**T.C.**
**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS SAYILARININ ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMALARI

**Fikri KÖKEN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**
**Konya – 2008**

**T.C.**
**SELÇUK ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS SAYILARININ ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMALARI

**Fikri KÖKEN**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Danışman**
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Konya – 2008

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS SAYILARININ ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Fikri KÖKEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 04/07/2008 Tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile / ~~oy çokluğu~~ ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
(Danışman)

Yrd. Doç. Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR
(Üye)

Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
(Üye)

# ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL LUCAS
SAYILARININ ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Fikri KÖKEN

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Yrd. Doç. Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR
Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Bu çalışmada, Horadam tarafından tanımlanmış olan Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının verilen özelliklerine ek olarak bazı özellikler elde edildi. Jacobsthal sayılarının bölünebilme özellikleri verildi. Jacobsthal dizisinin matris uygulamaları için, Jacobsthal $F$ ve $M$ matrislerini tanımlandıktan sonra Jacobsthal sayılarının matris gösterimi elde edildi. Ek olarak, Jacobsthal Lucas $E$ ve $R$ matrislerini tanımlayıp, bu iki dizinin de matrisler ile bağlantısı verildi. Ayrıca, Fibonacci ve Jacobsthal dizilerinin bir genelleştirilmesi olarak $k$-Jacobsthal dizileri, Lucas ve Jacobsthal Lucas dizilerinin bir genelleştirilmesi olarak da $k$-Jacobsthal Lucas dizilerinin tanımları ve özellikleri verildi.

**Anahtar Kelimeler:** Fibonacci, Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Sayıları, Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Dizileri, Matris Metodu.

## ABSTRACT

MS. THESIS

APPLICATIONS AND PROPERTIES OF
JACOBSTHAL AND JACOBSTHAL LUCAS NUMBERS

Fikri KÖKEN

Selcuk Unıversıty
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Jury: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Asist. Prof. Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR
Asist. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

In this study, we have found some properties of Jacobsthal and Jacobsthal Lucas numbers, which are defined by Horadam, in addition to properties of Jacobsthal and Jacobsthal Lucas numbers given A. F. Horadam. We have obtained divisibility property of Jacobsthal numbers. We have defined Jacobsthal $F$ and $M$ matrices for matrix application of Jacobsthal sequences and have obtained matrix representation of Jacobsthal numbers. In addition, we have given relation between both sequences with matrices, after we have defined Jacobsthal Lucas $E$ and $R$ matrices. Also, we have given properties and definition of $k$-Jacobsthal sequences that is defined as a generalization of Fibonacci and Jacobsthal sequences, and have given properties and definition of $k$-Jacobsthal Lucas sequence that is defined as generalization of the Lucas and Jacobsthal Lucas sequences.



**Key Words:** Fibonacci, Lucas, Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Numbers, Generalized Fibonacci and Lucas Sequences, Matrix Method.

# ÖNSÖZ

Bu çalışma Selçuk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Durmuş BOZKURT danışmanlığında yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın birinci bölümünde, tam sayı dizilerinin tarihçesinden, özel tamsayı dizilerinin tanımlanışları, kullanıldığı alanlardan ve literatür özetlerinden bahsedilmiştir. İkinci bölüm, giriş bölümü olup, ileriki bölümlerde kullanacağımız temel bilgiler verilmiştir. Geriye kalan bölümler çalışmanın ana kısmı olup, üçüncü bölümde Jacobsthal sayılarının bazı özellikleri ve uygulamaları dördüncü bölümde Jacobsthal Lucas sayılarının bazı özellikleri ve uygulamaları sunulmuştur. Beşinci bölümde ise, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas dizilerinin genelleştirmeleri ve özellikleri elde edilmiştir. Son olarak, yararlanılan kaynaklar sunulmuştur.

Bu çalışma süresince emeği geçen değerli hocalarım Prof. Dr. Durmuş BOZKURT, Arş. Gör. Mehmet AKBULAK'a ve çalışmam boyunca desteğini hiç esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Fikri KÖKEN

2008

## SİMGELER

$a$ ve $b$, Lucas dizilerindeki değişkenler,

$\lfloor x \rfloor$, tam değer fonksiyonu,

$\binom{n}{k}$, Binom katsayısı,

$F_n$, $n$. Fibonacci sayısı,

$L_n$, $n$. Lucas sayısı,

$P_n$, $n$. Pell sayısı,

$Q_n$, $n$. Pell Lucas sayısı,

$J_n$, $n$. Jacobsthal sayısı,

$j_n$, $n$. Jacobsthal Lucas sayısı,

$F$ ve $M$ Jacobsthal matrisleri,

$E$ ve $R$ Jacobsthal Lucas matrisleri,

$F_{k,n}$, $n$. $k$-Fibonacci sayısı,

$L_{k,n}$, $n$. $k$-Lucas sayısı,

$J_{k,n}$, $n$. $k$-Jacobsthal sayısı,

$j_{k,n}$, $n$. $k$-Jacobsthal Lucas sayısı,

$q_1$ ve $q_2$, $k$-Jacobsthal ve $k$-Jacobsthal Lucas dizilerinin $k$'ya değişkenleri,

## İÇİNDEKİLER


Özet i

Abstract ii

Önsöz iii

Simgeler iv

**1. BÖLÜM**

1.1 Tam Sayı Dizilerinin Tarihçesi 1

1.2 Kaynak Araştırması 4

**2. BÖLÜM**

2.1 Lucas Dizileri 7

2.1.1 Fibonacci sayıları ve özellikleri 8

2.1.2 Lucas sayıları ve özellikleri 9

2.1.3 Pell sayıları ve özellikleri 10

2.1.4 Pell Lucas sayıları ve özellikleri 11

2.1.5 Jacobsthal sayıları ve özellikleri 12

2.1.6 Jacobsthal sayıları ve özellikleri 13

**3. BÖLÜM**

3.1 Jacobsthal Sayıları 15

3.2 Jacobsthal Sayılarının Toplam Özellikleri 17

3.3 Jacobsthal Sayılarında Bölünebilme 20

3.4 Jacobsthal Sayılarının Matris Gösterimi 21

**4. BÖLÜM**

4.1 Jacobsthal Lucas Sayıları 28

4.2 Jacobsthal Lucas Sayılarının Toplam Özellikleri 29

4.3 Jacobsthal Lucas Sayılarının Matris Gösterimi 33

**5. BÖLÜM**

5.1 *k*-Jacobsthal Sayıları ve Özellikleri 40

5.2 *k*-Jacobsthal-Lucas Sayıları ve Özellikleri 47

**6. BÖLÜM**

6.1 Sonuç ve Öneriler 50

**Kaynaklar** 51

# 1. BÖLÜM

Bu bölümde, tam sayı dizileri tarihçesi üzerinde durulmuştur. İlk olarak, tam sayı dizilerinin içinde parlayan iki büyük yıldız gibi düşünülen Fibonacci ve Lucas dizilerinin tarihçesinden ve daha sonra Fibonacci sayıları ile matrisler arasındaki ilişkilerden bahsedeceğiz. Son olarak, tamsayı dizilerinin genelleştirilmesi gibi düşünülen polinom dizilerine değineceğiz.

## 1.1Tam Sayı Dizilerinin Tarihçesi

Leonardo Fibonacci 12'inci yüzyılda yaşamış bir İtalyan matematikçisidir. Pisa şehrinde doğan Leonardo çocukluğunu babasının çalışmakta olduğu Cezayir'de geçirmiştir. İlk matematik bilgilerini Müslüman eğiticilerden almış olup küçük yaşlarda onluk Arap sayı sistemini öğrenmiştir. Ülkesi İtalya'da kullanılmakta olan Roma rakam sisteminin hantallığı yanında Arap sisteminin mükemmelliğini gören Fibonacci 1201 yılında "Liber Abaci" isimli kitabını yazmıştır. Aritmetik ve Cebir içeren ticaret ile ilgili bu kitapta Arap sayı sisteminin tanıtımını ve müdafaasını yapmıştır. İlk anda kitabın İtalya'dan tüccarları üzerinde etkisi az olmasına rağmen zamanla bu kitap Arap sayı sisteminin Batı Avrupa'ya girmesinde büyük rol oynamıştır.

Bu kitapta bulunan bir problem ortaçağ matematiğine katkıları olan Fibonacci'yi 600 yıl sonra, 19 uncu yüzyılın başlarından günümüze meşhur hale gelmesine sebep olmuştur. Bu problem "Tavşan Problemi"dir. Ergin bir tavşan çiftinin her ay yeni bir yavru çifti verdikleri ve yeni doğan bir çiftin 1 ay zarfında tam ergenliğe eriştikleri varsayımıyla yavru olan bir tavşan çiftinden başlayıp 1 yılda (12 ayda) çiftlerin sayısı ne olur? Buna göre belli bir aydaki çift sayısı önceki iki ayın toplamına eşittir. O halde tavşan çifti sayıları aylara göre bir yıl içinde, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 olacaktır. Fibonacci bu problemi, kitabına biyoloji biliminde bir uygulama olsun diye ya da nüfus patlaması sorununa bir çözüm getirsin diye koymamış; probleme, bir toplama alıştırması olarak bakmıştır.

Fibonacci'nin kendisi bu sayı dizisi üzerinde bir çalışma yapmamıştır. Hatta bu sayı dizisi üzerinde 19 uncu yüzyılın başlarına kadar ciddi bir araştırma yapılmadığı da belirtilmektedir.

Fibonacci sayılarının ailesi üç ayrı nedenle bir ilgi odağı olmuştur.

Birincisi; dizinin daha küçük elemanlarının doğada, beklenmedik yerlerde tekrar tekrar karşımıza çıkmasıdır; bitkilerde, böceklerde, çiçeklerde vb.

İkinci neden; Fibonacci dizisinin bir terimi öncekine bölündüğünde $n \to \infty$ için bölümün "altın oran" denen ve irrasyonel bir sayı olan $(1+\sqrt{5})/2 = 1,61803398...$ sayısına yakınsadığı görülmektedir. Bu sayı, oyun kartlarının biçiminden Mısır'daki piramitlere kadar birçok yapının matematiksel temelini oluşturmaktadır.

Üçüncüsü; daha çok sayıların kendilerinin, sayılar teorisinde beklenmedik biçimde farklı birçok kullanımı olan ilginç özellikleriyle ilgilidir.

Belirli bir süre sonra bu dizi üzerinde yapılan araştırmaların sayısı Fibonacci'nin tavşanlarının sayısı gibi artmıştır. Hatta Fibonacci Derneği bile kurulmuştur. Bu derneğin 1963 yılından itibaren yayınladığı "The Fibonacci Quartery" dergisi bu sayı dizisiyle ilgili ilginç araştırmalar yayınlamaktadır. Bazısı bilinen, bazısı öne sürülüp ispatlanamayan ve bilinmeyip keşfedilmesi beklenen birçok özelliğe sahiptir.

Bu sayı dizisinin elemanlarının, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ bağıntısı kullanılarak hesaplandığı düşünülürse, ilk iki sayı seçilmeden diziyi oluşturan elemanların bilinemeyeceği açıktır. Fibonacci dizisi, $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ ile başlar, diğer Fibonacci sayıları, verilen Fibonacci denklemine göre belirlenir. Ancak bu iki başlangıç sayısının özel bir yanı olmadığından, başlangıç için başka değerler de seçilebilir ve aynı tanımlayıcı denklemi kullanarak tümüyle farklı bir sayı dizisi elde edilebilir. Fransız matematikçi Edward Lucas, başlangıç sayıları için seçilebilecek ikinci en basit $L_0 = 2$ ve $L_1 = 1$ sayılarını seçerek ve de

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1},\ n \geq 1$$

bağıntısını kullanarak, Fibonacci dizisine benzer bir sayı dizisi elde etmiştir.

Günümüze de süregelen araştırmalar, bu iki sayı dizisi arasında ilginç bağıntıların olduğunu kanıtlamıştır. Bu özellikleri bir çok çalışmada bulabiliriz. Bu sayılar bazen doğada ve bilimsel alanlarda görülmektedir. Örneğin, 123 sağ sarmalı ve 76 sol sarmalı olan Lucas ayçiçekleri olduğu bilinmektedir.

1960 yıllarında, Charles H. King master tezi olarak

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi üzerinde çalıştı. $u_n$, $n$. Fibonacci sayısını göstermek üzere, $Q$ matrisi için

$$Q^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix}$$

eşitliğini gösterdi. Bu matrisi kullanarak

$$Q^n = \begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{bmatrix} \text{ ve } \det(Q) = -1$$

eşitliklerini elde etti ki, buradan kolayca

$$u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$$

Cassini formülünü elde etti. Silvester, bu matris gösterimi kullanarak Fibonacci sayılarının birçok özelliğinin ortaya çıkabileceğini gösterdi ve bu matrisi genelleştirip Fibonacci sayılarının genelleştirilmesine uyguladı.

Belçikalı matematikçi Eugene Charles Catalan ve Alman matematikçi E. Jacobsthal tarafından 1883 yıllarında tamsayı dizileri ile ilgili polinomlar üzerinde çalışmışlardır. Bu polinomların büyük bir sınıfı Fibonacci benzer lineer rekürans ilişkileri ile tanımlanmıştır. Örneğin, Catalan tarafından çalışılan $f_n(x)$ polinomları, başlangıç koşulları $f_1(x) = 1$ ve $f_2(x) = x$ olmak üzere,

$$f_{n+2}(x) = x f_{n+1}(x) + f_n(x), \quad n \geq 1$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Bu polinom dizisi, Fibonacci ve Pell sayılarının bir genelleştirilmesi olarak verilebilir. Bu genelleştirilmelere örnek olabilecek birçok çalışma yapılmıştır.

## 1.2 Kaynak Araştırması

Bu bölümde, kaynaklar kısmında kullandığımız çalışmalardan kısa bir özet verilecektir.

