ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI MAKSİMUMLU FARK DENKLEMLERİNİN
PERİYODİKLİĞİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Nurcan ŞEKERCİ

Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç. Dr. Necati TAŞKARA

2008

49 Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, maksimumlu fark denklemleri ve fark denklemlerinin periyodikliği ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verildi.

İkinci bölümde, fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremleri verildi.

Üçüncü bölümde, maksimumlu denklemler hakkında bilgi verildi.

Dördüncü bölümde, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, \min\left\{1, \frac{A}{x_n}\right\}\right\}$ fark denklemini tanımlayarak, çözümlerini ve periyodikliğini inceledik.

Beşinci bölümde ise, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, \min\left\{1, \frac{A}{x_n}\right\}\right\}$ fark denklemi için nümerik örnekler verildi.

Anahtar Kelimeler: Maksimumlu Fark Denklemi, Periyodiklik

ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

A STUDY ON THE BEHAVİOUR OF THE DİFFERENCE EQUATİON

Nurcan ŞEKERCİ

Selcuk Üniversity Gratuate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Necati TAŞKARA

2008

49 Pages

Jury: Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA

Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE

This study consist of five sections. In the first section, information about some difference equations with maximum and perodicity of some difference equations studied before were given.

In the second section, general definitions and theorems about difference equations were given.

In the third section, some maximum and minumum difference equations were given.

In the fourth section, we defined the difference equation $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, \min\left\{1, \frac{A}{x_n}\right\}\right\}$ and investigated its solutions and periodicity. We gave the numerical examples fort his difference equation.

In the fifth section, the numerical examples for this difference equation were given.

Key Words: Difference Equation with Maximum, Periodici

1. GİRİŞ

Bu bölümde, fark denklemlerinin önemli çalışma alanlarından olan maksimum ve minimumlu fark denklemleri ile ilgili yapılan bazı çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

Amleh (1998), G.Ladas yönetiminde yaptığı doktora tezinde; fark denklemlerinin üç farklı konusunu ele almıştır. İlk bölümde, $x_{n+1} = \max\left\{\frac{A}{x_n}, \frac{B}{x_{n-1}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin sıfırdan farklı reel sayılar olan A, B parametreleri ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları için periyodik olduğunu göstermiştir. İkinci bölümde, $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}x_{n-2}}{x_n x_{n-1} + x_{n-2}}$ rasyonel fark denkleminin global asimptotik kararlılığını incelemiş ve son bölümde ise, Plant-Herbivore sisteminin çözümlerinin sınırlılığı üzerine çalışmıştır.

Amleh, Hoag ve Ladas (1998), fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir. Bu çalışmada; A parametresi ve başlangıç şartlarının sıfırdan farklı reel sayılar olduğunu kabul ederek, bu fark denkleminin bütün çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ve ayrıca A parametresi ve başlangıç şartlarına bağlı olarak çözümlerin er geç 2, 3 ve 4 periyotlu olabileceğini göstermişlerdir.

Grove, Kent ve Ladas (1998), yaptıkları çalışmada; $x_{n+1} = \frac{ax_n + b_n}{x_{n-1}}$ otonom olmayan Lyness fark denklemi ile $x_{n+1} = \frac{\max\{a_n x_n, b_n\}}{x_{n-1}}$ maksimumlu fark denkleminde katsayıların negatif olmayan $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri olduğunu varsaymışlar, bu varsayımlar doğrultusunda bu denklemlerin bütün pozitif

çözümlerinin sürekli ve sınırlı olabilmesi için yeter şartlar elde etmişlerdir. Ayrıca çalışmada zıt durumların her biri için örnekler vermişlerdir.

Janowski, Kocic, Ladas ve Tzanetopoulos (1998), yaptıkları çalışmada; $x_{n+1}=\min\left\{\frac{A}{x_n x_{n-1}...x_{n-k}},\frac{B}{x_{n(k+2)}...x_{n-(2k+2)}}\right\}$, $x_{n+1}=\frac{\max\left\{x_n^k,A\right\}}{x_{n-1}}$ maksimumlu rasyonel fark denklemlerinin çözümlerinin sınırlılık ve salınımlılık özelliklerini incelemişlerdir. Bu fark denkleminde A,k parametreleri ve başlangıç şartlarının pozitif sayı değerleri aldıklarını varsaymışlar ve çalışma sonucunda bu denklemin çözümlerinin sınırlı ve salınmılı olma şartlarını A,k parametreleri ile başlangıç şartlarına bağlı olarak elde etmişlerdir.

Valicenti (1999), yaptığı doktora tezinde $x_{n+1}=\frac{a_n x_n+b_n}{x_{n-1}}$ otonom olmayan Lyness fark denklemi ile $x_{n+1}=\frac{\max\left\{a_n x_n,b_n\right\}}{x_{n-1}}$ maksimumlu fark denkleminin çözümlerinin periyodikliği ve global asimptotik kararlılığı üzerine çalışmıştır.

Teixeria (2000), yaptığı doktora tezinde; ilk olarak A herhangi bir reel sayı ve başlangıç şartları sıfır olmayan reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1}=\frac{\max\left\{x_n,A\right\}}{x_n x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir. İkinci bölümde ise, $x_{n+1}=\frac{a}{x_n}+\frac{b}{y_n},y_{n+1}=\frac{c}{x_n}+\frac{d}{y_n}$ fark denklem sisteminin çözümlerini analiz etmiş ve sonuncu bölümde de $y_{n+1}=\frac{p+y_{n-1}}{qy_n+y_{n-1}}$ fark denkleminin pozitif parametreler ve başlangıç şartları altında global asimptotik kararlı olduğunu göstermiştir.

Papascihinopoulos ve Hatzifilippidis (2001), katsayılarının pozitif sayı dizileri ve başlangıç şartlarına pozitif sayı olarak aldıkları

$x_{n+1}=\dfrac{\max\left\{a_n(\prod_{i=n-k+1}^{n}x_i),b_n\right\}}{\prod_{i=n-k}^{n}x_i}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin süreklilik, sınırlılık ve periyodikli özelliklerini incelemişlerdir.

Mishev, Patula ve Voulov (2002), $x_{n+1}=\max\left\{\dfrac{A}{x_n},\dfrac{B}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin periyodikliği üzerine yaptığı çalışmada; A,B,k A,B parametreleri ile başlangıç şartlarını pozitif sayı değerleri olarak kabul ederek denklemin bütün pozitif çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ispat etmişlerdir.

Voulov (2002), yaptığı iki çalışmadan birincisinde; G. Ladas tarafından verilen bir açık problemi çözmüştür. Bu çalışmada A,B,C parametreleri negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $A+B+C>0$ için $x_n=\max\left\{\dfrac{A}{x_{n-1}},\dfrac{B}{x_{n-3}},\dfrac{C}{x_{n-5}}\right\}$ fark denkleminin bütün çözümlerinin periyodik olduğunu göstermiştir. İkincisinde ise A ve B parametreleri pozitif reel sayılar ve k ile m parametreleri pozitif tam sayılar olmak üzere, $x_n=\max\left\{\dfrac{A}{x_{n-k}},\dfrac{B}{x_{n-m}},\right\}$ maksimumlu fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelemiştir. A,B,k ve m parametrelerine bağlı olarak denklemin bütün pozitif çözümlerinin er geç periyodik olduğunu ispat etmiştir.

Papaschinopoulos ve arkadaşları (2003), yaptıkları çalışmada daha önce Feuer tarafından çalışılmış olan $x_{n+1}=\dfrac{\max\{x_n,A\}}{x_nx_{n-1}}$ fark denkleminin çözümleri, çözümlerinin periyodikliği ve sabit aralığı üzerine çalışmışlardır.

Feuer (2003), $x_{n+1}=\dfrac{\max\left\{x_n^k, A\right\}}{x_n^l x_{n-1}}$ maksimumlu Lyness fark denklemi üzerinde yaptığı çalışmada; A 'nın pozitif bir reel sayı, k,l ve başlangıç şartlarının da keyfi reel sayı değerleri olduğunu kabul ederek denkleminin çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelemiştir.

Patula ve Voulov (2004), yaptıkları çalışmada A_n, B_n pozitif terimli ve 3 periyotlu diziler olmak üzere , $x_{n+1}=\max\left\{\dfrac{A_n}{x_n}, \dfrac{B_n}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Çinar ve arkadaşları (2005), yaptıkları çalışmada; $A, B>0$ olmak üzere, sıfırdan farklı başlangıç şartları için $x_{n+1}=\max\left\{\dfrac{A}{x_n}, \dfrac{B}{x_{n-2}}\right\}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir. Ayrıca, bu denklemi genelleştirerek elde ettikleri $x_{n+1}=\min\left\{\dfrac{A}{x_n x_{n-1}\ldots x_{n-k}}, \dfrac{B}{x_{n(k+2)}\ldots x_{n-(2k+2)}}\right\}$ fark denkleminin pozitif başlangıç şartları altında periyodik olma durumlarını incelemişlerdir.

Şimsek ve arkadaşları (2006), yaptıkları çalışmada; $x_{n+1}=\max\left\{\dfrac{1}{x_{n-1}}, x_{n-1}\right\}$ fark denkleminin pozitif başlangıç şartları altında çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Yang ve arkadaşları (2006), $x_n=\max\left\{\dfrac{1}{x_{n-1}^{\alpha}}, \dfrac{A}{x_{n-2}}\right\}$ maksimumlu fark denklemi üzerine yaptığı çalışmada $0<\alpha<1$ ve $A>0$ olmak üzere fark denklemi için pozitif çözümlerin asimtotik davranışını çalışmıştır. Bu denklemin her pozitif çözümünün $x*=1$ ' e yakınsadığını veya bu denklemin her pozitif çözümünün $A\le 1$ veya $A>1$ durumunda 4 periyot ile er geç periyodik olduğunu ispatlamıştır.

Stefanidou ve Papaschinopoulos (2006), yaptıkları çalışma da; A_0, A_1 ve başlangıç şartları pozitif fuzzy sayıları, k ve m parametreleri pozitif tam sayılar olmak üzere $x_n = \left\{ \frac{A_0}{x_{n-k}}, \frac{A_1}{x_{n-m}} \right\}$ fuzzy fark denkleminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Yalçınkaya ve arkadaşları (2007), yaptıkları çalışmada; A parametresi herhangi bir reel sayı ve x_{-1}, x_0 başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \max\left\{ \frac{1}{x_n}, Ax_{n-1} \right\}$ maksimumlu fark denklemini tanımlamışlar ve çözümleri incelemişlerdir. Bu fark denkleminin A parametresi ve başlangıç şartlarına bağlı olarak çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Stevo Stevic (2007), $x_{n+1} = \max\left\{ c, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p} \right\}$ maksimumlu fark denklemi üzerinde yaptığı çalışmada; $p, c \in (0,1)$ olmak üzere fark denkleminin global çekimliliği ve sınırlılığını çalışmıştır. Bu çalışmada a) $p \geq 4$ olduğunda sınırsız çözümlerin mevcut olduğunu b) $p \in (0,4)$ olduğunda tüm çözümlerin sınırlı olduğunu c) $p \in (0,4)$ ve $x* = 1$ $c \geq 1$ olduğunda her pozitif çözüm er geç 1'e eşit olduğunu d) $p, c \in (0,1)$ için de tüm pozitif çözümlerin 1'e yakınsadığını göstermiştir.

