T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR MATRİS POLİNOMUNUN DEĞERİNİN SAPTANMASI

Hazırlayan
Ayşe DURSUN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KONYA, 2008

T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR MATRİS POLİNOMUNUN DEĞERİNİN SAPTANMASI

AYŞE DURSUN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Konya, 2008

T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR MATRİS POLİNOMUNUN DEĞERİNİN SAPTANMASI

Ayşe DURSUN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Bu tez 17/10/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği/çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ali SİNAN
(Danışman)

Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
Üye

Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL
Üye

Yrd. Doç. Dr. Naim TUĞLU
Üye

Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN
Üye

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı'nda Prof. Dr. Ali SİNAN yönetiminde **Doktora Tezi** olarak hazırlanmıştır. Çalışmanın ortaya konulması ve her aşamasında desteğini esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Ali SİNAN'a, Sayın Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL'e ve Sayın Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL'a teşekkür ederim. Ayrıca çalışmada yardımını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Naim TUĞLU'ya teşekkür ederim.

Ayşe DURSUN

İÇİNDEKİLER

ÖZET ……. iii

ABSTRACT …… iv

TEŞEKKÜR …… v

1. GİRİŞ …… 1

1.1 Literatür Özeti ve Algoritmaların Tanıtımı ……..... 1

1.2 Yeni Algoritmalar …… 5

1.3 Yeni Algoritmaların Genelleştirilmesi ……..... 8

1.4 Tezin Yapısı ……..... 9

2. $\Psi(N, A)$ MATRİS POLİNOMUNUN ALGORİTMALAR YARDIMIYLA HESAPLANMASI İLE İLGİLİ ÖRNEKLER……. 10

3. $\Psi(N, A)$ MATRİS POLİNOMUNUN ALGORİTMALAR YARDIMIYLA HESAPLANMASI İLE İLGİLİ NÜMERİK ÖRNEKLER……... 40

4. $\Psi(N, A)$ MATRİS POLİNOMUNUN HESAPLANMASI İLE İLGİLİ ALGORİTMALARIN KARŞILAŞTIRILMASI……... 56

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME ……. 61

KAYNAKLAR …… 63

ÖZET

Doktora Tezi

BİR MATRİS POLİNOMUNUN DEĞERİNİN SAPTANMASI

Ayşe DURSUN

Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: **Prof. Dr. Ali SİNAN**

2008, 64 + vii Sayfa

Jüri: Prof. Dr. Ali SİNAN
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL
Yrd. Doç. Dr. Naim TUĞLU
Yrd. Doç. Dr. Yusuf BECEREN

Bu çalışmada, $\Psi(N,A)$ matris polinomunun hesaplanması ile ilgili algoritmalar incelenmiştir. $\Psi(N,A)$ matris polinomunun hesaplanması için bütün kare matrislere uygulanabilen iki yeni algoritma elde edilmiştir ve bu algoritmalar genelleştirilmiştir. Ayrıca elde edilen algoritmalar nümerik örneklerle çözülmüş ve bir kare matris üzerinde uygulanmıştır. Bulunan sonuçlar literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmışlardır.

Anahtar Kelimeler: Matris, Matris Polinomu, Matris Kuvvetleri.

.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON THE EVALUATİON OF A MATRIX POLYNOMİAL

Ayşe DURSUN

Selçuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ali SİNAN

2008, 64 + vii Pages

Jury : Prof. Dr. Ali SİNAN
Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL
Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL
Asist. Prof. Dr. Naim TUĞLU
Asist. Prof. Dr. Yusuf BECEREN

In this work, the algorithms about the evaluation of $\Psi(N,A)$ matrix polynomial have been investigated. Two new practical algorithms which can be applied to all the square matrix for the evaluating matrix polynomial $\Psi(N,A)$ have been found and universalised. Moreover, the algorithms found have been solved with numerical examples and applied to a square matrix. The results have been compared with the results in literature.

Key Words: Matrix, Matrix Polynomial, Powers of Matrix

1. GİRİŞ

N pozitif tamsayı, A, n boyutlu kare matris ve I, n boyutlu birim matris olmak üzere,

$$\Psi(N,A) = I+A+A^2+\cdots+A^{N-1}$$

matris polinomlarının hesaplanması matris teoride, mühendislik alanlarında, ekonomi, olasılık ve diferensiyel denklemler gibi konularda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Literatürde $\Psi(N,A)$ matris polinomunun hesaplanmasında kolaylıklar sağlayan, bütün kare matrislere uygulanabilen, matris çarpımlarını ve toplamlarını minimum sayıda kullanan algoritmalar incelenmiştir. Bu algoritmalar işlem kolaylığı sağlar ve zaman kaybını önler.

1. 1. Literatür Özeti ve Algoritmaların Tanıtımı

$\Psi(N,A)$ matris polinomunun hesaplanması, Johnson ve ark. (1971), integral hesaplamalarında, matris dönüşümleri gibi bir çok durumlarda karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca ayrık zaman sistem analizi ve çizge (graf) teorisinde de uygulamaları vardır. Matris hesaplamalarında Golub ve ark. (1983), uygulamalı nümerik metotlarda Carnahan ve ark. (1969), matris hesaplanmasında gerekli çarpımların sayısı skaler olmadığında Paterson ve ark. (1973), bilgisayar programlamada Knuth (1981), matris polinomlarına gerek duyulmaktadır.

$\Psi(N,A)$ matris polinomunun $(I-A^N)(I-A)^{-1}$ ile hesaplanabildiği bilinmektedir. Fakat $I-A$ singüler matris olduğunda ya da $(I-A)^{-1}$ matrisinin hesaplanması nümerik olarak zor olduğunda başka metotlara ihtiyaç duyulur. N sayısı tek basamaklı bir sayı ise bu polinomun değerini klasik yollardan hesaplayabiliriz. Fakat N sayısı tek basamaklı değilse, bu polinomun değerinin klasik yollardan bulunuşu imkansız olacaktır. Literatürde bu zorlukları ortadan kaldırmaya yönelik yeni algoritmalar karşımıza çıkmaktadır. Bu amaçla, bütün kare matrislere uygulanabilen matris çarpımlarının sayısını daha az gerektiren pratik ve kolay yeni algoritmalara da ihtiyaç duyulmuştur. $\Psi(N,A)$ matris polinomunun bulunabilmesini

kolaylaştıran bu yeni algoritmalarda dikkat edilmesi gereken durum, algoritmanın minimum sayıdaki matris çarpımları ve toplamları ile yapılabilmesidir.

$\Psi(N, A)$ matris polinomunun hesaplanmasında kullanılan metotlardan biri Carnahan ve ark. (1969), Horner'ın kuralıdır. Bu kural N-2 tane matris çarpımı gerektir. Bu çarpımlar fazla miktarda olduğundan hatalara neden olabilir. Gereken çarpımların sayısı Paterson ve ark. (1973), A'nın kuvvetleri için Horner'ın kuralı üzerine oturtulmuş uygulamasıyla indirgenebilir. $\Psi(N, A)$, bu uygulama ile $2\sqrt{N-1}$ matris çarpımlarıyla hesaplanabilir. Bu hesaplama çok büyük bir indirgemedir. Fakat onların kuralı genel polinom hesaplanması için oluşturulmuştur, bu nedenle $\Psi(N, A)$'nın matris çarpımlarını minimum sayı ile hesaplayamaz. $\Psi(N, A)$ nın karakteristik özelliklerinden faydalanarak Westreich (1989), N' nin asal çarpanlarından faydalanarak bir metot geliştirmiştir ve en az $3\log_2(N)$ matris çarpımını gerektirmektedir. Bu nedenle indirgenen matris çarpımlarının sayısı diğer metotlardan daha azdır. Lei ve ark. (1992), $\Psi(N, A)$ nın hesaplanması için $2\lceil \log_2(N) \rceil - 1$ matris çarpımını gerektiren bir metot geliştirmişlerdir. Dutta ve ark. (1992), $\Psi(N, A)$ nın hesaplanması için yeni bir algoritma oluşturmuştur. Dimitrov ve ark. (1994), Lei ve ark. (1992), metodundan faydalanarak yeni bir algoritma sunmuşlardır. Bu algoritma $N = (i_t i_{t-1} \ldots i_1 i_0)_2$ ise $2\lceil \log_2(N) \rceil - 2 + i_{t-1}$ matris çarpımını gerektirmektedir. Dimitrov ve ark. (1994) bu çalışmasında N üçlük sayma düzenine göre oturtulmuştur ve daha az matris çarpımı içermektedir.

Westreich (1989), $\Psi(N, A)$ matris polinomunun hesaplanması için bütün kare matrislere uygulanabilen ve $3\log_2(N)$ matris çarpımı gerektiren, pratik bir algoritma tanımlanmışlardır.

Eğer $N = J.K$ ise

$$\Psi(N, A) = \Psi(J, A).\Psi(K, A^J) = \sum_{i=0}^{K-1} (A^{iJ+0} + \cdots A^{iJ+J-1})$$

olur. p_1, p_2, …, p_k, N 'nin asal çarpanları olmak üzere,

$$N = p_1 . p_2 \dots p_k$$

şeklinde ise bu takdirde

$$\Psi(N,A) = \Psi(p_1,A).\Psi(p_2,A^{P_1})\dots\Psi(p_k,A^{p_1 x p_2 x \dots x p_{k-1}})$$

dır. Burada öncelikle $\Psi(p_1,A)$ bulunur. Daha sonra $X = A^{p_1}$ ve $P = \Psi(p_1,A)$ olmak üzere $\Psi(p_2,X)$, $P = P.\Psi(p_2,X)$ ve $X = X^{p_2}$ hesaplanır. Bu durum $\Psi(N,A)$ hesaplanana kadar devam eder.