*Z. H. Sun, "Expansions And Identities Concerning Lucas Sequences"* isimli çalışmasında Lucas dizilerini içeren bazı yeni ifade biçimleri ve eşitlikler elde etmiştir.

*J. R. Silvester, "Fibonacci Properties by Matrix Methods"* makalesinde $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde bir matris kullanarak, Fibonacci dizisinin matris gösterimini ve bu gösterimi kullanarak Fibonacci dizisinin bazı önemli özelliklerini elde etmiştir.

Benzer bir düşünceyle bunu geliştiren *D. Kalman "Generalized Fibonacci Number by Matrix Methods"* çalışmasında genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını tanımlamış, bu dizilerin matris gösterimlerini vermiş ve bu gösterimleri kullanarak verilen genelleştirilmiş Fibonacci dizisinin özelliklerini elde etmiştir.

R. *C. Johnson, "Matrix Methods for Fibonacci and Related Sequences"* çalışmasında, matris özelliklerinden Fibonacci dizilerine ait birçok eşitliği elde etmiş ve bu yöntemi, sabit katsayılı benzer lineer rekürans ilişkisine sahip herhangi bir diziye genişletmiştir.

*G. Y. Lee, S. G. Lee ve H. G. Shin, "On the k-Generalized Fibonacci Matrix $Q_k$"* isimli çalışmalarında $n > k \geq 2$ için, başlangıç koşulları $g_1^{(k)} = ... = g_{k-2}^{(k)} = 0$ ve $g_{k-1}^{(k)} = g_k^{(k)} = 1$ olmak üzere $g_n^{(k)} = g_{n-1}^{(k)} + g_{n-2}^{(k)} + ... + g_{n-k}^{(k)}$ lineer rekürans bağıntısını kullanarak $\left\{g_n^{(k)}\right\}$ *k*-genelleştirilmiş Fibonacci dizisini tanımlamışlardır. $k \geq 2$ için $Q_k$, *k*-genelleştirilmiş Fibonacci matrisinin öz değerleri, graph teori ve $\left\{g_n^{(k)}\right\}$ arasındaki ilişkiyi düşünerek, *k*-genelleştirilmiş Fibonacci dizisine karşılık gelen kümelere ve bu kümelerin oluşma olasılıklarına bazı ilginç örnekler vermişlerdir.

*A. A. Öcal, N. Tuğlu ve E. Altınışık "On The Representation of k-generalized Fibonacci and Lucas Numbers"* isimli çalışmalarında, *k*-genelleştirilmiş Fibonacci

ve Lucas sayılarının bazı determinantsal gösterimlerini vermişler, verdikleri bu gösterimleri kullanarak, *k*-genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri için Binet benzeri formüler elde etmişlerdir.

*S. Falcon ve A. Plaza "On the Fibonacci k-numbers"* isimli çalışmalarında Fibonacci sayılarının yeni bir genelleştirilmesi olarak *k*-Fibonacci sayı dizisini tanımlamışlardır. Bu tanımlanan dizi, klasik Fibonacci ve Pell sayılarının her ikisinin bir genelleştirilmesidir. $\{F_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$, *n. k*-Fibonacci sayısı 4-triangle longest-edge (4TLE) paylaşımı yönteminde kullanılan iki geometriksel uygulama üzerinde çalışma yapılırken bulunmuştur. Ayrıca, bu sayıların çoğu özellikleri direkt olarak buradan oluşturulan matris kullanılarak elde edilmiştir.

*A. F. Horadam, "Jacobsthal Representation Numbers"* çalışmasında Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarını tanımlamıştır. Ayrıca bu sayıların önemini ve birbirleri arasındaki ilişkiyi vermiştir. Bu çalışmada, bu sayı dizisinin özellikleri elde edilmiştir.

*G. B. Djordjevic ve H. M. Srivastava, "Incomplete Generalized Jacobsthal and Jacobsthal Lucas Numbers"* isimli çalışmasında genelleştirilen tamamlanmamış Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının önemli özelliklerinin bir araştırmasını sunmuşlardır. Bu araştırmada, verilen ana sonuçlar bu sayıların üreten fonksiyonlarını da içerir.

*Darrin D. Frey and James A. Sellers "Jacobsthal Numbers and Alternating Sign Matrices"* çalışmalarında, $A(n)$, $n \times n$ tipindeki sıralı işaret matrislerinin sayısını göstermek üzere

$$A(n) = \prod_{l=0}^{n-1} \frac{(3l+1)!}{(n+l)!}$$

eşitliği kullanmışlar ve asıl amaçları olan, "$A(n)$'nin tek olması için gerek ve yeter şart *n* sayısının bir Jacobsthal sayısı olmasıdır." olduğunu göstermişlerdir.

*Z. Cerin, "Sums of Squares and Products of Jacobsthal Numbers"* isimli çalışmasında, Jacobsthal dizisinin çift ve tek terimlerinin karelerinin toplamlarını ve

çarpımlarını hesaplama formüllerini vermiştir. Ayrıca, bu bulunan toplamlara benzer farklı eşitlikler elde etmiştir. Aynı zamanda, verilen toplam eşitliklerinin uygun Jacobsthal sayıları ve bazı tam sayı dizileri ile bağlantılı olduğunu göstermiştir.

*P. Barry, "Triangle Geometry and Jacobsthal Numbers"* çalışmasında herhangi bir üçgenin Euler çizgisi üstündeki belirli üçgen merkezlerinin konveryans özellikleri üzerinde çalışmıştır. Bu yöntemden elde edilen Jacobsthal sayılarının özellikleri verilmiş ve bazı genel ifadeler verilmiştir. Ayrıca, Pascal üçgeninin bir Jacobsthal ayrışımı gösterilmiştir.

*F. Köken ve D. Bozkurt, "On The Jacobsthal Numbers by Matrix Methods"* çalışmalarında yukarıda bahsettiğimiz $Q$ Fibonacci matrisine benzer $2\times 2$ tipinde Jacobsthal $F$ ve Jacobsthal $M$ matrislerini tanımlamışlardır. Daha sonra bu matrisleri kullanarak, Jacobsthal sayıları için Cassini, Catalan ve Binet benzeri formüllerini ve toplamsal özelliklerini elde etmişlerdir.

Bu çalışmada, A. F. Horadam tarafından Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının verilen özelliklerine benzer özellikleri 3. ve 4. bölümlerin 1. ve 2. kısımlarında sunuldu. Ayrıca, kısım 3.3'de Jacobsthal sayılarının bölünebilme özellikleri verildi. Kısım 3.4 ve 4.3'de Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının matrislerle uygulamalarından bahsedildi. 5. bölümde, bu dizilerin genelleştirilmeleri için $k$-Jacobsthal ve $k$-Jacobsthal Lucas dizilerini ve özelliklerini elde edildi. Son olarak, üzerinde çalıştığım ve çalışılabilecek çalışmalar için 6. bölümde sonuç ve önerilerden bahsedildi.

# 2. BÖLÜM

Bu bölümde literatürde önemli bir yere sahip olan bazı tamsayı dizilerinin tanımları verilecek, bazı temel kavramları ve özellileri üzerinde durulacaktır.

## 2.1 Lucas Dizileri

Kısım 1.2'de bölümde *Z. H. Sun, "Expansions And Identities Concerning Lucas Sequences*" isimli çalışmasında bahsettiğimiz Lucas dizileri,

$$U_0(a,b)=0,\ U_1(a,b)=1$$

$$V_0(a,b)=2,\ V_1(a,b)=a+b$$

başlangıç koşuları olmak üzere;

$$a+b=P,\ ab=\frac{1}{4}\left(P^2-D\right)=Q,\ a-b=\sqrt{D}$$

bağıntılarını sağlayan, $P$ ve $Q$ tam sayılarına bağlı

$$U_m\left(P,Q\right)=PU_{m-1}\left(P,Q\right)-QU_{m-2}\left(P,Q\right)$$

$$V_m\left(P,Q\right)=PV_{m-1}\left(P,Q\right)-Q\,V_{m-2}\left(P,Q\right)$$

rekürans bağıntıları kullanılarak tanımlanılan dizilere denir.

$$U_n(P,Q)\equiv\frac{a^n-b^n}{a-b}$$

$$V_n(P,Q)\equiv a^n+b^n$$

şeklinde Binet formülleri tanımlanmıştır (Sun Zhi-H, 2006).

Lucas Dizileri ile en çok karşılaşılan tam sayı dizileri arasındaki ilişkiyi aşağıdaki tabloda gösterelim.

| $(P,Q)$ | $U_n$ | $V_n$ |
|---|---|---|
| $(1,-1)$ | Fibonacci Dizisi | Lucas Dizisi |
| $(2,-1)$ | Pell Dizisi | Pell Lucas Dizisi |
| $(1,-2)$ | Jacobsthal Dizisi | Jacobsthal Lucas Dizisi |

Tablo 1

Lucas Dizilerinin bazı özellikleri *Z. H. Sun*'nın Kısım 1.2'de verilen çalışmasında bulunabilir.

Şimdi Lucas dizisi ile yakından alakalı olan Tablo 1 de verdiğimiz dizileri basitçe tanıtıp asıl çalışmamız olan Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları üzerinde duracağız.

### 2.1.1 Fibonacci sayıları ve özellikleri

**Tanım 2.1** (**Fibonacci Dizisi**). $F_0 = 0$ ve $F_1 = 1$ olmak üzere;

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 0$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayı dizisine Fibonacci dizisi denir. Fibonacci dizisinde her *n* tam sayına karşılık gelen değere *n.* **Fibonacci sayısı** denir.

$n = 1, 2, 3, \ldots$ değerlerine karşılık gelen Fibonacci sayıları $0, 1, 1, 2, 3, \ldots$ 'tür.

Tablo 1'den de görüldüğü gibi Fibonacci dizisi,

$$\{F_n\}_{n=1}^{\infty} = U_n(1, -1)$$

şeklinde özel bir Lucas dizisidir. Lucas dizilerinin Binet formülünden Fibonacci sayıları için,

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

Binet benzeri formülü elde edilir. Negatif indisli Fibonacci sayılarının,

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

şeklinde tanımlı olduğu görülür. $\binom{k}{i}$ Binom katsayısı ve $F_n$, *n.* Fibonacci sayısı olmak üzere;

$$F_{kn} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} F_i F_n^i F_{n-1}^{k-i}, \quad n > 1$$

kapalı formu ile ifade edilebilir.

Fibonacci sayılarının üreten fonksiyonu,

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n x^n=\frac{x}{1-x-x^2}=x+x^2+2x^3+3x^4+5x^5+\ldots$$

Simpson formülü,

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{k=1}^{n}F_k=F_{n+2}-1$$

şeklinde verilir (Koshy T., 2001).

### 2.1.2 Lucas sayıları ve özellikleri

**Tanım 2.2** (**Lucas Dizisi**). $L_0=2$ ve $L_1=1$ olmak üzere,

$$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n,\quad n\geq 0$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayılar dizisine Lucas dizisi denir. Lucas dizisinde her *n* tam sayına karşılık gelen her bir değere *n.* **Lucas sayısı** denir.

$n=1,2,3,\ldots$ değerlerine karşılık gelen Lucas sayıları $2,1,3,4,7,11,18,\ldots$ dir.

Tablo 1'den da görüldüğü gibi Lucas dizisi,

$$\{L_n\}_{n=1}^{\infty}=V_n(1,-1)$$

şeklinde özel bir Lucas dizisidir. Lucas dizilerinin Binet formülünden Lucas sayıları için,

$$L_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Binet benzeri formülü elde edilir. $\lfloor x\rfloor$ tam değer fonksiyonu, $\binom{n}{k}$ Binom katsayısı ve $L_n$, *n*. Lucas sayısı olmak üzere;

$$L_{kn} = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2i} 5^i \, F_n^{2i} \, L_n^{k-2i}$$

kapalı formu ile ifade edilebilir.

Lucas sayılarının üreten fonksiyonu,

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n = \frac{2x^2 + x}{1 - x - x^2}$$

Simpson formülü,

$$L_{n+1} L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$$

şeklinde verilir (Koshy T., 2001).

### 2.1.3 Pell sayıları ve özellikleri

**Tanım 2.3 (Pell Dizisi).** $P_0 = 0$ ve $P_1 = 1$ olmak üzere,

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n, \quad n \geq 0$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayılar dizisine Pell dizisi denir. Pell dizisinde her *n* tam sayına karşılık gelen her değere *n.* **Pell sayısı** denir.

$n = 1, 2, 3, \ldots$ değerlerine karşılık gelen Pell sayıları $0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, \ldots$ dir.

Tablo 1'den de görüldüğü gibi Pell dizisi,

$$\{P_n\}_{n=1}^{\infty} = U_n(2, -1)$$

özel bir Lucas dizisidir. Lucas dizilerinin Binet formülünden Pell sayıları için,

$$P_n = \frac{\left(1 + \sqrt{2}\right)^n - \left(1 - \sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}$$

Binet benzeri formülü verilebilir.

Pell sayılarının üreten fonksiyonu,

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i x^i = \frac{x}{1-2x-x^2}$$

Simpson formülü,

$$P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = \frac{1}{2}\left(P_{n+1} + P_n - 1\right)$$

şeklinde verilir (Sun Zhi-H, 2006).

### 2.1.4 Pell Lucas sayıları ve özellikleri

**Tanım 2.4 (Pell Lucas Dizisi).** $Q_0 = 2$ ve $Q_1 = 2$ olmak üzere,

$$Q_{n+2} = 2Q_{n+1} + Q_n, \quad n \geq 0$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayılar dizisine Pell Lucas dizisi denir. Pell Lucas dizisinde her *n* tam sayına karşılık gelen her bir değere *n.* **Pell Lucas sayısı** denir.

$n = 1, 2, 3, \ldots$ değerlerine karşılık gelen Pell Lucas sayıları $2, 2, 6, 14, 34, \ldots$ dir.

