizileri ve bu dizilerin çeşitli formüllerini elde etmekte çok kullanışlıdır. 1718'de Fransız Matematikçi Abraham De Moivre (1667–1754) Fibonacci rekürans ilişkisini çözmek için üreten fonksiyonları bulmuştur.

Bu bölümde, Fibonacci ve Lucas dizileri için verilen üreten fonksiyonlardan yararlanılarak *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas dizileri için üreten fonksiyonlar elde edildi.

4.1 Üreten Fonksiyon

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ reel sayıların bir dizisi olmak üzere

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

fonksiyonu $\{a_n\}$ dizisi için bir üreten fonksiyon olarak adlandırılır.

Aynı zamanda $i > n$ için $a_i = 0$ olacak şekilde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sonlu dizisi için de üreten fonksiyon tanımlanabilir. Böylece $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sonlu dizisi için,

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

fonksiyonu bir üreten fonksiyondur. **[15]**

4.2 Üreten Fonksiyonların Eşitliği

$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ ve $g(x) = \sum_0^\infty b_n x^n$ iki üreten fonksiyonu her $n \geq 0$ için $a_n = b_n$ ise üreten fonksiyonlar eşittir. **[15]**

4.3 Üreten Fonksiyonların Çarpımı ve Toplamı

$f(x)=\sum_{0}^{\infty}a_n x^n$ ve $g(x)=\sum_{0}^{\infty}b_n x^n$ iki üreten fonksiyon ise,

$$f(x)+g(x)=\sum_{0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n \quad \text{ve} \quad f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_i b_{n-i}\right)x^n$$

şeklinde ifade edilir. **[15]**

4.4 Fibonacci ve Lucas Dizileri için Üreten Fonksiyonların Listesi

1967'de V. E. Hoggatt, Jr. ve D. A. Lind tarafından Fibonacci ve Lucas sayılarının çeşitli kuvvetleri için aşağıdaki üreten fonksiyonlar verilmiştir. **[15]**

1. $\dfrac{x}{1-x-x^2}=\sum_{0}^{\infty}F_n x^n$

2. $\dfrac{1}{1-x-x^2}=\sum_{0}^{\infty}F_{n+1}x^n$

3. $\dfrac{2-x}{1-x-x^2}=\sum_{0}^{\infty}L_n x^n$

4. $\dfrac{1+2x}{1-x-x^2}=\sum_{0}^{\infty}L_{n+1}x^n$

5. $\dfrac{F_k x}{1-L_k x+(-1)^k x^2}=\sum_{0}^{\infty}F_{kn}x^n$ (Hoggatt, 1971)

6. $\dfrac{F_r+(-1)^r F_{k-r}x}{1-L_k x+(-1)^k x^2}=\sum_{0}^{\infty}F_{kn+r}x^n$

Aşağıda verilen üreten fonksiyonlar 1971'de V. E. Hoggatt, Jr. tarafından türetilmiştir. **[15]**

7. $\dfrac{x}{1-3x+x^2}=\sum_{0}^{\infty}F_{2n}x^n$

8. $\dfrac{1-x}{1-3x+x^2} = \sum_{0}^{\infty} F_{2n+1} x^n$

9. $\dfrac{3-2x}{1-3x+x^2} = \sum_{0}^{\infty} L_{2n+2} x^n$

4.5 F_{m+n} ve L_{m+n} için Üreten Fonksiyonlar

F_{m+n} için üreten fonksiyon,

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{m+n} x^n = \frac{F_m + F_{m-1} x}{1-x-x^2}$$

dir.

Benzer şekilde,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{m+n} x^n = \frac{L_m + L_{m-1} x}{1-x-x^2}$$

dir. **[15]**

Fibonacci ve Lucas dizileri için [15]' de verilen üreten fonksiyonlarla ilgili tüm özelliklerden yararlanılarak aşağıda *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas dizileri için üreten fonksiyonlar ayrı başlıklar altında verilecektir.