Gelişken ve arkadaşları (2008), yaptıkları çalışmada; bir açık problem olan $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

2. FARK DENKLEMLERİ

Fark denklem; bir ve daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bir bağıntıdır. Diferansiyel denklemlere benzerlik gösteren ve inceleme süreci yönünden daha yeni olan fark denklemlerine fonksiyonel denklemler de denir.

Diferansiyel denklemlerde fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu. Fakat 20.yüzyılın başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylarındaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının süreklilik terimleri ile ifade edilmeyeceğini göstermiştir. Böylece fark denklemleri kullanılarak diferansiyel denklemlerde görülen süreksizlik halleri kaldırılmak istenmiştir. Günümüzde birçok alanda uygulanan fark denklemleri, daha çok hareket analizinde devreleri matematiksel olarak ifade etmede, ekonomide talep ve arz denklemlerini oluşturmada, ekonomik dalgalanmalar veya devresel hareketleri açıklamada, işsizlik oranı hesabında, spektrum analizinde filtre dizaynı gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Bu bölümde fark denklemleri için literatürde var olan genel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin sürekli olduğu durumda, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemler üzerinde duracağız.

Başlangıç olarak fark denklemi tanımını verelim.

Tanım 2.1 n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere, bağımlı ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $E(y), E^2(y), ..., E^{(n)}(y), ...$ gibi farklarını içine alan bağıntılara *Fark Denklemi* denir. Dikkat edilirse n'nin sürekli olduğu halde diferansiyel denklemleri ile arasında büyük benzerlikler vardır.

$$a_0 y(n) + a_1 y(n+1) = f(n)$$

Denklemi birinci dereceden fark denklemidir.

$$a_0 y(n-1) + a_1 y(n) + y(n+1) = g(n)$$

Denklemi ise ikinci mertebeden fark denklemidir.

Denklemin mertebesinin belirlenmesinde; ya y'nin hesaplanabilmesi için gerekli olan başlangıç şartı sayısının, ya da denklemdeki en büyük mertebeli terimin mertebesi ile en küçük mertebeli terimin mertebesi arasındaki farkın tespit edilmesiyle olur.

2.1. Lineer Fark Denklemi

Tanım 2.1.1 Bir fark denkleminde bağımlı değişken birinci derecedense bu denkleme *lineer fark denklemi* denir. Genel olarak lineer fark denklemleri:

$$a_0 y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + ... + a_0 y(k) = f(k)$$

şeklinde gösterilir

Lineer fark denklemleri, $f(k)$ ve $a_i\,(0,1,2,...n)$ katsayılarının durumuna göre isimlendirilirler.

i) Eğer $f(k) = 0$ ise denkleme *Lineer Homojen Fark Denklemi* denir.

ii) $a_i\,(0,1,2,...n)$ katsayıları sabit iseler, denkleme *Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklemi* denir.

iii) $a_i\,(0,1,2,...n)$ katsayıları bağımsız değişkenin fonksiyonları iseler denkleme *Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklemi* denir. Örneğin;

$$(k+1)k\Delta^2 y(k) - 6ky(k) + 10y(k) = 0, k \in \mathrm{Z}$$

Euler Fark Denklemi; değişken katsayılı lineer Homogen fark denklemidir.

Örnek 2.1.1. $y_{k+2} - 2y_{k+1}\cos\alpha + y_k = 0$ fark denklemini çözünüz.

Çözüm. Bu denklem ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer homogen bir fark denklemi olup,
karakteristik denklemi,

$$r^2 - 2r\cos\alpha + 1 = 0$$

dır. Bunun kökleri

$$r_{1,2} = \cos\alpha \mp i\sin\alpha$$

olur. Bu kökler

$$r_1 = e^{i\alpha}, \qquad r_2 = e^{-i\alpha}$$

şeklinde yazılabilir. Bu nedenle homogen denklemin genel çözümü

$$y_k = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k = c_1 e^{in\alpha} + c_2 e^{-in\alpha}$$

dir. r_1 ve r_2 lineer bağımsız çözümler olduklarından bunların lineer kombinezonu da çözüm olabilir. Böylece

$$r = \frac{1}{2}(e^{in\alpha} + e^{-in\alpha})$$

ifadesini de çözüm olarak alırız ki Euler formülü

$$\frac{(e^{in\alpha} + e^{-in\alpha})}{2} = \cos n\alpha$$

den $r = \cos n\alpha$ alınır.

Başka bir yolla, $y_k = \cos n\alpha$ ' nın verilen fark denkleminin bir kökü olduğunun ispatı yapılabilir. Bu yol $y_k = \cos n\alpha$ ' yı denklemde yerine koymaktır.

$$\cos(k+1)\alpha - 2\cos\alpha\cos(k+1) + \cos k\alpha = 0$$

yazılır.

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

olduğundan,

$$\cos k\alpha + \cos k\alpha\cos 2\alpha - 2\cos^2\alpha\cos k\alpha = 0$$

bulunur.

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

dir. Buradan da

$$\cos k\alpha + 2\cos k\alpha\cos^2\alpha - \cos k\alpha\cos^2\alpha = 0$$

olarak sonuç bulunur.

2.2.Fark Denklemler için Genel Tanım ve Teoremler

Teorem 2.2.1 I reel sayıların bir alt aralığı olmak üzere ;

$$f : I * I \to I$$

sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. O zaman $\forall x_{-1}, x_0 \in I$ için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \ , \quad n = 0,1,2,... \tag{2.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 2.2.1 Eğer $\bar{x}$ noktası için $f(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}$ ise $\bar{x}$'e f 'nin *denge noktası* denir. Eğer $\forall n \geq 0$ için $x_n = \bar{x}$ ise $\bar{x}$'e f 'nin *sabit noktası* denir.

Örnek 2.1.2. $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n}$ denkleminin denge noktasının $\bar{x} = \pm 1$ olduğunu gösterelim.

Çözüm. Denge noktası tanımından,

$f(\bar{x},\bar{x}) = \bar{x} = \dfrac{1}{\bar{x}}$ dır. Buradan $\bar{x} = \pm 1$ olur.

Tanım 2.2.2 $\bar{x}$ **,** $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \ \ n = 0,1,2,...$

denkleminin denge noktası olmak üzere:

- **a)** Her $\varepsilon > 0$ sayısı için eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa ve $\forall n \geq -1$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanıyorsa denklemin $\bar{x}$ denge noktasına kararlıdır denir.
- **b)** $\bar{x}$ denge noktasına kararlı olsun. Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$ olacak şekilde $\gamma > 0$ sayısı varsa ve $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ oluyorsa $\bar{x}$ denge noktası lokal olarak asimptotik kararlıdır denir.
- **c)** Her $x_{-1}, x_0 \in I$ için eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise; o zaman $\bar{x}$ denge noktasına global çekici denir.
- **d)** Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve global çekici ise $\bar{x}$'e global asimptotik kararlıdır denir.
- **e)** Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise $\bar{x}$ denge noktasına kararsızdır denir.

f) Eğer $x_{-1}, x_0 \in I$ iken $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa ve $|x_N - \bar{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $N \geq -1$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktasına repeller denir.

Tanım 2.2.3. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 2.2.4. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Örnek 2.2.1. $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n}$ denkleminin periyodunun 2 olduğunu gösterelim.

$n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$x_1 = \frac{1}{x_0},\ x_2 = \frac{1}{x_1} = x_0,\ x_3 = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_0} = x_1,\ x_4 = \frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_1} = x_0$$

olup bu şekilde devam edilirse,

$$x_n = \left\{ \frac{1}{x_0}, x_0, \frac{1}{x_0}, x_0, \ldots \right\}$$

2 periyotlu olduğu görülür.

Tanım 2.2.5. Herhangi bir fark denkleminin karakterini inceleyebilmek için o denklemin denge noktasındaki kısmi türevleri ile oluşturduğumuz yeni denkleme karakteristik denklem denir. (2.1) denklemi için:

$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) = f(u, v)$ olmak üzere oluşturduğumuz

$$z_{n+1} - \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial u} z_n - \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial v} z_{n-1} = 0$$

denklemi (2.1) denkleminin karakteristik denklemidir.

$$r = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial u} \text{ ve } s = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{x})}{\partial v}$$

olmak üzere,

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1} \tag{2.2}$$

elde edilir. Bu denkleme $\bar{x}$ denge noktası civarında *lineer denklem* denir.

(2.2) denkleminin karakteristik denklemi:

$$\lambda^2 - r\lambda - s = 0 \tag{2.3}$$

dır.

Teorem 2.2.2.(Lineer Kararlılık Teoremi)

a) Eğer (2.3) denklemininin her iki kökü de mutlak değerce 1' den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

b) Eğer (2.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

c) (2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1' den küçük olması için gerek ve yeter şart $|r| < 1 - s < 2$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

d) (2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1' den büyük olması için gerek ve yeter şartlar $|s| > 1$ ve $|r| < |1 - s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası repellerdir.

e) (2.3) denkleminin, bir kökünün mutlak değerce 1'den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1' den küçük olması için gerek ve yeter şartlar $r^2 + 4s > 0$ ve $|r| > |1 - s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır. (Chatterjee ve arkadaşları,2003).

Benzer şekilde, mertebesi 3 olan fark denklemleri için Teorem 2.2 aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir.

$$x_{n+1} = f\left(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}\right), \qquad n = 0,1,2,... \tag{2.4}$$

fark denklemini ele alalım.

(2.4) denkleminde, $f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$ fonksiyonunu $f(u,v,w)$ şeklinde düşünelim:

$$r = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\bar{x})}{\partial u}, s = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\bar{x})}{\partial v} \text{ ve } t = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x},\bar{x})}{\partial w}$$

olmak üzere,

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1} + ty_{n-2} \tag{2.5}$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme $\bar{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(2.5) denkleminin karakteristik denklemi:

$$\lambda^3 - r\lambda^2 - s\lambda - t = 0 \tag{2.6}$$

dır. Teorem 2.2.2 'yi (2.6) denkleminden yararlanarak tekrar yazalım.