Tablo 1'den de görülebileceği gibi Pell Lucas dizisi,

$$\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} = V_n(2, -1)$$

şeklinde özel bir Lucas dizisidir. Lucas dizilerinin Binet formülünden Pell Lucas sayıları için,

$$Q_n = \left(1-\sqrt{2}\right)^n + \left(1+\sqrt{2}\right)^n$$

Binet benzeri formül verilir.

Pell Lucas sayılarının üreten fonksiyonu,

$$\sum_{i=0}^{\infty} Q_i x^i = \frac{2-2x}{(1-2x-x^2)}$$

Simpson formülü,

$$Q_{n+1}Q_{n-1} - Q_n^2 = 8 \cdot (-1)^{n-1}$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=0}^{n} Q_i = \frac{1}{2}\left(Q_{n+1} + Q_n - 2\right)$$

şeklinde verilir (Sun Zhi-H, 2006).

### 2.1.5 Jacobsthal sayısı ve özellikleri

**Tanım 2.5 (Jacobsthal Dizisi).** $J_0 = 0$ ve $J_1 = 1$ olmak üzere,

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n, \quad n \geq 0$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayılar dizisine Jacobsthal dizisi denir. Jacobsthal dizisindeki, her $n$ tam sayısına karşılık gelen Jacobsthal dizisinin elamanlarına $n$. **Jacobsthal sayısı** denir.

$n = 0,1,2,3,...$ için, Jacobsthal sayıları 0, 1, 1, 3, 5, 11, 21,… dir.

Tablo 1'den da görüldüğü gibi Jacobsthal dizisi,

$$\{J_n\}_{n=1}^{\infty} = U_n(1,-2)$$

şeklinde özel bir Lucas dizisidir. Lucas dizilerinin Binet formülünden Jacobsthal sayıları için

$$J_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$$

Binet benzeri formülü verilir. Negatif $n$ tamsayıları için de Jacobsthal sayıları

$$J_{-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} J_n$$

şeklinde verilebilir.$\lfloor x \rfloor$ tam değer fonksiyonu $\binom{n}{k}$ Binom katsayısı ve $J_n$, $n$. Jacobsthal sayısı olmak üzere;

$$J_n = \sum_{r=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-1-r}{r} 2^r$$

kapalı formu ile ifade edilebilir.

Jacobsthal sayılarının üreten fonksiyonu,

$$\sum_{i=1}^{\infty} J_i \, x^{i-1} = (1 - x - 2x^2)^{-1}$$

Simpson formülü,

$$J_{n+1} J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=2}^{n} J_i = \frac{1}{2}\left(J_{n+2} - 3\right)$$

şeklinde verilir (Horadam A. F. ve Cerin Z.).

### 2.1.6 Jacobsthal Lucas sayıları ve özellikleri

**Tanım 2.6 (Jacobsthal Lucas Dizisi).** $j_0 = 2$ ve $j_1 = 1$ olmak üzere;

$$j_{n+2} = j_{n+1} + 2 j_n, \quad n \geq 0$$

lineer rekürans bağıntısı ile verilen, $\{j_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklindeki tamsayılar dizisine Jacobsthal Lucas dizisi denir. Bu dizisinin $n = 0,1,2,3,...$ değerlerine karşılık gelen elemanlarına *n*. **Jacobsthal Lucas sayısı** denir.

$n = 0,1,2,3,...$ için, *n*. Jacobsthal Lucas sayısı 2, 1, 5, 7, 17, 31, 65,… dır.

Tablo 1'den görüldüğü gibi Jacobsthal Lucas dizisi, Lucas dizileri kullanılarak,

$$\{j_n\}_{n=1}^{\infty} = V_n(1, -2)$$

elde edilir. Lucas dizilerinin Binet formülünden açıkça görülüyor ki;

$$j_n = 2^n + (-1)^n$$

Binet benzeri formülü verilebilir. Negatif *n* tamsayıları için Jacobsthal Lucas sayıları,

$$j_{-n} = \frac{(-1)^n}{2^n} j_n$$

şeklinde ifade edilebilir. $\lfloor x \rfloor$, tam değer fonksiyonu ve $\binom{n}{k}$ binom katsayısı ise,

$$j_n = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} 2^r$$

şeklinde Jacobsthal Lucas sayıları için kapalı form verilir.

Jacobsthal Lucas sayılarının üreten fonksiyonu,

$$\sum_{i=1}^{\infty} j_i \, x^{i-1} = (1+4x)\left(1-x-2x^2\right)^{-1}$$

Simpson formülü,

$$j_{n+1}\, j_{n-1} - j_n^2 = 9\,(-1)^{n-1} 2^{n-1}$$

ve toplam formülü,

$$\sum_{i=1}^{n} j_i = \frac{1}{2}\left(j_{n+2} - 5\right)$$

olarak verilir (Horadam A. F. ve Cerin Z.).

# 3. BÖLÜM

Bu bölümde, A. F. Horadam'ın verdiği Jacobsthal sayılarının özelliklerine ek olarak, elde ettiğimiz toplam özellikleri, bölünebilme ve matris gösterimi verilecektir.

## 3.1 Jacobsthal Sayıları

Bilgisayarlardaki bazı mikro işlemciler bir programın akışını değiştirmek için koşullu yönlendirmeler kullanırlar. Bu mikro işlemciler (dallı yönlendirenler) geçici olarak ilerideki yönlendirmeye atlatan komutlandırma yaparlar. Burada, 2 bit'in 4 olasılığı için 1 durumun, 3 bit'in 8 olasılığı için 3 durumun, 4 bit'in 16 olasılığı için 5 durumun, vb. durumları hariç bırakılarak diğerlerinin yararlı olduğu sonucuna varılmış ve hariç bırakılan bu durumların tam olarak Jacobsthal sayılarını verdiği görülmüştür (Horadam A. F.).

Kısım 2.1.5'de Jacobsthal dizisi ve sayıları tanımlanmıştı. Ayrıca yapılan çalışmalardan ve bazı önemli özelliklerden bahsedilmişti.

Şimdi, bu çalışmaya Fibonacci sayılarında ve birçok alanda görülen Altın orana benzer Jacobsthal sayıları için önemli bir oranı teorem olarak verelim.

**Teorem 3.1** Lucas dizilerindeki $a$ değişkeni için, $\lim_{n\to\infty}\frac{J_{n+1}}{J_n}=a$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{J_{n+r}}{J_n}=a^r$ 'dir.

**İspat.** Jacobsthal sayılarının Binet benzeri formülü kullanılarak,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{J_{n+1}}{J_n}=\frac{(2^{n+1}-(-1)^{n+1})/3}{(2^n-(-1)^n)/3}=2$$

olduğu kolayca elde edilir. Kısım 1.2'de verilen Lucas dizileri kullanılarak hesaplanılan $a=2$ ve $b=-1$ değerlerinden açık olarak görülüyor ki, $a=2$ 'dir. ■

Koshy (2001)'de Fibonacci sayılarının karakteristik denklemi $x^2-x-1=0$ ve karakteristik denkleminin kökleri $\phi=(1+\sqrt{5})/2$ ve $1-\phi=(1-\sqrt{5})/2$ şeklindedir. Burada $\phi$ altın oran olarak isimlendirilir ve sanat, mimari, fizik v.b. birçok alanda karşımıza çıkar (Koshy T.).

Ardışık Jacobsthal sayılarının oranları,

$$\begin{aligned}\frac{J_{n+1}}{J_n} &= 1+2\frac{J_{n-1}}{J_n} \\ &= 1+\frac{2}{\frac{J_n}{J_{n-1}}} = 1+\frac{2}{1+2\frac{J_{n-2}}{J_{n-1}}} \\ &\vdots \\ &= 1+\frac{2}{\ddots} \\ &\qquad 1+\frac{2}{\frac{J_2}{J_1}}\end{aligned}$$

şeklinde sürekli kesir olarak yazılırsa, $J_{n+1}/J_n = x$ için $x = 1+2/x$ olur ki, buradan

$$x^2 - x - 2 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri,

$$x_1 = a = 2,\ x_2 = 1-a = b = -1$$

dir.

Binet formülü, tam sayı dizileri için çok önemlidir. Tam sayı dizilerinin birçok önemli özelliği, Binet formülleri kullanılarak elde edilebilir. Şimdi de, Jacobsthal sayıları için Binet benzeri formül ile elde ettiğimiz özellikleri verelim.

**Teorem 3.2.** $J_n$, *n.* Jacobsthal sayısı olmak üzere,

**i)** $J_{m+n} = J_m\, j_n - (-2)^n J_{m-n}$ **ii)** $J_{m-n} = (-2)^{-n}(J_m\, j_n - J_{m+n})$

**iii)** $J_{2n+1} = J_{n+1}\, j_n - (-2)^n = J_n\, j_{n+1} + (-2)^n$

özellikleri geçerlidir.

**İspat.** i) Her bir ispat için, eşitliğin sol tarafındaki Jacobsthal sayısı için Binet benzeri formül kullanılarak değeri yazılır. Yani,

$$\begin{aligned}J_{m+n} &= \frac{2^{m+n} - (-1)^{m+n}}{3} = \frac{(2^m - (-1)^m)}{3}(2^n + (-1)^n) - \frac{2^n\,(-1)^n\,(2^{m-n} - (-1)^{m-n})}{3} \\ &= J_m\, j_n - 2^n\,(-1)^n J_{m-n}\end{aligned}$$

istenilen elde edilmiş olur.

ii) ve iii) eşitlikleri de benzer şekilde kolayca gösterilebilir. ■

### 3.2 Jacobsthal Sayılarının Toplam Özellikleri

A. F. Horadam, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları arasındaki ilişkileri içeren birçok özelliği ve bu sayıların ardışık toplamlarını,

$$\sum_{i=2}^{n} J_i = \frac{1}{2}\left(J_{n+2} - 3\right)$$

şeklinde vermiştir (Horadam A. F., 1996). Şimdi biz bu çalışmada indis toplam ve fark özelliğini, büyük indisli tek sayıların indirgenme formülünü, ayrıca çift ve tek ardışık toplamlarını ve birde ardışık kare toplamlarını vereceğiz.

Jacobsthal Binet benzeri formülü kullanılarak,

$J_{m+n} = J_m J_{n+1} + 2J_{m-1} J_n$,

$J_{2n} = J_n J_{n+1} + 2J_n J_{n-1} = J_n(J_{n+1} + 2J_{n-1}) = J_n . j_n$,

$J_{2n+1} = J_{n+1}^2 + 2J_n^2$,

$(-1)^n 2^{n-1} J_{m-n} = J_m J_{n-1} - J_{m-1} J_n$

eşitliklerinin varlığı gösterilebilir. Fakat burada ispatsız olarak verip 3.4 bölümünde Jacobsthal sayılarının matrisler ile ilişkilerini anlatırken Binet formülü kullanılarak yapılan ispattan farklı bir ispat olarak matrisleri kullanarak ispatlarını vereceğiz.

**Teorem 3.3** *n* herhangi pozitif bir tamsayı ve $J_n$, *n*. Jacobsthal sayısı olmak üzere

**i)** $\sum_{i=0}^{n} J_{2i} = \frac{1}{3}(J_{2n+2} - n - 1)$,

**ii)** $\sum_{i=0}^{n} J_{2i+1} = \frac{1}{3}(2J_{2n+2} + n + 1)$,

**iii)** $\sum_{i=0}^{n} J_i^2 = \frac{1}{9}\left[J_{2n+2} + 2(-1)^{n+1} J_{n+1} + n + 1\right]$

ifadeleri geçerlidir.

**İspat.** i) Jacobsthal dizisi için verilen Binet benzeri formülü kullanarak,

$$\sum_{i=0}^{n} J_{2i} = \sum_{i=0}^{n} (2^{2i} - (-1)^{2i})/3 = \frac{1}{3}\left[\frac{2^{2n+2} - (-1)^{2n+2}}{3} - (n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{3}(J_{2n+2} - n - 1)$$

elde edilir.

ii) ve iii) eşitlikleri de i) dekine benzer olarak toplam ifadesinin içindeki Jacobsthal sayısının Binet benzeri formülü kullanılarak değeri yazılır. Elde edilen ifadeden gerekli işlemler ve geometrik seri toplam formülü ile istenilen gösterilebilir.

■

Fibonacci sayıları ile yapılan birçok çalışmada bazı sonsuz serilerin yakınsaklığını ve yakınsadığı değerler elde edilmiştir. Biz de, Jacobsthal sayıları için farklı üç serinin toplamını inceleyelim.

**Teorem 3.4** Pozitif $n$ tam sayıları için,

$$\textbf{i)} \quad \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{J_{n-1}J_n} = 1 \qquad \textbf{ii)} \quad \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{J_{n+1}J_n} = \frac{1}{2} \qquad \textbf{iii)} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2J_{n-1}}{J_{n+1}J_n} = 1$$

ifadeleri geçerlidir.