4.6 *k*-Fibonacci Dizileri için Üreten Fonksiyonlar

Bu kısımda *k*-Fibonacci dizileri için üreten fonksiyonlar elde edilecektir. Sonuç olarak, *k*-Fibonacci dizileri üreten fonksiyonu sağlayan kuvvet serilerinin katsayıları olarak görülür. **[8]**

O takdirde,

$$f_k(x) = F_{k,0} + F_{k,1} x + F_{k,2} x^2 + \ldots + F_{k,n} x^n + \ldots$$

şeklinde bir analitik fonksiyonu ele alalım. Böylece,

$$kxf_k(x) = kF_{k,0}x + kF_{k,1}x^2 + kF_{k,2}x^3 + \ldots + kF_{k,n}x^{n+1} + \ldots,$$

$$x^2 f_k(x) = F_{k,0}x^2 + F_{k,1}x^3 + F_{k,2}x^4 + \ldots + F_{k,n}x^{n+2} + \ldots$$

eşitlikleri yazılabilir. $F_{k,i} = kF_{k,i-1} + F_{k,i-2}$, $F_{k,0} = 0$ ve $F_{k,1} = 1$ olduğu bilindiğine göre bu eşitliklerin taraf tarafa çıkarılması sonucu,

$$\left(1 - kx - x^2\right) f_k(x) = x$$

elde edilir. Buradan $\left\{F_{k,n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ *k*-Fibonacci dizisi için üreten fonksiyon

$$f_k(x) = \frac{x}{1 - kx - x^2}$$

olarak bulunur. **[8]**

Benzer şekilde *k*-Fibonacci sayıları için Teorem 2.2.1'de verilen Binet benzeri formülden yararlanılarak aşağıdaki üreten fonksiyonlar elde edilir.

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}x^n$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} r_1^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} r_2^n x^n\right]$$

$$= \frac{x}{1 - kx - x^2}.$$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2}x^n$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[r_1\sum_{n=0}^{\infty}(r_1x)^n - r_2\sum_{n=0}^{\infty}(r_2x)^n\right]$$

$$= \frac{1}{1 - kx - x^2}.$$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,mn}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^{mn} - r_2^{mn}}{r_1 - r_2}x^n$

$$= \frac{F_{k,m}x}{1-x\left(r_1^m + r_2^m\right)+\left(-1\right)^m x^2}.$$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,mn+r}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^{mn+r} - r_2^{mn+r}}{r_1 - r_2}x^n$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[r_1^r \sum_{n=0}^{\infty}\left(r_1^m x\right)^n - r_2^r \sum_{n=0}^{\infty}\left(r_2^m x\right)^n \right]$$

$$= \frac{F_{k,r} - \left(-1\right)^m F_{k,r-m}x}{1-x\left(r_1^m + r_2^m\right)+\left(-1\right)^m x^2}.$$

5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,2n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^{2n} - r_2^{2n}}{r_1 - r_2}x^n$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(r_1^2 x\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(r_2^2 x\right)^n \right]$$

$$= \frac{xk}{1-\left(k^2+2\right)x + x^2}$$

Bu ifadeden $k = 1$ için

$$\frac{x}{1-3x+x^2} = \sum_{0}^{\infty} F_{2n}x^n$$

bulunur.

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,2n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^{2n+1} - r_2^{2n+1}}{r_1 - r_2}x^n$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[r_1 \sum_{n=0}^{\infty}\left(r_1^2 x\right)^n - r_2 \sum_{n=0}^{\infty}\left(r_2^2 x\right)^n \right]$$

$$= \frac{\left(1-x\right)k}{1-\left(k^2+2\right)x + x^2}$$

Bu ifadeden $k=1$ için

$$\frac{1-x}{1-3x+x^2}=\sum_{0}^{\infty}F_{2n+1}x^n$$

bulunur.

4.7 *k*-Lucas Dizileri için Üreten Fonksiyonlar

Bu bölümde *k*-Fibonacci dizileri için bulunan üreten fonksiyonlara benzer olarak *k*-Lucas dizileri için üreten fonksiyonlar Teorem 3.2'de verilen Lucas sayıları için genelleştirilmiş Binet formülü kullanılarak elde edilecektir.

1. $$\sum_{n=0}^{\infty}L_{k,n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Xr_1^n-Yr_2^n}{r_1-r_2}x^n$$

$$=\frac{1}{r_1-r_2}\left[X\sum_{n=0}^{\infty}r_1^{\,n}x^n-Y\sum_{n=0}^{\infty}r_2^{\,n}x^n\right]$$

Geometrik toplam formülünden yararlanılarak ve bazı cebirsel işlemler ile sonuç

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_{k,n}x^n=\frac{2-2kx+x}{1-kx-x^2}$$

olarak bulunur.

Bu ifade de $k=1$ alınırsa

$$\frac{2-x}{1-x-x^2}=\sum_{0}^{\infty}L_nx^n$$

üreten fonksiyonu elde edilir.