Teorem 2.2.3.(Lineer Kararlılık Teoremi)

a) Eğer (2.6) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1' den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

b) Eğer (2.6) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1' den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

c) (2.6) denkleminin bütün köklerinin mutlak değerce 1' den küçük olması için gerek ve yeter şartlar $|r+1| < 1-s$, $|r-3t| < 3+s$ ve $t^2 - s - rt < 1$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. (Chatterjee ve arkadaşları,2003)

Tanım 2.2.6. $\bar{x}$ **,** $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$, $n = 0,1,2,\ldots\ldots$denkleminin bir denge noktası olsun.

Bu denklemin $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin bir parçası için $\{x_L, x_{L+1}, \ldots, x_M\}$ çözümlerinin tamamı $\bar{x}$ denge noktasından büyük ya da eşit ve $x_{L-1} < \bar{x}$ ve $x_{M+1} < \bar{x}$ ise $\{x_L, x_{L+1}, \ldots, x_M\}$ kümesine *pozitif yarı dönme* denir

Aynı denklemin $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin bir parçası için $\{x_L, x_{L+1}, \ldots, x_M\}$ çözümlerinin tamamı $\bar{x}$ denge noktasından küçük ve $x_{L-1} \geq \bar{x}$ ve $x_{M+1} \geq \bar{x}$ ise $\{x_L, x_{L+1}, \ldots, x_M\}$ kümesine *negatif yarı dönme* denir.

(Burada M ve L değerleri $L \geq -1$ ve $M \leq \infty$ olacak şekilde düşünülmelidir.)

Tanım 2.2.7. $\bar{x}$**,** $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$, $n = 0,1,2,...$ denkleminin bir denge noktası olsun. Bu denklemin $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümlerinin pozitif ya da negatif yarı dönmeye sahip olduğunu varsayalım. Eğer bu dönmeyi ters yöne çeviren yani denklemin denge noktasından küçük ya da denklemin denge noktasından büyük veya eşit değere sahip en az bir tane x_N ($N \geq -1$) çözümü varsa $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$, $n = 0,1,2,...$ denklemine *salınımlıdır* denir.

Tanım 2.2.8. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$**.** çözümlerinin hepsi birden ne pozitif nede negatif ise, bu çözümlere sıfır civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir.

Tanım 2.2.9. $\{x_n - \bar{x}\}$ dizisi salınımlı ise, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne $\bar{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir.

Tanım 2.2.10. $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \leq x_n \leq Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa, $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ dizisine *sınırlıdır* denir.

Teorem 2.2.4 (Clark Teoremi) $p, q \in R$ ve $k, n \in \{1,2,....\}$ olmak üzere;

$$x_{n+1} + px_n + qx_{n-k} = 0$$

Fark denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $|p| + |q| < 1$ olmasıdır.

2. MAKSİMUMLU VE MİNİMUMLU FARK DENKLEMLERİ

Bir fark denklemi içerisinde maksimum veya minimum içeriyorsa böyle fark denklemlerine maksimumlu veya minumumlu fark denklemleri denir. Örneğin; $x_{n+1}=\max\left\{\frac{1}{x_n},\frac{A}{x_{n-1}}\right\}$, $x_{n+1}=\frac{\max\{x_n,1\}}{x_{n-1}}$, $x_{n+1}=\min\{x_n,x_{n-1}\}$, $x_{n+1}=\frac{\max\{x_n,1\}}{x_n x_{n-1}}$ bazı maksimumlu ve minumumlu denklemlerdir.

Bu bölümde fark denklemlerinin özel bir durumu olan maksimumlu ve minimumlu fark denklemlerinin çözümleri ve çözümlerinin periyodikliği araştırılmış, bazı maksimumlu fark denklemleri incelenmiş; teoremler ve lemmalar verilmiştir.

Örnek 3.1. $x_{n+1}=\max\left\{\frac{1}{x_n},\frac{A}{x_{n-1}}\right\}, \quad n=0,1,....$ (3.2)

maximumlu denklemi $x_n=\max\left\{\frac{A_1}{x_{n-1}},\frac{A_2}{x_{n-2}},...,\frac{A_p}{x_{n-p}}\right\}, \quad n=0,1,....$ denkleminde $A_1=1$, $A_2=A$ ve $p=2$ alınarak elde edilmiştir.[12]

Teorem 3.1. $A\in(0,\infty)$ ve başlangıç koşulları pozitif olmak üzere (3.2) denklemi aşağıdaki gibi tanımlanan T periyodu ile periyodiktir.[25]

$$T=\begin{cases}2, & 0<A<1\\ 3, & A=1\\ 4, & A>1\end{cases}$$

İspat.

a) $0<A<1$ durumunda,

$a_1)$ $x_{-1}>x_{-2}$ olsun. Bu durumda,

$$x_0 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, \frac{A}{x_{-2}}\right\} = \frac{1}{x_{-1}}$$
$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{A}{x_{-1}}\right\} = \max\left\{x_{-1}, \frac{A}{x_{-1}}\right\} = x_{-1}$$
$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{A}{x_0}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, Ax_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}} = x_0$$

devam edildiğinde çözümlerin,

$$x_n = \left\{x_{-1}, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}, \frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}, \ldots\right\}$$

şeklinde 2 periyotlu olduğu görülür.

$a_2)$ $x_{-1} < x_{-2}$ olsun. Bu durumda,

$$x_0 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, \frac{A}{x_{-2}}\right\} = \frac{1}{x_{-1}}$$
$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{A}{x_{-1}}\right\} = \max\left\{x_{-1}, \frac{A}{x_{-1}}\right\} = x_{-1}$$
$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{A}{x_0}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, Ax_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}} = x_0$$

devam edildiğinde çözümlerin yine

$$x_n = \left\{x_{-1}, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}, \frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}, \ldots\right\}$$

şeklinde 2 periyotlu olduğu görülür.

b) $A = 1$ durumunda,

$b_1)$ $x_{-1} < x_{-2}$ olsun. Bu durumda,

$$x_0 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_{-2}}\right\} = \frac{1}{x_{-1}}$$
$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1}{x_{-1}}\right\} = \max\left\{x_{-1}, \frac{1}{x_{-1}}\right\} = x_{-1}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_0}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1}$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_1}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_{-1}}\right\} = \frac{1}{x_{-1}} = x_0$$

devam edildiğinde ,

$$x_n = \left\{x_{-1}, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}, x_{-1}, \frac{1}{x_{-1}}, x_{-1}, x_{-1}, \ldots\right\}$$

şeklinde 3 periyotlu olduğu görülür.

b_2) $x_{-1} > x_{-2}$ olsun. Bu durumda,

$$x_0 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, \frac{1}{x_{-2}}\right\} = \frac{1}{x_{-2}}$$

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{1}{x_{-1}}\right\} = \max\left\{x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}\right\} = x_{-2}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_0}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2}$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_1}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, \frac{1}{x_{-2}}\right\} = \frac{1}{x_{-2}} = x_0$$

devam edildiğinde

$$x_n = \left\{x_{-1}, x_{-2}, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}, x_{-2}, \frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}, x_{-2}, \ldots\right\}$$

şeklinde 2periyotlu olduğu görülür.

c) $A > 1$, başlangıç koşulları veya $x_{-1} > x_{-2}$ olsun. Bu durumda,

c_1) $x_{-1} < x_{-2}$ olsun. Bu durumda,

$$x_0 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, \frac{A}{x_{-2}}\right\} = \frac{A}{x_{-2}}$$

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{A}{x_{-1}}\right\} = \max\left\{\frac{x_{-2}}{A}, \frac{A}{x_{-1}}\right\} = \frac{x_{-2}}{A}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{A}{x_0}\right\} = \max\left\{\frac{A}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2}$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \frac{A}{x_1}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, x_{-2}\right\} = x_{-2}$$

$$x_4 = \max\left\{\frac{1}{x_3}, \frac{A}{x_2}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_{-2}}, \frac{A}{x_{-2}}\right\} = \frac{A}{x_{-2}} = x_0$$

devam edilirse,

$$x_n = \left\{x_{-1}, x_{-2}, \frac{A}{x_{-2}}, \frac{x_{-2}}{A}, x_{-2}, x_{-2}\frac{A}{x_{-2}}, \frac{x_{-2}}{A}, x_{-2}, x_{-2}\ldots\right\}$$

çözümlerin 4 periyotlu olduğu görülür.

$c_2)$ $x_{-1} > x_{-2}$ olsun. Bu durmda,

$$x_0 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, \frac{A}{x_{-2}}\right\} = \frac{1}{x_{-1}}$$

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{A}{x_{-1}}\right\} = \max\left\{\frac{x_{-1}}{A}, Ax_{-1}\right\} = \frac{A}{x_{-1}}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{A}{x_0}\right\} = \max\left\{\frac{x_{-1}}{A}, Ax_{-1}\right\} = Ax_{-1}$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \frac{A}{x_1}\right\} = \max\left\{\frac{1}{Ax_{-1}}, x_{-1}\right\} = x_{-1}$$

$$x_4 = \max\left\{\frac{1}{x_3}, \frac{A}{x_2}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, \frac{A}{Ax_{-1}}\right\} = \frac{1}{x_{-1}} = x_0$$

devam edilirse

$$x_n = \left\{x_{-1}, x_{-2}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{A}{x_{-1}}, Ax_{-1}, x_{-1}, \frac{1}{x_{-1}}, \frac{A}{x_{-1}}, Ax_{-1}, x_{-1}\ldots\right\}$$

çözümlerin 4 periyotlu olduğu görülür.

Teorem 3.2. $x_{n+1}=\max\left\{\frac{1}{x_n},\frac{A_n}{x_{n-1}}\right\}$, $n=0,1,2,....$ (3.3)

başlangıç şartları x_{-1} ve x_0 pozitiftir. Burada $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif 2 periyotlu periyodik bir dizidir.[9]

Aşağıdaki lemma 3.1, (3.3) denkleminin pozitif çözümlerinin davranışını incelemede önemli bir rol oynar.

Lemma 3.1. $A_0, A_1 \in (0,\infty)$ ve $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ (3.3) denkleminin pozitif çözümü olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur.[9]

1) $A_0x_0 \le x_{-1}$ verilsin.Bu durumda $x_0x_1=1$ dir.

2) $x_{-1} < A_0x_0$ ve $A_0A_1 \le x_{-1}x_0$ verilsin.Bu durumda $x_1x_2=1$ dir.

3) $x_{-1} < A_0x_0$, $x_{-1}x_0 < A_0A_1$ ve $A_1x_{-1} \le x_0$ verilsin. Bu durumda $x_2x_3=1$ dir.

4) $x_{-1} < A_0x_0$, $x_{-1}x_0 < A_0A_1$, $x_0 < A_1x_{-1}$ ve $x_{-1}x_0 \le 1$ verilsin. Bu durumda $x_3x_4=1$

5) $x_{-1} < A_0x_0$, $x_{-1}x_0 < A_0A_1$, $x_0 < A_1x_{-1}$ ve $1 < x_{-1}x_0$ verilsin. Bu durumda $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümleri 4 periyotludur.

