T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HORADAM POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Tuğba HORZUM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI

Bu tez 22.08.2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. E. Gökçen KOÇER	Prof.Dr.Eşref HATIR
Danışman	Jüri

Yrd.Doç.Dr. A.Dilek GÜNGÖR
Jüri

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HORADAM POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Tuğba HORZUM

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İlköğretim Anabilim Dalı
Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. E.Gökçen KOÇER

2008, 43 sayfa

Jüri:
Prof.Dr.Eşref HATIR
Yrd.Doç.Dr.E.Gökçen KOÇER
Yrd.Doç.Dr.A.Dilek GÜNGÖR

Bu çalışmada Horadam sayılarının bir genelleştirmesi olan Horadam polinomları tanımlanmıştır. Bu polinomun üreteç fonksiyonu ve Binet formülü bulunmuştur. Daha sonra Binet formülünden faydalanarak Horadam polinomları için toplam formülleri ve bazı özdeşlikler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Horadam Polinomu, Binet Formülü, Fibonacci Polinomu, Chebyshev Polinomu.

ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

HORADAM POLYNOMIALS AND PROPERTIES

Tugba HORZUM

Selcuk University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Primary Education

Supervisor: Asist. Prof. Dr. E.Gokcen KOCER

2008, 43 pages

Jury:

Prof.Dr.Eşref HATIR
Yrd.Doç.Dr.E.Gökçen KOÇER
Yrd.Doç.Dr.A.Dilek GÜNGÖR

In this study, Horadam Polynomials which is generalized Horadam numbers, are defined. The generating function and Binet's Formula of this polynomial are found. Afterwards, sum formulas and some identities for Horadam polynomials are obtained.

Key Words: Horadam Polynomial, Binet Formula, Fibonacci Polynomial, Chebyshev Polynomial.

ÖNSÖZ

Fibonacci sayıları doğada birbiriyle ilişkisiz canlı veya cansız sanatın her dalında, görsel, işitsel ve diğer tüm duyulara hitap eden iletişim şekillerinde ve hatta evrenin birçok düzeninde bir oran-orantı olarak karşımıza çıkmaktadır. 13. yüzyılın başlarından bugüne kadar matematik literatürün de önemli bir yer tutan Fibonacci sayılarının bir çok genelleştirmesinden biri olan Horadam sayıları da geniş bir uygulama alanına sahiptir. Biz bu çalışmamızda Horadam sayılarının genelleştirmesi olan Horadam polinomlarını tanımlayarak bu polinomların özelliklerini inceledik.

Çalışmamız üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışmamız ile ilgili literatür hakkında inceleme yapılmıştır.

İkinci bölümde Horadam sayıları, özel durumları ve bazı özellikleri hakkında bilgi verilmiştir.

Çalışmamızın esas kısmını üçüncü bölüm oluşturmaktadır. Bu bölümde Horadam polinomları tanımlanarak, üreteç fonksiyonu, Binet formülü bulunmuş ve özel durumları incelenmiştir. Daha sonra Binet formülünden faydalanarak bazı özdeşlikler elde edilmiştir. Ayrıca Horadam polinomları için toplam formülleri elde edilerek özel durumları araştırılmıştır.

Bu tezin oluşmasında büyük katkıları olan Yrd. Doç. Dr. Süleyman SOLAK'a, Yrd. Doç.Dr. Ahmet CİHANGİR'e ve danışman hocam Yrd. Doç.Dr. E.Gökçen KOÇER'e teşekkür ederim.

Tuğba HORZUM

Konya, 2008

İÇİNDEKİLER

ÖZET……...iii
ABSTRACT……iv
ÖNSÖZ……v
İÇİNDEKİLER……vi
1. GİRİŞ……1
2. ÖN BİLGİLER……7
3. HORADAM POLİNOMU VE ÖZELLİKLERİ……12
3.1. Horadam Polinomunun Üreteç Fonksiyonu ve Binet Formülü……...19
3.2. Horadam Polinomları İçin Toplam Formülleri……25
4. SONUÇ VE ÖNERİLER……41
5. KAYNAKLAR……...42

1. GİRİŞ

İtalyan matematikçi *Pisalı Leonardo*'nun *Liber Abaci* isimli kitabında sorduğu bir problemden ortaya çıkan *Fibonacci* sayılarının sanatta ve bilimde birçok uygulama alanı vardır. Ayrıca *Fibonacci* sayılarının rekürans bağıntılarına benzer rekürans bağıntılarına sahip birçok sayı dizisi tanımlanmıştır. Bunlar *Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal* ve *Jacobsthal-Lucas* dizileridir. Doğal olarak tüm bu dizilerin çeşitli genelleştirmeleri tanımlanmış ve özellikleri araştırılmıştır. Bu genelleştirmelerden biriside *Horadam* dizisi olup bu diziyi ikinci bölümde inceleyeceğiz. Bunun yanında sayı dizilerinin rekürans bağıntılarına benzer bağıntılar ile polinom dizileri de araştırılmıştır. Bunlardan bazıları *Fibonacci, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas,* birinci ve ikinci çeşit *Chebyshev* polinomlarıdır.

Belçikalı matematikçi *Eugene Charles* C*atalan* ve Alman matematikçi *E. Jacobsthal* tarafından 1883 yılında *Fibonacci* polinomu tanımlanmıştır. Ancak *Catalan* tarafından yapılan tanım günümüze kadar gelmiştir. O zaman *Jacobsthal* tarafından yapılan tanım bugün *Jacobsthal* polinomu olarak bilinmektedir. C*atalan Fibonacci* polinomunu aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 1.1. $n \geq 3$ için

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x); \quad F_1(x) = 1, \; F_2(x) = x \tag{1.1}$$

rekürans bağıntısı ve başlangıç şartları ile tanımlanan polinoma *Fibonacci Polinomu* denir (Lupaş 1999).

Fibonacci polinomunun ilk birkaç elemanı aşağıdaki gibidir.

$$F_n(x)=\left\{1,x,x^2+1,x^3+2x,x^4+3x^2+1,x^5+4x^3+3x,\ldots\right\}$$

Eğer (1.1) ifadesinde $x=1$ alırsak *Fibonacci* dizisini elde ederiz. Yine dikkat edilirse (1.1) ifadesinde x yerine $2x$ alınırsa aşağıda tanımı verilen *Pell* polinomu elde edilir.

Tanım 1.2. $n\geq 3$ için

$$P_n(x)=2xP_{n-1}(x)+P_{n-2}(x);\quad P_1(x)=1,P_2(x)=2x \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanan polinoma *Pell Polinomu* denir (Horadam, Mahon 1985).

Pell polinomunun ilk birkaç elemanı aşağıda verilmiştir.

$$P_n(x)=\left\{1,2x,4x^2+1,8x^3+4x,16x^4+12x^2+1,32x^5+32x^3+6x,\ldots\right\}$$

Eğer (1.2) ifadesinde $x=1$ alınırsa *Pell* sayıları ve $x=1/2$ alınırsa *Fibonacci* sayıları elde edilir.

Tanım 1.3. $n\geq 3$ için

$$J_n(x)=J_{n-1}(x)+2xJ_{n-2}(x);\quad J_1(x)=1,\ J_2(x)=1 \tag{1.3}$$

rekürans bağıntısı ve başlangıç şartları ile tanımlanan polinoma *Jacobsthal Polinomu* denir (Horadam, Flipponi 1997).

Bu tanıma göre *Jacobsthal* polinomunun ilk birkaç elemanı

$$J_n(x)=\left\{1,1,2x+1,4x+1,4x^2+6x+1,12x^2+8x+1,\ldots\right\}$$

dir. Burada $x=1$ alınırsa *Jacobsthal* sayıları elde edilir.

Tanım 1.4. $n\geq 3$ için

$$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x);\quad T_1(x)=x,\ T_2(x)=2x^2-1 \tag{1.4}$$

rekürans bağıntısı ve başlangıç şartları ile tanımlanan polinoma *birinci çeşit Chebyshev Polinomu* denir (Koshy 2001).

Birinci çeşit *Chebyshev* polinomunun ilk birkaç elemanı

$$T_n(x)=\left\{x,2x^2-1,4x^3-3x,8x^4-8x^2+1,16x^5-20x^3+5x,\ldots\right\}$$

şeklindedir.

Tanım 1.5. $n\geq 3$ için

$$U_n(x)=2xU_{n-1}(x)-U_{n-2}(x);\quad U_1(x)=2x,\ U_2(x)=4x^2-1 \tag{1.5}$$

rekürans bağıntısı ve başlangıç şartı ile tanımlanan polinoma *ikinci çeşit Chebyshev Polinomu* denir (Udrea 1995).

Bu tanıma göre ikinci çeşit *Chebyshev* polinomunun ilk birkaç elemanı

$$U_n(x)=\left\{2x,4x^2-1,8x^3-4x,16x^4-12x^2+1,32x^5-32x^3+6x,\ldots\right\}$$

dir.

Şimdiye kadar tanımlarını verdiğimiz polinomlar *Fibonacci* tipi polinomlar olarak karşımıza çıkmaktadır. Bunun dışında *Lucas* tipi olarak isimlendirilen polinomların tanımları da aşağıda verilmiştir. *Lucas* polinomu ilk olarak 1970 yılında *Bicknell* tarafından çalışılmıştır. *Bicknell* tarafından verilen *Lucas* polinomunun tanımı aşağıdadır.