**İspat.** i) Jacobsthal sayılarının Simpson benzeri formülü kullanılarak toplam ifadesi

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{n-1}}{J_{n-1}J_n} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2}{J_{n-1}J_n} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{J_{n+1}}{J_n} - \frac{J_n}{J_{n-1}} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son serinin kısmi toplamlar dizisi alınırsa,

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{n=2}^{k} \left( \frac{J_{n+1}}{J_n} - \frac{J_n}{J_{n-1}} \right) \\ &= \left( \frac{J_{k+1}}{J_k} - \frac{1}{1} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. $k \to \infty$ için bu dizinin limiti ve ardışık terimler oranından

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} S_k &= \lim_{k\to\infty} \left( \frac{J_{k+1}}{J_k} - 1 \right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{J_{k+1}}{J_k} - 1 \\ &= 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Eşitliğin ispatı da i)'deki gibi elde edilir.

iii) Bu eşitliği elde etmek için basit kesirleri ayırma metodu kullanılırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_{n-1}}{J_{n+1}J_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{J_n}-\frac{1}{J_{n+1}}\right)$$

elde edilir. Son ifadenin kısmi toplamlar dizisi

$$\begin{aligned}S_k&=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{J_n}-\frac{1}{J_{n+1}}\right)\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{J_{k+1}}\right)\end{aligned}$$

olur ki,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}S_k&=\lim_{k\to\infty}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{J_{k+1}}\right)\\&=1-\lim_{k\to\infty}\frac{1}{J_{k+1}}\\&=1\end{aligned}$$

olup, bu da istenendir. ■

Asal sayılar, birçok alanda kullanılır ve ardışık asalların toplamı ilginç sonuçlar verir. Bilindiği gibi bazı asal sayılar, $k$ herhangi bir tam sayı olmak üzere, $4k+1$ yada $4k+3$ şeklindedir. Teorem 3.4'de verilen toplam formüllerine ek olarak, indisleri bu şekilde olan ardışık Jacobsthal sayılarının toplamlarını verelim.

**Teorem 3.5** Her $n$ doğal sayısı için,

**i)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}J_{4k+1}=\frac{1}{15}(2J_{4n+4}+5n+5)$ **ii)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}J_{4k+3}=\frac{1}{15}(8J_{4n+4}+5n+5)$

eşitlikleri geçerlidir.

**İspat.** Bu eşitliklerin ispatları birbirlerine benzerdir. Toplam ifadesinin içindeki Jacobsthal sayısını Binet benzeri formülü kullanılarak değeri yazılır. Burada rekürans bağıntısı kullanılıp ve geometrik seri toplam değeri yerlerine yazılırsa istenilenler elde edilir. ■

Son teoremin bir sonucu olarak, her $n$ doğal sayısı için $J_n$ değerleri tam sayı olduğundan ve tam sayıların toplamları da tam sayı olacağından yukarıdaki teoremdeki eşitliklerin sağ taraflarının da tam sayı olması gerekir. Bu nedenle Jacobsthal sayıları için bölünebilme konusunu inceleyelim.

### 3.3 Jacobsthal Sayılarında Bölünebilme

**Tanım 3.1** $a \neq 0$ ve $b$ tam sayıları için, $b = ac$ olacak şekilde $c$ tamsayısı varsa "$a$ , $b$ 'yi böler" denir ve $a|b$ şeklinde gösterilir.

**Lemma 3.1** $a,b,c,x,y,z \in \mathrm{Z}$ için;

**i)** $a \neq 0$ olmak üzere $a|0$ , $a|a$ ve $ab|ac$ ise $b|c$ ,

***ii)*** $a|b$ ise $a|bc$ , ayrıca $a|b$ ve $a|c$ ise $a|bx+cy$

dir.

**Teorem 3.6** *n* ve *k*, doğal sayılar olmak üzere, $J_n|J_{kn}$ dır.

**İspat.** İspat için *k* üzerinden tümevarım metodunu kullanalım.

$k=1$ ve $k=2$ durumları için $J_n|J_n$ ve $J_n|J_{2n}$ olduğu kolayca görülür.

Her $i \leq k$ için $J_n|J_{in}$ eşitliği doğru olsun. Bölünebilme özelliklerini ve tümevarım hipotezini kullanarak, $k=i+1$ için, $J_n|J_{(i+1)n}$ olduğunu gösterelim.

$$J_{(i+1)n} = J_{in+n} = \frac{1}{2}(J_{in}j_n + J_n j_{in})$$

şeklinde yazılabilir. Tümevarım hipotezi gereği $J_n|J_{in}$, Lemma 3.1 (i)'den $J_n|J_n$ olduğunu biliyoruz. Lemma 3.1 (ii)'den direkt $J_n|J_{(i+1)n}$ olduğu görülmüş olur. ■

**Teorem 3.7** Her *k* tam sayısı için

**i)** $3|k$ ise $3|J_{4k}$, **ii)** $5|J_{4k}$

dır.

**İspat.** İspatı *k* üzerinden tümevarımla yapalım.

$k=3$ için $3|3$ olduğundan $J_{12}=1365$ olup $3|J_{12}$ dir.

$k=m$ için, $3|m$ ise $3|J_{4m}$ sağlandığını varsayalım. $3|m$ olduğu durumunda, $m=3i$ olacak şekilde *i* doğal sayısı vardır. Bu yüzden 3 ile bölünebilen *m* 'den büyük en küçük $i+1$ sayı için $3|m+3$ dür.

Şimdi $k=m+3$ için iddianın doğru olduğunu gösterelim. Başlangıç olarak,

$$J_{4(m+3)} = J_{4m+12} = J_{4m}J_{13} + J_{4m-1}J_{12}$$

eşitliğini yazabiliriz.

Hipotezin varsayımı gereği $3 \mid m$ ise $3 \mid J_{4m}$ ve $3 \mid 3$ olup $3 \mid J_{12}$ sağlandığına göre Lemma 3.1 (ii)'den $3 \mid m+3$ ise $3 \mid J_{4m+12}$ olduğu görülür.

ii) İspat tümevarım metodu kullanılarak yapılabilir. ■

### 3.4 Jacobsthal Sayılarının Matris Gösterimi

Bu bölümde, Köken F. ve Bozkurt D. tarafından tanımlanan Jacobsthal *F*-matrisi ve Jacobsthal *M*-matrisi verilecektir. Ayrıca, bu matrisleri kullanarak elemanları Jacobsthal sayılarının genel hali olan bir genel matris elde edeceğiz ki, bu matrise Jacobsthal sayılarının matris gösterimi denir. Bu genel matrisi kullanarak, Jacobsthal Binet ve Cassini benzeri formüllerini ve ardışık terimler toplamının farklı bir ispatını ve bazı indis toplam özellikleri elde edeceğiz.

Jacobsthal *F*-matrisini

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

olarak tanımlayalım. $J_n$, $n$. Jacobsthal sayısı ve Jacobsthal *F*-matrisi için

$$\begin{bmatrix} J_{n+1} \\ J_n \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} J_n \\ J_{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca, Jacobsthal *M*-matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

şeklinde olsun. Rekürans bağıntısından yapılan işlemlerle kolayca görülebilir ki,

$$\begin{bmatrix} J_{2n+1} \\ J_{2n} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} J_{2n-1} \\ J_{2n-2} \end{bmatrix}$$

matris eşitliği sağlanır. Bu da bize gösteriyor ki, matrisler ile Jacobsthal sayıları arasında bir ilişki vardır.

İlk olarak, Jacobsthal *F*-matrisi ile Jacobsthal sayıları arasındaki bağıntıyı verip, sonra bilinen özelliklere ek olarak bu matris gösterimi kullanılarak bazı özellikler vereceğiz.

**Teorem 3.8** (3.1)'de verilen Jacobsthal $F$-matrisi ve her $n$ pozitif tam sayısı için

$$F^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

ifadesi geçerlidir.

**İspat.** İspatı $n$ üzerinden tümevarım kullanarak yapalım. $n = 1$ için

$$F = \begin{bmatrix} J_2 & 2J_1 \\ J_1 & 2J_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup iddia doğrudur. $n = k$ için iddia doğru olsun. Yani,

$$F^k = \begin{bmatrix} J_{k+1} & 2J_k \\ J_k & 2J_{k-1} \end{bmatrix}$$

olsun. Şimdi, $n = k+1$ için iddianın doğruluğunu gösterelim. $n = k+1$ için

$$F^{k+1} = F^k F = \begin{bmatrix} J_{k+2} & 2J_{k+1} \\ J_{k+1} & 2J_k \end{bmatrix}$$

elde edilir ki, bu da istenendir. ■

**Sonuç 3.1** Teorem 3.8'in bir sonucu olarak,

$$\det(F^n) = \left|F^n\right| = (-2)^n$$

$$J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n 2^{n-1} \text{ (Cassini benzeri formülü)}$$

ifadeleri geçerlidir.

**İspat**. (3.1)'de verilen Jacobsthal $F$-matrisinin determinantının $(-2)$ olduğu kolayca görülür. Matrislerin çarpımının determinantı, determinantlar çarpımına eşit olduğundan, $\det F^n = (-2)^n$ dir. (3.3) de verilen matris eşitliğinin her iki tarafının determinantı alınırsa

$$2J_{n+1}J_{n-1} - 2J_n^2 = \det(F^n) = (-2)^n$$

olur. Bu son eşitlikte gerekli işlemler yapılırsa istenilen diğer sonuçta elde edilir. ■

Şimdi daha önceden de bahsettiğimiz Jacobsthal Binet benzeri formülünün matris gösterimini kullanarak tekrar ispat edeceğiz.

**Teorem 3.9** Jacobsthal Binet benzeri formülü

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

dür.

**İspat.** *F,* (3.1)'de verilen matris olmak üzere, *F* matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = 2$, ve $\lambda_2 = -1$, bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler sırasıyla, $v_1 = (2,1)$ ve $v_2 = (-1,1)$ şeklindedir. Dikkat edilirse, *F* matrisinin öz değerlerinin, Lucas dizilerindeki $a = 2$ ve $b = -1$ değerleri olduğunu görülür.

Şimdi, *F* matrisinin öz vektörlerinden oluşturulan $P = (v_1^T, v_2^T)$ ile öz değerlerinden oluşturulan $D = köş(\lambda_1, \lambda_2)$ matrisi kullanılarak, *F* matrisinin

$$D = P^{-1}FP$$

şeklindeki köşegenleştirmesini göz önüne alalım. Her pozitif *n* tamsayısı için benzer matrislerin özeliklerini ve $D^n = köş(2^n, (-1)^n)$ gerçeğini kullanarak

$$F^n = PD^nP^{-1} \tag{3.4}$$

yazabiliriz. (3.3) ve (3.4)'deki eşitliklerin sol tarafları eşit olduğundan sağ tarafları da eşittir. Bu eşitlikten

$$\begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} & \frac{2(2^n - (-1)^n)}{3} \\ \frac{2^n - (-1)^n}{3} & \frac{2(2^{n-1} + (-1)^n)}{3} \end{bmatrix}$$

elde edilir ki, bu da istenilendir. ■

Şimdi, Teorem 3.9'da verdiğimiz $F^n$ matrisini kullanarak Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas Binet benzeri formülleri için farklı başka bir yol vereceğiz.

**Teorem 3.10** (3.3)'de verilen $F^n$ matrisinin öz değerleri

$$\lambda_{1,2} = (j_n \pm 3J_n)/2,$$

olur ve

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}, \quad j_n = 2^n + (-1)^n$$

Binet benzeri formülleri elde edilir.

**İspat.** İlk olarak, $j_n = J_{n+1} + 2J_{n-1}$ ve $J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}$ eşitlikleri kullanarak $F^n$ matrisinin karakteristik denklemini,

$$\begin{aligned} det(F^n - \lambda I) &= \lambda^2 - (J_{n+1} + 2J_{n-1})\lambda + 2(J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2) \\ &= \lambda^2 - j_n.\lambda + (-2)^n \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Buradan $F^n$ matrisinin karakteristik polinomu

$$\lambda^2 - j_n.\lambda + (-2)^n = 0 \tag{3.5}$$

şeklindedir ki, bu denklemin kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{j_n \pm \sqrt{j_n^2 - 4(-2)^n}}{2}$$

olur. $j_n^2 - 4(-2)^n = 9J_n^2$ olduğundan dolayı, $\lambda_{1,2} = (j_n \pm 3J_n)/2$ olur.

Sonuç olarak, Teorem 3.9'da bahsettiğimiz gibi Jacobsthal *F*-matrisinin öz değerleri Lucas dizilerindeki $a = 2$ ve $b = -1$ değerleri olmak üzere,

$$a^n = \frac{j_n + 3J_n}{2}, \quad b^n = \frac{j_n - 3J_n}{2}$$

dir. Bu iki eşitlikten $j_n$ ve $J_n$ değerleri bulunursa Binet benzeri formüller

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}, \quad j_n = 2^n + (-1)^n$$

elde edilir. ■

(3.3)'deki matris denkleminin her iki tarafını $J_{n-1}$'e bölersek

$$\frac{1}{J_{n-1}} F^n = \begin{bmatrix} \frac{J_{n+1}}{J_{n-1}} & 2\frac{J_n}{J_{n-1}} \\ \frac{J_n}{J_{n-1}} & 2 \end{bmatrix}$$

olur. Teorem 3.1'den $\lim_{n\to\infty}(J_n / J_{n-1}) = a$ olduğundan, yukarıdaki denklemden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{J_{n-1}} F^n = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ a & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2 & 2a \\ a & 2 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Her iki taraftaki matrislerin determinantları hesaplanırsa, (3.1)'deki Jacobsthal $F$ matrisinin karakteristik polinomu

$$a^2 - a - 2 = 0$$

olarak bulunur.

**Teorem 3.11** (3.2)'deki Jacobsthal $M$-matrisi için

$$M^n = \begin{bmatrix} J_{2n+1} & 2J_{2n} \\ J_{2n} & 2J_{2n-1} \end{bmatrix}$$

eşitliği geçerlidir.

**İspat.** Tümevarım metodu ile Teorem 3.8'in ispatına bezer olarak yapılabilir. ■

Teoremin sonuçları olarak,

$$\det(M^n) = \left|M^n\right| = 2^{2n}, \quad J_{2n+1}J_{2n-1} - J_{2n}^2 = 2^{2n-1}$$

eşitlikleri verilebilir.

Kısım 2.1.5'de bahsettiğimiz Jacobsthal sayılarının ardışık terimler toplam formülünü, şimdi (3.1) de verilen Jacobsthal matrisini kullanarak farklı formda vereceğiz.

**Teorem 3.12** Her $n$ doğal sayısı için,

$$\sum_{i=0}^{n} J_i = \frac{1}{2}(J_{n+2} - 1)$$

dir.