İspat.

1) $A_0x_0 \le x_{-1}$ verilsin. Bu durumda,

$$x_1=\max\left\{\frac{1}{x_0},\frac{A_0}{x_{-1}}\right\}=\frac{1}{x_0}$$

olur.

2) $x_{-1} < A_0x_0$ ve $A_0A_1 \le x_{-1}x_0$ olsun. Bu durumda,

$$x_1=\max\left\{\frac{1}{x_0},\frac{A_0}{x_{-1}}\right\}=\frac{A_0}{x_{-1}}$$

ve

$$x_1=\max\left\{\frac{1}{x_1},\frac{A_1}{x_0}\right\}=\max\left\{\frac{x_{-1}}{A_0},\frac{A_1}{x_0}\right\}=\frac{x_{-1}}{A_0}$$

olur.

3) $x_{-1} < A_0x_0$, $x_{-1}x_0 < A_0A_1$ ve $A_1x_{-1} \le x_0$ verilsin. Bu durumda,

$$x_1 = \frac{A_0}{x_{-1}}$$
$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{A_1}{x_0}\right\} = \max\left\{\frac{x_{-1}}{A_0}, \frac{A_1}{x_0}\right\} = \frac{A_1}{x_0}$$
$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \frac{A_0}{x_1}\right\} = \max\left\{\frac{x_0}{A_1}, x_{-1}\right\} = \frac{x_0}{A_1}$$

olur.

4) $x_{-1} < A_0 x_0$, $x_{-1}x_0 < A_0 A_1$, $x_0 < A_1 x_{-1}$ ve $x_{-1}x_0 \le 1$ verilsin. Bu durumda,

$$x_1 = \frac{A_0}{x_{-1}}$$
$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{A_1}{x_0}\right\} = \max\left\{\frac{x_{-1}}{A_0}, \frac{A_1}{x_0}\right\} = \frac{A_1}{x_0}$$
$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \frac{A_0}{x_1}\right\} = \max\left\{\frac{x_0}{A_1}, x_{-1}\right\} = x_{-1}$$
$$x_4 = \max\left\{\frac{1}{x_3}, \frac{A_1}{x_2}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_0\right\} = \frac{1}{x_{-1}}$$

olur.

5) $x_{-1} < A_0 x_0$, $x_{-1}x_0 < A_0 A_1$, $x_0 < A_1 x_{-1}$ ve $1 < x_{-1}x_0$ verilsin. Bu durumda $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümleri 4 periyotludur.

$$x_1 = \frac{A_0}{x_{-1}}$$
$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{A_1}{x_0}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, A_1 x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}}$$
$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \frac{A_0}{x_1}\right\} = \max\left\{\frac{x_0}{A_1}, x_{-1}\right\} = x_{-1}$$
$$x_4 = \max\left\{\frac{1}{x_3}, \frac{A_1}{x_2}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, x_0\right\} = x_0$$

olur.

Teorem 3.3. $x_{-1} \in \left[\sqrt{A_0}, \frac{1}{\sqrt{A_1}}\right]$ ve $x_0 = \frac{1}{x_{-1}}$ olsun. Bu durumda $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümleri 2 periyotludur.[9]

İspat. $x_0 = \dfrac{1}{x_{-1}}$ olduğundan görülebilir ki

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{A_0}{x_{-1}}\right\} = \max\left\{x_{-1}, \frac{A_0}{x_{-1}}\right\} = x_{-1}$$

ve

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{A_1}{x_0}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, A_1 x_{-1}\right\} = \frac{1}{x_{-1}} = x_0$$

olarak bulunur. Bu ise istenendir.

Teorem 3.3. $x_{n+1} = \dfrac{\max\{x_n, 1\}}{x_n x_{n-1}}, \qquad n = 0,1,...$

denkleminin her çözümü periyodiktir ve periyodu 7'dir.[9]

İspat.

1.durum: $x_{-1} = \alpha \le 1,\ x_0 = \beta \le 1$ olsun.

$$x_1 = \frac{\max\{x_0, 1\}}{x_0 x_{-1}} = \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$x_2 = \frac{\max\{x_1, 1\}}{x_1 x_0} = \frac{\max\left\{\dfrac{1}{\alpha\beta}, 1\right\}}{\dfrac{1}{\alpha\beta}\beta} = \frac{1}{\beta}$$

$$x_3 = \frac{\max\{x_2, 1\}}{x_2 x_1} = \frac{\max\left\{\dfrac{1}{\beta}, 1\right\}}{\dfrac{1}{\beta}\dfrac{1}{\alpha\beta}} = \frac{1}{\beta}$$

$$x_4 = \frac{\max\{x_3, 1\}}{x_3 x_2} = \frac{\max\{\alpha\beta, 1\}}{\alpha\beta\dfrac{1}{\beta}} = \frac{1}{\alpha}$$

$$x_5 = \frac{\max\{x_4,1\}}{x_4 x_3} = \frac{\max\left\{\frac{1}{\alpha},1\right\}}{\frac{1}{\alpha}\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$x_6 = \frac{\max\{x_5,1\}}{x_5 x_4} = \frac{\max\left\{\frac{1}{\alpha\beta},1\right\}}{\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1}{\alpha}} = \alpha$$

$$x_7 = \frac{\max\{x_6,1\}}{x_6 x_5} = \frac{\max\{\alpha,1\}}{\alpha\frac{1}{\alpha\beta}} = \beta = x_0$$

2. durum: $x_{-1} = \alpha \geq 1,\ x_0 = \beta \leq 1$

$$x_1 = \frac{\max\{x_0,1\}}{x_0 x_{-1}} = \frac{1}{\alpha\beta}$$

$$x_2 = \frac{\max\{x_1,1\}}{x_1 x_0} = \frac{\max\left\{\frac{1}{\alpha\beta},1\right\}}{\frac{1}{\alpha\beta}\beta} = \alpha$$

$$x_3 = \frac{\max\{x_2,1\}}{x_2 x_1} = \frac{\max\{\alpha,1\}}{\alpha\frac{1}{\alpha\beta}} = \alpha\beta$$

$$x_4 = \frac{\max\{x_3,1\}}{x_3 x_2} = \frac{\max\{\alpha\beta,1\}}{\alpha\beta\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

$$x_5 = \frac{\max\{x_4,1\}}{x_4 x_3} = \frac{\max\left\{\frac{1}{\alpha},1\right\}}{\frac{1}{\alpha}\alpha\beta} = \frac{1}{\beta}$$

$$x_6 = \frac{\max\{x_5,1\}}{x_5 x_4} = \frac{\max\left\{\frac{1}{\beta},1\right\}}{\frac{1}{\beta}\frac{1}{\alpha}} = \alpha$$

$$x_7 = \frac{\max\{x_6,1\}}{x_6 x_5} = \frac{\max\{\alpha,1\}}{\alpha\frac{1}{\beta}} = \beta = x_0$$

3.durum: $x_{-1}=\alpha\le 1,\ x_0=\beta\ge 1$

$$x_1=\frac{\max\{x_0,1\}}{x_0x_{-1}}=\frac{\max\{\beta,1\}}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha}$$

$$x_2=\frac{\max\{x_1,1\}}{x_1x_0}=\frac{\max\left\{\frac{1}{\alpha},1\right\}}{\frac{1}{\alpha}\beta}=\frac{1}{\beta}$$

$$x_3=\frac{\max\{x_2,1\}}{x_2x_1}=\frac{\max\left\{\frac{1}{\beta},1\right\}}{\frac{1}{\beta}\frac{1}{\alpha}}=\alpha\beta$$

$$x_4=\frac{\max\{x_3,1\}}{x_3x_2}=\frac{\max\{\alpha\beta,1\}}{\alpha\beta\frac{1}{\beta}}=\beta$$

$$x_5=\frac{\max\{x_4,1\}}{x_4x_3}=\frac{\max\{\beta,1\}}{\beta\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}$$

$$x_6=\frac{\max\{x_5,1\}}{x_5x_4}=\frac{\max\left\{\frac{1}{\alpha\beta},1\right\}}{\frac{1}{\alpha\beta}\beta}=\alpha$$

$$x_7=\frac{\max\{x_6,1\}}{x_6x_5}=\frac{\max\{\alpha,1\}}{\alpha\frac{1}{\alpha\beta}}=\beta=x_0$$

4.durum: $x_{-1}=\alpha\ge 1,\ x_0=\beta\ge 1$

$$x_1=\frac{\max\{x_0,1\}}{x_0x_{-1}}=\frac{\max\{\beta,1\}}{\alpha\beta}=\frac{1}{\alpha}$$

$$x_2=\frac{\max\{x_1,1\}}{x_1x_0}=\frac{\max\left\{\frac{1}{\alpha},1\right\}}{\frac{1}{\alpha}\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$$

$$x_3=\frac{\max\{x_2,1\}}{x_2x_1}=\frac{\max\left\{\frac{\alpha}{\beta},1\right\}}{\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\alpha}}=\alpha$$

$$x_4 = \frac{\max\{x_3,1\}}{x_3 x_2} = \frac{\max\{\alpha,1\}}{\alpha\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$x_5 = \frac{\max\{x_4,1\}}{x_4 x_3} = \frac{\max\left\{\frac{\beta}{\alpha},1\right\}}{\frac{\beta}{\alpha}\alpha} = \frac{1}{\beta}$$

$$x_6 = \frac{\max\{x_5,1\}}{x_5 x_4} = \frac{\max\left\{\frac{1}{\beta},1\right\}}{\frac{1}{\beta}\frac{\beta}{\alpha}} = \alpha$$

$$x_7 = \frac{\max\{x_6,1\}}{x_6 x_5} = \frac{\max\{\alpha,1\}}{\alpha\frac{1}{\beta}} = \beta = x_0$$

Bu şekilde devam edildiğinde çözümlerin 7 periyotlu olduğu görülür

4. $x_{n+1}=\max\left\{\frac{1}{x_n},\min\left\{1,\frac{A}{x_n}\right\}\right\}$ FARK DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde A parametresi herhangi bir reel sayı ve x_0 başlangıç şartı sıfırdan farklı reel sayı olmak üzere,

$$x_{n+1}=\max\left\{\frac{1}{x_n},\min\left\{1,\frac{A}{x_n}\right\}\right\}\ ,\ n\in N_0 \tag{4.1}$$

maksimumlu fark denklemi tanımlanmış ve $A\in R$, ve x_0 başlangıç koşulunun durumlarına göre çözümleri incelenmiştir. Eğer $A=0$ ise (4.1) denklemi $x_{n+1}=\max\left\{\frac{1}{x_n},0\right\}=\frac{1}{x_n}$ olur. Bu durumda ise denklemin çözümleri

$$x_n=\left\{x_0,\frac{1}{x_0},x_0,\frac{1}{x_0},....\right\}$$

olur. Görüldüğü gibi bu çözümler 2 periyotludur ve $x_0>0$ için pozitif, $x_0<0$ için negatif çözümler mevcuttur. Şimdi (4.1) denkleminin çözümlerini A, x_0'ın durumlarına göre inceleyelim.