2. $$\sum_{n=0}^{\infty}L_{k,n+1}x^n=\frac{1+2x}{1-kx-x^2}$$

3. $$\sum_{n=0}^{\infty}L_{k,2n+2}x^n=\frac{L_{k,2}-2x}{1-(k^2+2)x+x^2}$$

4.8 $F_{k,m+n}$ ve $L_{k,m+n}$ için Üreten Fonksiyonlar

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{k,m+n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^{m+n} - r_2^{m+n}}{r_1 - r_2} x^n$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[r_1^m \sum_{n=0}^{\infty} r_1^n x^n - r_2^m \sum_{n=0}^{\infty} r_2^n x^n \right]$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[\frac{r_1^m}{1 - r_1 x} - \frac{r_2^m}{1 - r_2 x} \right]$$

$$= \frac{1}{r_1 - r_2}\left[\frac{r_1^m - r_2^m + r_1^{m-1}x - r_2^{m-1}x}{1 - kx - x^2} \right]$$

$$= \frac{F_{k,m} + F_{k,m-1}x}{1 - kx - x^2}$$

şeklinde bulunur.

Benzer olarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{k,m+n}x^n = \frac{L_{k,m} + L_{k,m-1}x}{1 - kx - x^2}$$

elde edilir.

5. SÜREKLİ KESİRLER

Bu bölümde sürekli kesirlere ait temel bilgiler verildi. Bunların yanı sıra Fibonacci ve Lucas sayılarının sürekli kesir olarak ifadesi ele alındı. Ardından *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayılarının sürekli kesir olarak ifade edilmesi incelendi.

Tanım 5.1. $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitif reel sayılar ve a_0 negatif olmayan bir reel sayı olsun. Bu durumda $n \geq 1$ ve $[a_0] = a_0$ olmak üzere

$$[a_0; a_1, ..., a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, ..., a_n]} \tag{5.1}$$

ifadesine sürekli kesir denir. **[14]**

Örnek 5.1. $[2] = 2$, $[7;2] = 7 + \frac{1}{2}$

$$[3;7,2] = 3 + \frac{1}{[7;2]} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2}}$$

$$[8;3,7,2] = 8 + \frac{1}{[3;7,2]} = 8 + \frac{1}{3 + \frac{1}{[7;2]}} = 8 + \frac{1}{3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{2}}}$$

olur. Genel olarak;

$$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1},$$

$$[a_0; a_1, a_2] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2]} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}$$

ve

$$[a_0;a_1,...,a_n]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

ifadesi ile verilir.

Aşağıda verilen teorem sınırlı sürekli bir kesir verildiğinde bunun daha az terimli bir sürekli kesirle ifade edilebileceği ile ilgilidir.

Teorem 5.1. $n\geq 1$ olsun. $0\leq i\leq n$, $a_0\geq 0$ ve $a_i\geq 0$ ve $\forall i$ için $i>0$ olmak üzere a_i'ler reel sayılar olsun. O halde

$$[a_0;a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n]=\left[a_0;a_1,a_2,...,a_{n-2},a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right] \tag{5.2}$$

dir. **[14]**

Sınırlı sürekli kesirlerin değeri verilen teoremin ard arda uygulanması ile hesaplanabilir. $0\leq k\leq n-1$ olacak şekilde her k için

$$[a_0;a_1,...,a_n]=\left[a_0;a_1,...,a_k,[a_{k+1};a_{k+2},...,a_n]\right]$$

eşitliği sağlanır.

Sonuç 5.1. Eğer verilen n ve a_i' ler Teorem 5.1'deki gibi ise

$$[a_0;a_1,a_2,...,a_{n-1},1]=[a_0;a_1,a_2,...,a_{n-2},a_{n-1}+1] \tag{5.3}$$

dir.

İspat. Teorem 5.1'de $a_n=1$ alınırsa ispat tamamlanır.

$\frac{a}{b}$ bir rasyonel sayı olmak üzere bu sayıyı bir sınırlı sürekli kesir haline getirmek mümkündür. Bunun için Euclidean algoritması kullanılarak a ve b

sayılarının en büyük ortak böleni yani (a,b) bulunur ve tamsayı terimler ile bu bölümler ortaya çıkarılır. **[15–14]**