Lei ve ark. (1992), $\Psi(N,A)$ matris polinomunun hesaplanması için bütün kare matrislere uygulanabilen ve $2[\log_2(N)]$-1 matris çarpımını gerektiren yeni bir algoritma geliştirmişlerdir.

Burada $\Psi(N,A) = G(N,A)$ ve K pozitif tamsayı olsun. Eğer. $N = J.K$ ise bu takdirde,

$$G(J.K,A) = G(J,A).G(K,A^J)$$

formülünü kullanarak,

$$G(N,A) = \begin{cases} (I+A).G(K,A^2), & N=2K \\ I + (A+A^2).G(K,A^2), & N = 2.K+1 \end{cases}$$

algoritması elde edilir. $G(N,A)$ matris polinomunun hesaplanmasında izlenilecek adımlar aşağıdaki şekildedir.

i. $t \leftarrow [\log_2(N)]$, $A(0) = A$

ii. N ikili sayma sisteminde hesaplanır. $N = (i_t i_{t-1} \dots i_1 i_0)_2$

iii. $t_0 \leftarrow t\text{-}2+ i_{t-1}$,

$p = 0,1,2, \dots, t_0$

$A(p+1) \leftarrow A(p).A(p)$

iv. $X \leftarrow I$

$p = t\text{-}1, t\text{-}2, \dots, 0$

$i_p = 0$ ise $X \leftarrow (I+A(p)).X$

$i_p = 1$ ise $X \leftarrow I+(A(p)+A(p+1)).X$

v. $G(N,A) = X$

olarak bulunur. Böylece $\Psi(N,A)$ matris polinomu hesaplanmış olur.

Westreich (1989)'ın algoritmasında**,** N doğal sayısı büyük alındığında, N 'nin asal çarpanlarına ayrılması ve buna göre işlem yapılması durumunda oldukça zorlanılacaktır. Dutta ve ark. (1992), çalışmalarında bu tür zorlukları ortadan kaldırmışlardır. $\Psi(N,A)$ matris polinomunun hesaplanmasında izlenilecek adımlar aşağıdaki şekildedir.

A. Eğer N sayısı çift ise N = M, N sayısı tek ise N–1= M olsun.

i. $\Gamma_1 = [\log_2 M]$' dir. Buradaki $[\log_2 M]$, $\log_2 M$'nin tamsayı kısmına eşittir.

ii. $M_1 = M - 2^{\Gamma_1}$ 'dir. $M_1 = 0$ ise, örneğin $M = 2^{\Gamma_1}$ ise,

$$\Psi (M,A) = (I + A).(I + A^2)\dots(I + A^{M/2})$$

şeklindedir. Ve sonuca algoritmanın -5- adımı ile gidilir.

iii. $\Gamma_2 > \Gamma_3 > \cdots > \Gamma_p > 0$ olmak üzere,

$$M_1 = 2^{\Gamma_2} + 2^{\Gamma_3} + \cdots + 2^{\Gamma_p}$$

şeklindedir. Buradaki $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_p$' nin bulunuşu aşağıdaki gibidir:

$i = 2,3,\dots, p$ ve $\Gamma_i = [\log_2 M_{i-1}]$ ve $M_i = M_{i-1} - 2^{\Gamma_i}$ olmak üzere $M_p = 0$' a kadar devam edilir.

B. $\Gamma_2, \Gamma_3, \dots, \Gamma_p$' lerin bulunması aşağıdaki şekildedir.

1. $\Gamma_p = 1$ ise bu takdirde $\Psi_p = I$ olur. Diğer hallerde,

$$\Psi_p = (I + A^2).(I + A^4)\dots\left(I + A^{2^{\Gamma_{p-1}}}\right)$$

olarak alınır.

2. $\Psi_i = \left(I + A^{2^{\Gamma_{i+1}}}\right).\left(I + A^{2^{\Gamma_{i+1}+1}}\right)\dots\left(I + A^{2^{\Gamma_{i-1}}}\right)$, $i = p - 1, p - 2, \dots, 1$

3. $S_1 = \Psi_1 + A^{2^{\Gamma_1}}$ 'dir.

4. $S_i = \Psi_i.S_{i-1} + A^{2^{\Gamma_1}+2^{\Gamma_2}+\dots+2^{\Gamma_i}}$ $i = 2, 3, \dots, p-1$'. $S_p = \Psi_p . S_{p-1}$

5. $\Psi (M,A) = (I + A).S_p$

6. N çift ise $\Psi(N,A) = \Psi(M,A)$ ' dır.

N tek ise $\Psi(N,A) = I + A.\Psi (M,A)$'dır.

Böylece $\Psi(N,A)$ matris polinomu hesaplanmış olur. Ayrıca bu çalışma Dursun A. (1999), tarafından daha detaylı olarak incelenmiştir.

Dimitrov ve ark. (1994), $\Psi(N,A)$ matris polinomunun hesaplanmasını N 'nin 3 'lük sayma düzenine göre kurmuşlardır. Burada

$$\Psi(N,A) = G(N,A) = G(J,A).G(K,A^J)$$

dir.

$$G(N,A) = \begin{cases} (I+A+A^2).G(K,A^3), & N=3.K \\ I + (A+A^2+A^3).G(K,A^3), & N = 3.K+1 \\ I + A+A^2.(I+A+A^2).G(K,A^3), & N = 3.K+2 \end{cases}$$

Böylece $\Psi(N,A)$ matris polinomu hesaplanmış olur.

Dimitrov ve ark. (1995), $\Psi(N,A)$ matris polinomunun hesaplanması için etkili bir algoritma daha geliştirmişlerdir. Bu algoritma,

$$G(N,A) = \begin{cases} (I+A+A^2).G(K,A^3), & N=3.K, & N \equiv 0 \text{ veya } 3 \pmod 6 \\ I + (A+A^2+A^3).G(K,A^3), & N = 3.K+1, & N \equiv 1 \text{ veya } 4 \pmod 6 \\ (I + A).G(3K+1,A^2), & N = 3.(2K)+2, & N \equiv 2 \pmod 6 \\ I +(A+A^2).G(3K+2,A^2) & N = 3.(2K+1)+2, & N \equiv 5 \pmod 6 \end{cases}$$

şeklindedir.

1. 2. Yeni Algoritmalar

Bu çalışmada, $\Psi(N,A)$ matris polinomunun az sayıda matris çarpımları ile bulunabilmesini sağlayan, bütün kare matrislere uygulanabilen iki yeni algoritma elde edilmiştir ve bu algoritmalar genelleştirilmiştir. Genelleştirilen bu algoritma ile $\Psi(N,A)$ matris polinomu istediğimiz sayı sisteminde bulunabilir.

Yeni Algoritma 1

$\Psi(N,A)$ matris polinomunun hesaplanması için pratik bir algoritma elde edilmiştir. $\Psi(N,A)$ matris polinomunun hesaplanmasında izlenilecek adımlar aşağıdaki şekildedir.

i. $N = (i_t i_{t-1} \ldots i_1 i_0)_4$ olsun.

ii. $A(0) = A$

$A(0+1) \leftarrow A(0).A(0) = A.A = A^2 = A(1)$

$A(1+1) \leftarrow A(1).A(0) = A^2.A = A^3 = A(2)$

$A(2+1) \leftarrow A(2).A(0) = A^3.A = A^4 = A(3).$

iii. $i_t = 3$ ise bu takdirde $A^{4^t} \leftarrow A$, $X = I+A(0)+A(1)$ olsun.

$i_t = 2$ ise bu takdirde $A^{4^t} \leftarrow A$, $X = I+A(0)$.

$i_t = 1$ ise $X = I$.

iv. $p = t-1, \ldots, 0$ ve $p \geq 0$ için,

$i_p \leftarrow A^{4^p} \leftarrow A$ olsun.

v. $i_p = 0$ ise $X = (I+A(0)+A(1)+A(2)).X,$

$i_p = 1$ ise $X = I+(A(0)+A(1)+A(2)+A(3)).X,$

$i_p = 2$ ise $X = I+A(0)+A(1).(I+A(0)+A(1)+A(2)).X,$

$i_p = 3$ ise $X = I+A(0)+A(1)+A(2).(I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

olarak tanımlansın.

vı. $\Psi(N,A) = X$ olarak hesaplanmış olur.

Burada K pozitif tamsayıdır. Buna göre Yeni Algoritma 1'i aşağıdaki gibi de yazabiliriz.

$\Psi(N,A) = G(N,A)$ 'dır.

$G(K, A^4)$ ifadesinde ki $K = \lfloor N/4 \rfloor$' dür. Yani N/4'ün tam kısmıdır.

$G(K, A^4) = G(\lfloor N/4 \rfloor, A^4)$ olsun.

$G(\lfloor N/4 \rfloor, A^4)$,

$G(\lfloor \lfloor N/4 \rfloor /4 \rfloor, (A^4)^4)$,

.

.

.