4.1. $A>0$ durumu

Bu bölümde (4.1) denkleminin $A>0$ durumunda çözümleri incelenmiştir.

Lemma 4.1.1. Eğer $A\in[1,\infty)$, $x_0\in(0,1)$, $\forall n\in N_0$ ise

$A^{n-1}x_0<1$, $A^n x_0\geq 1$ için,

$$x_n=\left\{x_0,\frac{1}{x_0},Ax_0,\frac{1}{Ax_0},....,A^{n-1}x_0,\frac{1}{A^{n-1}x_0},1,1,1,....\right\}$$

olur. Bu durumda er geç sabit çözüm elde edilir.Ayrıca $A^{n-1}x_0<1$, $A^n x_0<1$ için,

$$x_n=\left\{x_0,\frac{1}{x_0},Ax_0,\frac{1}{Ax_0},....,A^n x_0,\frac{1}{A^n x_0},....\right\}$$

olur.

İspat. Eğer $A \in (1,\infty)$, $x_0 \in (0,1)$ ise,

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \min\left\{1, \frac{A}{x_0}\right\}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_0}, 1\right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max\{x_0, \min\{1, Ax_0\}\}$$

olur. Bu durumda ise iki durum söz konusudur,

1) Eğer $A \in (1,\infty)$, $x_0 \in (0,1)$, $Ax_0 \geq 1$ ise

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \min\left\{1, \frac{A}{x_0}\right\}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_0}, 1\right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \min\left\{1, \frac{A}{x_1}\right\}\right\} = \max\{x_0, 1\} = 1$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \min\left\{1, \frac{A}{x_2}\right\}\right\} = \max\{1, \min\{1, A\}\} = 1$$

olur. $n > 3$ için iterasyona devam edilirse denklemin çözümleri,

$$x_n = \left\{x_0, \frac{1}{x_0}, 1, 1, \ldots\right\}$$

olarak elde edilir.

2) Eğer $A \in (1,\infty)$, $x_0 \in (0,1)$, $Ax_0 < 1$ ise,

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \min\left\{1, \frac{A}{x_0}\right\}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_0}, 1\right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \min\left\{1, \frac{A}{x_1}\right\}\right\} = \max\{x_0, Ax_0\} = Ax_0$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \min\left\{1, \frac{A}{x_2}\right\}\right\} = \max\left\{\frac{1}{Ax_0}, \min\left\{1, \frac{A}{Ax_0}\right\}\right\} = \frac{1}{Ax_0}$$

$$x_4 = \max\left\{\frac{1}{x_3}, \min\left\{1, \frac{A}{x_3}\right\}\right\} = \max\{Ax_0, \min\{1, A^2x_0\}\}$$

bulunur. Bu durumda ise iki farklı durum ortaya çıkar.

(i) Eğer $A \in (1,\infty)$, $x_0 \in (0,1)$, $Ax_0 < 1$, $A^2 x_0 \geq 1$ ise $x_1 = \frac{1}{x_0}$, $x_2 = Ax_0$,

$x_3 = \frac{1}{Ax_0}$, $x_4 = Ax_0$, $x_5 = 1$ olur. $n > 6$ için iterasyonla devam edilirse denklemin çözümleri,

$$x_n = \left\{ x_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{1}{Ax_0}, Ax_0, 1,1,1,.... \right\}$$

olarak elde edilir.

(ii) Eğer $A \in (1,\infty)$, $x_0 \in (0,1)$, $Ax_0 < 1$, $A^2 x_0 < 1$ ise $x_1 = \frac{1}{x_0}$, $x_2 = Ax_0$,

$x_3 = \frac{1}{Ax_0}$, $x_4 = A^2 x_0$, $x_5 = \frac{1}{A^2 x_0}$ olur. Buradan $x_6 = \max\left\{ A^2 x_0, \min\left\{ 1, A^3 x_0 \right\} \right\}$ olur.

Bu durumda ise çözümler; Eğer $Ax_0 \geq 1$ ise,

$$x_n = \left\{ x_0, \frac{1}{x_0}, 1,1,.... \right\}$$

Eğer $Ax_0 \leq 1$, $A^2 x_0 \geq 1$ ise,

$$x_n = \left\{ x_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{1}{Ax_0}, Ax_0, 1,1,1,.... \right\}$$

Eğer $Ax_0 \leq 1$, $A^2 x_0 \leq 1$, $A^3 x_0 \geq 1$ ise,

$$x_n = \left\{ x_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{1}{Ax_0}, Ax_0, A^2 x_0, \frac{1}{A^2 x_0}, 1,1,... \right\}$$

Eğer $Ax_0 \leq 1$, $A^2 x_0 \leq 1$, $A^3 x_0 \leq 1$, $A^4 x_0 \geq 1$ ise

$$x_n = \left\{ x_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{1}{Ax_0}, Ax_0, A^2 x_0, \frac{1}{A^2 x_0}, , A^3 x_0, \frac{1}{A^3 x_0}, 1,1,1... \right\}$$

Eğer, $Ax_0 \leq 1$, $A^2 x_0 \leq 1$, $A^3 x_0 \leq 1$, $A^4 x_0 \leq 1$, $A^5 x_0 \geq 1$ ise,

$$x_n = \left\{ x_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{1}{Ax_0}, Ax_0, A^2 x_0, \frac{1}{A^2 x_0}, , A^3 x_0, \frac{1}{A^3 x_0}, A^4 x_0, \frac{1}{A^4 x_0}, 1,1... \right\}$$

olarak elde edilir. Yukarıdaki işlemlerden de görüldüğü gibi çözümleri en genel formda yazacak olursak $\forall n \in N_0$ için,

Eğer $A^{n-1}x_0 < 1,\ A^n x_0 \geq 1$ ise,

$$x_n = \left\{ x_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{1}{Ax_0}, A^2x_0, \frac{1}{A^2x_0}, ..., A^{n-1}x_0, \frac{1}{A^{n-1}x_0}, 1,1,1,.... \right\}$$

Eğer $A^{n-1}x_0 < 1,\ A^n x_0 < 1$ ise,

$$x_n = \left\{ x_0, \frac{1}{x_0}, Ax_0, \frac{1}{Ax_0}, A^2x_0, \frac{1}{A^2x_0}, ..., A^{n-1}x_0, \frac{1}{A^{n-1}x_0}, 1,1,1,.... \right\}$$

elde edilir.

Lemma 4.1.2. Eğer $A \in [1,\infty),\ x_0 \in (1,\infty),\ A^k < x_0, k \in N_0$ ise

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{x_0}{A^k}, & n = 2k \\ \dfrac{A^k}{x_0}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

dır.

İspat. Eğer $A \in [1,\infty),\ x_0 \in [1,\infty),\ A^k < x_0, k \in N_0$ ise

$$x_1 = \max\left\{ \frac{1}{x_0}, \min\left\{ 1, \frac{A}{x_0} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{1}{x_0}, \frac{A}{x_0} \right\} = \frac{A}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{ \frac{1}{x_1}, \min\left\{ 1, \frac{A}{x_1} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{x_0}{A}, \min\{1, x_0\} \right\} = \frac{x_0}{A}$$

$$x_3 = \max\left\{ \frac{1}{x_2}, \min\left\{ 1, \frac{A}{x_2} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{A}{x_0}, \min\left\{ 1, \frac{A^2}{x_0} \right\} \right\} = \frac{A^2}{x_0}$$

olur. $n > 3$ için iterasyona devam edilirse,

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{x_0}{A^k}, & n = 2k \\ \dfrac{A^k}{x_0}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

elde edilir. Eğer aynı zamanda $A^{k+1} \geq x_0$ ise çözümler sabit olup $x_n = 1$.

Teorem 4.1.1. (4.1) denklemi verilsin. Bu durumda

a) Eğer $A \in (0,1), x_0 \in (0,1]$ ise

$$x_n = \left\{ x_0, \frac{1}{x_0}, x_0, \frac{1}{x_0}, ... \right\}$$

dır.

b) Eğer $A \in [1,\infty), x_0 < 0$ ise,

$$x_n = \left\{ x_0, \frac{1}{x_0}, x_0, \frac{1}{x_0}, ... \right\}$$

dır.

c) Eğer $A = 1, x_0 \in (0,1)$ ise,

$$x_n = \left\{ x_0, \frac{1}{x_0}, x_0, \frac{1}{x_0}, ... \right\}$$

dır.

d) Eğer $A \in (0,1), x_0 < 0$ ise,

$$x_n = \left\{ x_0, \frac{A}{x_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, ... \right\}$$

dır.

e) Eğer $A \in [1,\infty), x_0 \in [1,\infty),\ A \geq x_0$, ise $x_n = 1,\ n = 1,2,...$ dir.

İspat.

a) Eğer $A \in (0,1), x_0 \in (0,1]$ ise

$$x_1 = \max\left\{ \frac{1}{x_0}, \min\left\{ 1, \frac{A}{x_0} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{1}{x_0}, 1 \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{ \frac{1}{x_1}, \min\left\{ 1, \frac{A}{x_1} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{x_0}{A}, \min\{1, x_0\} \right\} = x_0 \quad ,$$

$$x_3 = \max\left\{ \frac{1}{x_2} \min\left\{ 1, \frac{A}{x_2} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{1}{x_0} \min\left\{ 1, \frac{A}{x_0} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{1}{x_0}, \frac{A}{x_0} \right\} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. $n > 3$ için iterasyona devam edilirse denklemin bütün çözümleri,

$$x_n = \left\{ x_0, \frac{1}{x_0}, x_0, \frac{1}{x_0}, ... \right\}$$

şeklindedir. Bu çözümler ise pozitif olup, 2 periyotludur.

b) Eğer $A \in [1, \infty), x_0 < 0$ ise,

$$x_1 = \max\left\{ \frac{1}{x_0}, \min\left\{ 1, \frac{A}{x_0} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{1}{x_0}, 1 \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{ \frac{1}{x_1}, \min\left\{ 1, \frac{A}{x_1} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{x_0}{A}, \min\{1, x_0\} \right\} = x_0$$

$$x_3 = \max\left\{ \frac{1}{x_2} \min\left\{ 1, \frac{A}{x_2} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{1}{x_0} \min\left\{ 1, \frac{A}{x_0} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{1}{x_0}, \frac{A}{x_0} \right\} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. $n > 3$ için iterasyona devam edilirse denklemin bütün çözümleri,

$$x_n = \left\{ x_0, \frac{1}{x_0}, x_0, \frac{1}{x_0}, ... \right\}$$

olur. Bu çözümler 2 periyotludur.