**İspat.** (3.5)'deki karakteristik denklemde $n = 1$ seçilirse

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

denklemi oluşur ki, bu denklem Jacobsthal $F$-matrisinin karakteristik denklemidir. Calley-Hamilton teoremine göre her matris kendi karakteristik denklemini sağlar. Yani,

$$F^2 - F - 2I = 0$$

olur. Ayrıca, $F^2 = F + 2I$ ve $F^2 - F = 2I$ eşitlikleri mevcuttur ki, $F(F - I) = 2I$ şeklinde yazılabilir. $\det(F - I) = -2 \neq 0$ olduğundan, $F - I$ terslenebilir ve tersi $(F - I)^{-1} = \frac{1}{2}F$ olur.

$$(I+F+F^2+F^3+...+F^n)(F-I)=F^{n+1}-I$$

eşitliğini göz önüne alınarak, eşitliğin her iki tarafı $(F-I)^{-1}=\frac{1}{2}F$ ile çarpılırsa

$$I+F+F^2+F^3+...+F^n=\frac{1}{2}(F^{n+2}-F)$$

elde edilir. Bu matris denkleminde gerekli işlemler yapıldıktan sonra (2,1) indisli elemanlar eşitlenirse

$$\sum_{i=0}^{n}J_i=\frac{1}{2}(J_{n+2}-1)$$

olur ki, bu da istenendir. ■

**Teorem 3.13** Pozitif *n* ve *m* sayıları için aşağıdaki eşitlikler

$$J_{m+n}=J_m J_{n+1}+2J_{m-1}J_n,$$

$$J_{2n}=J_n J_{n+1}+2J_n J_{n-1}=J_n(J_{n+1}+2J_{n-1})=J_n.j_n,$$

$$J_{2n+1}=J_{n+1}^2+2J_n^2$$

ve

$$(-1)^n 2^{n-1}J_{m-n}=J_mJ_{n-1}-J_{m-1}J_n$$

eşitlikleri geçerlidir.

**İspat.** Jacobsthal *F*-matrisi için $F^{m+n}=F^m F^n$ özelliği geçerli olduğundan,

$$\begin{pmatrix}J_{m+n+1} & 2J_{m+n}\\ J_{m+n} & 2J_{m+n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_{m+1} & 2J_m\\ J_m & 2J_{m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_{n+1} & 2J_n\\ J_n & 2J_{n-1}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}J_{m+1}J_{n+1}+2J_mJ_n & 2(J_{m+1}J_n+2J_mJ_{n-1})\\ J_mJ_{n+1}+2J_{m-1}J_n & 2(J_nJ_m+2J_{n-1}J_{m-1})\end{pmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. İlk üç eşitlik, bu matris eşitliğinden kolayca elde edilir. (2,1) elemanlarının eşitliğinden

$$J_{m+n}=J_m J_{n+1}+2J_{m-1}J_n$$

elde edilir. Bu elde ettiğimiz eşitlikte veya matris üssü olarak $m=n$ ve $m=n+1$ alınırsa istenen diğer iki eşitlik elde edilir.

Ayrıca $F^{-n}$ matrisini hesaplarsak,

$$F^{-n}=\frac{1}{(-2)^n}\begin{bmatrix}2J_{n-1} & -2J_n\\ -J_n & J_{n+1}\end{bmatrix}$$

olur.

$F^{m-n} = F^m.F^{-n}$ matris eşitliğinden

$$\begin{bmatrix} J_{m-n+1} & 2J_{m-n} \\ J_{m-n} & 2J_{m-n-1} \end{bmatrix} = \frac{(-1)^n}{2^n} \begin{bmatrix} 2(J_{m+1}J_{n-1} - J_m J_n) & -2(J_{m+1}J_n - J_m J_{n+1}) \\ 2(J_m J_{n-1} - J_{m-1}J_n) & -2(J_m J_n - J_{m-1}J_{n+1}) \end{bmatrix}$$

denklemdeki matrislerin (2,1) elemanları eşitlenirse diğer eşitlik elde edilir. ■

# 4. BÖLÜM

A. F. Horadam Jacobsthal sayıları ile bağlantılı olan Jacobsthal Lucas sayılarını tanımlamış ve aralarındaki ilişkileri vermiştir. Bu bölümde, Jacobsthal Lucas sayılarının toplam, bölünebilme özellikleri ve bu sayı sistemlerinin 3. bölümde verilenden farklı bir matris gösterimi verildi.

## 4.1 Jacobsthal Lucas Sayıları

Kısım 2.1.6'da Jacobsthal Lucas dizisini tanımlanmıştı. Ayrıca bu sayılarla ilgili çalışmalardan ve bazı önemli özelliklerinden de bahsedilmişti.

Jacobsthal sayılarında bahsettiğimiz ve Fibonacci sayılarında da görülen Altın orana benzer Jacobsthal Lucas sayıları için önemli bir oranı teorem olarak verelim.

**Teorem 4.1** Lucas dizilerindeki $a$ değeri için, $\lim_{n\to\infty}\frac{j_{n+1}}{j_n}=a$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{j_{n+r}}{j_n}=a^r$ dir.

**İspat.** İspat, Jacobsthal sayıları için yapılana benzer olarak Jacobsthal Lucas sayıları için Binet benzeri formülü ile yapılır. ■

Ayrıca, sürekli kesirlerin yazılışı ve bunun bir sonucu olan karakteristik denklemin bulunuşu da benzer şekilde yapılabilir.

Şimdi, Binet benzeri formül ile kolayca ispatlanılabilen eşitlikleri verelim.

**Teorem.4.2** $j_n$, $n$. Jacobsthal Lucas sayısı ise,

**i)** $j_{m+n}=j_m\,j_n-(-2)^n\,j_{m-n}$ **ii)** $j_{m-n}=(-2)^{-n}(j_m\,j_n-j_{m+n})$

**iii)** $j_{2n}=j_n^2+(-2)^{n+1}$ **iv)** $j_{2n+1}=j_n\,j_{n+1}-(-2)^n$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat.** Her bir şıkkın ispatı için, eşitliğin sol tarafındaki Jacobsthal sayısının Binet benzeri formül kullanılarak değeri yazılır. Şimdi (i)'i ispatlayalım.

$$\begin{aligned} j_{m+n} &= 2^{m+n}+(-1)^{m+n} \\ &= (2^m+(-1)^m)\cdot(2^n+(-1)^n)-2^n\cdot(-1)^n\cdot(2^{m-n}+(-1)^{m-n}) \\ &= j_m\,j_n-(-2)^n\,j_{m-n} \end{aligned}$$

olur ki, istenendir.

(ii), (iii) ve (iv) eşitlikleri de benzer şekilde kolayca gösterilebilir. ■

### 4.2 Jacobsthal Lucas Sayılarının Toplam Özellikleri

Bu sayıların sonlu ardışık toplamını,

$$\sum_{i=1}^{n} j_i = \frac{1}{2}\left(j_{n+2} - 5\right)$$

şeklinde Darrin D. Frey, James A. ve Horadam A. F vermişleridir. Bu bölümde, ardışık Jacobsthal Lucas sayılarının karelerinin toplamını, çift ve tek indisli ardışık Jacobsthal Lucas sayılarının toplamlarını, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarına bağlı farklı eşitlikleri vereceğiz.

**Teorem 4.3** $J_n$ ve $j_n$ sırası ile *n*. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayısı ise

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} j_{2i} &= J_{2n+2} + n + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left[5J_{2n} + j_{2n}\right] + n + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left[5 j_n J_n + j_n^2 + \left(-2\right)^{n+1}\right] + n + 1\end{aligned}$$

eşitlikleri gerçeklenir.

**İspat.** Toplam içindeki Jacobsthal Lucas sayısını Binet benzeri formül ile ifade edip, toplamın değerini geometrik toplam olarak kullanırsak,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} j_{2i} &= \sum_{i=0}^{n} (2^{2i} + \left(-1\right)^{2i}) \\ &= \frac{(2^2)^{n+1} - 1}{2^2 - 1} + n + 1 = J_{2n+2} + n + 1\end{aligned}$$

elde ederiz. $J_{2n+2} = \frac{1}{2}\left(J_{2n} j_2 + J_2\, j_{2n}\right)$ değerini yerine yazarsak

$$\sum_{i=1}^{n} j_{2i} = \frac{1}{2}\left[5J_{2n} + j_{2n}\right] + n + 1$$

olur ki, $J_{2n} = J_n\, j_n$ ve $j_{2n} = j_n^2 + \left(-2\right)^{n+1}$ eşitliklerini kullanırsak

$$\sum_{i=1}^{n} j_{2i} = \frac{1}{2}\left[5J_n\, j_n + j_n^2 + \left(-2\right)^{n+1}\right] + n + 1$$

elde edilir. ■

**Teorem 4.4** $J_n$ ve $j_n$ sırası ile *n*. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayısı ise

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} j_{2i+1} &= 2J_{2n+2} - n - 1 \\ &= 5J_{2n} + j_{2n} - n - 1 \\ &= 5\,J_n\,j_n + j_n^2 + (-2)^{n+1} - n - 1\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat.** Binet benzeri formülü kullanarak toplamın içindeki Jacobsthal Lucas sayısının değeri yazılıp, gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} j_{2i+1} &= \sum_{i=0}^{n}\left(2^{2i+1} + (-1)^{2i+1}\right) \\ &= 2\left[\frac{2^{2n+2} - (-1)^{2n+2}}{3}\right] - (n+1) = 2J_{2n+2} - n - 1\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte, $J_{2n+2} = \frac{1}{2}\left(J_{2n}j_2 + J_2\,j_{2n}\right)$ eşitliği kullanılırsa

$$\sum_{i=0}^{n} j_{2i+1} = 5J_{2n} + j_{2n} - n - 1$$

ifadesine ulaşılır. $J_{2n} = J_n\,j_n$, $j_{2n} = j_n^2 + (-2)^{n+1}$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{n} j_{2i+1} = 5J_n\,j_n + j_n^2 + (-2)^{n+1} - n - 1$$

ifadenin en sade şekli elde edilir. ■

**Teorem 4.5** $J_n$ ve $j_n$ sırası ile *n*. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayısı ise

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} j_i^2 &= J_{2n+2} + 2(-1)^n J_{n+1} + n + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left[5J_{2n} + j_{2n}\right] + 2(-1)^{n+1} J_{n+1} + n + 1 \\ &= \frac{1}{2}\left[5J_n\,j_n + j_n^2 + (-2)^{n+1}\right] + 2(-1)^{n+1} J_{n+1} + n + 1\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat.** Toplamın içindeki ifadeyi Binet benzeri formülleri kullanarak yazarsak,

$$\sum_{i=0}^{n} j_i^2 = \sum_{i=0}^{n}\left(2^i + (-1)^i\right)^2$$
$$= \left[\frac{2^{2n+2} - (-1)^{2n+2}}{3}\right] + 2(-1)^{n+1}\left[\frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{-3}\right] + n + 1$$
$$= J_{2n+2} + 2(-1)^{n+1} J_{n+1} + n + 1$$

olur. Son eşitlikte $J_{2n+2} = \frac{1}{2}\left(J_{2n} j_2 + J_2\, j_{2n}\right)$ eşitliğini kullanırsak,

$$\sum_{i=0}^{n} j_i^2 = \frac{1}{2}\left[5J_{2n} + j_{2n}\right] + 2(-1)^{n+1} J_{n+1} + n + 1$$

olur. $J_{2n} = J_n\, j_n$ ve $j_{2n} = j_n^2 + (-2)^{n+1}$ eşitlikleri yerlerine yazılırsa

$$\sum_{i=0}^{n} j_{2i} = \frac{1}{2}\left[5J_n\, j_n + j_n^2 + (-2)^{n+1}\right] + 2(-1)^{n+1} J_{n+1} + n + 1$$

elde edilir. ■

**Teorem 4.6** Her pozitif *n* tam sayısı için,

**i)** $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2j_{n-1}}{j_{n+1}\, j_n} = \frac{1}{2}$ **ii)** $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{j_{n-1} j_n} = \frac{1}{6}$ **iii)** $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{j_{n+1} j_n} = \frac{1}{12}$

ifadeleri geçerlidir.

**İspat.** i) İlk olarak toplamın içindeki ifadeyi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2j_{n-1}}{j_{n+1}\, j_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j_n} - \frac{1}{j_{n+1}}\right)$$

şeklinde kısmi kesirlerine ayırırsak, sol taraftaki serinin kısmi toplamı

$$S_k = \sum_{n=0}^{k}\left(\frac{1}{j_n} - \frac{1}{j_{n+1}}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{j_0} - \frac{1}{j_1}\right) + \left(\frac{1}{j_1} - \frac{1}{j_2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{j_k} - \frac{1}{j_{k+1}}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{j_{k+1}}\right)$$

olur ki, $k \to \infty$ bu toplamın değeri

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{j_{k+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{2} - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{j_{k+1}} = \frac{1}{2}$$

olup istenen elde edilmiş olur.

ii) Şimdi ikinci eşitlik için $j_{n+1}\, j_{n-1} - j_n^2 = 9(-1)^{n-1} 2^{n-1}$ Simpson eşitliğini kullanarak

$$\frac{1}{9}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9(-1)^{n-1} 2^{n-1}}{j_{n-1} j_n}\right) = \frac{1}{9}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{n+1}\, j_{n-1} - j_n^2}{j_{n-1}\, j_n}\right)$$
$$= \frac{1}{9}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{j_{n+1}}{j_n} - \frac{j_n}{j_{n-1}}\right)\right)$$

şeklinde alınırsa, sol taraftaki serinin kısmi toplamlar dizisi

$$S_k = \sum_{n=1}^{k}\left(\frac{j_{n+1}}{j_n} - \frac{j_n}{j_{n-1}}\right)$$
$$= \left(\frac{j_2}{j_1} - \frac{j_1}{j_0}\right) + \left(\frac{j_3}{j_2} - \frac{j_2}{j_1}\right) + \ldots + \left(\frac{j_{k+1}}{j_k} - \frac{j_k}{j_{k-1}}\right)$$
$$= \left(\frac{j_{k+1}}{j_k} - \frac{1}{2}\right)$$

olur ki, $k \to \infty$ için kısmi toplamın değeri

$$\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{j_{k+1}}{j_k} - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \lim_{k\to\infty} \frac{j_{k+1}}{j_k} - \frac{1}{2}$$
$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

olduğundan bu değer yerine yazılırsa istenen elde edilmiş olur.

iii) Üçüncü eşitliğin ispatı ikinci eşitliğin ispatında izlenen yola kolayca yapılabilir.