Tanım 1.6. $n\geq 3$ için

$$L_n(x)=xL_{n-1}(x)+L_{n-2}(x);\quad L_1(x)=x,\ L_2(x)=x^2+2 \tag{1.6}$$

rekürans bağıntısı ve başlangıç şartları ile tanımlanan polinoma *Lucas polinomu* denir (Koshy 2001).

Lucas polinomunun ilk birkaç elemanı aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$L_n(x)=\left\{x,x^2+2,x^3+3x,x^4+4x^2+2,x^5+5x^3+5x,\ldots\right\}$$

(1.6) ifadesinde $x=1$ alınırsa *Lucas* sayılarının elde edileceği açıktır. Burada dikkat edilirse $L_n(x)$'in katsayılar toplamı *Lucas* sayılarını vermektedir. Eğer (1.6) ifadesinde x yerine $2x$ alınırsa aşağıda tanımı verilen *Pell-Lucas* polinomu elde edilir.

Tanım 1.7. $n \geq 3$ için

$$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x); \quad Q_1(x) = 2x, Q_2(x) = 4x^2 + 2 \tag{1.7}$$

rekürans bağıntısı ve başlangıç şartları ile tanımlanan polinoma *Pell-Lucas Polinomu* denir (Horadam, Mahon 1985).

Pell-Lucas polinomunun ilk birkaç elemanı aşağıda verilmiştir.

$$Q_n(x) = \left\{2x, 4x^2+2, 8x^3+6x, 16x^4+16x^2+2, 32x^5+40x^3+10x, \ldots\right\}$$

Eğer (1.7) ifadesinde $x=1$ alınırsa *Pell-Lucas sayıları* elde edilir.

Tanım 1.8. $n \geq 3$ için

$$j_n(x) = j_{n-1}(x) + 2xj_{n-2}(x); \;\; J_1(x) = 1, \; J_2(x) = 4x+1 \tag{1.8}$$

şeklinde tanımlanan polinoma *Jacobsthal-Lucas Polinomu* denir (Horadam, Flipponi 1997).

Jacobsthal-Lucas polinomunun ilk birkaç elemanı

$$j_n(x) = \left\{1, 4x+1, 6x+1, 8x^2+8x+1, 20x^2+10x+1, \ldots\right\}$$

dir. Burada $x=1$ alınırsa *Jacobsthal-Lucas sayıları* elde edilir.

Yukarıda tanımlarını verdiğimiz *Fibonacci*, *Lucas, Pell*, *Pell-Lucas*, *Jacobsthal*, *Jacobsthal-Lucas*, birinci ve ikinci çeşit *Chebyshev* polinomlarının Binet formülleri sırasıyla

$$F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left[\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n - \left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n\right]$$

$$L_n(x)=\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n+\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n$$

$$P_n(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left[\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n-\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)^n\right]$$

$$Q_n(x)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)^n$$

$$J_n(x)=\frac{1}{\sqrt{1+8x}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{8x+1}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{8x+1}}{2}\right)^n\right]$$

$$j_n(x)=\left(\frac{1+\sqrt{1+8x}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{1+8x}}{2}\right)^n$$

$$U_{n-1}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right]$$

$$T_n(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2}$$

şeklindedir. Aynı zamanda tüm bu polinomları

$$F_n(x)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n-j-1}{j}x^{n-2j-1},\ L_n(x)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\left(\frac{n}{n-j}\right)\binom{n-j}{j}x^{n-2j}$$

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n-1-j}{j}(2x)^{n-1-2j},\ Q_n(x)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\left(\frac{n}{n-j}\right)\binom{n-j}{j}(2x)^{n-2j}$$

$$J_n(x)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n-1-j}{j}(2x)^{j},\ j_n(x)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\left(\frac{n}{n-j}\right)\binom{n-j}{j}(2x)^{j}$$

$$U_n(x)=\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^j\binom{n-j}{j}(2x)^{n-2j},T_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{j=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{(-1)^j}{n-j}\binom{n-j}{j}(2x)^{n-2j}$$

şeklinde de ifade edebiliriz (Koshy 2001).

Fibonacci, *Lucas*, *Pell*, *Pell-Lucas*, *Jacobsthal*, *Jacobsthal-Lucas*, birinci ve ikinci çeşit *Chebyshev* polinomları ile ilgili daha geniş bilgiyi (Koshy 2001, Morgado 1995)'de bulabiliriz.

2. ÖN BİLGİLER

Bugüne kadar *Fibonacci* ve *Lucas* sayılarının çeşitli genelleştirmeleri tanımlanmış ve özellikleri araştırılmıştır. Bunlardan biride 1965 yılında *A.F.Horadam* tarafından yapılmış ve ismiyle yani *Horadam* dizisi olarak anılmaktadır. *Horadam* dizisi *Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas ve Tagiuri* dizilerinin bir genelleştirmesidir. Dolayısıyla *Horadam* dizisinin özelliklerinden, yukarıda adı geçen dizilerinde özelliklerini elde etmek mümkündür.

Tanım 2.1. $n \geq 2;\ a,\ b,\ p,\ q \in \mathbb{R}$ ve $p^2 + 4q \neq 0$ olmak üzere;

$$h_n(a,b;p,q) = ph_{n-1}(a,b;p,q) + qh_{n-2}(a,b;p,q) \tag{2.1}$$

rekürans bağıntısı ve

$$h_0(a,b;p,q) = a, \qquad h_1(a,b;p,q) = b \tag{2.2}$$

başlangıç şartları ile tanımlanan diziye *Horadam* dizisi denir (Horadam 1965).

(2.1) bağıntısının karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - p\lambda - q = 0 \tag{2.3}$$

olup (2.3) denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \tag{2.4}$$

dir. *Horadam* dizisinin ilk birkaç elemanını Tablo 2.1'de görebiliriz.

Tablo 2.1.

n	$h_n(a,b;p,q)$
0	a
1	b
2	$pb+qa$
3	$p^2b+pqa+qb$
4	$p^3b+p^2qa+2pqb+q^2a$
5	$p^4b+p^3qa+3p^2qb+2pq^2a+q^2b$
6	$p^5b+p^4qa+4p^3qb+3p^2q^2a+3pq^2b+q^3a$
7	$p^6b+p^5qa+5p^4qb+4p^3q^2a+6p^2q^2b+3pq^3a+q^3b$
8	$p^7b+p^6qa+6p^5qb+5p^4q^2a+10p^3q^2b+6p^2q^3a+4pq^3b+q^4a$
⋮	⋮

$h_n(a,b;p,q)$ *n. Horadam* sayısı olmak üzere, *Horadam* dizisi için bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir.

1) $a=0,b=1;p=q=1$ için $h_n(0,1;1,1)=F_n$ olup F_n *n. Fibonacci* sayısıdır.

2) $a=2,b=1,p=q=1$ için $h_n(2,1;1,1)=L_n$ dir. L_n *n. Lucas* sayısıdır.

3) $a=0,b=1;p=2,q=1$ için $h_n(0,1;2,1)=P_n$ olup P_n *n. Pell* sayısıdır.

4) $a=2,b=2;p=2,q=1$ için $h_n(2,2;2,1)=Q_n$ dir. Q_n *n. Pell-Lucas* sayısıdır.

5) $a=0,b=1;p=1,q=2$ için $h_n(0,1;1,2)=J_n$ olup J_n *n. Jacobsthal* sayısıdır.

6) $a=2, b=1; p=1, q=2$ için $h_n(2,1;1,2)=j_n$ olup j_n *n. Jacobsthal-Lucas* sayısıdır.

7) $p=q=1$ için $h_n(a,b;1,1)=T_n$ dir. T_n *n. Tagiuri* sayısıdır.

Horadam sayılarının özel durumları olan $\{F_n\}$ *Fibonacci*, $\{L_n\}$ *Lucas*, $\{P_n\}$ *Pell*, $\{Q_n\}$ *Pell-Lucas*, $\{J_n\}$ *Jacobsthal*, $\{j_n\}$ *Jacobsthal-Lucas* ve $\{T_n\}$ *Tagiuri* dizilerinin ilk birkaç elemanı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2.2.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	…
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	…
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	…
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	…
Q_n	2	2	6	14	34	82	198	478	…
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	…
j_n	2	1	5	7	17	31	65	127	…
T_n	a	b	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$	$3a+5b$	$5a+8b$	$8a+13b$	…

$\{h_n\}$ *Horadam* dizisinin üreteç fonksiyonu

$$D(x)=\frac{a+t\left(b-ap\right)}{1-pt-qt^2} \tag{2.5}$$

dir. Üreteç fonksiyonundan faydalanarak *Horadam* dizisinin Binet formülünü elde edebiliriz. Yani $A=b-a\beta$ *ve* $B=b-a\alpha$ olmak üzere *Horadam* dizisinin Binet formülü

$$h_k=\frac{A\alpha^k-B\beta^k}{\alpha-\beta} \tag{2.6}$$

olarak bulunur (Mansour 2003).