$G(\lfloor \lfloor \lfloor N/4 \rfloor \rfloor /4 \ldots \rfloor, ((A^4)^4)^{4\ldots})$

alınarak, $\Psi(N, A)$ matris polinomunun değeri hesaplanana kadar devam edilir. Buradan,

$$\Psi(N,A) = \begin{cases} (I+A+A^2+A^3).G(K,A^4), & N=4k \\ I+A.(I+A+A^2+A^3).G(K,A^4), & N=4k+1 \\ I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3).G(K,A^4), & N=4k+2 \\ I+A+A^2+A^3.(I+A+A^2+A^3).G(K,A^4), & N=4k+3 \end{cases}$$

algoritması elde edilir. Böylece $\Psi(N, A)$ matris polinomu hesaplanmış olur.

Yeni Algoritma 2

$\Psi(N, A)$ matris polinomunun hesaplanması için bütün kare matrislere uygulanabilen, pratik bir algoritma elde edilmiştir. K pozitif tamsayıdır. Bu algoritma N ‘ nin 5 ‘lik sayma düzenine göre kurulmuştur. Burada

$$\Psi(N, A) = G(N, A)$$

dır. $G(K, A^5)$ifadesinde ki $K = \lfloor N/5 \rfloor$’ tir. Yani N/5’in tam kısmıdır.

$G(K, A^5) = G(\lfloor N/5 \rfloor, A^5)$ olsun.

$G(\lfloor N/5 \rfloor, A^5)$

$G(\lfloor \lfloor N/5 \rfloor /5 \rfloor, (A^5)^5)$,

.

.

.

$G(\lfloor \lfloor \lfloor N/5 \rfloor /5 \rfloor /5 \ldots \rfloor, ((A^5)^5)^{5\ldots})$

alınarak, $\Psi(N, A)$ matris polinomunun değeri hesaplanana kadar devam edilir. Buradan,

$$\Psi(N,A)=\begin{cases}(I+A+A^2+A^3+A^4).G(K,A^5), & N=5k\\ I+A.(I+A+A^2+A^3+A^4).G(K,A^5), & N=5k+1\\ I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3+A^4).G(K,A^5), & N=5k+2\\ I+A+A^2+A^3.(I+A+A^2+A^3+A^4).G(K,A^5), & N=5k+3\\ I+A+A^2+A^3+A^4.(I+A+A^2+A^3+A^4).G(K,A^5), & N=5k+4\end{cases}$$

algoritması elde edilir. Böylece $\Psi(N,A)$ matris polinomu hesaplanmış olur.

1.3. Yeni Algoritmaların Genelleştirilmesi

Burada A n boyutlu kare matris, $n \geq 2$, t = 1, 2, 3, …, n-1 ve n, $N \in \mathbb{N}$, k, $K \in \mathbb{Z}$'dır. Bu algoritma n 'lik sayma düzenine göre kurulmuştur.

$G(K, A^n)$ ifadesinde ki $K = \left[N/n\right]$' dir. Yani N/n' in tam kısmıdır.

$G(K, A^n) = G(\left[N/n\right], A^n)$ olsun.

$G(\left[N/n\right], A^n)$,

$G(\left[\left[N/n\right]/n\right], (A^n)^n)$,

.

.

.

$G([\ \left[\left[N/n\right]/n\right]/n\ldots\ ], (A^n)^{n^{n\cdots}})$

alınarak, $\Psi(N,A)$ matris polinomunun değeri hesaplanana kadar devam edilir. Buradan,

$$\Psi(N,A)=\begin{cases}(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1}).G(K,A^n), & N=n.k\\ I+A.(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1}).G(K,A^n), & N=n.k+1\\ I+A+A^2.(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1}).G(K,A^n), & N=n.k+2\\ I+A+A^2+A^3.(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1}).G(K,A^n), & N=n.k+3\\ \vdots & \\ I+A+A^2+\cdots+A^t.(I+A+A^2+\cdots+A^{n-1}).G(K,A^n), & N=n.k+t\end{cases}$$

algoritması elde edilir. Böylece istediğimiz sayma sisteminde $\Psi(N,A)$ matris polinomlarını hesaplayabiliriz.

1. 4. Tezin Yapısı

Bu tez çalışması 5 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; $\Psi(N, A)$ matris polinomunun hesaplanması için bulduğumuz yeni algoritmaların tanıtımı ve genelleştirilmesi ile bu matris polinomunun hesaplanması için literatür özetleri verilmiştir.

İkinci bölümde; $\Psi(N, A)$ matris polinomunun hesaplanması ile ilgili bulduğumuz iki yeni algoritmaya ve yapılmış çalışmalara nümerik örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; $\Psi(N, A)$ matris polinomunun hesaplanması ile ilgili bulduğumuz iki yeni algoritmaya ve yapılmış çalışmalara bir kare matris üzerinde uygulanmış nümerik örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde; $\Psi(N, A)$ matris polinomunun hesaplanması ile ilgili bulduğumuz iki yeni algoritmanın ve yapılmış çalışmaların nümerik örnekleri karşılaştırılmıştır.

Beşinci bölümde ise tez çalışması genel olarak değerlendirilmiştir.

2. Ψ(N, A) MATRİS POLİNOMUNUN ALGORİTMALAR YARDIMIYLA HESAPLANMASI İLE İLGİLİ ÖRNEKLER

Örnek 2. 1. Westreich (1989),

$$\Psi(22,A)=I+A+A^2+\ldots+A^{21}$$

matris polinomunu hesaplayalım.

N = 3.7+1 olsun. Bu takdirde

$$\Psi(22,A) = I + A.\Psi(3.7,A)$$

olur.

$$\Psi(3.7,A) = \Psi(3,A).\ \Psi(7,A^3)$$

olduğundan,

$$\Psi(22,A) = I + A.\ \Psi(3,A).\ \Psi(7,A^3)$$

olur. Sonuç olarak,

$$\Psi(22,A) = I + A.(I+A+A^2).\{(I+A^{12}).(I+A^3+A^6) + A^9\}$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 2. Lei ve ark. (1992), $\Psi(22,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$22 = (10110)_2$

$t_0 = t\text{-}2+ i_{t-1}$

$t_0 = 4\text{-}2+0 = 2$

$p = 0, 1, 2, \ldots, t_0$ olduğundan,

$A(0) = A$

$A(p+1) \leftarrow A(p).A(p)$

$A(0+1) = A(0).A(0) = A.A = A^2 = A(1)$

$A(1+1) = A(1).A(1) = A^2 . A^2 = A^4 = A(2)$

$A(2+1) = A(2).A(2) = A^4 . A^4 = A^8 = A(3)$ olur.

$p = t\text{-}1, t\text{-}2, \ldots, 0$ ve $X \leftarrow I$ ' dır.

$p = 4\text{-}1 = 3$

$i_3 = 0$ ise $X \leftarrow (I+A(p)).X$ olduğundan,

$X = (I+A(3)).X$

$X = (I+A^8).1$

$X = I+ A^8$ olarak bulunur.

$i_2 = 1$ ise $X = I+(A(p)+A(p+1)).X$ olduğundan,

$X = I+(A(2)+A(3)).X$

$X = I+(A^4 + A^8). (I+ A^8)$ olarak bulunur.

$i_1 = 1$ ise $X = I+(A(1)+A(2)).X$ olduğundan,

$X = I+(A^2 + A^4).\{ I+(A^4 + A^8). (I+ A^8)\}$ olarak bulunur.

$i_0 = 0$ ise $X = (I+A(O)).X$ olduğundan,

$X = (I+A).\{ I+(A^2 + A^4).[I+(A^4 + A^8). (I+ A^8)] \}$

olup,

$$\Psi (22,A) = (I+A).\{ I+(A^2 + A^4).[I+(A^4 + A^8). (I+ A^8)] \}$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 3. Dutta ve ark. (1992), $\Psi (22,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$N = 22 \Rightarrow M = 22$

$\Gamma_1 = [\log_2 M] = [\log_2 22] = 4$

$M_1 = M-2^{\Gamma_1} = 22-2^4 = 6$

$\Gamma_2 = [\log_2 M_1] = [\log_2 6] = 2$

$M_2 = M_1-2^{\Gamma_2} = 6-2^2 = 2$

$\Gamma_3 = [\log_2 M_2] = [\log_2 2] = 1$

$M_3 = M_2-2^{\Gamma_3} = 2-2= 0$

$\Gamma_3 = 1 \Rightarrow \Psi_3 = I, \quad p = 3$

$\Psi_i = (I +A^{2^{\Gamma_{i+1}}}).(I + A^{2^{\Gamma i+1}+1})\ldots(I + A^{2^{\Gamma_i -1}}), \quad (i = p-1, p-2, \ldots, 1)$

$\Psi_1 = (I + A^{2^2}).(I + A^{2^3})= (I + A^4).(I + A^8)$

$\Psi_2 = I + A^{2^1} = I + A^2, \quad \Psi_3 = I$

$S_1 = \Psi_1 + A^{2^{\Gamma_1}}$

$S_i = \Psi_i .S_{i-1} + A^{2^{\Gamma_1}+2^{\Gamma_2}+\ldots+2^{\Gamma i}} \qquad (i = 2, 3, \ldots, p-1)$

$S_p = \Psi_p .S_{p-1}$

$S_1 = (I + A^4).(I + A^8) + A^{2^4}$

$S_1 = (I + A^4).(I + A^8) + A^{16}$

$S_2 = (I + A^2).[(I + A^4).(I + A^8) + A^{16}] + A^{2^{\Gamma_1}+2^{\Gamma_2}}$

$S_2 = (I + A^2).[(I + A^4).(I + A^8) + A^{16}] + A^{20}$

$S_3 = (I + A^2).[(I + A^4).(I + A^8) + A^{16}] + A^{20}$

olup,

$$\Psi(22,A) = (I + A).\{(I + A^2).[(I + A^4).(I + A^8) + A^{16}] + A^{20}\}$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 4. Dimitrov ve ark. (1994), $\Psi(22,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$\Psi(22,A) = I + (A+A^2+A^3).\Psi(7, A^3)$

$= I + (A+A^2+A^3).\{I + (A^3+A^6+A^9).\Psi(2, A^9)\}$

$\Psi(22,A) = I + (A+A^2+A^3).\{I + (A^3+A^6+A^9).(I + A^9)\}$

olarak bulunur.