■

**Teorem 4.7** Her hangi bir *n* pozitif tam sayısı için

**i)** $\sum_{k=0}^{n} j_{4k+1} = \frac{2}{5} J_{4n+4} - n - 1$ **ii)** $\sum_{k=0}^{n} j_{4k+3} = \frac{8}{5} J_{4n+4} - n - 1$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat.** i) $j_n = 2^n + (-1)^n$ ve $J_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ bağıntılarını kullanırsak

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} j_{4k+1} &= \sum_{k=0}^{n}\left(2^{4k+1} + (-1)^{4k+1}\right)\\ &= 2\sum_{k=0}^{n}\left(2^4\right)^k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^{4k}\\ &= 2\frac{(2^4)^{n+1}-1}{2^4-1} - n - 1\\ &= \frac{2}{5}J_{4n+4} - n - 1\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $j_n = 2^n + (-1)^n$ ve $J_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$ bağıntılarını kullanırsak

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} j_{4k+3} &= \sum_{k=0}^{n}\left(2^{4k+3} + (-1)^{4k+3}\right)\\ &= 2^3\sum_{k=0}^{n}\left(2^4\right)^k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^{4k}\\ &= 2^3\frac{(2^4)^{n+1}-1}{2^4-1} - n - 1\\ &= \frac{8}{5}J_{4n+4} - n - 1\end{aligned}$$

elde edilir. ■

### 4.3 Jacobsthal Lucas Sayılarının Matris Gösterimi

Bu kısımda, kısım 3.4'de verdiğimiz Jacobsthal $F$ matrisine benzer bir $2\times 2$ Jacobsthal Lucas $E$ matrisi ve $R$ matrisi tanımlayacağız. Daha sonra bu matris gösterimi kullanılarak, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının aralarındaki ilişkiyi, Binet benzeri formüllerini ve bu sayıları içeren bazı özellikler elde edeceğiz.

Jacobsthal Lucas $E$ matrisi

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu matris ile Jacobsthal sayıları arasındaki ilişki,

$$\begin{bmatrix} j_{n+2} \\ j_{n+1} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} J_{n+1} \\ J_n \end{bmatrix}$$

ve Jacobsthal Lucas sayıları arasındaki ilişki de,

$$9\begin{bmatrix} J_{n+2} \\ J_{n+1} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} j_{n+1} \\ j_n \end{bmatrix}$$

şeklinde olduğu kolayca görülür. Ayrıca Jacobsthal Lucas $R$ matrisi,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

şeklinde tanımlanılır.

Görüldüğü gibi yukarıda tanımlanan Jacobsthal Lucas $E$ ve $R$ matrisleri birbirlerinden farklıdır. Bu matrislerin çarpımı veya determinant özellikleri kullanılarak Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının bazı özellikleri elde edeceğiz. Bu özelliklerden bir kısmını önceden verilmişti. Ancak burada matris gösterimi kullanılarak bu özellikleri yeniden ifade edeceğiz. Bazıları ise ilk olarak bu matrisler ile elde edilecektir.

**Teorem 4.8** (4.1) ile verilen $E$ matrisi ve her $n$ pozitif tam sayısı için,

$$E^n = \begin{cases} 3^n \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}, & n \text{ çift} \\ 3^{n-1} \begin{bmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{bmatrix}, & n \text{ tek} \end{cases} \tag{4.3}$$

dir.

**İspat.** İspatı $n$ üzerinden $n$'yi tek ve çift sayı seçerek ayrı ayrı tümevarım metodu ile yapacağız.

İlk olarak, $n$ tek olsun. $n = 1$ için,

$$E^1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_2 & 2j_1 \\ j_1 & 2j_0 \end{bmatrix}$$

iddianın doğruluğu görülür. $n = k$ için iddia doğru olsun. Yani,

$$E^k = 3^{k-1} \begin{bmatrix} j_{k+1} & 2j_k \\ j_k & 2j_{k-1} \end{bmatrix}$$

olsun. Şimdi, $n = k+2$ için iddianın doğruluğunu gösterelim.

$$E^{k+2} = E^k E^2 = 3^{k+1}\begin{bmatrix} j_{k+3} & 2j_{k+2} \\ j_{k+2} & 2j_{k+1} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

İkinci olarak, *n*'yi çift sayı alalım. $n = 2$ için

$$E^2 = \begin{bmatrix} 27 & 18 \\ 9 & 18 \end{bmatrix} = 3^2\begin{bmatrix} J_3 & 2J_2 \\ J_2 & 2J_1 \end{bmatrix}$$

iddia doğrudur. $n = k$ için iddia doğru olsun. Yani,

$$E^k = 3^k\begin{bmatrix} J_{k+1} & 2J_k \\ J_k & 2J_{k-1} \end{bmatrix}$$

olsun. Şimdi, $n = k+2$ için iddianın doğruluğunu gösterelim.

$$E^{k+2} = E^k E^2 = 3^{k+2}\begin{bmatrix} J_{k+2} & 2J_{k+1} \\ J_{k+1} & 2J_k \end{bmatrix}$$

elde edilir ki, bu da istenendir. ■

**Sonuç 4.1** (4.3) ile verilen $E^n$ matrisi ve *n* pozitif tamsayıları için,

$$det(E^n) = \begin{cases} (-1)^n\ 3^{2n}\ 2^n & n\ çift \\ (-1)^{n+1}\ 3^{2n}\ 2^n & n\ tek \end{cases}$$

$$J_{n+1}\,J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n\,2^{n-1} \text{ (Simpson formülü)}$$

$$j_{n+1}\,j_{n-1} - j_n^2 = 9(-1)^{n+1}\,2^{n-1} \text{ (Simpson formülü)}$$

özellikleri geçerlidir.

**İspat.** İlk özelik için, *n*'yi tek ve çift sayı seçerek *n* üzerinden tümevarım kullanacağız. *n* tek sayı olsun. $n = 1$ için $det(E) = 3^2.2^1$ olduğundan iddia doğrudur. Varsayalım ki, $n = k$ için $det(E) = 3^{2k}.2^k$ doğru olsun. $n = k+2$ için,

$$det(E^{k+2}) = det\,(E^k).det(E^2) = 3^{2k+4}.2^{k+2}$$

şeklinde olup, istenendir.

*n*'yi çift sayı olarak alırsak tek sayılar için yapılan ispatla iddianın doğruluğu kolayca görülür.

Diğer iki özdeşlik ise, (4.1) ve (4.3)'de verilen matrislerin determinant özellikleri kullanılırsa,

$$det(E^n) = \begin{cases} (-1)^n \ 3^{2n} \ 2^n = 3^{2n}(2J_{n-1}J_{n+1} - 2J_n{}^2) & n \text{ çift} \\ (-1)^{n+1} \ 3^{2n} \ 2^n = 3^{2n-2}(2j_{n-1}j_{n+1} - 2j_n{}^2) & n \text{ tek} \end{cases}$$

olduğundan, *n*'nin tek ve çift olmasına göre iki eşitlik elde edilir. Fakat kolayca görülebilir ki, her iki eşitlik her *n* tam sayısı için geçerlidir. ■

**Teorem 4.9** *n* tam sayı olmak üzere, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayılarının Binet formülleri

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}, \quad j_n = 2^n + (-1)^n$$

şeklindedir.

**İspat.** (4.1)'daki *E* matrisi için *E* matrisinin karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$$

şeklidedir. Buradan, matrisin öz değerleri,

$$\lambda_1 = 6, \ \lambda_2 = 3$$

ve karşılık gelen öz vektörleri,

$$v_1 = (-1,1), \ v_2 = (2,1)$$

dir. *E* matrisini öz değer ve öz vektörlerini kullanarak köşegenleştirebiliriz. Elemanları öz değerler olan bir köşegen *V* matrisi ve bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörleri sütun olarak içren bir *U* matrisi oluşturalım. Yani,

$$V = köş(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ve

$$U = (v_1^T, v_2^T) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olur ki, bu matrisler kullanılarak *E* matris

$$V = U\,E\,U^{-1}$$

şeklinde köşegenleştirilir. Benzer matrislerin özellikleri kullanılarak,

$$V^n = U\,E^n\,U^{-1}$$

olur ki, her pozitif $n$ sayısı için de,

$$E^n = UV^nU^{-1} \tag{4.4}$$

şeklinde yazılabilir. (4.3) ile (4.4)'un sol tarafları eşit olduğundan sağ taraflarındaki matrisler de eşittir. O halde

$$E^n = 3^{n-1}\begin{bmatrix} 2^{n+1}+1 & 2(2^n-1) \\ 2^n-1 & 2(2^{n-1}+1) \end{bmatrix}$$

elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar. ■

(3.1) ile verilen Jacobsthal $F$ matrisi ve (4.2) ile verilen Jacobsthal Lucas $R$ matrisi arasındaki bağıntı Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları arasındaki ilişkiyi de göstermektedir.

**Teorem 4.10** Jacobsthal $F$ matrisi ve Jacobsthal Lucas $R$ matrisi için,

$$RF^n = \begin{bmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad R\begin{bmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{bmatrix} = 9F^n$$

eşitlikleri mevcuttur.

**İspat.** A. F. Horadam'ın (1996) çalışmasında $j_{n+1} = J_{n+1} + 4J_n$, $j_n = 2J_{n+1} - J_n$, $9J_{n+1} = j_{n+1} + 4j_n$ ve $9J_n = 2j_{n+1} - j_n$ eşitlikleri verilmiştir. Bu formüler kullanılarak,

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

ve

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{bmatrix} = 9\begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

matrislerin eşitliğinden kolayca görülür. ■

Bu matrisler arasındaki bağıntılar kullanılarak aşağıdaki sonuca varılır.

**Sonuç 4.2** *n* pozitif tam sayı olmak üzere,

$$J_{n+1}\,J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n\,2^{n-1}$$

ve

$$j_{n+1}\,j_{n-1} - j_n^2 = 9(-1)^{n+1}\,2^{n-1}$$

Simpson benzeri formüller elde edilir.

**İspat.** (4.6)'deki matris eşitliği,

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{bmatrix} = 9\begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}$$

idi. Determinant hesabına geçilirse, $9^2(2J_{n+1}J_{n-1} - 2J_n^2) = (-9)(2j_{n+1}j_{n-1} - 2j_n^2)$ olur ki, $j_{n+1}\,j_{n-1} - j_n^2 = 9(-1)^{n+1}\,2^{n-1}$ eşitliği kullanılırsa,

$$9^2(2J_{n+1}J_{n-1} - 2J_n^2) = (-18).3^2.(-2)^{n-1}$$
$$J_{n+1}\,J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n\,2^{n-1}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.5)'dan

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{bmatrix}$$

eşitliğini kullanarak, $(-9)(J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2) = j_{n+1}j_{n-1} - j_n^2$ olup $J_{n+1}\,J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n\,2^{n-1}$ eşitliğini kullanırsak,

$$(-18).(-1)^n.2^{n-1} = 2j_{n+1}j_{n-1} - 2j_n^2$$
$$j_{n+1}\,j_{n-1} - j_n^2 = 3^2(-2)^{n-1}$$

eşitliği elde edilir. ■

**Teorem 4.11** *m* ve *n* her hangi tam sayılar olmak üzere,

$$J_{m+n} = J_m\,J_{n+1} + 2J_{m-1}J_n\,, \qquad j_{m+n} = j_nJ_{m+1} + 2j_{n-1}J_m\,,$$
$$9J_{m+n} = j_m\;j_{n+1} + 2j_{m-1}\;j_n\,, \qquad (-1)^n.2^{n-1}J_{m-n} = J_mJ_{n-1} - J_{m-1}J_n\,,$$
$$(-1)^{n+1}.2^{n-1}\,j_{m-n} = J_mj_{n-1} - J_{m-1}j_n\,, \qquad 9.(-1)^{n+1}.2^{n-1}J_{m-n} = j_{n-1}j_{m+1} - j_nj_m$$

eşitlikleri sağlanır.

**İspat.** Jacobsthal Lucas $E$ matrisi için, $E^{m+n} = E^m E^n$ olduğunu göz önüne alırsak, ilk üç eşitliği elde ederiz. Diğer eşitlikler için, $E^{-n}$ matrisini hesaplayacak olursak,

$$E^{-n} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n}{6^n}\begin{bmatrix} 2J_{n-1} & -2J_n \\ -J_{m+n} & J_{n+1} \end{bmatrix} & n \ \textit{çift} \\ \dfrac{(-1)^{n+1}}{3.6^n}\begin{bmatrix} 2j_{n-1} & -2j_n \\ -j_n & j_{n+1} \end{bmatrix} & n \ \textit{tek} \end{cases}$$

olur. $E^{m-n} = E^m E^{-n}$ matris eşitliği göz önüne alınırsa, diğer eşitlikler elde edilir. ■

**Sonuç 4.3** Her hangi bir $n$ tam sayısı için,

$$9.J_{2n} = j_n(j_{n+1} + 2j_{n-1}), \quad J_{2n} = J_n(J_{n+1} + 2J_{n-1}) = j_n J_n,$$

$$j_{2n} = j_n J_{n+1} + j_{n-1} J_n, \quad 9J_{2n+1} = j_{n+1}^2 + 2j_n^2,$$

$$J_{2n+1} = J_{n+1}^2 + 2J_n^2, \quad j_{2n+1} = j_{n+1} J_{n+1} + 2j_n J_n,$$

$$(-1)^{n+1}.2^n = J_n j_{n-1} - J_{n-1} j_n$$

eşitlikleri mevcuttur.