Horadam sayılarının (2.6) ile verilen Binet formülünden yola çıkarak *Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas* sayılarının Binet formülleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$F_n=h_n\left(0,1;1,1\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\ L_n=h_n\left(2,1;1,1\right)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$P_n=h_n\left(0,1;2,1\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^n\right],\ Q_n=h_n\left(2,2;2,1\right)=\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$

$$J_n=h_n\left(0,1;1,2\right)=\frac{2^n-\left(-1\right)^n}{3},\quad j_n=h_n\left(2,1;1,2\right)=2^n+\left(-1\right)^n$$

Teorem 2.1. $n\geq 1;\ a,b,p,q\in\mathbb{R}$ ve h_n *n. Horadam* sayısı olmak üzere

$$h_n=a\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-k}{k}p^{n-2k}q^k+\left(\frac{b}{p}-a\right)\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n-1-k}{k}p^{n-2k}q^k \tag{2.7}$$

dir (Haukkanen 2002).

(2.7) ifadesi *Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas* ve *Taguri* sayıları için sırasıyla

$$F_n=h_n\left(0,1;1,1\right)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n-1-k}{k},\ L_n=h_n\left(2,1;1,1\right)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}$$

$$P_n = h_n(0,1;2,1) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-k}{k} 2^{n-1-2k},\ Q_n = h_n(2,2;2,1) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k}$$

$$J_n = h_n(0,1;1,2) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-k}{k} 2^k,\ j_n = h_n(2,1;1,2) \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^k$$

$$\mathrm{T}_n = h_n(a,b;1,1) = a \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} + (b-a) \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-k}{k}$$

şeklindedir (Koshy 2001).

Teorem 2.2. h_k k. *Horadam* sayısı ve $p+q \neq 1$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n-1} h_k = \frac{1}{p+q-1}\left(h_n + q h_{n-1} + pa - a - b\right) \tag{2.8}$$

dir (Kocer, Mansour, Tuglu 2007).

3. HORADAM POLİNOMU VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde *Horadam* sayılarının genelleştirmesi olan *Horadam* polinomunu tanımlayarak bu polinomun özelliklerini inceleyeceğiz. Horadam polinomunu $h_n(x;a,b,p,q)$ ya da kısaca $h_n(x)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.1 $n \geq 3;\ a,b,p,q \in \mathbb{R}$ ve $p^2x^2 + 4q \neq 0$ olmak üzere;

$$h_n(x;a,b,p,q) = pxh_{n-1}(x;a,b,p,q) + qh_{n-2}(x;a,b,p,q) \tag{3.1}$$

rekürans bağıntısı ve

$$h_1(x;a,b,p,q) = a,\ \ h_2(x;a,b,p,q) = bx \tag{3.2}$$

başlangıç şartları ile tanımlanan polinoma *Horadam Polinomu* denir.

(3.1) bağıntısının karakteristik denklemi

$$t^2 - pxt - q = 0 \tag{3.3}$$

olup, (3.3) denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{px + \sqrt{p^2x^2 + 4q}}{2} \ \ ve\ \ \beta = \frac{px - \sqrt{p^2x^2 + 4q}}{2} \tag{3.4}$$

dir. *Horadam* polinomunun ilk birkaç elemanını aşağıdaki tabloda verebiliriz.

Tablo 3.1

n	$h_n(x;a,b,p,q)$
1	a
2	bx
3	bpx^2+aq
4	$bp^2x^3+(apq+bq)x$
5	$bp^3x^4+(ap^2q+2bpq)x^2+aq^2$
6	$bp^4x^5+(ap^3q+3bp^2q)x^3+(2apq^2+bq^2)x$
7	$bp^5x^6+(ap^4q+4bp^3q)x^4+(3ap^2q^2+3bpq^2)x^2+aq^3$
8	$bp^6x^7+(ap^5q+5bp^4q)x^5+(4ap^3q^2+6bp^2q^2)x^3+(3apq^3+bq^3)x$
⋮	⋮

$h_n(x;a,b,p,q)$, *n. Horadam* polinomu olmak üzere, *Horadam* polinomu için bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir.

1) $a=b=p=q=1$ için *Horadam* polinomu *Fibonacci* polinomuna dönüşür. Yani

$$h_n(x;1,1,1,1)=F_n(x)$$

dir.

2) $a=2,\ b=p=q=1$ için *Horadam* polinomu *Lucas* polinomuna dönüşür. Yani

$$h_n(x;2,1,1,1)=L_{n-1}(x)$$

dir.

3) $a = q = 1,\ b = p = 2$ için *Horadam* polinomu *Pell* polinomuna dönüşür. Yani

$$h_n(x;1,2,2,1) = P_n(x)$$

dir.

4) $a = b = p = 2,\ q = 1$ için *Horadam* polinomu *Pell-Lucas* polinomuna dönüşür. Yani

$$h_n(x;2,2,2,1) = Q_{n-1}(x)$$

dir.

5) $a = b = p = x = 1,\ q = 2y$ için *Horadam* polinomu *Jacobsthal* polinomuna dönüşür. Yani

$$h_n(1;1,1,1,2y) = J_n(y)$$

dir.

6) $a = 2,\ b = p = x = 1,\ q = 2y$ için *Horadam* polinomu *Jacobsthal-Lucas* polinomuna dönüşür. Yani

$$h_n(1;2,1,1,2y) = j_{n-1}(y)$$

dir.

7) $a = 1,\ b = 1,\ p = 2,\ q = -1$ için *Horadam* polinomu birinci çeşit *Chebyshev* polinomuna dönüşür. Yani

$$h_n(x;1,1,2,-1) = T_{n-1}(x)$$

dir.

8) $a = 1,\ b = p = 2,\ q = -1$ için *Horadam* polinomu ikinci çeşit *Chebyshev* polinomuna dönüşür. Yani

$$h_n(x;1,2,2,-1) = U_{n-1}(x)$$

dir.

9) $x = 1$ için *Horadam* polinomu *Horadam* sayılarına dönüşür. Yani

$$h_n(1;a,b,p,q) = h_{n-1}(a,b;p,q)$$

dir.

Horadam polinomunun özel durumları olan *Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas,* birinci ve ikinci çeşit *Chebyshev* polinomlarının ilk birkaç elemanı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 3.2

n	1	2	3	4	5	⋯
$F_n(x)$	1	x	x^2+1	x^3+2x	x^4+3x^2+1	⋯
$L_{n-1}(x)$	2	x	x^2+2	x^3+3x	x^4+4x^2+2	⋯
$P_n(x)$	1	$2x$	$4x^2+1$	$8x^3+4x$	$16x^4+12x^2+1$	⋯
$Q_{n-1}(x)$	2	$2x$	$4x^2+2$	$8x^3+6x$	$16x^4+16x^2+2$	⋯
$J_n(x)$	1	1	$2y+1$	$4y+1$	$4y^2+6y+1$	⋯
$j_{n-1}(y)$	2	1	$4y+1$	$6y+1$	$8y^2+8y+1$	⋯
$U_{n-1}(x)$	1	$2x$	$4x^2-1$	$8x^3-4x$	$16x^4-12x^2+1$	⋯
$T_{n-1}(x)$	1	x	$2x^2-1$	$4x^3-3x$	$8x^4-8x^2+1$	⋯

Teorem 3.1. $n \geq 1;\ a, b, p, q \in \mathbb{C}$ ve $h_n(x)$ $n.$ Horadam polinomu olmak üzere

$$h_{n+1}(x) = a\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} (px)^{n-2k} q^k + \left(\frac{b}{p} - a\right) \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-k}{k} (px)^{n-2k} q^k \qquad (3.5)$$

dir.

İspat. Tümevarım yöntemi ile ispat açıktır.

Eğer (3.5) ifadesinde $x = 1$ alınırsa Teorem 2.1. ile verilen (2.7) ifadesini elde ederiz.

(2.7) ifadesi ve

$$L_n = h_n(2,1;1,1) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}$$

$$Q_n = h_n(2,2;2,1) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^{n-2k}$$

$$j_n = h_n(2,1;1,2) \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} 2^k$$

eşitlikleri göz önüne alındığında polinom dizileri için de aşağıda verilen Lemma 3.1. in var olduğu açıktır.

Lemma 3.1. $n \geq 1$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \left(\frac{n}{n-k}\right) \binom{n-k}{k} (x)^{n-2k} = 2\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} (x)^{n-2k} - \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-k}{k} (x)^{n-2k}$$

dir.

Lemma 3.1. den faydalanarak (3.5) ifadesi için bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir.

1) $a=b=p=q=1$ için

$$F_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n-k}{k}x^{n-2k}$$

dir (Belbachir, Bencherif 2007).

2) $a=2, b=p=q=1$ için

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\left(\frac{n}{n-k}\right)\binom{n-k}{k}x^{n-2k}$$

dir (Belbachir, Bencherif 2007).

3) $a=1, b=p=2,\ q=1$ için

$$P_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}$$

dır (Horadam, Mahon 1985).

4) $a=2,=b=p=2, q=1$ için

$$Q_n(x)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\left(\frac{n}{n-k}\right)\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}$$

dir (Horadam, Mahon 1985).

5) $a=b=p=x=1, q=2y$ için

$$J_{n+1}(y)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\binom{n-k}{k}(2y)^{k}$$

dir (Horadam 1997).

6) $a=2, b=p=x=1, q=2y$ için

$$j_n(y)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\left(\frac{n}{n-k}\right)\binom{n-k}{k}(2y)^{k}$$

dir (Horadam 1997).