Örnek 2. 5. Dimitrov ve ark. (1995), $\Psi(22,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$\Psi(22,A) = I + (A+A^2+A^3).\Psi(7, A^3)$

$= I + (A+A^2+A^3).\{I+(A^3+A^6+A^9).\Psi(2, A^9)\}$

$= I + (A+A^2+A^3).\{I+(A^3+A^6+A^9).(I+A^9)\}$

olarak bulunur.

Örnek 2. 6. Yeni Algoritma 1'e göre $\Psi(22,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$22 = (112)_4$

$A(0) = A$

$A(0+1) \leftarrow A(0).A(0) = A.A = A^2 = A(1)$

$A(1+1) \leftarrow A(1).A(0) = A^2.A = A^3 = A(2)$

$A(2+1) \leftarrow A(2).A(0) = A^3.A = A^4 = A(3)$

$22 = (112)_4$ olduğu için,

t =2 olur.

p = t-1, t-2, … 0,

p = 2-1 = 1

$i_1 = 1$,

$i_t = 1$ ise $X = I$ olur.

$i_p \leftarrow A^{4^p} \leftarrow A$ olduğundan $i_1 \leftarrow A^4 \leftarrow A$ olur.

$X = I+(A(0)+A(1)+A(2)+A(3)).X$

$X = I + A^4 + (A^4)^2 + (A^4)^3 + (A^4)^4 . I$

$X = I+A^4 + A^8 + A^{12} + A^{16}$

$i_0 \leftarrow A^{4^0} \leftarrow A$ ise $i_0 \leftarrow A^1 \leftarrow A$ olur.

$i_0 = 2$ ise

$$X = I+A(0)+A(1).(I+A(0)+A(1)+A(2)).X$$

olduğundan,

$$X = I+A+ A^2 .(I+A+ A^2 + A^3).(I+A^4 +A^8 +A^{12} +A^{16})$$

olup,

$$\Psi (22,A)= I+A+A^2 .(I+A+A^2 +A^3). \{I+A^4 .(I+A^4 +A^8 +A^{12})\}$$

olarak bulunur. Ya da,

$$\Psi (22,A) = I+A+A^2 .(I+A+A^2 +A^3).G(5,A^4)$$

$$\Psi (22,A)=I+A+A^2 .(I+A+A^2 +A^3).\{I+A^4 .(I+A^4 +A^8 +A^{12})\}$$

şeklinde de hesaplanabilir.

Örnek 2. 7. Yeni Algoritma 2'e göre $\Psi (22,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$$\Psi (22,A) = I+A+A^2 .(I+A+A^2 +A^3 +A^4).G(4,A^5)$$

$$= I+A+A^2 .(I+A+A^2 +A^3 +A^4).(I+A^5 +A^{10} +A^{15})$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 8. Westreich (1989),

$$\Psi(30,A)= I+A+A^2+\ldots+A^{29}$$

matris polinomunu hesaplayalım.

N = 2.3.5 şeklinde asal çarpanlarına ayralım.

$$X = A^2 \quad \text{ve} \quad P = \Psi(2,A)$$

olsun. $P = P.\Psi(p_2,X)$ olduğundan,

$$P = \Psi(2,A).\Psi(3,A^2)$$

yazılır.$X = X^{p_2}$ hesaplanır.

$$P = \Psi(2,A).\ \Psi(3,A^2).\Psi(5,A^6)$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\Psi(30,A) = (I + A).(I+ A^2+A^4).\{I+ (A^6+A^{12}).(I+ A^{12})\}$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 9. Lei ve ark. (1992), $\Psi(30,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$30 = (11110)_2$

$t_0 \leftarrow t\text{-}2+ i_{t-1}$

$t_0 \leftarrow 4\text{-}2+1 = 3$

$p = 0, 1, 2, \ldots, t_0$ olduğundan,

$A(0) = A$

$A(0+1) = A(0).A(0) = A.A = A^2 = A(1)$

$A(1+1) = A(1).A(1) = A^2 . A^2 = A^4 = A(2)$

$A(2+1) = A(2).A(2) = A^4 . A^4 = A^8 = A(3)$

$A(3+1) = A(3).A(3) = A^8 . A^8 = A^{16} = A(4)$

olarak bulunur.

$X \leftarrow I$ ve $p = 4\text{-}1 = 3$ ' tür.

$i_3 = 1$ olduğundan,

$X = I+(A(p)+A(p+1)).X$

$X = I+(A(3)+A(4)).X$

$X = I+(A^8 + A^{16}).1$

$X = I+ A^8 + A^{16}$ olarak bulunur.

$i_2 = 1$ olduğundan,

$X = I+(A(p)+A(p+1)).X$

$X = I+(A(2)+A(3)).X$

$X = I+(A^4 + A^8). (I+ A^8 + A^{16})$ olarak bulunur.

$i_1 = 1$ olduğundan,

$X = I+(A(1)+A(2)).X$

$X = I+(A^2 + A^4).\{I+(A^4 + A^8). (I+ A^8 + A^{16})\}$ olarak bulunur.

$i_0 = 0$ olduğundan,

$X = (I+A(0)).X$

$X = (I+A)\{ I+(A^2 + A^4).[I+(A^4 + A^8). (I+ A^8 + A^{16})] \}$

olup,

$$\Psi (30,A) = (I+A).\{ I+(A^2 + A^4).[I+(A^4 + A^8). (I+ A^8 + A^{16})] \}$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 10. Dutta ve ark. (1992), $\Psi (30,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$N = 30 \Rightarrow M = 30$

$\Gamma_1 = [\log_2 M] = [\log_2 30] = 4$

$M_1 = M-2^{\Gamma_1} = 30-2^4 = 14$

$\Gamma_2 = [\log_2 M_1] = [\log_2 14] = 3$

$M_2 = M_1-2^{\Gamma_2} = 14-2^3 = 6$

$\Gamma_3 = [\log_2 M_2] = [\log_2 6] = 2$

$M_3 = M_2-2^{\Gamma_3} = 6-2^2 = 2$

$\Gamma_4 = [\log_2 M_3] = [\log_2 2] = 1$

$M_4 = M_3-2^1 = 2-2 = 0$

$\Gamma_4 = 1, \Psi_4 = I$, p = 4' tür.

$\Psi_i = (I +A^{2^{\Gamma i+1}}).(I + A^{2^{\Gamma i+1}+1})\ldots(I + A^{2^{\Gamma_i -1}}),$ (i = p-1, p-2, …, 1)

$\Psi_1 = I + A^{2^3} = I + A^8$

$\Psi_2 = I + A^{2^2} = I + A^4$

$\Psi_3 = I + A^{2^1} = I + A^2$

$\Psi_4 = I, \quad S_1 = \Psi_1 + A^{2^{\Gamma_1}}$

$S_1 = I + A^8 + A^{2^4} = I + A^8 + A^{16}$

$S_2 = (I + A^4).(I + A^8 + A^{16}) + A^{2^4+2^3}$

$S_2 = (I + A^4).(I + A^8 + A^{16}) + A^{24}$

$S_3 = (I + A^2).[(I + A^4).(I + A^8 + A^{16}) + A^{24}] + A^{2^4+2^3+2^2}$

$S_3 = (I + A^2).[(I + A^4).(I + A^8 + A^{16}) + A^{24}] + A^{28}$

$S_4 = I.(I + A^2).[(I + A^4).(I + A^8 + A^{16}) + A^{24}] + A^{28}$

$S_4 = (I + A^2).[(I + A^4).(I + A^8 + A^{16}) + A^{24}] + A^{28}$

$\Psi(30,A) = (I + A).\{(I + A^2).[(I + A^4).(I + A^8 + A^{16}) + A^{24}] + A^{28}\}$

olarak bulunur.

Örnek 2. 11. Dimitrov ve ark. (1994), $\Psi(30,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$\Psi(30,A) = (I + A + A^2).\Psi(10,A^3)$

$= (I + A + A^2).\{I + (A^3 + A^6 + A^9).\Psi(3, A^9)\}$

$= (I + A + A^2).\{I + (A^3 + A^6 + A^9).(I + A^9 + A^{18})\}$

olarak bulunur.

Örnek 2. 12. Dimitrov ve ark. (1995), $\Psi(30,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$\Psi(30,A) = (I + A + A^2).\Psi(10,A^3)$

$= (I + A + A^2).\{I + (A^3 + A^6 + A^9).\Psi(3,A^9)\}$

$= (I + A + A^2).\{I + (A^3 + A^6 + A^9).(I + A^9 + A^{18})\}$

olarak bulunur.