c) Eğer $A = 1, x_0 \in (0,1)$ ise,

$$x_1 = \max\left\{ \frac{1}{x_0}, \min\left\{ 1, \frac{A}{x_0} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{1}{x_0}, 1 \right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{ \frac{1}{x_1}, \min\left\{ 1, \frac{A}{x_1} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{x_0}{A}, \min\{1, x_0\} \right\} = x_0$$

$$x_3 = \max\left\{ \frac{1}{x_2} \min\left\{ 1, \frac{A}{x_2} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{1}{x_0} \min\left\{ 1, \frac{A}{x_0} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{1}{x_0}, \frac{A}{x_0} \right\} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. İterasyona devam edilirse,

$$x_n = \left\{ x_0, \frac{1}{x_0}, x_0, \frac{1}{x_0}, ... \right\}$$

olarak denklemin 2 periyotlu çözümleri elde edilir.

d) Eğer $A \in (0,1)$, $x_0 < 0$ ise,

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \min\left\{1, \frac{A}{x_0}\right\}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{A}{x_0}\right\} = \frac{A}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \min\left\{1, \frac{A}{x_1}\right\}\right\} = \max\left\{\frac{x_0}{A}, \min\{1, x_0\}\right\} = x_0$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \min\left\{1, \frac{A}{x_2}\right\}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \min\left\{1, \frac{A}{x_0}\right\}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{A}{x_0}\right\} = \frac{A}{x_0}$$

elde edilir. $n > 3$ için iterasyona devam edilirse deklemin bütün çözümleri,

$$x_n = \left\{x_0, \frac{A}{x_0}, x_0, \frac{A}{x_0}, ...\right\}$$

şeklinde olup bu çözümler 2 periyotludur.

e) Eğer $A \in [1,\infty)$, $x_0 \in [1,\infty)$, $A \geq x_0$, ise

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \min\left\{1, \frac{A}{x_0}\right\}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_0}, 1\right\} = 1$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \min\left\{1, \frac{A}{x_1}\right\}\right\} = \max\left\{\frac{1}{1}, \min\left\{1, \frac{A}{1}\right\}\right\} = 1$$

olur. İterasyona devam edilirse çözümler,

$$x_n = \{x_0, 1, 1, 1.....\}$$

elde edilir. Böylece $x_n = 1$ olduğu görülür.

4.2. $A < 0$ durumu

Teorem 4.2.1. (4.1) denklemi verilsin. Bu durumda

a) Eğer $x_0 < 0$, $A \leq x_0$ ise $x_n = 1$, $n = 1, 2, ...$ dir.

b) Eğer $x_0 < 0$, $A > x_0$ ise $x_n = \left\{ x_0, \frac{A}{x_0}, \frac{x_0}{A}, \frac{A}{x_0}, \frac{x_0}{A}, ... \right\}$ dir.

c) Eğer $x_0 \in (0, \infty)$ ise $x_n = \left\{ x_0, \frac{1}{x_0}, x_0, \frac{1}{x_0}, ... \right\}$ dir.

İspat.

a) Eğer $x_0 < 0$, $A \leq x_0$ ise

$$x_1 = \max\left\{ \frac{1}{x_0}, \min\left\{ 1, \frac{A}{x_0} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{1}{x_0}, 1 \right\} = 1$$

$$x_2 = \max\left\{ \frac{1}{x_1}, \min\left\{ 1, \frac{A}{x_1} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{1}{1}, \min\left\{ 1, \frac{A}{1} \right\} \right\} = \max\left\{ 1, \min\left\{ 1, A \right\} \right\} = 1$$

$$x_3 = \max\left\{ \frac{1}{x_2}, \min\left\{ 1, \frac{A}{x_2} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{1}{1}, \min\left\{ 1, \frac{A}{1} \right\} \right\} = \max\left\{ 1, A \right\} = 1$$

elde edilir. $n > 3$ için iterasyona devam edilirse denklemin çözümleri,

$$x_n = \left\{ x_0, 1, 1, 1 ..... \right\}$$

şeklindedir.

b) Eğer $x_0 < 0$, $A > x_0$ ise

$$x_1 = \max\left\{ \frac{1}{x_0}, \min\left\{ 1, \frac{A}{x_0} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{1}{x_0}, \frac{A}{x_0} \right\} = \frac{A}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{ \frac{1}{x_1}, \min\left\{ 1, \frac{A}{x_1} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{x_0}{A}, \min\left\{ 1, x_0 \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{x_0}{A}, x_0 \right\} = \frac{x_0}{A}$$

$$x_3 = \max\left\{ \frac{1}{x_2}, \min\left\{ 1, \frac{A}{x_2} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{A}{x_0}, \min\left\{ 1, \frac{A^2}{x_0} \right\} \right\} = \max\left\{ \frac{A}{x_0}, \frac{A^2}{x_0} \right\} = \frac{A}{x_0}$$

elde edilir. $n > 3$ için iterasyona devam edilirse denklemin çözümleri,

$$x_n = \left\{ x_0, \frac{A}{x_0}, \frac{x_0}{A}, \frac{A}{x_0}, \frac{x_0}{A}, ... \right\}$$

şeklindedir. Bu çözümlerinde 2 periyotlu olduğu görülür.

c) Eğer $x_0 \in (0,\infty)$ ise

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \min\left\{1, \frac{A}{x_0}\right\}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{A}{x_0}\right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \min\left\{1, \frac{A}{x_1}\right\}\right\} = \max\left\{x_0, \min\left\{1, Ax_0\right\}\right\} = \max\left\{x_0, Ax_0\right\} = x_0$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \min\left\{1, \frac{A}{x_2}\right\}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \min\left\{1, \frac{A}{x_0}\right\}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{A}{x_0}\right\} = \frac{1}{x_0}$$

elde edilir. $n > 3$ için iterasyona devam edilirse denklemin çözümleri,

$$x_n = \left\{x_0, \frac{1}{x_0}, x_0, \frac{1}{x_0}, \ldots.\right\}$$

şeklindedir ve çözümler 2 periyotludur.

Lemma 4.1.3. (4.1) denkleminin denge noktası $\overline{x} = 1$ 'dir.

İspat. Denge noktası tanımından,

$$\overline{x} = \max\left\{\frac{1}{\overline{x}}, \min\left\{1, \frac{A}{\overline{x}}\right\}\right\}$$

dır. Burada,

1) $\frac{A}{\overline{x}} < 1$ için

$$\overline{x} = \max\left\{\frac{1}{\overline{x}}, \min\left\{1, \frac{A}{\overline{x}}\right\}\right\}$$

$$\overline{x} = \max\left\{\frac{1}{\overline{x}}, \frac{A}{\overline{x}}\right\}$$

i) $\frac{1}{\overline{x}} > \frac{A}{\overline{x}}$ olarak düşünüldüğünde,

$$\overline{x} = 1$$

olur.

ii) $\frac{1}{\overline{x}} < \frac{A}{\overline{x}}$ durumunda ise,

$\overline{x} = \sqrt{A}$ olur. Fakat bu durumda $A > 1$ dir. Ayrıca $\sqrt{A} > 1$ ve $\frac{1}{\sqrt{A}} < 1$ olur.

Gerçekten;

$$\overline{x} = \max\left\{\frac{1}{\overline{x}}, \min\left\{1, \frac{A}{\overline{x}}\right\}\right\}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{A} &= \max\left\{\frac{1}{\sqrt{A}}, \min\left\{1, \frac{A}{\sqrt{A}}\right\}\right\} \\ &= \max\left\{\frac{1}{\sqrt{A}}, \min\left\{1, \sqrt{A}\right\}\right\} \\ &= \max\left\{\frac{1}{\sqrt{A}}, 1\right\} \\ &= 1\end{aligned}$$

olduğu görülür. Görüldüğü gibi eğer denge noktası $\overline{x} = \sqrt{A}$ ise $\sqrt{A} = 1$ olur.

2) $\frac{A}{\overline{x}} > 1$ ise

$$\overline{x} = \max\left\{\frac{1}{\overline{x}}, 1\right\}$$

i) $\frac{1}{\overline{x}} > 1$ kabul edilirse;

$$\overline{x} = \frac{1}{\overline{x}}$$

$$\overline{x} = 1$$

olur.

ii) $\frac{1}{\overline{x}} \leq 1$ kabul edilirse;

$$\overline{x} = 1$$

olur. Buradan (4.1) denkleminin denge noktasının $\overline{x} = 1$ olduğu görülür.

Teorem.4.2.2. $A \in [1, \infty)$, $x_0 \in [1, \infty)$, $A^n < x_0$, $n = 0,1,2,...$ olduğunda (4.1) denkleminin çözümleri 1 uzunluklu yarı döngüye sahiptir.

İspat. $A, x_0 \in [1, \infty)$, $A^n < x_0$, $n = 0,1,2,...$ olsun. Şimdi, önce tek indisli

terimlerin $\overline{x}=1$ 'den küçük ve çift indisli terimlerin $\overline{x}=1$ 'den büyük olduğunu göstermeliyiz.

$$x_{2n+1}=\max\left\{\frac{1}{x_{2n}},\min\left\{1,\frac{A}{x_{2n}}\right\}\right\}$$

$$=\max\left\{\frac{1}{x_0/A^n},\min\left\{1,\frac{A}{x_0/A^n}\right\}\right\}$$

$$=\max\left\{\frac{A^n}{x_0},\min\left\{1,\frac{A^{n+1}}{x_0}\right\}\right\}$$

$$=\max\left\{\frac{A^n}{x_0},\frac{A^{n+1}}{x_0}\right\}$$

$$=\frac{A^{n+1}}{x_0}<1$$

olduğu görülür. Aynı şekilde,

$$x_{2n+2}=\max\left\{\frac{1}{x_{2n+1}},\min\left\{1,\frac{A}{x_{2n+1}}\right\}\right\}$$

$$=\max\left\{\frac{1}{A^{n+1}/x_0},\min\left\{1,\frac{A}{A^{n+1}/x_0}\right\}\right\}$$

$$=\max\left\{\frac{x_0}{A^{n+1}},\min\left\{1,\frac{x_0}{A^n}\right\}\right\}$$

$$=\max\left\{\frac{x_0}{A^{n+1}},1\right\}$$

$$=\frac{x_0}{A^{n+1}}>1$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.1 $A\in[1,\infty)$, $x_0\in[1,\infty)$, $A^n<x_0$, $n=0,1,2,...$ olduğunda (4.1) denkleminin çözümü $\overline{x}=1$ 'e yakınsar.