7) $a=1,\ b=p=2,q=-1$ için

$$U_n(x)=\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}(-1)^k\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}$$

dir (Koshy 2001).

8) $a=b=1,\ p=2,q=-1$ için

$$T_n(x)=\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}\frac{(-1)^k}{n-k}\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}$$

dir (Koshy 2001).

3.1. Horadam Polinomunun Üreteç Fonksiyonu ve Binet Formülü

Tanım 3.1.1 $g_1,g_2,g_3,\ldots$ tek değişkenli fonksiyonların kümesi olmak üzere

$G(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)t^{n-1}$ ifadesine $\{g_n(x)\}$ dizisininin üreteç fonksiyonu denir (Karlsson 1988).

Teorem 3.1.1 $\{h_n(x)\}$ *Horadam* polinomları dizisinin üreteç fonksiyonu

$$H(x,t)=\frac{a+xt(b-ap)}{1-pxt-qt^2} \tag{3.6}$$

dir.

İspat . Tanım 3.1.1 den

$$H(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(x)t^{n-1}$$

dir. Bu ifadeyi

$$H(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(x)t^{n-1}=h_1(x)+h_2(x)t+\sum_{n=3}^{\infty}h_n(x)t^{n-1}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.1) ve (3.2) ifadesinden

$$H(x,t)=a+bxt+\sum_{n=3}^{\infty}\left[pxh_{n-1}(x)+qh_{n-2}(x)\right]t^{n-1}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}H(x,t)&=a+bxt+\sum_{n=3}^{\infty}pxh_{n-1}(x)t^{n-1}+\sum_{n=3}^{\infty}qh_{n-2}(x)t^{n-1}\\&=a+bxt+px\sum_{n=3}^{\infty}h_{n-1}(x)t^{n-1}+q\sum_{n=3}^{\infty}h_{n-2}(x)t^{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=a+bxt+pxt\sum_{n=3}^{\infty}h_{n-1}(x)t^{n-2}+qt^2\sum_{n=3}^{\infty}h_{n-2}(x)t^{n-3}\\&=a+bxt+pxt\left[\sum_{j=1}^{\infty}h_j(x)t^{j-1}-h_1(x)\right]+qt^2\sum_{m=1}^{\infty}h_m(x)t^{m-1}\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$H(x,t)=a+bxt+pxtH(x,t)-apxt+qt^2H(x,t)$$

dir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$H(x,t)\left[1-pxt-qt^2\right]=a+bxt-apxt$$

olur. Buradan *Horadam* polinomunun üreteç fonksiyonu

$$H(x,t)=\frac{a+xt(b-ap)}{1-pxt-qt^2}$$

olarak elde edilir.

Eğer (3.6) ifadesinde $x=1$ alınırsa (2.5) ile verilen *Horadam* dizisinin üreteç fonksiyonu elde edilir.

Teorem 3.1.2 *Horadam* polinomunun tek ve çift üreteç fonksiyonları sırasıyla;

$$H_1(x,t)=\frac{bxt-qxt^3(b-ap)}{\left(1-pxt-qt^2\right)\left(1+pxt-qt^2\right)} \tag{3.7}$$

ve

$$H_2(x,t)=\frac{a\left(1-qt^2\right)+px^2t^2(b-ap)}{\left(1-pxt-qt^2\right)\left(1+pxt-qt^2\right)} \tag{3.8}$$

dir.

İspat. Eğer $H_1(x,t)$ tek fonksiyon ise

$$H_1(x,t)=-H_1(x,-t)$$

dir. Buradan

$$\frac{H_1(x,t)-H_1(x,-t)}{2}$$

ifadesini göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned}\frac{H_1(x,t)-H_1(x,-t)}{2}&=\frac{1}{2}\left[\frac{a+xt(b-ap)}{\left(1-pxt-qt^2\right)}-\frac{a-xt(b-ap)}{\left(1+pxt-qt^2\right)}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{\left[a+xt(b-ap)\right]\left(1+pxt-qt^2\right)-\left[a-xt(b-ap)\right]\left(1-pxt-qt^2\right)}{\left(1-pxt-qt^2\right)\left(1+pxt-qt^2\right)}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{2\left(bxt-bqxt^3+apqxt^3\right)}{\left(1-pxt-qt^2\right)\left(1+pxt-qt^2\right)}\right]\\&=\frac{bxt-qxt^3(b-ap)}{\left(1-pxt-qt^2\right)\left(1+pxt-qt^2\right)}\end{aligned}$$

elde edilir. Yani *Horadam* polinomunun tek üreteç fonksiyonu

$$H_1(x,t)=\frac{bxt-qxt^3(b-ap)}{(1-pxt-qt^2)(1+pxt-qt^2)}$$

dir. Benzer şekilde çift fonksiyonun tanımından

$$H_2(x,t)=H_2(x,-t)$$

dir. Buradan

$$\frac{H_2(x,t)+H_2(x,-t)}{2}$$

ifadesi göz önüne alınırsa;

$$\frac{H_2(x,t)+H_2(x,-t)}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{a+xt(b-ap)}{(1-pxt-qt^2)}+\frac{a-xt(b-ap)}{(1+pxt-qt^2)}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{[a+xt(b-ap)](1+pxt-qt^2)+[a-xt(b-ap)](1-pxt-qt^2)}{(1-pxt-qt^2)(1+pxt-qt^2)}\right]$$

bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında

$$H_2(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{2(a-aqt^2+bpx^2t^2-ap^2x^2t^2)}{(1-pxt-qt^2)(1+pxt-qt^2)}\right]$$
$$=\left[\frac{a-aqt^2+bpx^2t^2-ap^2x^2t^2}{(1-pxt-qt^2)(1+pxt-qt^2)}\right]$$

elde edilir. Yani *Horadam* polinomunun çift üreteç fonksiyonu

$$H_2(x,t)=\left[\frac{a(1-qt^2)+px^2t^2(b-ap)}{(1-pxt-qt^2)(1+pxt-qt^2)}\right]$$

dir.

Horadam polinomunun (3.6) ile verilen üreteç fonksiyonundan faydalanarak *Horadam* polinomunun Binet formülü elde edilebilir. *Horadam* polinomunun üreteç fonksiyonu

$$H(x,t)=\frac{a+xt(b-ap)}{1-pxt-qt^2}$$

dir. Bu fonksiyonu

$$H(x,t)=\frac{a+xt(b-ap)}{(1-\alpha t)(1-\beta t)}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu ifadeyi basit kesirlerine ayırırsak

$$H(x,t)=\frac{a+xt(b-ap)}{(1-\alpha t)(1-\beta t)}=\frac{A}{1-\alpha t}+\frac{B}{1-\beta t} \tag{3.9}$$

olur. Gerekli işlemler yapıldığında

$$A+B=a$$
$$A\beta+B\alpha=-x(b-ap)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistem çözülürse

$$A=\frac{bx-a\beta}{\alpha-\beta}$$

ve

$$B=-\frac{bx-a\alpha}{\alpha-\beta}$$

elde edilir. Bu değerler (3.9) de yerine yazılırsa

$$H(x,t)=\frac{\frac{bx-a\beta}{\alpha-\beta}}{1-\alpha t}-\frac{\frac{bx-a\alpha}{\alpha-\beta}}{1-\beta t}$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{bx-a\beta}{1-\alpha t}-\frac{bx-a\alpha}{1-\beta t}\right]$$

bulunur. $\sum_{n=1}^{\infty}ab^{n-1}x^{n-1}=\frac{a}{1-bx}$ ifadesinden faydalanırsak

$$H(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(x)t^{n-1}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(bx-a\beta)\alpha^{n-1}t^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(bx-a\alpha)\beta^{n-1}t^{n-1}\right]$$
$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left[(bx-a\beta)\alpha^{n-1}-(bx-a\alpha)\beta^{n-1}\right]t^{n-1}\right]$$

elde edilir. Buradan

$$h_n(x)=\frac{(bx-a\beta)\alpha^{n-1}-(bx-a\alpha)\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}$$

olur. Dolayısıyla $A_1=bx-a\beta$ ve $A_2=bx-a\alpha$ olmak üzere *Horadam* polinomunun Binet formülü

$$h_n(x)=\frac{A_1\alpha^{n-1}-A_2\beta^{n-1}}{\alpha-\beta} \tag{3.10}$$

şeklindedir.

Horadam polinomunun üreteç fonksiyonu ve Binet formülünden yola çıkarak aşağıdaki özel durumlar verilebilir.

1) (3.6) ve (3.10)'da $a=b=p=q=1$ alırsak *Fibonacci* polinomunun üreteç fonksiyonu ve Binet formülü;

$$F(x,t)=\frac{1}{1-xt-t^2};\quad F_n(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\left[\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n-\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n\right]$$

olarak elde edilir (Lupaş 1999).

2) (3.6) ve (3.10)'da $a=2;\ b=p=q=1$ alırsak *Lucas* polinomunun üreteç fonksiyonu ve Binet formülü aşağıdaki gibi bulunur (Lupaş 1999).

$$L(x,t)=\frac{2-xt}{1-xt-t^2};\quad L_{n-1}(x)=\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{n-1}$$

3) (3.6) ve (3.10)'da $a=1;\ b=p=2;\ q=1$ alırsak *Pell* polinomunun üreteç fonksiyonu ve Binet formülü;

$$P(x,t)=\frac{1}{1-2xt-t^2};\ P_n(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left[\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n-\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)^n\right]$$

olarak bulunur (Horadam, Mahon 1985).