Örnek 5.2. $\frac{200}{7}$ kesri sınırlı sürekli bir kesir halinde yazılmak istenirse,

$$200 = 28.(7) + 4 \qquad \frac{200}{7} = 28 + \frac{4}{7}$$

$$7 = 1.(4) + 3 \qquad \text{bu ise} \qquad \frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$$

$$4 = 1.(3) + 1 \qquad \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

$$3 = 3.(1) \qquad \frac{3}{1} = 3$$

Tanım 5.2. a_i 'ler pozitif reel sayılar ve $a_0 \geq 0$ olmak üzere $a = [a_0; a_1, ..., a_n]$ olsun. Eğer $0 \leq k \leq n$ ve $E_k = [a_0; a_1, ..., a_k]$ ise bu durumda E_k'ya A'nın k-yıncı yakınsayanı denir. **[14]**

Örnek 5.3. $A = [8; 3, 7, 2]$ ise

$$E_1 = [8; 3] = \left[8 + \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{25}{3}\right] = \frac{25}{3}$$

$$E_2 = [8; 3, 7] = \left[8; 3 + \frac{1}{7}\right] = \left[8; \frac{22}{7}\right] = \left[8 + \frac{7}{22}\right] = \left[\frac{183}{22}\right] = \frac{183}{22}$$

olup E_1 ve E_2 sırasıyla A'nın birinci ve ikinci yakınsayanıdır. **[14]**

Tanım 5.3. $a_0 \geq 0$ ve $\forall i$ için $a_i > 0$ olsun. Bu takdirde sınırsız sürekli kesir

$$[a_0; a_1, ..., a_n, ...]$$

veya

$$\lim_{n \to \infty} [a_0; a_1, ..., a_n, ...]$$

şeklinde tanımlanır. **[14]**

5.1 Fibonacci Sayılarının Sürekli Kesir Olarak İfade Edilmesi

Aşağıda verilen örnekte ardışık Fibonacci sayılarının oranlarının bir sürekli kesir olarak yazılabileceği gösterildi.

Örnek 5.1.1. F_n ve F_{n+1} sayılarının en büyük ortak bölenini Euclidean algoritmasıyla $n-1$ tane eşitlikle aşağıdaki gibi yazabilir.

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= 1.F_n + F_{n-1} \\ F_n &= 1.F_{n-1} + F_{n-2} \\ &\vdots \\ F_4 &= 1.F_3 + F_2 \\ F_3 &= 1.F_2 + F_1 \quad (F_2 = F_1 \text{ olduğundan}) \\ F_3 &= 2F_2 + 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

olduğundan dolayı $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ ifadesi

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = [1;1,1,...,1,2]$$

şeklinde bir sürekli kesir olarak yazılabilir. Ayrıca Sonuç 5.1'den bu son ifade

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = [1;1,1,...,1,1,1]$$

olarak ifade edilebilir. **[14]**

Tanım 5.1.1. $[1,1,1,...]$ sınırsız sürekli kesrinin değeri δ ile gösterilirse o zaman bu sınırsız sürekli kesrin n-inci yakınsayanı $C_n = [1,1,1,...,1,1]$ olmak üzere C_n, Örnek 5.1.1' de verilen ardışık Fibonacci sayılarının oranıdır. Buna göre;

$$\begin{aligned} \delta &= \lim_{n\to\infty}[1;1,1,...,1,1] = \lim_{n\to\infty} C_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\delta} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ise bize pozitif kökü $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olan

$$\delta^2 - \delta - 1 = 0$$

denklemini verir. Buradan $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1;1,1,...]$ dir. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısına *Altın Oran* adı verildiğini biliyoruz. **[14]**

Şimdi, Lucas sayılarının sürekli kesir olarak yazılabileceğini gösterelim.

5.2 Lucas Sayılarının Sürekli Kesir Olarak Gösterimi

Lucas sayılarının indirgeme bağıntıları ard arda yazıldığında,

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= 1.L_n + L_{n-1} \\ L_n &= 1.L_{n-1} + L_{n-2} \\ &\vdots \\ L_3 &= 1.L_2 + L_1 \\ L_2 &= 3.L_1 + 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = 1 + \frac{L_{n-1}}{L_n} = 1 + \frac{1}{\frac{L_n}{L_{n-1}}}$$

$$\frac{L_n}{L_{n-1}} = 1 + \frac{L_{n-2}}{L_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{L_{n-1}}{L_{n-2}}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{L_3}{L_2} = 1 + \frac{L_1}{L_2} = 1 + \frac{1}{\frac{L_2}{L_1}}$$

$$\frac{L_2}{L_1} = 3$$

olarak yazılabilir ve bu şekilde elde edilen eşitlikler sırasıyla aşağıdan yukarıya doğru yerlerine yazıldığında