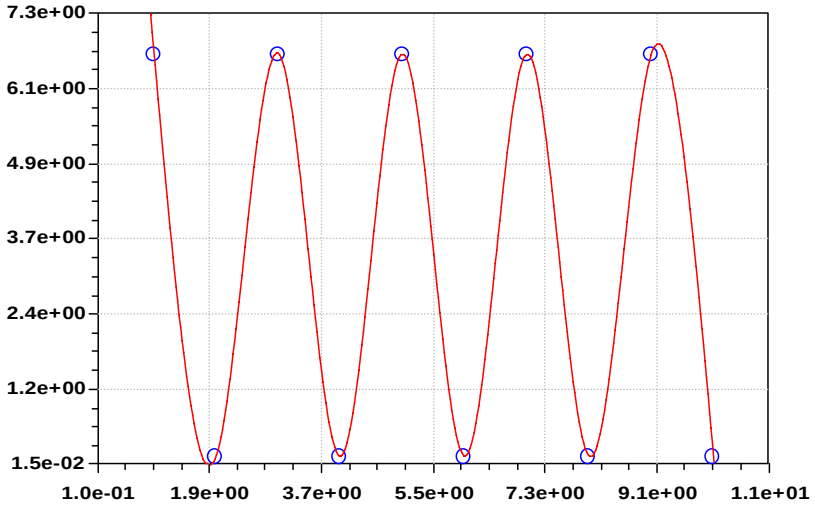
5. NÜMERİK SONUÇLAR VE GRAFİKLER

Bu kısımda, Lemma 4.1.1, Lemma 4.1.2, Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.2.1'in iddialarına dair nümerik örnekler verilmiştir. Ayrıca bu bölümde verilen tablolar C^{++} programında hesaplanarak elde edilmiş ve grafikler CurveExpert 1.1 programında yapılmıştır.

Örnek 5.1. $A > 0$ durumu

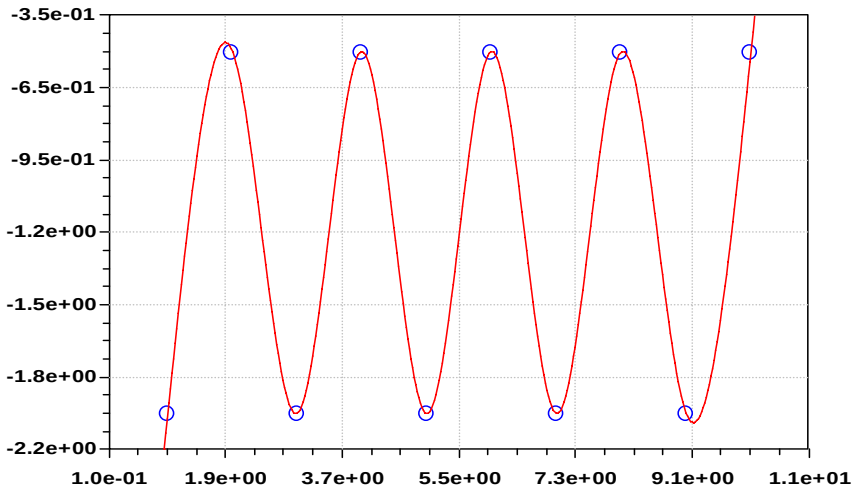
a) (4.1) denkleminde; $A = 0.7$ ve başlangıç şartı $x_0 = 0.15$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	6,666667	6	0,150000
2	0,150000	7	6,666667
3	6,666667	8	0,150000
4	0,150000	9	6,666667
5	6,666667	10	0,1500000



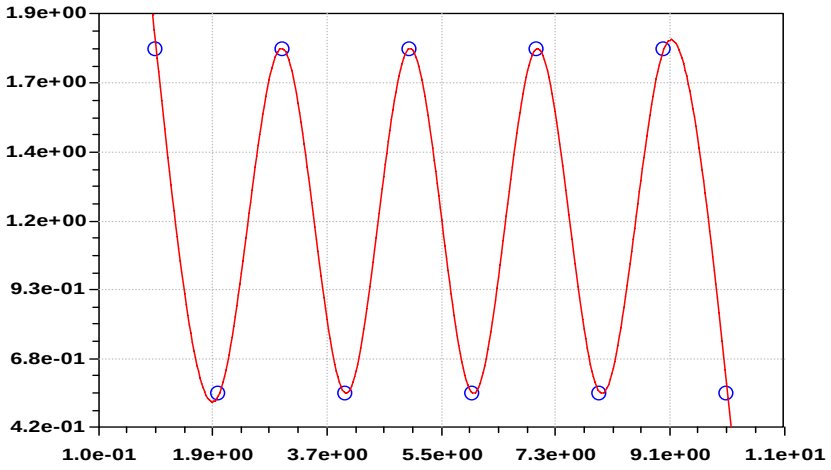
b) (4.1) denkleminde; $A = 5$ ve başlangıç şartı $x_0 = -0,5$ olmak üzere, denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	-2,0	6	-0,5
2	-0,5	7	-2,0
3	-2,0	8	-0,5
4	-0,5	9	-2,0
5	-2,0	10	-0,5



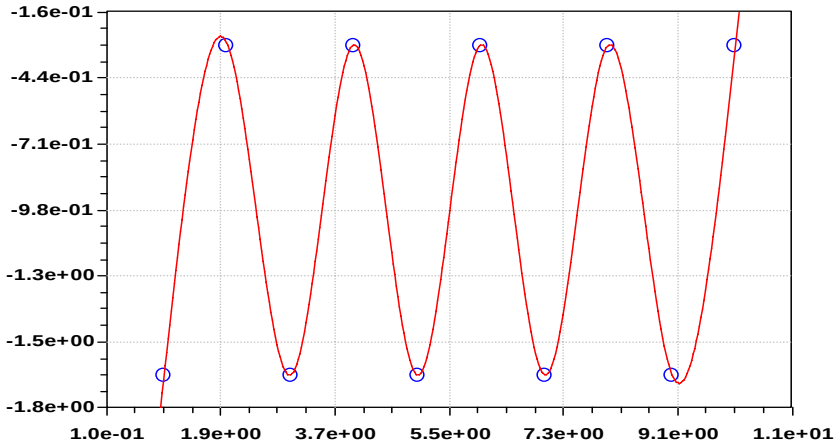
c) (4.1) denkleminde; $A=1$ ve başlangıç şartı $x_0=0,55$ olmak üzere denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir

n	x_n	n	x_n
1	1,818182	6	0,550000
2	0,550000	7	1,818182
3	1,818182	8	0,550000
4	0,550000	9	1,818182
5	1,818182	10	0,550000



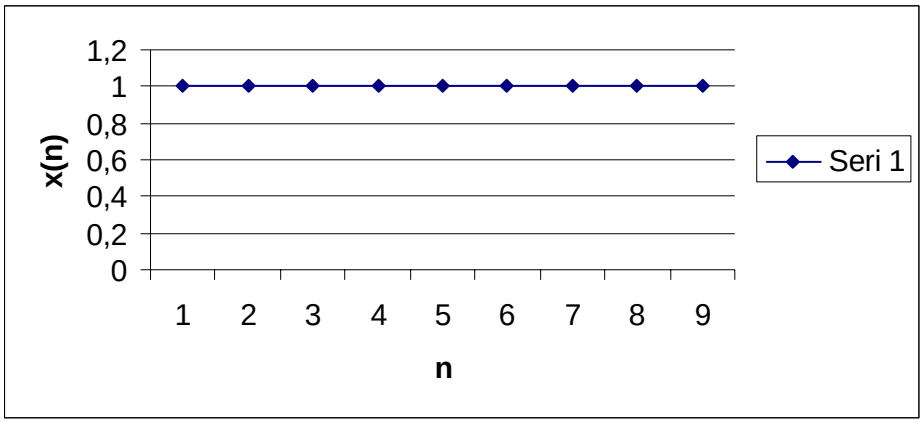
d) (4.1) denkleminde; $A = 0,5$ ve başlangıç şartı $x_0 = -0,3$ olmak üzere denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	-1,666667	6	-0,300000
2	-0,300000	7	-1,666667
3	-1,666667	8	-0,300000
4	-0,300000	9	-1,666667
5	-1,666667	10	-0,300000



e) (4.1) denkleminde; $A = 50$ ve başlangıç şartı $x_0 = 5$ olmak üzere denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir

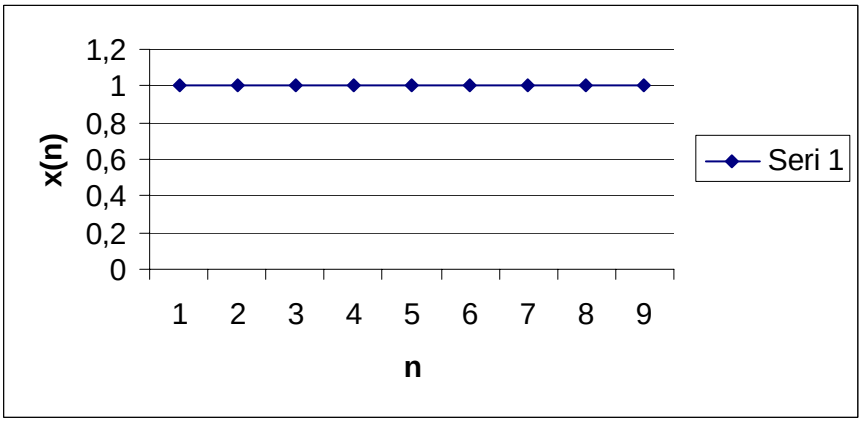
n	x_n	n	x_n
1	1	6	1
2	1	7	1
3	1	8	1
4	1	9	1
5	1	10	1



Örnek 5.2. $A < 0$ durumu

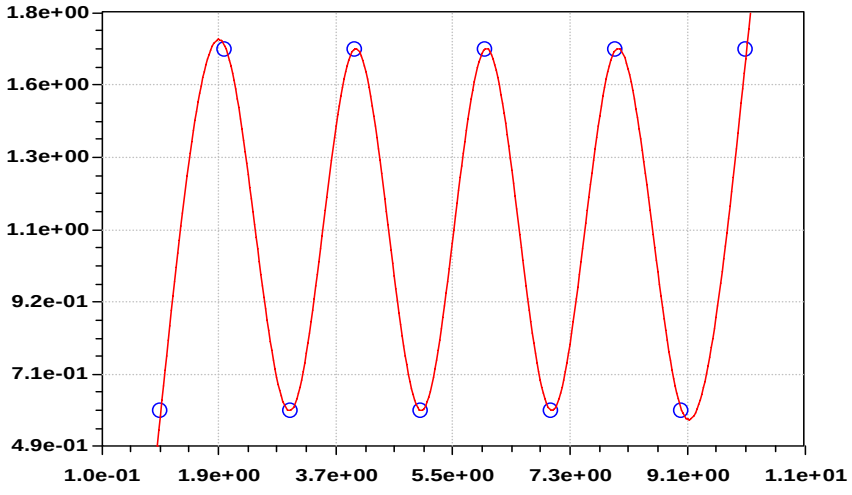
a) (4.1) denkleminde $A = -10,0$ ve başlangıç şartı $x_0 = -5,0$ olmak üzere denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	1	6	1
2	1	7	1
3	1	8	1
4	1	9	1
5	1	10	1