4) (3.6) ve (3.10)'da $a=b=p=2;\ q=1$ alırsak *Pell-Lucas* polinomunun üreteç fonksiyonu ve Binet formülü;

$$Q(x,t)=\frac{2-2xt}{1-2xt-t^2};\quad Q_{n-1}(x)=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{n-1}+\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)^{n-1}$$

dır (Horadam, Mahon 1985).

5) (3.6) ve (3.10)'da $a=b=p=x=1;\ q=2y$ alırsak *Jacobsthal* polinomunun üreteç fonksiyonu ve Binet formülü;

$$J(y,t)=\frac{1}{1-t-2yt^2}\quad \text{ve } J_n(y)=\frac{1}{\sqrt{1+8y}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{8y+1}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{8y+1}}{2}\right)^n\right]$$

dir (Horadam, Flipponi 1997).

6) (3.6) ve (3.10)'da $a=2;\ b=p=x=1;\ q=2y$ alırsak *Jacobsthal-Lucas* polinomunun üreteç fonksiyonu ve Binet formülü;

$$j(y,t)=\frac{2-t}{1-t-2yt^2}\quad \text{ve}\quad j_{n-1}(y)=\left(\frac{1+\sqrt{1+8y}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1-\sqrt{1+8y}}{2}\right)^{n-1}$$

olarak elde edilir (Horadam, Flipponi 1997).

7) (3.6) ve (3.10)'da $a=1;\ b=p=2;\ q=-1$ alırsak ikinci çeşit *Chebyshev* polinomunun üreteç fonksiyonu ve Binet formülü;

$$U(x,t)=\frac{1}{1-2xt+t^2}\quad \text{ve}\quad U_{n-1}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right]$$

dir (Morgado 1995).

8) (3.6) ve (3.10)'da $a=b=1; p=2;\ q=-1$ alırsak birinci çeşit *Chebyshev* polinomunun üreteç fonksiyonu ve Binet formülü;

$$T(x,t)=\frac{1-xt}{1-2xt+t^2} \quad \text{ve} \quad T_{n-1}(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}}{2}$$

dir (Morgado 1995).

3.2. Horadam Polinomları İçin Toplam Formülleri

Horadam polinomunun Binet formülünden faydalanarak önemli toplam formülleri ve bazı özdeşlikler elde edilebilir ve dikkat edildiğinde bu toplam formüllerinin ve özdeşliklerin *Fibonacci, Lucas, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas,* birinci ve ikinci çeşit *Chebyshev* polinomlarına da indirgenebildiği görülür.

Teorem 3.2.1. $h_n(x)$, *n. Horadam* polinomu ve $n \geq 0$ olmak üzere;

$$\sum_{n=1}^{k-1} h_n(x)=\frac{h_k(x)+qh_{k-1}(x)-a-x(b-ap)}{px+q-1} \tag{3.11}$$

dir.

İspat. *Horadam* polinomunun Binet formülünü kullanırsak

$$\sum_{n=1}^{k-1} h_n(x)=\sum_{n=1}^{k-1}\left(\frac{A_1\alpha^{n-1}-A_2\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)$$

dir. Buradan

$$\sum_{n=1}^{k-1} h_n(x) = \frac{A_1}{\alpha-\beta}\sum_{n=1}^{k-1}\alpha^{n-1} - \frac{A_2}{\alpha-\beta}\sum_{n=1}^{k-1}\beta^{n-1}$$
$$= \frac{A_1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1-\alpha^{k-1}}{1-\alpha}\right) - \frac{A_2}{\alpha-\beta}\left(\frac{1-\beta^{k-1}}{1-\beta}\right)$$
$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{A_1\left(1-\alpha^{k-1}\right)(1-\beta) - A_2\left(1-\beta^{k-1}\right)(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)}\right]$$
$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{A_1\left(1-\beta-\alpha^{k-1}+\alpha^{k-1}\beta\right) - A_2\left(1-\alpha-\beta^{k-1}+\alpha\beta^{k-1}\right)}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta}\right]$$

elde edilir.

$$\alpha+\beta = px \quad \text{ve} \quad \alpha\beta = -q$$

ifadelerini göz önüne alırsak

$$\sum_{n=1}^{k-1} h_n(x) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{A_1 - A_1\beta - A_1\alpha^{k-1} + A_1\alpha^{k-1}\beta - A_2 + A_2\alpha + A_2\beta^{k-1} - A_2\alpha\beta^{k-1}}{1-px-q}\right)$$
$$= \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{(A_1-A_2) - (A_1\beta - A_2\alpha) - \left(A_1\alpha^{k-1} - A_2\beta^{k-1}\right) - q\left(A_1\alpha^{k-2} - A_2\beta^{k-2}\right)}{1-px-q}\right]$$
$$= \frac{1}{px+q-1}\left[\frac{\left(A_1\alpha^{k-1} - A_2\beta^{k-1}\right) + q\left(A_1\alpha^{k-2} - A_2\beta^{k-2}\right) - (A_1-A_2) + (A_1\beta - A_2\alpha)}{\alpha-\beta}\right]$$

bulunur. Burada

$$A_1 - A_2 = a(\alpha-\beta)$$
$$A_1\beta - A_2\alpha = a\left(\alpha^2-\beta^2\right) - bx(\alpha-\beta)$$

dir. Bu ifadeleri ve *Horadam* polinomunun Binet formülünü kullanırsak

$$\sum_{n=1}^{k-1} h_n(x) = \frac{h_k(x) + qh_{k-1}(x) - a - x(b-ap)}{px+q-1}$$

elde edilir.

Eğer (3.11)'de $x=1$ alınırsa Teorem 2.2. ile verilen (2.8) ifadesi yani *Horadam* sayılarının toplamı elde edilir.

Örnek 3.2.1. $k=4$ için

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{3} h_n(x) &= \frac{1}{px+q-1}\left[h_4(x)+qh_3(x)-a-x(b-ap)\right] \\ &= \frac{bp^2x^3+apqx+bqx+bpqx^2+aq^2-a-bx+apx}{px+q-1} \\ &= \frac{a(px+q-1)+bx(px+q-1)+(bpx^2+aq)(px+q-1)}{px+q-1} \\ &= a+bx+bpx^2+aq\end{aligned}$$

bulunur.

Eğer (3.11) ifadesinden faydalanırsak *Fibonacci*, *Lucas*, *Pell*, *Pell-Lucas*, *Jacobsthal*, *Jacobsthal-Lucas,* birinci ve ikinci çeşit *Chebyshev* polinomlarının toplamları aşağıdaki gibi elde edilir.

1) $a=b=p=q=1$ için $F_n(x)$ *n. Fibonacci* polinomu olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{k-1} F_n(x) = \frac{F_k(x)+F_{k-1}(x)-1}{x}$$

elde edilir (Lupaş 1999).

2) $a=2, b=p=q=1$ için $L_{n-1}(x), (n-1)$.*Lucas* polinomu olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{k-1} L_{n-1}(x) = \frac{L_{k-1}(x)+L_{k-2}(x)+x-2}{x}$$

bulunur (Lupaş 1999).

3) $a=1, b=p=2, q=1$ için $P_n(x)$ *n. Pell* polinomu olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{k-1} P_n(x) = \frac{P_k(x)+P_{k-1}(x)-1}{2x}$$

elde edilir (Horadam, Mahon 1985).

4) $a=b=p=2, q=1$ için $Q_{n-1}(x)$ $(n-1)$. *Pell-Lucas* polinomu olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{k-1} Q_{n-1}(x) = \frac{Q_{k-1}(x) + Q_{k-2}(x) + 2x - 2}{2x}$$

dir (Horadam, Mahon 1985).

5) $a = b = p = x = 1, q = 2y$ için $J_n(y)$ *n. Jacobsthal* polinomu olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{k-1} J_n(y) = \frac{J_{k+1}(y) - 1}{2y}$$

bulunur (Horadam 1997).

6) $a = 2, b = p = x = 1, q = 2y$ için $j_{n-1}(y)$ $(n-1)$. *Jacobsthal -Lucas* polinomu olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{k-1} j_{n-1}(y) = \frac{j_k(y) - 1}{2y}$$

elde edilir (Horadam 1997).

7) $a = 1, b = p = 2, q = -1$ için $U_{n-1}(x)$, $(n-1)$. ikinci çeşit *Chebyshev* polinomu olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{k-1} U_{n-1}(x) = \frac{U_{k-1}(x) - U_{k-2}(x) - 1}{2x - 2}$$

dir (Udrea 1996).

8) $a = b = 1, p = 2, q = -1$ için $T_{n-1}(x)$, $(n-1)$. birinci çeşit *Chebyshev* polinomu olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{k-1} T_{n-1}(x) = \frac{T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) + x - 1}{2x - 2}$$

elde edilir (Udrea 1996).

Teorem 3.2.2. (**Cassini Özdeşliği)** $n \geq 0$ ve $h_n(x)$ *n. Horadam* polinomu olmak üzere;

$$h_{n+1}(x)h_{n-1}(x)-h_n^2(x)=\left(b^2x^2-abpx^2-a^2q\right)(-1)^{n-1}q^{n-2} \tag{3.12}$$

dir.