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = 1 + \frac{1}{1 + L_n / L_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{L_{n-1}}{L_{n-2}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}$$

$$1 + \frac{L_2}{L_1}$$

sürekli kesiri elde edilir**. [14]**

Örnek 5.2.1.

$$\frac{L_6}{L_5} = \frac{L_5 + L_4}{L_5} = 1 + \frac{1}{\dfrac{L_5}{L_4}} = 1 + \frac{1}{\dfrac{L_4 + L_3}{L_4}}$$

$$\frac{L_6}{L_5} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{L_4}{L_3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{L_3 + L_2}{L_3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{L_3}{L_2}}}}$$

$$\frac{L_6}{L_5} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{L_3}{L_2}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{L_2 + L_1}{L_2}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{L_2}{L_1}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{3}{1}}}}$$

elde edilir.

Ardışık Lucas sayılarının birbirine oranının $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ olduğu giriş bölümünde verilmişti. Bu şekildeki sınırsız sürekli kesirlerin listesi de aşağıdaki gibidir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\dfrac{L_{n+1}}{L_n}$	3	1,333	1,75	1,571	1,636	1,611	1,620	1,617	1,618	1,617

Yukarıda verilen tüm bilgilerden faydalanılarak aşağıda *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayılarının sürekli kesir olarak ifade edilmesi ele alınmıştır.

5.3 *k*-Fibonacci Sayılarının Sürekli Kesir Olarak İfade Edilmesi

k-Fibonacci sayılarının genel tanımında (2.2) ile verilen

$$r^2 = kr + 1$$

karakteristik denklemi ele alınsın. Bu takdirde,

$$r = k + \frac{1}{r}$$

elde edilir. Buradan r yerine tekrar tekrar değeri yazılarak

$$r = k + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{k + \cdots}}} = \left[\overline{k}\right]$$

ifadesine ulaşılır. Bu ise karakteristik denklemin pozitif kökünün sürekli kesir olarak ifade edilmesidir.

- $k = 1$ için,

$$\sigma_1 = \tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} = \left[\overline{1}\right]$$

Fibonacci dizisi

- $k = 2$ için,

$$\sigma_2 = \alpha = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} = \left[\overline{2}\right]$$

Pell dizisi ve

- $k = 3$ için,

$$\sigma_3 = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}} = \left[\overline{3}\right]$$

şeklinde bir $\{H_n\}$ dizisi elde edilir. **[14]**

Bunlara ek olarak *k*-Fibonacci sayılarını

$$F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}, \quad n \geq 1$$

şeklindeki genel tanımından yararlanarak da sürekli kesir olarak ifade edebiliriz. (5.4) ifadesinde olduğu gibi $F_{k,n+1}$ ve $F_{k,n}$ sayılarının en büyük ortak bölenini Euclidean algoritmasıyla $n-1$ tane eşitlikle

$$\begin{aligned}
F_{k,n+1} &= k.F_{k,n} + F_{k,n-1} \\
F_{k,n} &= k.F_{k,n-1} + F_{k,n-2} \\
&\vdots \\
F_{k,4} &= k.F_{k,3} + F_{k,2} \\
F_{k,3} &= k.F_{k,2} + F_{k,1} \\
F_{k,2} &= k.F_{k,1} + F_{k,0} \quad (F_{k,0} = 0) \\
F_{k,2} &= k.F_{k,1} + 0
\end{aligned} \tag{5.6}$$

şeklinde yazılabilir. Bu takdir de bunlar sürekli kesir olarak

$$\frac{F_{k,n+1}}{F_{k,n}} = \left[k; k, k, ..., k, k\right] = \left[\overline{k}\right]$$

ifadesi ile gösterilir.

5.4 *k*-Lucas Sayılarının Sürekli Kesir Olarak İfade Edilmesi

Üçüncü bölümde verilen *k*-Lucas sayılarının

$$L_{k,n+1} = kL_{k,n} + L_{k,n-1}, \quad n \geq 1$$

şeklindeki (3.1) rekürans bağıntısına Euclid algoritmasının uygulanması ile bir sürekli kesir elde edilir.