**İspat.** (4.1)'daki $E$ matrisi için,

$$E^{2n} = E^n E^n, \quad E^{2n+1} = E^{n+1} E^n$$

eşitlikleri kullanılarak ilk altı eşitlik elde edilir. Son eşitlik için Teorem 4.11'deki son eşitlikte $m = n$ alınırsa, $j_0 = 2$ oluğundan eşitliğin sağlandığı kolayca görülür. ■

# 5. BÖLÜM

Bu bölümde ilk olarak Fibonacci ve Jacobsthal dizilerinin bir genelleştirilmesi olarak *k*-Jacobsthal dizilerini, Lucas ve Jacobsthal Lucas dizilerinin genelleştirilmesi olarak da *k*-Jacobsthal Lucas dizilerini tanımlayacağız. Ayrıca, *k*-Jacobsthal ve *k*-Jacobsthal Lucas sayılarının tanımları, Binet formüleri ve toplam özellikleri gibi önemli bazı kuralları vereceğiz.

## 5.1 *k*-Jacobsthal Dizileri

Fibonacci ve Pell dizisinin genelleştirilmesi olarak tanımlanan *k*-Fibonacci dizisi (Catalan'ın Fibonacci Polinomu ), Falcon ve Plaza tarafından normalleştirilmiş üçgenlerin 4TLE paylaşımı ve kompleks değerli fonksiyonları kullanarak elde edilmiştir. Falcon ve Plaza $\left\{F_{k,n}\right\}_{n\in N}$ *k*-Fibonacci dizisini başlangıç koşulları $F_{k,0}=0$ ve $F_{k,1}=1$ olmak üzere,

$$F_{k,n+2}=kF_{k,n+1}+F_{k,n},\quad n\geq 0$$

lineer rekürans bağıntısı ile tanımlamışlardır. Falcon ve Plaza, çalışmalarında *k*-Fibonacci dizisinin matrisler ile ilişkisini ve birçok önemli özelliğini vermişleridir.

Benzer olarak, Hacı Civciv çalışmasında $\left\{L_{k,n}\right\}_{n\in N}$ *k*-Lucas dizisini (Lucas polinomları) başlangıç koşulları $L_{k,0}=2$ ve $L_{k,1}=k$ olmak üzere,

$$L_{k,n+2}=kL_{k,n+1}+L_{k,n},\quad n\geq 0$$

lineer rekürans bağıntısı ile tanımlayıp üçlü bant matrislerin determinantları, *k*-Fibonacci ve *k*-Lucas dizileri arasındaki ilişkiyi vermiştir. Ayrıca, Civciv bu sayıların kompleks değerli gösterimlerini ve bazı özelliklerini vermiştir.

**Tanım 5.1. (*k*-Jacobsthal dizisi).** Her $k>0$ reel sayısı için başlangıç koşuları $J_{k,0}=0$ ve $J_{k,1}=1$ olmak üzere

$$J_{k,n+2}=J_{k,n+1}+kJ_{k,n},\quad n\geq 0 \tag{5.1}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\left\{J_{k,n}\right\}_{n\in N}$ dizisine *k*-Jacobsthal dizisi denir. *k*-Jacobsthal dizisinin her bir elemanına, ***k*-Jacobsthal sayısı** denir.

$k$'nın bazı özel tamsayı değerleri için, $\{J_{k,n}\}_{n\in N}$ $k$-Jacobsthal dizisi, sayılar teorisinde önemli yere sahip olan tamsayı dizilerine dönüşmektedir. Örneğin; $\{J_{k,n}\}_{n\in N}$ $k$-Jacobsthal dizisinde $k=1$ alınırsa,

$$\{F_n\}_{n\in N}=\{0,1,1,2,3,5,8,...\}$$

Fibonacci dizisi; $k=2$ alınırsa,

$$\{J_n\}_{n\in N}=\{0,1,1,3,5,11,21,43,...\}$$

Jacobsthal dizisi elde edilir.

(5.1) ile verilen denklem, sabit katsayılı II. mertebeden bir fark denklemi olarak düşünülürse karakteristik denklemi,

$$q^2=q+k \tag{5.2}$$

şeklindedir. $q_1$ ve $q_2$; $q_1>q_2$ karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere,

$$q_1=\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2},\ q_2=\frac{1-\sqrt{1+4k}}{2} \tag{5.3}$$

eşitlikleri kolayca görülür.

Bu çalışma boyunca; $J_{k,n}$, $n$'inci $k$-Jacobsthal sayısını, $q_1$ ve $q_2$ ise (5.3) ile verilen ifadelerin eşitliklerini gösterecektir.

**Lemma 5.1** Her $n$ doğal sayısı için

$$q_1^{n+2}=q_1^{n+1}+k\,q_1^n \qquad \text{ve} \qquad q_2^{n+2}=q_2^{n+1}+k\,q_2^n$$

dir.

**İspat.** $q^2=q+k$ karakteristik denkleminin kökleri $q_1$ ve $q_2$ olduğundan,

$$\begin{cases} q_1^2=q_1+k \\ q_2^2=q_2+k \end{cases} \tag{5.4}$$

denklemi sağlayacaklardır. (5.4)'de verilen denklemlerin her iki yanının sırasıyla $q_1^n$ ve $q_2^n$ ile çarpılması sonucunda istenilenler elde edilmiş olur. ■

**Teorem 5.1** $k$-Jacobsthal sayıları için Binet benzeri formülü

$$J_{k,n}=\frac{{q_1}^n-{q_2}^n}{q_1-q_2}$$

dir.

Bu teorem için iki farklı ispat vereceğiz.

**İspat 1** (5.2) ile verilen denklemin karakteristik denklem ve bu denklemin köklerinin (5.3) ile verilen $q_1$ ve $q_2$ ile gösterildiği söylenilmişti. Ayrıca, bunlar kullanılarak

$$q_2 < q_1, \qquad q_2 < 0 < q_1, \qquad |q_2| < q_1,$$

$$q_1 + q_2 = 1, \qquad q_1 q_2 = -k, \qquad q_1 - q_2 = \sqrt{1+4k}$$

eşitliklerinin sağlandığını söyleyebiliriz. Şimdi *k*-Jacobsthal dizisinin genel teriminin her hangi $c_1$ ve $c_2$ sayıları için

$$J_{k,n} = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$$

şeklinde olduğunu düşünelim. $n = 0$ ve $n = 1$ için *k*-Jacobsthal dizisinin rekürans bağıntısındaki başlangıç koşuları kullanılarak

$$c_1 = \frac{1}{q_1 - q_2} = -c_2$$

katsayıları elde edilir. Bu katsayıları yerlerine yazarsak istenilen elde edilir. ■

**İspat 2.** İspatı *n* üzerinden tümevarım kullanarak yapalım. $n = 0$ ve $n = 1$ için

$$\frac{q_1^0 - q_2^0}{q_1 - q_2} = \frac{1-1}{q_1 - q_2} = 0 = J_{k,0}$$

$$\frac{q_1^1 - q_2^1}{q_1 - q_2} = \frac{q_1 - q_2}{q_1 - q_2} = 1 = J_{k,1}$$

elde edilir ki, iddia doğrudur. Varsayalım ki, $0 \le i \le m$ aralığındaki her *i* için

$$J_{k,i} = \frac{q_1^{\,i} - q_2^{\,i}}{q_1 - q_2}$$

olsun. *k* -Jacobsthal sayılarının rekürans bağıntısından

$$\begin{aligned} J_{k,m+1} &= J_{k,m} + k J_{k,m-1} \\ &= \frac{q_1^{m-1} q_1}{q_1 - q_2} - \frac{q_2^{m-1} q_2}{q_1 - q_2} + k \frac{q_1^{m-1} - q_2^{m-1}}{q_1 - q_2} \\ &= \frac{1}{q_1 - q_2}\left( q_1^{m-1}\left(q_1 + k\right) - q_2^{m-1}\left(q_2 + k\right)\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada, $q_1$ ve $q_2$ değerleri için Lemma 5.1'den $q_1 + k = q_1^2$ ve $q_2 + k = q_2^2$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$J_{k,m+1} = \frac{q_1^{\,m+1} - q_2^{\,m+1}}{q_1 - q_2}$$

bulunur. ■

**Teorem 5.2** $\lfloor x \rfloor$, $x$ in tam değer fonksiyonu olmak üzere $n \geq 0$ tam sayısı için,

$$J_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2i+1} (1+4k)^i$$

dir.

**İspat.** $k$-Jacobsthal sayıları için verilen Binet benzeri formülü ve $q_1$ ve $q_2$ değerleri kullanılarak,

$$J_{k,n} = \frac{q_1^{\,n} - q_2^{\,n}}{q_1 - q_2} = \frac{1}{\sqrt{1+4k}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{1+4k}}{2} \right)^n \right) \tag{5.5}$$

eşitliği yazılabilir. (5.5) ile verilen eşitliğin sağ tarafındaki parantez içindeki ifadelerin $n$. kuvvetlerini yazarsak,

$$J_{k,n} = \frac{1}{2^n \cdot \sqrt{1+4k}} \left[ \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{r} \sqrt{1+4k}^{\,r} - \sum_{r=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} (-1)^r \binom{n}{r} \sqrt{1+4k}^{\,r} \right]$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2i+1} (1+4k)^i$$

elde edilir ki, bu da istenilendir. ■

**Teorem 5.3** $n \geq 1$ sayısı için $J_{k,n}$, $n$. $k$-Jacobsthal sayısı olmak üzere,

$$J_{k,n+1} J_{k,n-1} - J_{k,n}^2 = (-1)^n k^{n-1} \ (\textit{Simpson benzeri eşitliği})$$

$$J_{k,n+r} J_{k,n-r} - J_{k,n}^2 = (-1)^{n+1-r} k^{n-r} J_{k,r}^2 \ (\textit{Catalan benzeri eşitliği}))$$

ve

$$J_{k,m} J_{k,n+1} - J_{k,m+1} J_{k,n} = (-k)^n J_{k,m-n} \ (\textit{d'Ocagne benzeri eşitliği})$$

dir.

**İspat.** İlk eşitliğimizin ispatını $n$ üzerinden tümevarım ile yapalım.

$n$=1 için

$$J_{k,2} J_{k,0} - J_{k,1}^2 = -1 = (-1)^1 (k)^0$$

olduğundan hipotez $n$=1 için doğrudur. $n = m$ için $J_{k,m+1} J_{k,m-1} - J_{k,m}^2 = (-1)^m (k)^{m-1}$ şeklinde olduğunu kabul edelim.

O halde

$$\begin{aligned} J_{k,m+2}J_{k,m} - J_{k,m+1}^2 &= (J_{k,m+1} + kJ_{k,m})(J_{k,m+1} - kJ_{k,m-1}) - J_{k,m+1}^2 \\ &= J_{k,m+1}^2 + k\,J_{k,m+1}J_{k,m} - k\,J_{k,m+1}J_{k,m-1} - k^2\,J_{k,m}J_{k,m-1} - J_{k,m+1}^2 \\ &= k\,J_{k,m+1}J_{k,m} - k^2\,J_{k,m}J_{k,m-1} - k\left((-1)^m(k)^{m-1} + J_{k,m}^2\right) \\ &= k\,J_{k,m+1}J_{k,m} - (-1)^m(k)^m - kJ_{k,m}\left(J_{k,m} + J_{k,m-1}\right) \\ &= \left(-1\right)^{m+1}\left(k\right)^m \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de, ikinci ve üçüncü eşitlikleri ispatlayalım. Bunun için *k*-Jacobsthal sayılarının Binet benzeri formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned} J_{k,n+r}J_{k,n-r} - J_{k,n}^2 &= \frac{q_1^{n+r} - q_2^{n+r}}{q_1 - q_2} \cdot \frac{q_1^{n-r} - q_2^{n-r}}{q_1 - q_2} - \left(\frac{q_1^n - q_2^n}{q_1 - q_2}\right)^2 \\ &= \left(-1\right)^{n+1-r} \cdot k^{n-r} \cdot J_{k,r}^2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} J_{k,m}J_{k,n+1} - J_{k,m+1}J_{k,n} &= \frac{q_1^m - q_2^m}{q_1 - q_2} \cdot \frac{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}}{q_1 - q_2} - \frac{q_1^{m+1} - q_2^{m+1}}{q_1 - q_2} \cdot \frac{q_1^n - q_2^n}{q_1 - q_2} \\ &= (q_1^n q_2^n)\frac{(q_1^{m-n} - q_2^{m-n})}{q_1 - q_2} \\ &= \left(-k\right)^n \cdot J_{k,m-n} \end{aligned}$$

elde edilir ki, istenendir. ■

Fibonacci ve Jacobsthal sayılarında bahsettiğimiz ardışık terimlerin oranına benzer şekilde, *k*-Jacobsthal sayıları için de bu özellikleri incelersek onlara benzer sonuçlar elde edeceğiz.

**Teorem 5.4** *k*-Jacobsthal sayıları için ardışık terimler oranı

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_{k,n+1}}{J_{k,n}} = q_1$$

dir.