Örnek 2. 13. Yeni Algoritma 1'e göre $\Psi(30,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$30 = (132)_4$

$A(0) = A$

$A(0+1) \leftarrow A(0).A(0) = A.A = A^2 = A(1)$

$A(1+1) \leftarrow A(1).A(0) = A^2.A = A^3 = A(2)$

$A(2+1) \leftarrow A(2).A(0) = A^3.A = A^4 = A(3)$

$30 = (132)_4$ olduğundan,

$t = 2$ olarak bulunur.

$p = 2-1 = 1$

$X = I$

$i_1 = 3,$

$i_p \leftarrow A^{4^p} \leftarrow A$ ise $i_1 \leftarrow A^4 \leftarrow A$ olduğundan,

$X = I+A(0)+A(1)+A(2).(I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = I+A^4+(A^4)^2+(A^4)^3.(I+A^4+(A^4)^2+(A^4)^3).I$

$X = I+A^4+A^8+A^{12}.(I+A^4+A^8+A^{12})$ olur.

$i_0 = 2$

$i_0 \leftarrow A^{4^0} \leftarrow A$ ise $i_0 \leftarrow A^1 \leftarrow A$ olduğundan,

$X = I+A(0)+A(1).(I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+A^8+A^{12}.(I+A^4+A^8+A^{12})\}$

olup

$$\Psi(30,A) = I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+A^8+A^{12}.(I+A^4+A^8+A^{12})\}$$

olarak bulunur. Ya da,

$$\Psi(30,A) = I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3).G(7,A^4)$$
$$= I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+A^8+A^{12}.(I+A^4+A^8+A^{12})\}$$

şeklinde de hesaplanabilir.

Örnek 2. 14. Yeni Algoritma 2'e göre $\Psi(30,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$$\Psi(30,A) = (I+A+A^2+A^3+A^4).G(6,A^5)$$
$$= (I+A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^5.(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20})\}$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 15. Lei ve ark. (1992),

$$\Psi(82,A) = I + A + A^2 + \ldots + A^{81}$$

matris polinomunu hesaplayalım.

$82 = (1010010)_2$

$t_0 \leftarrow t\text{-}2+ i_{t-1}$

$t_0 \leftarrow 6\text{-}2+0 = 4$

$A(0) = A$

$A(0+1) = A(0).A(0) = A.A = A^2 = A(1)$

$A(1+1) = A(1).A(1) = A^2 . A^2 = A^4 = A(2)$

$A(2+1) = A(2).A(2) = A^4 . A^4 = A^8 = A(3)$

$A(3+1) = A(3).A(3) = A^8 . A^8 = A^{16} = A(4)$

$A(4+1) = A(4).A(4) = A^{16} . A^{16} = A^{32} = A(5)$

$X \leftarrow I$ ve $p = 6\text{-}1 = 5$' tir.

$i_5 = 0$ olduğundan,

$X = (I+A(5)).X$

$X = (I+ A^{32}).1 = I+ A^{32}$ olarak bulunur.

$i_4 = 1$ olduğundan,

$X = I+(A(4)+A(5)). (I+ A^{32})$

$X = I+(A^{16} + A^{32}).(I+ A^{32})$ olarak bulunur.

$i_3 = 0$ olduğundan,

$X = (I+A(3)).X$

$X = (I+ A^8).\{I+(A^{16} + A^{32}).(I+ A^{32})\}$ olarak bulunur.

$i_2 = 0$ olduğundan,

$X = (I+A(2)).X$

$X = (I+ A^4).(I+ A^8).\{I+(A^{16} + A^{32}).(I+ A^{32})\}$ olarak bulunur.

$i_1 = 1$ olduğundan,

$X = I+(A(1)+A(2)).X$

$X = I+(A^2 + A^4).(I+ A^4).(I+ A^8).\{I+(A^{16} + A^{32}).(I+ A^{32})\}$

olarak bulunur.

$i_0 = 0$ olduğundan,

$X = (I+A(0))$

$X = (I+A).\{ I+(A^2 + A^4).(I+ A^4).(I+ A^8).[I+(A^{16} + A^{32}).(I+ A^{32})] \}$

olup,

$\Psi (82,A) = (I+A).\{ I+(A^2 + A^4).(I+ A^4).(I+ A^8).[I+(A^{16} + A^{32}).(I+ A^{32})] \}$

olarak bulunur.

Örnek 2. 16. Dutta ve ark. (1992), $\Psi (82,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$N = M = 82$

$\Gamma_1 = [\log_2 M] = [\log_2 82] = 6$

$M_i = M_{i-1} - 2^{\Gamma_i}$

$M_1 = M - 2^{\Gamma_1}$

$M_1 = 82 - 2^6 = 18 \quad => \ M_1 = 18$

$\Gamma_2 = [\log_2 M_1] = [\log_2 18] = 4$

$\Gamma_2 = 4$

$M_2 = M_1 - 2^{\Gamma_2} = 18 - 2^4 = 2$

$M_2 = 2$

$\Gamma_3 = [\log_2 M_2] = [\log_2 2] = 1$

$\Gamma_3 = 1$

$M_3 = M_2 - 2^{\Gamma_3} = 2 - 2 = 0$

$M_3 = 0$ ise $M_p = 0$

$\Psi_i = \left(I + A^{2^{\Gamma i+1}}\right)\left(I + A^{2^{\Gamma i+1+1}}\right)..\left(I + A^{2^{\Gamma i-1}}\right)$

$\Psi_1 = (I+A^{2^4}).(I+A^{2^5}) = (I+A^{16}).(I+A^{32})$

$\Psi_2 = (I+A^{2^1}).(I+A^{2^2}).(I+A^{2^3}) = (I+A^2).(I+A^4).(I+A^8)$

$\Gamma_p = 1$ ise o takdirde $\Psi_p = I$ olur.

$\Psi_3 = I$

$S_1 = \Psi_1 + A^{2^{\Gamma 1}}$

$S_1 = (I+A^{16}).(I+A^{32}) + A^{2^6}$

$S_1 = (I+A^{16}).(I+A^{32}) + A^{64}$

$S_i = \Psi_i\, S_{i-1} + A^{2^{\Gamma 1}+2^{\Gamma 2}+\ldots+2^{\Gamma i}}$

$S_2 = \Psi_2\, S_{2-1} + A^{2^{\Gamma 1}+2^{\Gamma 2}}$

$S_2 = (I+A^2).(I+A^4).(I+A^8).[(I+A^{16}).(I+A^{32})+A^{64}] + A^{2^6+2^4}$

$S_2 = (I+A^2).(I+A^4).(I+A^8).[(I+A^{16}).(I+A^{32})+A^{64}] + A^{80}$

$S_p = \Psi_p.\, S_{p-1}$

$S_3 = \Psi_3.S_2$

$S_3 = I.\, S_2$

$S_3 = S_2$

$\Psi(M,A) = (I + A)\, S_P$

$\Psi\,(82,A) = (I + A)S_3$

olup,

$$\Psi(82,A)=(I + A).\{(I+A^2).(I+A^4).(I+A^8).[(I+A^{16}).(I+A^{32})+A^{64}] +A^{80}\}$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 17. Dimitrov ve ark. (1994), $\Psi\,(82,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$$\Psi\,(82,A) = I + (A+A^2+A^3).\Psi\,(27, A^3)$$
$$= I + (A+A^2+A^3).(I + A^3+A^6).\Psi\,(9,A^9)$$
$$= I + (A+A^2+A^3).(I + A^3+A^6).(I + A^9+A^{18}).\Psi\,(3,A^{27})$$
$$= I + (A+A^2+A^3).(I + A^3+A^6).(I + A^9+A^{18}).(I+A^{27}+A^{54})$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 18. Dimitrov ve ark. (1995), Ψ $(82,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$$\Psi\,(82,A) = I + (A+A^2+A^3).\Psi\,(27, A^3)$$
$$= I + (A+A^2+A^3).(I + A^3+A^6).\Psi\,(9,A^9)$$
$$= I + (A+A^2+A^3).(I + A^3+A^6).(I + A^9+A^{18}).\Psi\,(3,A^{27})$$
$$= I+ (A+A^2+A^3).(I+ A^3+A^6).(I+ A^9+A^{18}).(I+A^{27}+A^{54})$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 19. Yeni Algoritma 1'e göre Ψ (82,A) matris polinomunu hesaplayalım.

$82 = (1102)_4$

$A(0) = A$

$A(0+1) \leftarrow A(0).A(0) = A.A = A^2 = A(1)$

$A(1+1) \leftarrow A(1).A(0) = A^2.A = A^3 = A(2)$

$A(2+1) \leftarrow A(2).A(0) = A^3.A = A^4 = A(3)$

$82 = (1102)_4$ olduğundan $t = 3$ olarak bulunur.

$p = 3-1 = 2$

$X = I$

$i_2 \leftarrow A^{4^2} \leftarrow A$ olduğundan $i_2 \leftarrow A^{16} \leftarrow A$ olarak bulunur.

$i_2 = 1$ olduğundan,

$X = I+(A(0)+A(1)+A(2)+A(3)).X$

$X = I + A^{16} + (A^{16})^2 + (A^{16})^3 + (A^{16})^4.I$

$X = I + A^{16} + A^{32} + A^{48} + A^{64}$ olarak bulunur.