İspat. *Horadam* polinomunun Binet formülünü kullanırsak,

$$h_{n+1}(x)h_{n-1}(x)-h_n^2(x)=\left(\frac{A_1\alpha^n-A_2\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{A_1\alpha^{n-2}-A_2\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}\right)-\left(\frac{A_1\alpha^{n-1}-A_2\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)^2$$

olur. Burada gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
h_{n+1}(x)h_{n-1}(x)-h_n^2(x) &= \frac{-A_1A_2\alpha^n\beta^{n-2}-A_1A_2\alpha^{n-2}\beta^n+2A_1A_2\alpha^{n-1}\beta^{n-1}}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{-A_1A_2\left[\alpha^n\beta^{n-2}+\alpha^{n-2}\beta^n-2\alpha^{n-1}\beta^{n-1}\right]}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{-A_1A_2\left[\alpha\beta\right]^{n-1}\left[\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-2\right]}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{-A_1A_2(-q)^{n-1}\frac{(\alpha-\beta)^2}{-q}}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= -A_1A_2(-q)^{n-2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$A_1=bx-a\beta,\ A_2=bx-a\alpha,\ A_1A_2=b^2x^2-abpx^2-a^2q \tag{3.13}$$

olduğu için

$$h_{n+1}(x)h_{n-1}(x)-h_n^2(x)=-\left(b^2x^2-abpx^2-a^2q\right)(-q)^{n-2}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$h_{n+1}(x)h_{n-1}(x)-h_n^2(x)=\left(b^2x^2-abpx^2-a^2q\right)(q)^{n-2}(-1)^{n-1}$$

dir.

Örnek 3.2.2. $n=5$ için

$$h_6(x)h_4(x)-h_5^2(x)=\left[bp^4x^5+\left(ap^3q+3bp^2q\right)x^3+\left(2apq^2+bq^2\right)x\right]\left[bp^2x^3+\left(apq+bq\right)x\right]$$
$$-\left[bp^3x^4+\left(ap^2q+2bpq\right)x^2+aq^2\right]^2$$
$$=\left(2a^2p^2q^3+abpq^3+b^2q^3-2a^2p^2q^3\right)x^2-a^2q^4$$
$$=q^3\left(b^2x^2-abpx^2-a^2q\right)$$

dir.

Teorem 3.2.3. (Catalan Özdeşliği) $n\geq 0$, $n\geq r$ ve $h_n(x)$ *n. Horadam* polinomu olmak üzere;

$$h_n^2(x)-h_{n+r}(x)h_{n-r}(x)=\frac{(-q)^{n-r-1}\left[bxh_{r+1}(x)-ah_{r+2}(x)\right]^2}{b^2x^2-abpqx^2-a^2q} \tag{3.14}$$

dir.

İspat. *Horadam* polinomunun Binet formülünü kullanırsak,

$$h_n^2(x)-h_{n+r}(x)h_{n-r}(x)=\left(\frac{A_1\alpha^{n-1}-A_2\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)^2-\left(\frac{A_1\alpha^{n+r-1}-A_2\beta^{n+r-1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{A_1\alpha^{n-r-1}-A_2\beta^{n-r-1}}{\alpha-\beta}\right)$$

dir. Burada gerekli işlemler yapıldığında

$$h_n^2(x)-h_{n+r}(x)h_{n-r}(x)=\frac{-2A_1A_2\alpha^{n-1}\beta^{n-1}+A_1A_2\alpha^{n-r-1}\beta^{n+r-1}+A_1A_2\alpha^{n+r-1}\beta^{n-r-1}}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$=\frac{A_1A_2(\alpha\beta)^{n-1}\left[-2+\frac{\alpha^r}{\beta^r}+\frac{\beta^r}{\alpha^r}\right]}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$=\frac{A_1A_2(-q)^{n-1}\left(\frac{\alpha^{2r}-2\alpha^r\beta^r+\beta^{2r}}{\alpha^r\beta^r}\right)}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$=A_1A_2(-q)^{n-r-1}\frac{\left(\alpha^r-\beta^r\right)^2}{(\alpha-\beta)^2}$$

bulunur. (3.13) ifadesinden

$$h_n^2(x)-h_{n+r}(x)h_{n-r}(x)=\left(b^2x^2-abpx^2-a^2q\right)(-q)^{n-r-1}\left(\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}\right)^2$$

elde edilir. Burada

$$\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}=\frac{bxh_{r+1}(x)-ah_{r+2}(x)}{b^2x^2-abpx^2-a^2q} \tag{3.15}$$

dır. (3.15) ifadesini yukarıda yerine yazarsak

$$h_n^2(x)-h_{n+r}(x)h_{n-r}(x)=\left(b^2x^2-abpx^2-a^2q\right)(-q)^{n-r-1}\left(\frac{bxh_{r+1}(x)-ah_{r+2}(x)}{b^2x^2-abpx^2-a^2q}\right)^2$$

olur. Dolayısıyla

$$h_n^2(x)-h_{n+r}(x)h_{n-r}(x)=(-q)^{n-r-1}\frac{\left[bxh_{r+1}(x)-ah_{r+2}(x)\right]^2}{b^2x^2-abpx^2-a^2q}$$

bulunur.

Dikkat edilecek olursa (3.14) ile verilen *Catalan* özdeşliği $r=1$ olması durumunda *Cassini* özdeşliğine dönüşecektir. Yani

$$\begin{aligned}h_n^2(x)-h_{n+1}(x)h_{n-1}(x)&=\frac{(-q)^{n-2}\left[bxh_2-ah_3\right]^2}{b^2x^2-abpqx^2-a^2q}\\&=\frac{(-q)^{n-2}\left[bx.bx-a\left(bpx^2-aq\right)\right]^2}{b^2x^2-abpqx^2-a^2q}\\&=\frac{(-q)^{n-2}\left[b^2x^2-abpx^2-a^2q\right]^2}{b^2x^2-abpqx^2-a^2q}\\&=(-q)^{n-2}\left[b^2x^2-abpqx^2-a^2q\right]\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$h_{n+1}(x)h_{n-1}(x)-h_n^2(x)=(-1)^{n-1}q^{n-2}\left(b^2x^2-abpqx^2-a^2q\right)$$

dir.

Örnek 3.2.3. $n=4$ ve $r=2$ için

$$h_4^2(x)-h_6(x)h_2(x)=\frac{(-q)^{n-r-1}(bxh_3-ah_4)^2}{b^2x^2-abpqx^2-a^2q}$$
$$=\frac{(-q)\left[bx\left(bpx^2+aq\right)-a\left(bp^2x^3+apqx+bqx\right)\right]^2}{b^2x^2-abpqx^2-a^2q}$$
$$=\frac{(-q)\left[px\left(b^2x^2-abpqx^2-a^2q\right)\right]^2}{b^2x^2-abpqx^2-a^2q}$$
$$=-p^2qx^2\left(b^2x^2-abpqx^2-a^2q\right)$$

dir.

Teorem 3.2.4.(D'Ocagne's Özdeşliği) $n\geq 0$, $m\geq 0$ ve $h_n(x)$ *n. Horadam* polinomu olmak üzere;

$$h_m(x)h_{n+1}(x)-h_n(x)h_{m+1}(x)=(-q)^{n-1}\left[bxh_{m-n+1}(x)-ah_{m-n+2}(x)\right] \qquad (3.16)$$

dir.

İspat. $h_m(x)h_{n+1}(x)-h_n(x)h_{m+1}(x)=L$ olsun. *Horadam* polinomunun Binet formülünü kullanırsak

$$L=\left(\frac{A_1\alpha^{m-1}-A_2\beta^{m-1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{A_1\alpha^{n}-A_2\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right)-\left(\frac{A_1\alpha^{n-1}-A_2\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{A_1\alpha^{m}-A_2\beta^{m}}{\alpha-\beta}\right)$$

dir. Burada gerekli işlemler yapıldığında

$$L=\frac{A_1A_2\left[-\alpha^{m-1}\beta^{n}-\alpha^{n}\beta^{m-1}+\alpha^{n-1}\beta^{m}+\alpha^{m}\beta^{n-1}\right]}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$=\frac{A_1A_2\left[\alpha^{m-1}\beta^{n-1}(\alpha-\beta)+\alpha^{n-1}\beta^{m-1}(-\alpha+\beta)\right]}{(\alpha-\beta)^2}$$
$$=\frac{A_1A_2\left[\alpha^{m-1}\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}\beta^{m-1}\right]}{(\alpha-\beta)}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$L=\frac{A_1A_2(\alpha\beta)^{n-1}\left(\alpha^{m-n}-\beta^{m-n}\right)}{\alpha-\beta}$$

elde edilir. (3.13) ve (3.15) ifadelerini kullanırsak

$$L=\left(b^2x^2-abpx^2-a^2q\right)(-q)^{n-1}\frac{\left(bxh_{m-n+1}(x)-ah_{m-n+2}\right)}{b^2x^2-abpx^2-a^2q}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$h_m(x)h_{n+1}(x)-h_n(x)h_{m+1}(x)=(-q)^{n-1}\left[bxh_{m-n+1}(x)-ah_{m-n+2}(x)\right]$$

dir.