**İspat.** *k*-Jacobsthal Binet benzeri formülü, $J_{k,n} = \dfrac{q_1^{\,n} - q_2^{\,n}}{q_1 - q_2}$ şeklindedir. Bu yüzden,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_{\mathrm{k,n+1}}}{J_{\mathrm{k,n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(q_1^{n+1} - q_2^{n+1})/\,q_1 - q_2}{(q_1^n - q_2^n)/\,q_1 - q_2} = q_1$$

şeklindedir. ■

$q_1 = \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}$ şeklinde olduğunu biliyoruz. $k=1$ için Fibonacci sayılarında önemli bir yere sahip olan, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ altın oran değerine eşittir. $k=2$ için Jacobsthal sayılarındaki $a=2$ değerine sahiptir ki, bu da Jacobsthal sayılarının, Lucas dizilerinden elde edilirken kullanılan değerdir.

*k*-Jacobsthal dizilerinin terimleri, genelleştirilmiş fonksiyonların kuvvetlerinin katsayıları olarak görülebilir. *k*-Jacobsthal dizileri için genelleştirilmiş fonksiyonu aşağıdaki teorem ile verelim.

**Teorem 5.5** $J_{k,n} = J_{k,0} + J_{k,1}x + J_{k,2}x^2 + \ldots + J_{k,n}x^n + \ldots$, şeklinde olmak üzere $J_k(x)$, *k*-Jacobsthal dizisinin genelleştirilmiş fonksiyonu

$$J_k(x) = \sum_{i=0}^{n} J_{k,i}x^i = \frac{x}{1-x-kx^2}$$

şeklindedir.

**İspat.**

$$J_{k,n} = J_{k,0} + J_{k,1}x + J_{k,2}x^2 + \ldots + J_{k,n}x^n + \ldots \qquad (5.6)$$

analitik fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun her iki tarafını $x$ ve $kx^2$ ile ayrı ayrı çarparsak,

$$xJ_{k,n} = J_{k,0}x + J_{k,1}x^2 + J_{k,2}x^3 + \ldots + J_{k,n}x^{n+1} +$$

$$kJ_{k,n}x^2 = kJ_{k,0}x^2 + kJ_{k,1}x^3 + kJ_{k,2}x^4 + \ldots + kJ_{k,n}x^{n+2} + \ldots$$

elde ederiz ki, bu denklemleri (5.6) denkleminden çıkartırsak,

$$(1-x-kx^2)J_{k,n} = x$$

gerekli işlemler ile istenilen elde edilir. ■

Tam sayı dizileri için ardışık terim toplamları ve ek olarak graph theory de kullanıldığı için ardışık tek ve çift terim toplamları da çok önemlidir.

**Teorem 5.6** *n* pozitif tam sayı olmak üzere;

$$\sum_{i=0}^{n} J_{k,i} = \frac{1}{k}\left(J_{k,n+2} - 1\right)$$

$$\sum_{i=0}^{n} J_{k,2i} = \frac{1}{k(k-2)}[k^2 J_{k,2n} - J_{k,2n+2} + 1]$$

$$\sum_{i=0}^{n} J_{k,2i+1} = \frac{1}{k(k-2)}[k^2 J_{k,2n+1} - J_{k,2n+3} + 1 - k]$$

dir.

Bu teorem için iki farklı ispat vereceğiz.

**İspat 1.** *k*-Jacobsthal Binet benzeri formülünü kullanarak

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} J_{k,i} &= \sum_{i=0}^{n} \frac{q_1^i - q_2^i}{q_1 - q_2} \\
&= \frac{1}{q_1 - q_2} \sum_{i=0}^{n} (q_1^i - q_2^i) \\
&= \frac{1}{q_1 - q_2} \left[ \frac{q_1^{n+1} - 1}{q_1 - 1} - \frac{q_2^{n+1} - 1}{q_2 - 1} \right] \\
&= \frac{1}{q_1 - q_2} \left[ \frac{-kq_1^n + kq_2^n - q_1^{n+1} + q_2^{n+1} + q_1 - q_2}{(q_1 - 1)(q_2 - 1)} \right] \\
&= \frac{1}{-k} (-kJ_{k,n} - J_{k,n+1} + 1) \\
&= \frac{1}{k} \left( J_{k,n+2} - 1 \right)
\end{aligned}$$

olur ki, istenendir.

**İspat 2.** (5.1) ile verilen rekürans bağıntısı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
J_0 &= \frac{1}{k}(J_2 - J_1) \\
J_1 &= \frac{1}{k}(J_3 - J_2) \\
J_2 &= \frac{1}{k}(J_4 - J_3) \\
&\vdots \\
J_{n-1} &= \frac{1}{k}(J_{n+1} - J_n) \\
J_n &= \frac{1}{k}(J_{n+2} - J_{n+1})
\end{aligned}$$

olduğundan, her iki tarafı taraf tarafa toplarsak,

$$\sum_{i=0}^{n} J_{k,i} = \frac{1}{k} \left( J_{k,n+2} - 1 \right)$$

elde edilir ki, bu da istenendir.

Diğer iki eşitliğin ispatları da yapılan ispatlara benzer olarak yapılabilir. ■

## 5.2 *k*-Jacobsthal Lucas Dizileri

**Tanım 5.2 (*k*-Jacobsthal Lucas Dizisi).** Her $k > 0$ reel sayısı için başlangıç koşulları $j_{k,0} = 2$ ve $j_{k,1} = 1$ olmak üzere

$$j_{k,n+2} = j_{k,n+1} + kj_{k,n}, \quad n \geq 0$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{j_{k,n}\}_{n\in N}$ dizisine *k*-Jacobsthal Lucas dizisi denir. *k*-Jacobsthal Lucas dizisinin her bir elemanına, ***k*-Jacobsthal Lucas sayısı** denir.

Giriş bölümünde bahsettiğimiz gibi *k*'nın bazı özel tamsayı değerleri için $\{j_{k,n}\}_{n\in N}$, *k*-Jacobsthal Lucas dizisi, sayılar teorisinde önemli yere sahip olan Lucas ve Jacobsthal Lucas tamsayı dizilerine dönüşmektedir. Örneğin; $\{j_{k,n}\}_{n\in N}$ de $k = 1$ alınırsa,

$$\{L_n\}_{n\in N} = \{2,1,3,4,7,11,18,...\}$$

Lucas dizisi; $k = 2$ alınırsa,

$$\{j_n\}_{n\in N} = \{2,1,5,7,17,31,65,127,...\}$$

Jacobsthal Lucas dizisi elde edilir.

Görüldüğü gibi, tanımlanan bu dizilerin rekürans denklemleri aynı olup başlangıç şartları farklıdır. Bu yüzden *k*-Jacobsthal dizileri için verilen özelliklere benzer özelliklere *k*-Jacobsthal Lucas dizisi de sahiptir. *k*-Jacobsthal dizileri için verilen teoremlere benzer teoremler verilecektir. Bu nedenle bu teoremlerin ispatları da benzer olacaktır.

**Teorem 5.7** *k*-Jacobsthal Lucas sayıları için Binet benzeri formülü

$$j_{k,n} = q_1^{\,n} + q_2^{\,n}$$

dir.

**İspat.** *k*-Jacobsthal Lucas sayıları için verilen başlangıç koşulları, rekürans bağıntısı ve Lemma 5.1'deki özelliklerden tümevarım metodu kullanılarak istenen elde edilir.

■

**Sonuç 5.1** *k*-Jacobsthal ve *k*-Jacobsthal Lucas sayıları arasındaki ilişki

$$j_{k,n} = J_{k,n} + 2k\,J_{k,n-1}$$

bağıntısıyla verilir.

**İspat**. *k*-Jacobsthal Lucas dizisinin genel teriminin her hangi $c_1$ ve $c_2$ sayıları için

$$j_{k,n} = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$$

olduğunu varsayalım. $n = 0$ ve $n = 1$ için *k*-Jacobsthal dizisinin rekürans bağıntısındaki başlangıç koşularını kullanılarak

$$c_1 = \frac{1 - 2q_2}{q_2 - q_1} = 2 - c_2$$

katsayıları elde edilir. Bu katsayıları yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned} j_{k,n} &= c_1 q_1^n + c_2 q_2^n \\ &= \frac{q_1^n - q_2^n}{q_1 - q_2} + 2k \frac{q_1^{n-1} - q_2^{n-1}}{q_1 - q_2} \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 5.1'i kullanırsak,

$$j_{k,n} = J_{k,n} + 2k J_{k,n-1}$$

olur ki, ispat tamamlanır. ■

**Teorem 5.8** $\lfloor x \rfloor$, $x$ in tam değer fonksiyonu olmak üzere $n \geq 0$ tam sayısı için

$$j_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2i} (1 + 4k)^i$$

şeklindedir.

**İspat.** İspatı *k*-Jacobsthal sayıları için Teorem 5.2'nin ispatına benzer olarak yapılabilir. ■

**Teorem 5.9** $n \geq 1$ sayısı için $J_{k,n}$, *n*. *k*-Jacobsthal Lucas sayısı olmak üzere,

$$j_{k,n+1} j_{k,n-1} - j_{k,n}^2 = (1 + 4k)(-k)^{n-1} \quad (\textit{Simpson benzeri eşitliği})$$

$$j_{k,n+r} j_{k,n-r} - j_{k,n}^2 = (1 + 4k)(-k)^{n-r} J_{k,r}^2 \quad (\textit{Catalan benzeri eşitliği}))$$

ve

$$j_{k,m} j_{k,n+1} - j_{k,m+1} j_{k,n} = (1 + 4k)(-1)^{n+1} k^n J_{k,m-n} \quad (d'\textit{Ocagne benzeri eşitliği})$$

dir.

**İspat.** *k*-Jacobsthal dizilerindeki yapılan tümevarım metodu yada Binet benzeri formülü kullanılarak yapılabilir. ■

*k*-Jacobsthal Lucas dizilerinin terimleri genelleştirilmiş fonksiyonların kuvvetlerinin katsayıları olarak görülebilir. Şimdi, *k*-Jacobsthal Lucas dizileri için genelleştirilmiş fonksiyonu verelim.

**Teorem 5.10** $j_{k,n} = j_{k,0} + j_{k,1}x + j_{k,2}x^2 + \ldots + j_{k,n}x^n + \ldots$, şeklinde olmak üzere, $j_k(x)$ *k*-Jacobsthal Lucas dizisinin genelleştirilmiş fonksiyonu

$$j_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} j_{k,n}x^n = \frac{2-x}{1-x-kx^2}$$

şeklindedir.

**İspat.** Teorem 5.5'in ispatına benzer şekilde kolayca yapılabilir.

**Teorem 5.11** *n* pozitif tam sayı olmak üzere;

$$\sum_{i=0}^{n} j_{k,i} = \frac{1}{k}(j_{k,n+2} - 1)$$

$$\sum_{i=0}^{n} j_{k,2i} = \frac{1}{k(k-2)}[k^2 j_{k,2n} - j_{k,2n+2} + 1 - 2k]$$

$$\sum_{i=0}^{n} j_{k,2i+1} = \frac{1}{k(k-2)}[k^2 j_{k,2n+1} - j_{k,2n+3} + 1 + k]$$

dir.

**İspat.** Teorem 5.6'nın ispatlarına benzer olarak yapılabilir. ■

# 6. BÖLÜM

## 6.1 Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada, Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas dizileri için birçok özellik ve bazı uygulamalardan bahsedilmiştir. Fakat, bu özellikler ve uygulamalar kullanılarak, benzer özellikler elde edilebilir. Ayrıca, bu sayıları eleman olarak içeren bazı özel matrislerin determinantları ve normları elde edilebilir. Jacobsthal ve Jacobsthal Lucas sayıları için verilen genelleştirilmelerin türevleri ve integralleri ele alınabilir.

**KAYNAKLAR**

**Cerin Z.**, *Sums of Squares and Products of Jacobsthal Numbers*, Journal of Integer Sequences, Vol. 10,07.2.5 (2007).

**Civciv H.,** *Complex Factorization of The k-Fibonacci and k-Lucas numbers*, International Journal Mathematical Manuscripts, Vol 1, number 2(2007).

**Darrin D. Frey and James A. Sellers**, *Jacobsthal Numbers and Alternating Sign Matrices*, Journal of Integer Sequences, Vol. 3 (2000).

**Djordjevıc G. B. and Srıvastava H. M.**, *Incomplete Generalized Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers*, Mathematical and Computer Modelling 42, 1049-1056.

**Falcon S., and Plaza A.,** *On the Fibonacci k-numbers*, Chaos, Solitons and Fractals 32 (2007) 1615–1624.

**Falcon S., and Plaza A.,** The *k*-Fiboancci Sequence and the Pascal 2-Triangle, Chaos, Solitons and Fractals 33 (2007) 38–49.

**G. Y. Lee, S. G. Lee and H. G. Shin,** *On the k-Generalized Fibonacci Matrix* $Q_k$ **,** Linear Algebra and Its Applications 251:73-88 (1997).

**Horadam A. F.**, *Jacobsthal Representation Numbers*, Fibon. Quart.,34,40-54,1996.

**Kalman D.**, *Generalized Fibonacci Number by Matrix Methods*, Universty of Wisconsin, 1980.

**Kilinc E.**, *Sums Of Generalized Fibonacci Numbers By Matrix Methods*, Ars Combinatoria, 84, 2007.

**Koken F. and Bozkurt D.**, *On The Jacobsthal Numbers by Matrix Methods*, Int. Jour. Contemp. Math. Sciences, Vol.3, 2008, no.13,605-614.

**Koshy T.**, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, NY, 2001.

**Silvester J. R.**, *Fibonacci Properties by Matrix Methods*, The Mathematical Gazette, Vol. 63, No. 425 (Oct., 1979), pp. 188-191.

**Sun Zhi-H.,** *Expansions and Identities Concerning Lucas Sequences*, The Fibonacci Quarterly 44(2006), no.2, 145-153.

**Öcal A., Tuğlu N. and Altınışık E.**, *On The Representation of k-generalized Fibonacci and Lucas Numbers*, App. Math. and Comp. 170 (2005) 584–596.

**Vajda S.,** *Fibonacci and Lucas numbers, and the Golden Section*, Theory and applications. Ellis Horwood limited; 1989.