$i_1 = 0$

$i_1 \leftarrow A^4 \leftarrow A$

$X = (I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = (I + A^4 + (A^4)^2 + (A^4)^3).(I + A^{16} + A^{32} + A^{48} + A^{64})$

$X = (I+A^4+A^8+A^{12}).(I + A^{16} + A^{32} + A^{48} + A^{64})$

$i_0 = 2, \quad i_0 \leftarrow A^1 \leftarrow A$

$X = I+A(0)+A(1).(I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = I+A+ A^2.(I+A+ A^2 + A^3).(I+A^4+A^8+A^{12}).(I + A^{16} + A^{32} + A^{48} + A^{64})$

olup,

$\Psi(82,A) = I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3).(I+A^4+A^8+A^{12}).\{I+A^{16}.(I+A^{16}+A^{32}+A^{48})\}$

olarak bulunur. Ya da,

$\Psi(82,A) = I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3).G(20,A^4)$

$= I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3).(I+A^4+A^8+A^{12}).G(5,A^{16})$

$= I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3).(I+A^4+A^8+A^{12}).\{I+A^{16}.(I+A^{16}+A^{32}+A^{48})\}$

şeklinde de hesaplanabilir.

Örnek 2. 20. Yeni Algoritma 2'e göre Ψ (82,A) matris polinomunu hesaplayalım.

$\Psi(82,A) = I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3+A^4).G(16,A^5)$

$= I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^5.(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20}).G(3,A^{25})\}$

$=(I+A+A^2(I+A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^5(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20})(I+A^{25}+A^{50})\}$

olarak bulunur.

Örnek 2. 21. Lei ve ark. (1992),

$$\Psi(105,A) = I + A + A^2 + \ldots + A^{104}$$

matris polinomunu hesaplayalım.

$105 = (1101001)_2$

$t_0 \leftarrow t\text{-}2+ i_{t-1}$ olduğundan $t_0 \leftarrow 6\text{-}2+1 = 5$ olarak bulunur.

$A(0) = A$

$A(0+1) = A(0).A(0) = A.A = A^2 = A(1)$

$A(1+1) = A(1).A(1) = A^2 . A^2 = A^4 = A(2)$

$A(2+1) = A(2).A(2) = A^4 . A^4 = A^8 = A(3)$

$A(3+1) = A(3).A(3) = A^8 . A^8 = A^{16} = A(4)$

$A(4+1) = A(4).A(4) = A^{16} . A^{16} = A^{32} = A(5)$

$A(5+1) = A(5).A(5) = A^{32} . A^{32} = A^{64} = A(6)$

$X \leftarrow I$ ve $p = 6\text{-}1 = 5$ 'tir.

$i_5 = 1$ ise,

$X = I+(A(p)+A(p+1)).X$

$X = I+(A(5)+A(6)).1$

$X = I+ A^{32} + A^{64}$ olur.

$i_4 = 0$ ise,

$X = (I+A(p)).X$

$X = (I+A(4)).(I+ A^{32} + A^{64}$

$X = (I+ A^{16}).(I+ A^{32} + A^{64})$ olur.

$i_3 = 1$ ise,

$X = I+(A(p)+A(p+1)).X$

$X = I+(A(3)+A(4)).\ (I+ A^{16}).(\ I+ A^{32} + A^{64})$

$X = I+\ (A^{8} + A^{16}).(I+ A^{16}).(\ I+ A^{32} + A^{64})$ olur.

$i_2 = 0$ ise,

$X = (I+A(2)).X$

$X = (I+ A^{4}).\{\ I+ (A^{8} + A^{16}).(I+ A^{16}).(\ I+ A^{32} + A^{64})\}$ olur.

$i_1 = 0$ ise,

$X = (I+A(p)).X$

$X = (I+A(1)).\ (I+ A^{4}).\{\ I+ (A^{8} + A^{16}).(I+ A^{16}).(\ I+ A^{32} + A^{64})\}$

$X = (I+ A^{2}).(I+ A^{4}).\{\ I+ (A^{8} + A^{16}).(I+ A^{16}).(\ I+ A^{32} + A^{64})\}$ olur.

$i_0 = 1$ ise,

$X = I+(A(p)+A(p+1)).X$

$X = I+(A(0)+A(1)).\ (I+ A^{2}).(I+ A^{4}).\{\ I+ (A^{8} + A^{16}).(I+ A^{16}).(\ I+ A^{32} + A^{64})\}$

$X = I+(A+A^{2}).(I+ A^{2}).(I+ A^{4}).\{\ I+ (A^{8} + A^{16}).(I+ A^{16}).(\ I+ A^{32} + A^{64})\}$

olup,

$\Psi\ (105,A)=I+(A+A^{2}).(I+ A^{2}).(I+ A^{4}).\{\ I+ (A^{8} + A^{16}).(I+ A^{16}).(\ I+ A^{32} + A^{64})\}$

olarak bulunur.

Örnek 2. 22. Dutta ve ark. (1992), Ψ (105,A) matris polinomunu hesaplayalım.

$M = N -1 = 105 -1 = 104$

$\Gamma_1 = [\log_2 M] = [\log_2 104] = 6$

$M_1 = M\text{-}2^{\Gamma_1}$

$M_1 = 104\text{-}2^{6} = 40$

$\Gamma_2 = [\log_2 M_1] = [\log_2 40] = 5$

$\Gamma_2 = 5$

$M_2 = M_1\text{-}2^{\Gamma_2} = 40\text{-}2^{5} = 8$

$\Gamma_3 = [\log_2 M_2] = [\log_2 8] = 3$

$M_3 = M_2\text{-}2^{\Gamma_3} = 8\text{-}2^{3} = 0$ olduğundan,

$p = 3$ olur.

$\Psi_3 = (I + A^2).(I + A^4)$

$\Psi_i = (I + A^{2^{\Gamma_{i+1}}}).(I + A^{2^{\Gamma i+1}+1})\ldots(I + A^{2^{\Gamma_i -1}}),$

i = p-1, p-2, …, 1

$\Psi_1 = I + A^{2^5} = I + A^{32}$

$\Psi_2 = (I + A^{2^3}).(I+A^{2^4}) = (I + A^8).(I+A^{16})$

$S_1 = \Psi_1 + A^{2^{\Gamma_1}}$ ve

$S_i = \Psi_i .S_{i-1} + A^{2^{\Gamma_1}+2^{\Gamma_2}+\ldots+2^{\Gamma i}}$

i = 2, 3, …, p-1

$S_p = \Psi_p .S_{p-1}$

$S_1 = I + A^{32} + A^{2^6}$

$S_1 = I + A^{32} + A^{64}$

$S_2 = (I + A^8).(I+A^{16}).(I + A^{32} + A^{64}) + A^{2^6+2^5}$

$S_2 = (I + A^8).(I+A^{16}).(I + A^{32} + A^{64}) + A^{96}$

$S_3 = (I + A^2).(I + A^4).\{(I + A^8).(I+A^{16}).(I + A^{32} + A^{64}) + A^{96} \}$

$\Psi (104,A) = (I + A). (I + A^2).(I + A^4).\{(I + A^8).(I+A^{16}).(I + A^{32} + A^{64}) + A^{96} \}$

$\Psi (105,A) = I + A. (I + A). (I + A^2).(I + A^4).\{(I + A^8).(I+A^{16}).(I + A^{32} + A^{64}) + A^{96} \}$

olarak bulunur.

Örnek 2. 23. Dimitrov ve ark. (1994), Ψ (105,A) matris polinomunu hesaplayalım.

$\Psi(105,A) = (I + A + A^2). \Psi (35,A^3)$

$= (I + A + A^2). \{I + A^3 + A^6 .(I + A^3 + A^6).\Psi (11,A^9)\}$

$= (I + A + A^2).\{I + A^3 + A^6 .(I + A^3 + A^6).[I + A^9 + A^{18} .(I + A^9 + A^{18}).(3,A^{27})]\}$

$\Psi(105,A) = (I + A + A^2).\{I + A^3 + A^6 .(I + A^3 + A^6).[I + A^9 + A^{18} .(I + A^9 + A^{18}).(I + A^{27} + A^{54})]\}$

olarak bulunur.

Örnek 2. 24. Dimitrov ve ark. (1995), Ψ (105,A) matris polinomunu hesaplayalım.

$\Psi (105,A) = (I + A + A^2). \Psi (35,A^3)$

$= (I + A+A^2).\{ I +(A^3+A^6).\Psi(17,A^6)\}$

$= (I + A+A^2).\{ I +(A^3+A^6).(I + (A^6+A^{12}).\Psi(8, A^{12}))\}$

$= (I + A+A^2).\{ I +(A^3+A^6).[I + (A^6+A^{12}).(I +A^{12}).\Psi(4, A^{24})]\}$

$\Psi(105,A)=(I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6).[I+(A^6+A^{12}).(I+A^{12}).(I+A^{24}+A^{48}+A^{72})]\}$

olarak bulunur.

Örnek 2. 25. Yeni Algoritma 1'e göre $\Psi(105,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$105 = (1221)_4$

$A(0) = A$

$A(0+1) \leftarrow A(0).A(0) = A.A = A^2 = A(1)$

$A(1+1) \leftarrow A(1).A(0) = A^2.A = A^3 = A(2)$

$A(2+1) \leftarrow A(2).A(0) = A^3.A = A^4 = A(3)$

$105 = (1221)_4$ olduğundan $t = 3$ olur.

$p = 3-1 = 2$ 'dir.