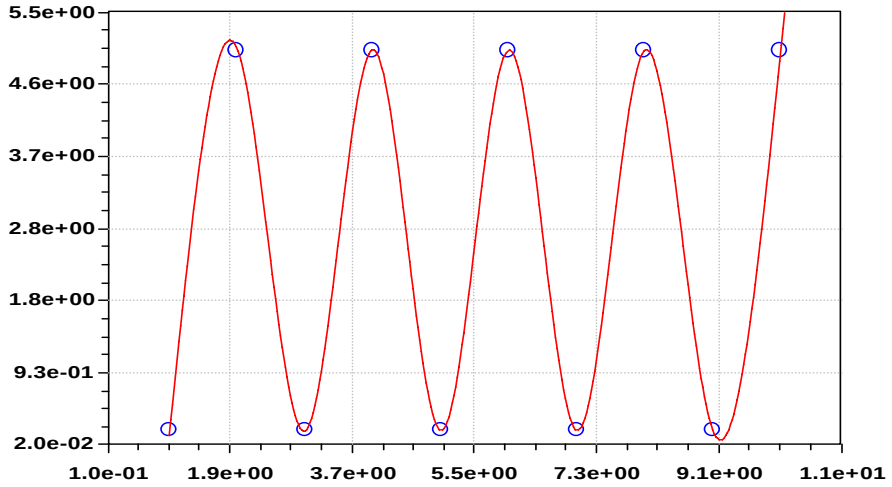
b) (4.1) denkleminde $A = -3,0$ ve başlangıç şartı $x_0 = -5,0$ olmak üzere denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	0,600000	6	1,666667
2	1,666667	7	0,600000
3	0,600000	8	1,666667
4	1,666667	9	0,600000
5	0,600000	10	1,666667



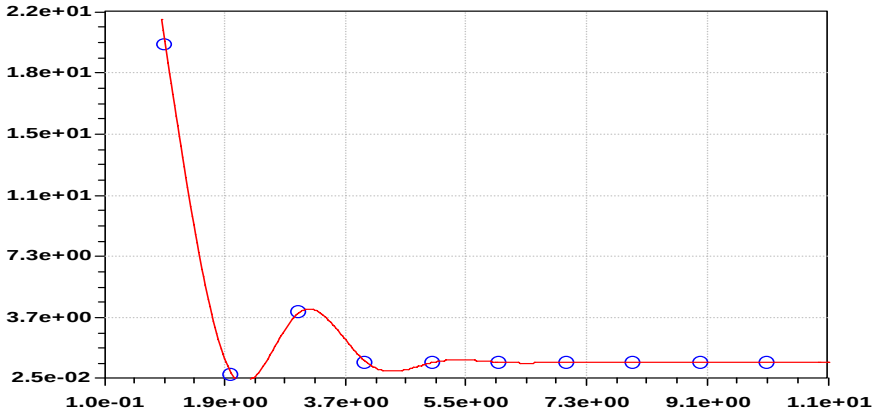
c) (4.1) denkleminde $A=-3,0$ ve başlangıç şartı $x_0=5,0$ olmak üzere denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	0,200000	6	5,000000
2	5,000000	7	0,200000
3	0,200000	8	5,000000
4	5,000000	9	0,200000
5	0,200000	10	5,000000



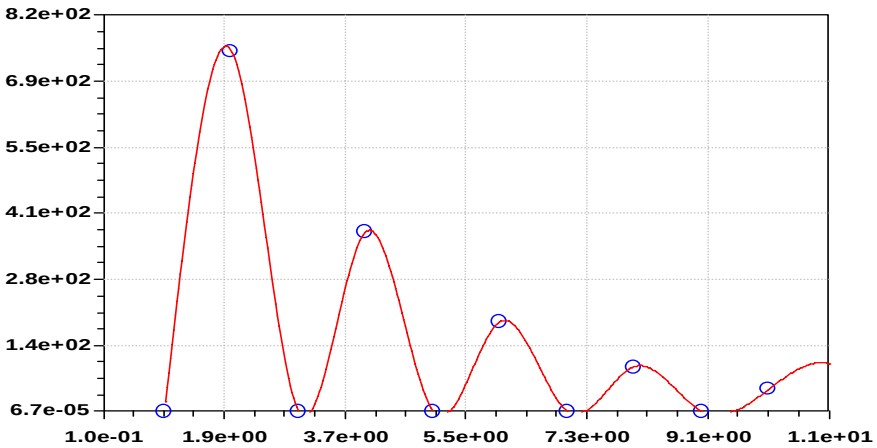
Örnek 5.3. Lemma 1 deki şartlar göz önüne alınarak $A=5$ ve başlangıç şartı $x_0=0,05$ olmak üzere denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	20	6	1
2	0,25	7	1
3	4	8	1
4	1	9	1
5	1	10	1



Örnek 5.4. Lemma 2 deki şartlar göz önüne alınarak $A = 2$ ve başlangıç şartı $x_0 = 1500$ olmak üzere denklemin çözümleri aşağıda verilmiştir.

n	x_n	n	x_n
1	0,000667	6	187,50000
2	750.000000	7	0,005333
3	0,001333	8	93,750000
4	375.000000	9	0,010667
5	0,002667	10	46,875



SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada (4.1) denkleminin çözümleri ve çözümlerin periyodikliği A parametresi ve x_0 başlangıç şartına göre incelenmiştir. Genel olarak (4.1) denkleminin çözümleri periyodiktir ve 2 periyotludur. Ancak $A \in [1,\infty)$, $x_0 \in (0,1)$ aralığında ve $A^{n-1}x_0 < 1$, $A^n x_0 \geq 1$ şarlarında, aynı şekilde $A \in [1,\infty)$, $x_0 \in [1,\infty)$ aralığında ve $A^k < x_0$ şartında çözümler genelleştirilmiştir ve $\overline{x} = 1$ denge noktasına yakınsadığı görülmektedir.

Bu çalışmada (4.1) denkleminin periyodikliği incelenmiş olup, bu tür denklemlerin kararlılığı incelenebilir.

KAYNAKLAR:

[1] Amleh, A. M., Hoag. J. and Ladas, G., 1998, A difference equation with eventually periodic solutions, Computers and Math. Applic., 36, 401-404.

[2] Amleh, A. M., 1998, Boundedness Periodicity and Stability of Some Difference Equations, University of Rhode Island, (Doktora Tezi)

[3] Çinar, C.,Stevic, S. And Yalçınkaya, İ.,2005, On positive solution of reciprocal difference equation with minimum, J. Appl. Math & Computing, 17(1-2), 307-304.

[4] Elaydi, S., 1996, An Introduction to Difference Equations, Spinger-Verlag, New York.

[5] Feuer, J., 1998, Invariants and Invariant Regions of Lyness-Type Difference Equations, University of Rhode Island, (PhD Thesis)

[6] Feuer, J., Janowski, E. J., Ladas, G. And Teixeira, C., 2000, Global behaviour of solutions of $x_{n+1} = \frac{\max\{x_n, A\}}{x_n x_{n-1}}$ Journal of Computational Analysis and Applications, 2, 237-252.

[7] Feuer, J., 2003, Periodic solutions of the Lyness max equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 288, 147-160.

[8] Grove, E. A., Kent, C. M. and Ladas, G., 1998, Boundedness and persistence of the nonautonomous lyness and max equations, Journal of Difference Equations and Applications, 3, 241-258.

[9] Grove, E. A., and Ladas, G., Periodicities ın Nonlinear Difference Equations Chapman hall a crc pres company 2005 by crc pres.

[10] Gelişken, A., Çinar, C. and Karataş, R., 2008, A note on the periodicity of the Lyness max equation, Advances in Difference Equations, (in pres).

[11] Janowski, E. J., V. Kocic, V. L., Ladas, G. and Tzanetopoulos, G., 1998, Global behavior of solutions of $x_{n+1} = \frac{\max\left\{x_n^k, A\right\}}{x_{n-1}}$, Journal of Difference Equations and Applications, 3, 241-258.

[12] Kulenevic, M. R. S. And Ladas, G., 2002, Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjekture, Boca raton, London.

[13] Mishev, D. P., Patula, W. T. And Voulov, H. D., 2002, A reciprocal difference equation with maximum, Computers & Mathematicks with Applications, 43, 1021-1026.

[14] Moybe, L. A., 2000, Difference Equations with Public Health Applications, New York, USA.

[15] Papaschinopoulos, G. and Hatzifilippidis, V.,2001, On a max difference equation, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 258,258-268.

[16] Papaschinopoulos, G., Schinas, J. and Hatzifilippidis, V., 2003, Global behaviour of the solutions of a max-equation and of a system of two max-equation, Journal of Computational Analysis and Applications, 5, 2, 237-247.

[17] Patula, W. T. And Voulov, H. D., 2004, On a max type recursive relation with periodic coefficients, Journal of Difference Equations and Applications, 10, 3, 329-338

[18] Stefanidou, G. and Papaschinopoulos, G., 2006, The periodic nature of the positive solutions of a nonlinear fuzzy max-difference equation, Information Sciences, 176, 3694-3710.

[19] Stevic, S., 2007, On the recursive sequence $x_{n+1} = \max\left\{c, \frac{x_n^p}{x_{n-1}^p}\right\}$, Applied Mathematics Letters, (in pres).

[20] Şekerci, N., Taşkara, N. and Tollu D.T., 2008 14th International Conference On Difference Equations and Applications,İstanbul

[21] Şimsek, D., Çinar, C. and Yalçinkaya, İ., 2006, On the solutions of the difference equation $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_n}, Ax_{n-1}\right\}$, International Journal of Contemporary Math. Sciences, 1, 10, 481-487.

[22] Teixeria, C. T., 2000, Existence Stability Boundedness and Periodicity of Some Difference Equations, University of Rhode Island, (PhD).

[23] Valicenti, S., 1999, Periodicity and Global Attractivity of Difference Equations, University of Rhode Island, (PhD Thesis).

[24] Voulov, H. D., 2002, On the periodic character of some difference equations, Journal of Difference Equations and Applications, 8, 799-810.

[25] Voulov, H. D., 2002, Periodic solutions to a difference equation with maximum, Proceedings of the American Mathematical Society, 131, 2155-2160

[26] Yalçınkaya, İ., Iricanın, B. D. And Çinar, C., 2007, On a max-type difference equation, Discrete Dynamics in Nature and Society, (in pres).

[27] Yan, X., Liao, X. And Li, C., 2006, On a difference equation with maximum, Applied Mathematics and Computation, 181, 1-5.