Eğer (3.16) ifadesinde m yerine $n-1$ alınırsa *Cassini* özdeşliği elde edilir. Yani

$$\begin{aligned}h_{n-1}h_{n+1}-h_n^2&=(-q)^{n-1}\left(bxh_0-ah_1\right)\\&=(-1)^{n-1}q^{n-2}\left(b^2x^2-abpx^2-a^2q\right)\end{aligned}$$

dir.

Örnek 3.2.4. $m=5$ ve $n=3$ için

$$\begin{aligned}h_5(x)h_4(x)-h_3(x)h_6(x)&=(-q)^2\left[bxh_3(x)-ah_4(x)\right]\\&=q^2\left[bx\left(bpx^2+aq\right)-a\left(bp^2x^3+apqx+bqx\right)\right]\\&=\left[bp^3x^4+\left(ap^2q+2bpq\right)x^2+aq^2\right]\left[bp^2x^3+\left(apq+bq\right)x\right]\\&\quad-\left[bpx^2+aq\right]\left[bp^4x^5+\left(ap^3q+3bp^2q\right)x^3+\left(2apq^2+bq^2\right)x\right]\\&=pq^2x\left(b^2x^2-abpx^2-a^2q\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.5. (Honsberger Özdeşliği) $n\geq 2$, $m\geq 2$, $h_n(x)$ *n. Horadam* polinomu olmak üzere;

$$\begin{aligned}h_{m+n}(x)=&\frac{\left[\left(bpx^2-ap^2x^2-aq\right)h_{m+1}(x)+qx\left(b-ap\right)h_m(x)\right]h_n(x)}{b^2x^2-abpx^2-a^2q}\\&+\frac{q\left[x\left(b-ap\right)h_{m+1}(x)-aqh_m(x)\right]h_{n-1}(x)}{b^2x^2-abpx^2-a^2q}\end{aligned}\qquad(3.17)$$

dir.

İspat.

$$h_{m+n}(x) = k_1 h_n(x) + k_2 h_{n-1}(x)$$

olsun. *Horadam* polinomunun Binet formülünü kullanarak

$$\left(\frac{A_1\alpha^{m+n-1} - A_2\beta^{m+n-1}}{\alpha-\beta}\right) = k_1\left(\frac{A_1\alpha^{n-1} - A_2\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right) + k_2\left(\frac{A_1\alpha^{n-2} - A_2\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}\right)$$

ifadesi elde edilir. Buradan gerekli işlemler yapıldığında

$$\frac{A_1\alpha^{m+n-1} - A_2\beta^{m+n-1}}{\alpha-\beta} = \frac{k_1A_1\alpha^{n-1} - k_1A_2\beta^{n-1} + k_2A_1\alpha^{n-2} - k_2A_2\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}$$

olur. Yani

$$A_1\alpha^{m+n-1} - A_2\beta^{m+n-1} = A_1\alpha^{n-2}(k_1\alpha + k_2) - A_2\beta^{n-2}(k_1\beta + k_2)$$

bulunur. Buradan

$$\alpha^{m+1} = k_1\alpha + k_2$$
$$\beta^{m+1} = k_1\beta + k_2$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Eğer bu sistem çözülürse

$$k_1 = \frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha-\beta} \quad ve \quad k_2 = q\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha-\beta}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$h_{m+n}(x) = \left(\frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha-\beta}\right)h_n(x) + q\left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha-\beta}\right)h_{n-1}(x)$$

olur. (3.15) ifadesini kullanırsak

$$h_{m+n}(x) = \frac{\left[bxh_{m+2}(x) - ah_{m+3}(x)\right]h_n + q\left[bxh_{m+1}(x) - ah_{m+2}(x)\right]h_{n-1}(x)}{b^2x^2 - abpx^2 - a^2q}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$h_{m+n}(x)=\frac{\left[\left(bpx^2-ap^2x^2-aq\right)h_{m+1}(x)+qx(b-ap)h_m(x)\right]h_n(x)}{b^2x^2-abpx^2-a^2q}$$
$$+\frac{q\left[x(b-ap)h_{m+1}(x)-aqh_m(x)\right]h_{n-1}(x)}{b^2x^2-abpx^2-a^2q}$$

elde edilir.

Örnek 3.2.5. $m=4$ ve $n=2$ için,

$$h_6(x)=\frac{\left[\left(bpx^2-ap^2x^2-aq\right)h_5(x)+qx(b-ap)h_4(x)\right]h_2(x)}{b^2x^2-abpx^2-a^2q}$$
$$+\frac{q\left[x(b-ap)h_5(x)-aqh_4(x)\right]h_1(x)}{b^2x^2-abpx^2-a^2q}$$
$$=\frac{\left[\left(bpx^2-ap^2x^2-aq\right)h_5(x)+qx(b-ap)h_4(x)\right]bx}{b^2x^2-abpx^2-a^2q}$$
$$+\frac{aq\left[x(b-ap)h_5(x)-aqh_4(x)\right]}{b^2x^2-abpx^2-a^2q}$$
$$=\frac{h_5(x)\left[b^2px^3-abp^2x^3-a^2pqx\right]+h_4(x)\left[b^2qx^2-abpqx^2-a^2q^2\right]}{b^2x^2-abpx^2-a^2q}$$
$$=\frac{\left[pxh_5(x)+qh_4(x)\right]\left[b^2x^2-abpx^2-a^2q\right]}{b^2x^2-abpx^2-a^2q}$$
$$=\left[pxh_5(x)+qh_4(x)\right]$$
$$=bp^4x^5+\left(ap^3q+3bp^2q\right)x^3+\left(2apq^2+bq^2\right)x$$

dir.

Horadam polinomları için (3.17) ile verilen Honsberger özdeşliğinin bazı özel durumları aşağıda verilmiştir.

1) $a=b=p=q=1$ için

$$F_{m+n}(x)=F_{m+1}(x)F_n(x)+F_m(x)F_{n-1}(x)$$

elde edilir.

2) $a=2,\ b=p=q=1$ için $L_{m+2}(x)+L_m(x)=\left(x^2+4\right)F_{m+1}(x)$ ifadesinden faydalanırsak

$$L_{m+n-1}(x)=F_{m+1}(x)L_{n-1}(x)+F_m(x)L_{n-2}(x)$$

elde edilir.

3) $a=1,\ b=p=2,\ q=1$ için

$$P_{m+n}(x)=P_{m+1}(x)P_n(x)+P_m(x)P_{n-1}(x)$$

elde edilir.

4) $a=b=p=2,\ q=1$ için $Q_{m+2}(x)+Q_m(x)=\left(4x^2+4\right)P_{m+1}(x)$ ifadesini kullanırsak

$$Q_{m+n-1}(x)=P_{m+1}(x)Q_{n-1}(x)+P_m(x)Q_{n-2}(x)$$

elde edilir.

5) $a=b=p=x=1,\ q=2y$ için

$$J_{m+n}(y)=J_{m+1}(y)J_n(y)+2yJ_m(y)J_{n-1}(y)$$

elde edilir.

6) $a=2,\ b=p=x=1, q=2y$ için $j_{m+2}(y)+2yj_m(y)=(8y+1)J_{m+1}(y)$ ifadesini kullanırsak

$$j_{m+n-1}(y)=J_{m+1}(y)j_{n-1}(y)+2yJ_m(y)j_{n-2}(y)$$

elde edilir.

7) $a=1,\ b=p=2,\ q=-1$ için

$$U_{m+n-1}(x)=U_m(x)U_{n-1}(x)-U_{m-1}(x)U_{n-2}(x)$$

elde edilir.

8) $a=b=1,\ p=2,\ q=-1$ için $xT_{m+1}(x)-T_m(x)=\left(x^2-1\right)U_m(x)$ ifadesinden faydalanırsak

$$T_{m+n-1}(x)=U_m(x)T_{n-1}(x)-U_{m-1}(x)T_{n-2}(x)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.6. $n \geq 0$, $m \geq 0$, $r \geq 0$, $h_n(x)$ *n. Horadam* polinomu ve

$$W = h_m(x)h_n(x) - h_{m-r}(x)h_{n+r}(x)$$

olmak üzere

$$W = (-q)^{m-r-1} \frac{\left[bxh_{r+1}(x) - ah_{r+2}(x)\right]\left[bxh_{n+r-m+1}(x) - ah_{n+r-m+2}(x)\right]}{b^2x^2 - abpx^2 - a^2q} \tag{3.18}$$

dir.