$i_2 = 2$

$i_2 \leftarrow A^{16} \leftarrow A$

$X = I+A(0)+A(1).(I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = I+A^{16} + (A^{16})^2.(I+A^{16} + (A^{16})^2 + (A^{16})^3).I$

$X = I+A^{16}+A^{32}.(I+ A^{16}+A^{32} + A^{48})$

$i_1 = 2$

$i_1 \leftarrow A^4 \leftarrow A,$

$X = I+A(0)+A(1).(I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = I+A^4 + (A^4)^2.(I+A^4 + (A^4)^2 + (A^4)^3).\{I+A^{16}+A^{32}.(I+ A^{16}+A^{32} + A^{48})\}$

$X = I+ A^4 + A^8.(I+ A^4 + A^8 + A^{12}).\{ I+A^{16}+A^{32}.(I+ A^{16}+A^{32} + A^{48})\}$

$i_0 = 1, \quad i_0 \leftarrow A^1 \leftarrow A$

$X = I+(A(0)+A(1)+A(2)+A(3)).X$

$X = I+(A+ A^2 + A^3 + A^4).\{ I+A^4+A^8.(I+A^4+A^8+A^{12}).$

$[I+A^{16}+A^{32}.(I+A^{16}+A^{32}+A^{48})]\}$

olup,

$$\Psi(105,A) = I+(A+ A^2 + A^3 + A^4).\{ I+A^4 +A^8.(I+A^4 +A^8 +A^{12}).$$
$$[I+A^{16} +A^{32}.(I+A^{16} +A^{32} +A^{48})]\}$$

olarak bulunur. Ya da,

$$\Psi(105,A) = I+A.(I+A+A^2 +A^3).G(26,A^4)$$
$$= I+A.(I+A+A^2 +A^3).\{I+A^4 +A^8.(I+A^4 +A^8 +A^{12}).G(6,A^{16})\}$$
$$= I+A.(I+A+A^2 +A^3).\{ I+A^4 +A^8.(I+A^4 +A^8 +A^{12}).$$
$$[I+A^{16} +A^{32}.(I+A^{16} +A^{32} +A^{48})]\}$$

şeklinde de hesaplanabilir.

Örnek 2. 26. Yeni Algoritma 2'e göre $\Psi(105,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$$\Psi(105,A) = (I+A+A^2 +A^3 +A^4).G(21,A^5)$$
$$= (I+A+A^2 +A^3 +A^4).\{I+A^5.(I+A^5 +A^{10} +A^{15} +A^{20}).G(4,A^{25})\}$$
$$=(I+A+A^2 +A^3 +A^4).\{I+A^5.(I+A^5 +A^{10} +A^{15} +A^{20}).(I+A^{25} +A^{50} +A^{75})\}$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 27. Lei ve ark. (1992),

$$\Psi(232,A)=I+A+A^2 +\ldots+A^{231}$$

matris polinomunu hesaplayalım.

$232 = (11101000)_2$

$t_0 \leftarrow t\text{-}2+ i_{t-1}$ olduğundan $t_0 \leftarrow 7\text{-}2+1 = 6$ olur.

$A(0) = A$

$A(0+1) = A(0).A(0) = A.A = A^2 = A(1)$

$A(1+1) = A(1).A(1) = A^2 . A^2 = A^4 = A(2)$

$A(2+1) = A(2).A(2) = A^4 . A^4 = A^8 = A(3)$

$A(3+1) = A(3).A(3) = A^8 . A^8 = A^{16} = A(4)$

$A(4+1) = A(4).A(4) = A^{16} . A^{16} = A^{32} = A(5)$

$A(5+1) = A(5).A(5) = A^{32} . A^{32} = A^{64} = A(6)$

$A(6+1) = A(6).A(6) = A^{64} . A^{64} = A^{128} = A(7)$

$X \leftarrow I$ ve $p = 7\text{-}1 = 6$ ' dır.

$i_6 = 1$

$X = I+(A(p)+A(p+1)).X$

$X = I+(A(6)+A(7)).1$

$X = I+A^{64} + A^{128}$

$i_5 = 1$

$X = I+(A(p)+A(p+1)).X$

$X = I+(A(5)+A(6)).X$

$X = I+(A^{32} + A^{64}). (I+A^{64} + A^{128})$

$i_4 = 0$

$X = (I+A(p)).X$

$X = (I+A(4)).X$

$X = (I+ A^{16}).\{ I+(A^{32} + A^{64}). (I+A^{64} + A^{128})\}$

$i_3 = 1$

$X = I+(A(p)+A(p+1)).X$

$X = I+(A(3)+A(4)).X$

$X = I+(A^{8} + A^{16}).(I+ A^{16}).\{ I+(A^{32} + A^{64}). (I+A^{64} + A^{128})\}$

$i_2 = 0$

$X = (I+A(p)).X, \quad X = (I+A(2)). X$

$X = (I+A^{4}).\{ I+(A^{8} + A^{16}).(I+ A^{16}).[I+(A^{32} + A^{64}). (I+A^{64} + A^{128})]\}$

$i_1 = 0$

$X = (I+A(p)).X$

$X = (I+A(1)).X$

$X = (I+ A^{2}).(I+A^{4}).\{ I+(A^{8} + A^{16}).(I+ A^{16}).[I+(A^{32} + A^{64}). (I+A^{64} + A^{128})]\}$

$i_0 = 0$

$X = (I+A(p)).X, \quad X = (I+A(0)).X$

$X =(I+A).(I+ A^{2}).(I+A^{4}).\{I+(A^{8} + A^{16}).(I+A^{16}).[I+(A^{32} +A^{64}).(I+A^{64} + A^{128})]\}$

olup,

$\Psi (232,A)=(I+A).(I+A^{2}).(I+A^{4}).\{I+(A^{8} +A^{16}).(I+A^{16}).[I+(A^{32} +A^{64}).(I+A^{64} +A^{128})]\}$

olarak bulunur.

Örnek 2. 28. Dutta ve ark. (1992), $\Psi(232,A)$ matris polinomununu hesaplayalım.

$M = N = 232$

$\Gamma_1 = [\log_2 M] = [\log_2 232] = 7$

$M_1 = M-2^{\Gamma_1}$

$M_1 = 232-2^7 = 104$

$\Gamma_2 = [\log_2 M_1] = [\log_2 104] = 6$

$\Gamma_2 = 6$

$M_2 = M_1-2^{\Gamma_2} = 104-2^6 = 40$

$\Gamma_3 = [\log_2 M_2] = [\log_2 40] = 5$

$M_3 = M_2-2^{\Gamma_3} = 40-2^5 = 8$

$\Gamma_4 = [\log_2 M_3] = [\log_2 8] = 3$

$M_4 = M_3-2^3 = 8 - 8 = 0$

$\Psi_i = (I +A^{2^{\Gamma i+1}}).(I + A^{2^{\Gamma i+1}+1})\ldots(I + A^{2^{\Gamma_i -1}}),$ $(i = p-1, p-2, \ldots, 1)$

$\Psi_1 = I + A^{2^{\Gamma_2}} = I + A^{2^6} = I + A^{64}$

$\Psi_2 = I +A^{2^5} = I + A^{32}$

$\Psi_3 = (I + A^{2^3}).(I + A^{2^4}) = (I+ A^8).(I + A^{16})$

$\Psi_4 = (I + A^2).(I + A^4)$

$S_1 = I + A^{64} +A^{128}$

$S_2 = (I + A^{32}).(I + A^{64} +A^{128})+A^{192}$

$S_3 = (I+ A^8).(I + A^{16}).\{(I + A^{32}).(I + A^{64} +A^{128})+A^{192} \}+A^{2^7+2^6+2^5}$

$S_3 = (I+ A^8).(I + A^{16}).\{(I + A^{32}).(I + A^{64} +A^{128})+A^{192} \}+A^{224}$

$S_4 = (I + A^2).(I + A^4)\{(I+ A^8).(I + A^{16}).[(I + A^{32}).(I + A^{64} +A^{128})+A^{192}]+A^{224} \}$

$\Psi(232,A)=(I+A).(I+A^2).(I+A^4).\{(I+A^8).(I+A^{16}).[(I+A^{32}).(I+A^{64} +A^{128})+ A^{192}]+A^{224} \}$

olarak bulunur.

Örnek 2. 29. Dimitrov ve ark. (1994), $\Psi(232,A)$ matris polinomununu hesaplayalım.

$\Psi(232,A)= I + (A+A^2+A^3).\Psi(77, A^3)$

$= I + (A+A^2+A^3).\{I + A^3+A^6.(I+A^3+ A^6).\Psi(25, A^9)\}$

$=I+(A+A^2+A^3).\{I+A^3+A^6.(I+A^3+A^6).[I+(A^9+A^{18}+A^{27}).\Psi(8, A^{27})]\}$

$=I+(A+A^2+A^3).\{I+A^3+A^6.(I+A^3+A^6).[I+(A^9+A^{18}+A^{27}).\{I+A^{27}+A^{54}.(I+A^{27}+A^{54}).\Psi(2, A^{81})\}]\}$

$\Psi(232,A)=I+(A+A^2+A^3).\{I+A^3+A^6.(I+A^3+A^6).[I+(A^9+A^{18}+A^{27}).\{I+A^{27}+A^{54}.(I+A^{27}+A^{54}).(I+A^{81})\}]\}$

olarak bulunur.

Örnek 2. 30. Dimitrov ve ark. (1995) göre $\Psi(232,A)$ matris polinomununu hesaplayalım.