Yani;

$$\begin{aligned} L_{k,n+1} &= k.L_{k,n} + L_{k,n-1} \\ L_{k,n} &= k.L_{k,n-1} + L_{k,n-2} \\ &\vdots \\ L_{k,4} &= k.L_{k,3} + L_{k,2} \\ L_{k,3} &= k.L_{k,2} + L_{k,1} \\ L_{k,2} &= k.L_{k,1} + L_{k,0} \quad (L_{k,0} = 2, L_{k,1} = 1) \\ L_{k,2} &= (k+2).L_{k,1} + 0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

dır. Bu sürekli kesir ise,

$$\frac{L_{k,n+1}}{L_{k,n}} = [k; k, k, ..., k, k+2]$$

şeklinde ifade edilir. Aynı zaman da ardışık *k*-Lucas sayılarının birbirine oranı da karakteristik denklemin pozitif kökü olan r_1'i yani $r_1 = \frac{k + \sqrt{k^2+4}}{2}$'yi verir.

- $k = 1$ için Lucas sayıları için bilinen

$$\frac{L_{n+1}}{L_n} = [1; 1, 1, ..., 1, 3]$$

sürekli kesiri elde edilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma da Fibonacci ve Lucas Sayılarının bir genelleştirilmesi olan *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas sayılarının birtakım özellikleri genelleştirilmiş Binet formülü ve matris cebirinden yararlanılarak elde edildi. Ayrıca bu sayıların üreten fonksiyonlar ve sürekli kesirlerle olan ilişkisi de incelendi.

Benzer şekilde bu sayıların birçok özelliği kombinatorik ve grup teoriden yararlanılarak da bulunabilir.

KAYNAKLAR

[1] Altındiş H., ***Sayılar Teorisi ve Uygulamaları***, Erciyes Üniversitesi, Ankara, 1999.

[2] Akçağıl Ş., ***Fibonacci Sayıları ve Altın Oran,*** Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Temmuz 2005.

[3] Bozkurt D., Türen B. ve Solak S., ***Lineer Cebir,*** Selçuk Üniversitesi Yayınları, Konya ,2000.

[4] Bozkurt D., Türen B. ve Türkmen R., ***Soyut Cebire Giriş***, Selçuk ve Süleyman Demirel Üniversitesi, Konya, 2006.

[5] Bolat C., Civciv H., Köse H., ***k-Fibonacci ve k-Lucas Sayıları,*** II Ankara Matematik Günleri Sempozyumu (Sözlü Bildiri), 14–15 Haziran 2007.

[6] Civciv H., ***Complex Factorization of The k-Fibonacci and k-Lucas Numbers,*** İnternational Journal Mathematical Manuscripts, Vol 1, number 2(2007).

[7] Falco´n S., Plaza A.*,* ***On the Fibonacci k-numbers,*** Chaos, Solitons & Fractals 2007;32(2):1615--24.

[8] Falco´n S., Plaza A., ***The k-Fibonacci sequence and the Pascal 2-triangle***, Chaos, Solitons & Fractals 2007;33(1):38--49.

[9] Falco´n S., Plaza A.*,* ***On the 3-dimensional k-Fibonacci spirals****, Chaos, Solitons & Fractals* 2007, doi:10.1016/j.chaos.2007.02.009.

[10] Falco´n S., Plaza A., ***The k-Fibonacci hyperbolic functions***, Chaos, Solitons & Fractals 2006, doi:10.1016/j.chaos.2006.11.019.

[11] Falco´n S., Plaza A., ***On k-Fibonacci Sequences and Polynomials and their derivatives,*** Chaos, Solitons & Fractals 2007, doi:10.1016/j.chaos.2007.03.007.

[12] Falco´n S., Plaza A., ***The metallic ratios as limits of complex valued transformations***, Chaos, Solitons & Fractals 2008, doi:10,1016/j.chaos.2007.11.0.11.

[13] Farrokhi M., ***Some Remaks On The Equation*** $F_n = kF_m$ ***In Fibonacci Numbers***, Journal of İnteger Sequences, Vol. 10(2007), Article 07.5.7.

[14] Kılıç E., ***Lucas Sayıları ve Sürekli Kesirler,*** Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Haziran 2003.

[15] Koshy T., ***Fibonacci and Lucas Numbers with Applications***, John Wiley & Sons, New York, 2001.

[16] Stakhov A., Rozin B., ***The Golden Shofar***, Chaos, Solitons & Fractals 2005; 26(3):677--84.

[17] Sun Z. H., ***Congruences For Fibonacci Numbers***, Department of Mathematics, Huaiyin Teachers College, Huaian, Jiangsu, P.R.China,2003.

[18] Vajda S., ***Fibonacci and Lucas Numbers and The Golden Section***, Ellis Horwood Limited, Chichester, England, 1989.

[19] http:// mathworld.wolfram.com / FibonacciNumber.html.

[20] http:// mathworld.wolfram.com / LucasSequence.htlm.