İspat. *Horadam* polinomunun Binet formülünü kullanırsak

$$W = \left(\frac{A_1\alpha^{m-1} - A_2\beta^{m-1}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{A_1\alpha^{n-1} - A_2\beta^{n-1}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{A_1\alpha^{m-r-1} - A_2\beta^{m-r-1}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{A_1\alpha^{n+r-1} - A_2\beta^{n+r-1}}{\alpha - \beta}\right)$$

dir. Burada gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
W &= \frac{A_1A_2\left[-\alpha^{m-1}\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\beta^{m-1} + \alpha^{m-r-1}\beta^{n+r-1} + \alpha^{n+r-1}\beta^{m-r-1}\right]}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{A_1A_2\left[\alpha^{m-1}\beta^{n-1}\left[-1 + \frac{\beta^r}{\alpha^r}\right] + \alpha^{n-1}\beta^{m-1}\left[-1 + \frac{\alpha^r}{\beta^r}\right]\right]}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{A_1A_2\left[\alpha^{m-1}\beta^{n-1}\left(\frac{-\alpha^r + \beta^r}{\alpha^r}\right) + \alpha^{n-1}\beta^{m-1}\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\beta^r}\right)\right]}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{A_1A_2\left[\alpha^r - \beta^r\right]\left[\frac{\alpha^{n-1}\beta^{m-1}}{\beta^r} - \frac{\alpha^{m-1}\beta^{n-1}}{\alpha^r}\right]}{(\alpha-\beta)^2}
\end{aligned}$$

$$W = A_1A_2(\alpha\beta)^{m-r-1}\left[\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}\right]\left[\frac{\alpha^{n+r-m} - \beta^{n+r-m}}{\alpha - \beta}\right]$$

olur. (3.13) ve (3.15) ifadelerinden faydalanırsak

$$W = (-q)^{m-r-1}\left(b^2x^2 - abpx^2 - a^2q\right)\left(\frac{bxh_{r+1}(x) - ah_{r+2}(x)}{b^2x^2 - abpx^2 - a^2q}\right)\left(\frac{bxh_{n+r+1-m}(x) - ah_{n+r+2-m}(x)}{b^2x^2 - abpx^2 - a^2q}\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$W=(-q)^{m-r-1}\frac{\left[bxh_{r+1}(x)-ah_{r+2}(x)\right]\left[bxh_{n+r-m+1}(x)-ah_{n+r-m+2}(x)\right]}{b^2x^2-abpx^2-a^2q}$$

dir.

Eğer (3.18) ifadesinde m yerine $n+1$, n yerine $n-1$ ve $r=1$ alırsak (3.12) ile verilen *Cassini* özdeşliği elde edilir.

Eğer (3.18) ifadesinde m yerine n alınırsa (3.14) ile verilen *Catalan* özdeşliği bulunur.

Yine (3.18) ifadesinde n yerine m, m yerine $n+1$ ve $r=1$ alınırsa (3.16) ile verilen *D'Ocagne's* özdeşliği elde edilir.

Eğer (3.18) ifadesinde $x=a=b=p=q=1$ alınırsa *Fibonacci* sayıları için

$$F_mF_n-F_{m-r}F_{n+r}=(-1)^{m-r}F_rF_{n+r-m}$$

ifadesi elde edilir (Spivey 2006).

Örnek 3.2.6. $m=5, n=4$ ve $r=2$ için

$$\begin{aligned}W&=(-q)^2\frac{b^2x^2h_3(x)h_2(x)-abx\left(h_3(x)h_3(x)+h_4(x)h_2(x)\right)+a^2h_4(x)h_3(x)}{b^2x^2-abpx^2-a^2q}\\&=(-q)^2\frac{\left(bpx^2+aq\right)\left[b^3x^3-ab^2px^3-a^2bqx\right]-a\left[bp^2x^3+(apq+bq)x\right]\left(b^2x^2-abpx^2-a^2q\right)}{b^2x^2-abpx^2-a^2q}\\&=q^2\left[bx\left(bpx^2+aq\right)-a\left[bp^2x^3+(apq+bq)x\right]\right]\\&=q^2\left[b^2px^3-abp^2x^3-a^2pqx\right]\end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.2.7. $h_n(x)$, *n.Horadam* polinomu, $A_1=bx-a\beta$ ve $A_2=bx-a\alpha$

olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{k}h_n^2(x)=\frac{h_{k+1}(x)\left(h_{k+1}(x)-q^2h_{k-1}(x)\right)-A_1A_2\left(2\frac{1-(-q)^k}{1+q}+(-q)^k\right)+x^2(b-ap)^2-a^2}{\left(p^2x^2+2q-q^2-1\right)}\qquad(3.19)$$

dir.

İspat. $T = h_1^{\,2}(x) + h_2^{\,2}(x) \ldots + h_k^{\,2}(x)$ olsun. *Horadam* polinomlarının rekürans bağıntısını kullanırsak

$$T = \sum_{n=1}^{k} h_n^{\,2}(x) = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{h_{n+1}(x) - q h_{n-1}(x)}{px} \right)^2$$

bulunur. Buradan

$$p^2 x^2 T = \sum_{n=1}^{k} h_{n+1}^2(x) + q^2 \sum_{n=1}^{k} h_{n-1}^2(x) - 2q \sum_{n=1}^{k} h_{n+1}(x) h_{n-1}(x)$$

dir. Teorem 3.2.2 den

$$p^2 x^2 T = \left(T - h_1^2(x) + h_{k+1}^2(x) \right) + q^2 \left(T + h_0^2(x) - h_k^2(x) \right) - 2q \sum_{n=0}^{k} \left(h_n^2(x) - A_1 A_2 (-q)^{n-2} \right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$p^2 x^2 T = T - a^2 + h_{k+1}^2(x) + q^2 T + x^2 (b - ap)^2 - q^2 h_k^2(x) - 2qT + 2qA_1 A_2 \sum_{n=1}^{k} (-q)^{n-2}$$

$$= T(1 + q^2 - 2q) + h_{k+1}^2(x) - q^2 h_k^2(x) - a^2 + x^2 (b - ap)^2 - 2A_1 A_2 \left(\frac{1 - (-q)^k}{1+q} \right)$$

dir. Buradan

$$\left(p^2 x^2 + 2q - q^2 - 1 \right) T = h_{k+1}^2(x) - q^2 h_k^2(x) - a^2 + x^2 (b - ap)^2 - 2A_1 A_2 \left(\frac{1 - (-q)^k}{1+q} \right)$$

olur. Yani

$$T = \frac{h_{k+1}^2(x) - q^2 \left[h_{k+1}(x) h_{k-1}(x) + A_1 A_2 (-q)^{k-2} \right] - a^2 + x^2 (b - ap)^2 - 2A_1 A_2 \left(\frac{1 - (-q)^k}{1+q} \right)}{\left(p^2 x^2 + 2q - q^2 - 1 \right)}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$T=\frac{h_{k+1}(x)\left[h_{k+1}(x)-q^2h_{k-1}(x)\right]-A_1A_2\left[2\frac{1-(-q)^k}{1+q}+(-q)^k\right]-a^2+x^2(b-ap)^2}{\left(p^2x^2+2q-q^2-1\right)}$$

dir.

4.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Horadam polinomları tanımlanarak Binet formülü, üreteç fonksiyonu, toplam formülleri ve bazı özellikleri incelendi. Horadam polinomunun Horadam sayılarının bir genelleştirmesi olduğu ve Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomlarına indirgenebildiği tespit edildi.

Horadam polinomunun bir genelleştirilmesi olarak Horadam $m-$polinomları tanımlandığı taktirde yeni çalışmalar ortaya çıkacağını düşünmekteyiz.

5. KAYNAKLAR

Belbachir, H., Bencherif, F., 2008, On Some Properties Of Bivariate Fibonacci and Lucas Polynomials, Journal of Integer Sequences 11, Article 08.2.6.

Haukkanen, P., 2002, A Note On Horadam's Sequence, The Fibonacci Quarterly, 40(4):358-361.

Horadam, A.F., 1965, Generating Functions for Powers of A Certain Generalized Sequence of Numbers, The Fibonacci Quarterly, 3:161-176.

Horadam, A.F., 1997, Jacobsthal Representation Polynomials, The Fibonacci Quarterly, 35(2):137-148.

Horadam,A.F., Flipponi, P., 1997, Derivate Sequences of Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Polynomials, The Fibonacci Quarterly, 35(1):352-357.

Horadam,A.F., Mahon, Bro. J. M., 1985, Pell and Pell-Lucas Polynomials, The Fibonacci Quarterly, 23(2):7-20.

Karlsson, P.W., 1988, Reviews: H. M. Srivastava and H. L. Manocha, A Treatise On Generating Functions, Bulletin of The American Mathematical Society, 19(1):346-348.

Kocer, E.G., Mansour, T. and Tuglu, N., **2007,** Norms of Circulant and Semirculant Matrices with Horadam's Numbers, Ars Combinatoria, 85:353-359.

Koshy T., 2001, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, A Wiley-Interscience Publication.

Lupaş,A., 1999, A Guide of Fibonacci and Lucas Polynomials, Math Magazi ne,7(1):2-12.

Mansour, T., 2003, A Note On Sum of $k-th$ Power of Horadam's Sequence, Arxiv:

Math/0302015v1 [Math.Co], 2 February.

Morgado, J., 1995, Note On The Chebyshev Polynomials and Applications to The Fibonacci Numbers, Portugaliae Mathematica, 52(3):363-378.

Spivey, M.Z. 2006, Fibonacci Identities Via The Determinant Sum Property, The College Mathematics Journal, 37(2):286-289.

Udrea, G., 1995, Catalan's Identity and Chebyshev Polynomials of The Second Kind, Portugaliae Mathematica, 52(4):391-397.

Udrea, G., 1996, A Note on the Sequence $(W_n)\ n \geq 0$ of A.F.Horadam, Portugaliae Mathematica, 53(2):143-144.

Vajda, S., 1989, Fibonacci & Lucas Numbers, and The Golden Section Theory and Applications, Ellis Horwood Limeted.