$\Psi(232,A) = I + (A+A^2+A^3).\Psi(77, A^3)$

$= I + (A+A^2+A^3).\{I +(A^3+A^6).\Psi(38, A^6)\}$

$= I + (A+A^2+A^3).\{I +(A^3+A^6).(I +A^6).\Psi(19, A^{12})\}$

$= I+(A+A^2+A^3).\{I+(A^3+A^6).(I+A^6).[I+(A^{12}+A^{24}+A^{36}).\Psi(6, A^{36})]\}$

$=I+(A+A^2+A^3)\{I+(A^3+A^6).(I+A^6).[I+(A^{12}+A^{24}+A^{36}).(I+A^{36}+A^{72}).\Psi(2,A^{108})]\}$

$\Psi(232,A)=I+(A+A^2+A^3).\{I+(A^3+A^6).(I+A^6).[I+(A^{12}+A^{24}+A^{36}).(I+A^{36}+A^{72}).(I+A^{108})]\}$

olarak bulunur.

Örnek 2. 31. Yeni Algoritma 1'e göre $\Psi(232,A)$ matris polinomununu hesaplayalım.

$232 = (3220)_4$

$A(0) = A$

$A(0+1) \leftarrow A(0).A(0) = A.A = A^2 = A(1)$

$A(1+1) \leftarrow A(1).A(0) = A^2.A = A^3 = A(2)$

$A(2+1) \leftarrow A(2).A(0) = A^3.A = A^4$

$232 = (3220)_4$ olduğundan $t = 3$ olur.

$p = 3\text{-}1 = 2$

$X = I+A(0)+A(1)$ ve $A^{4^t} \leftarrow A$ olduğundan,

$A^{64} \leftarrow A$ ve $X = I+A(0)+A(1)$

$X = I+A^{64}+A^{128}$ olur.

$i_2 = 2,\ \ i_2 \leftarrow A^{16} \leftarrow A$

$X = I+A(0)+A(1).(I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = I+A^{16}+(A^{16})^2.(I+A^{16}+(A^{16})^2+(A^{16})^3).X$

$X = I+A^{16}+A^{32}.(I+A^{16}+A^{32}+A^{48}).(I+A^{64}+A^{128})$

$i_1 = 2,\ \ i_1 \leftarrow A^4 \leftarrow A$

$X = I+A(0)+A(1).\{I+A(0)+A(1)+A(2)\}.X$

$X = I+A^4+(A^4)^2.(I+A^4+(A^4)^2+(A^4)^3).\{I+A^{16}+A^{32}.(I+A^{16}+A^{32}+A^{48}).$
$(I+A^{64}+A^{128})\}$

$X = I+A^4+A^8.(I+A^4+A^8+A^{12}).\{I+A^{16}+A^{32}.(I+A^{16}+A^{32}+A^{48}).(I+A^{64}+A^{128})\}$

$i_0 = 0,\ \ i_0 \leftarrow A^1 \leftarrow A$

$X = (I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = (I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+A^8.(I+A^4+A^8+A^{12}).[I+A^{16}+A^{32}.(I+A^{16}+A^{32}+A^{48}).$
$(I+A^{64}+A^{128})]\}$

olup,

$\Psi(232,A) = (I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+A^8.(I+A^4+A^8+A^{12}).[I+A^{16}+A^{32}.$
$(I+A^{16}+A^{32}+A^{48}).(I+A^{64}+A^{128})]\}$

olarak bulunur. Ya da,

$\Psi(232,A) = (I+A+A^2+A^3).G(58,A^4)$

$= (I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+A^8.(I+A^4+A^8+A^{12}).G(14,A^{16})\}$

$= (I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+A^8.(I+A^4+A^8+A^{12}).[I+A^{16}+A^{32}.$
$(I+A^{16}+A^{32}+A^{48}).G(3,A^{64})]\}$

$= (I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+A^8.(I+A^4+A^8+A^{12}).[I+A^{16}+A^{32}.$
$(I+A^{16}+A^{32}+A^{48}).(I+A^{64}+A^{128})]\}$

şeklinde de hesaplanabilir.

Örnek 2. 32. Yeni Algoritma 2'e göre $\Psi(232,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$$\Psi(232,A) = I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3+A^4).G(46,A^5)$$

$$=I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^5.(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20}).G(9,A^{25})\}$$

$$\Psi(232,A) =I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^5.(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20}).$$

$$[I+A^{25}+A^{50}+A^{75}+A^{100}.(I+A^{25}+A^{50}+A^{75}+A^{100})]\}$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 33. Dimitrov ve ark. (1994),

$$\Psi(768,A)=I+A+A^2+\ldots+A^{767}$$

matris polinomunu hesaplayalım.

$$\Psi(768,A) = (I + A+A^2).\ \Psi(256, A^3)$$

$$= (I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6+A^9).\Psi(85, A^9)\}$$

$$= (I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6+A^9).[I+(A^9+A^{18}+A^{27}).\Psi(28, A^{27})]\}$$

$$=(I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6+A^9).[I+(A^9+A^{18}+A^{27}).\{I+(A^{27}+A^{54}+A^{81}).$$

$$\Psi(9,A^{81})\}]\}$$

$$=(I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6+A^9).[I+(A^9+A^{18}+A^{27}).\{I+(A^{27}+A^{54}+A^{81}).$$

$$(I+A^{81}+A^{162}).\Psi(3,A^{243})\}]\}$$

$$\Psi(768,A) =(I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6+A^9).[I+(A^9+A^{18}+A^{27}).\{I+(A^{27}+A^{54}+A^{81}).$$

$$(I+A^{81}+A^{162}).(I+ A^{243}+A^{486})\}]\}$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 34. Dimitrov ve ark. (1995), $\Psi(768,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$$\Psi(768,A) = (I+A+A^2).\Psi(256,A^3)$$

$$= (I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6+A^9).\Psi(85, A^9)\}$$

$$= (I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6+A^9).[I+(A^9+A^{18}+A^{27}).\Psi(28, A^{27})]\}$$

$$= (I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6+A^9).[I+(A^9+A^{18}+A^{27}).\{I+(A^{27}+A^{54}+A^{81}).$$

$$\Psi(9, A^{81})\}]\}$$

$$= (I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6+A^9).[I+(A^9+A^{18}+A^{27}).\{I+(A^{27}+A^{54}+A^{81}).$$
$$(I+A^{81}+A^{162}).\Psi(3,A^{243})\}]\}$$

$$\Psi(768,A) = (I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6+A^9).[I+(A^9+A^{18}+A^{27}).\{I+(A^{27}+A^{54}+A^{81}).$$
$$(I+A^{81}+A^{162}).(I+A^{243}+A^{486})\}]\}$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 35. Yeni Algoritma 1'e göre $\Psi(768,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$768 = (30000)_4$

$A(0) = A$

$A(0+1) \leftarrow A(0).A(0) = A.A = A^2 = A(1)$

$A(1+1) \leftarrow A(1).A(0) = A^2.A = A^3 = A(2)$

$A(2+1) \leftarrow A(2).A(0) = A^3.A = A^4 = A(3)$

$768 = (30000)_4$ olduğundan $t = 4$ olur.

$p = 4-1 = 3$

$X = I+A(0)+A(1)$

$i_4 \leftarrow A^{256} \leftarrow A$

$X = I+ A^{256} + A^{512}$

$i_3 = 0$

$i_3 \leftarrow A^{64} \leftarrow A$

$X = (I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = (I+A^{64} + (A^{64})^2 + (A^{64})^3).(I+ A^{256} + A^{512})$

$X = (I+ A^{64} + A^{128} + A^{192}).(I+ A^{256} + A^{512})$

$i_2 = 0$

$i_2 \leftarrow A^{16} \leftarrow A$

$X = (I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = (I+A^{16} + (A^{16})^2 + (A^{16})^3).(I+ A^{64} + A^{128} + A^{192}).(I+ A^{256} + A^{512})$

$X = (I+ A^{16} + A^{32} + A^{48}).(I+ A^{64} + A^{128} + A^{192}).(I+ A^{256} + A^{512})$

$i_1 = 0$

$i_1 \leftarrow A^4 \leftarrow A$

$X = (I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = (I+A^4 + A^8 + A^{12}).(I+A^{16} + A^{32} + A^{48}).(I+A^{64} + A^{128} + A^{192}).(I+A^{256} + A^{512})$

$i_0 = 0, \quad i_0 \leftarrow A^1 \leftarrow A$

$X = (I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = (I+A+A^2 + A^3).(I+A^4 + A^8 + A^{12}).(I+A^{16} + A^{32} + A^{48}).(I+A^{64} + A^{128} + A^{192}).$
$(I+A^{256} + A^{512})$

olup,

$\Psi(768,A)=(I+A+A^2 + A^3).(I+A^4 + A^8 + A^{12}).(I+A^{16} + A^{32} + A^{48}).$
$(I+A^{64} + A^{128} + A^{192}).(I+A^{256} + A^{512})$

olarak bulunur. Ya da,

$\Psi(768,A) = (I+A+A^2 + A^3).G(192,A^4)$
$= (I+A+A^2 + A^3).(I+A^4 + A^8 + A^{12}).G(48,A^{16})$
$= (I+A+A^2 + A^3).(I+A^4 + A^8 + A^{12}).(I+A^{16} + A^{32} + A^{48}).G(12,A^{64})$
$= (I+A+A^2 + A^3).(I+A^4 + A^8 + A^{12}).(I+A^{16} + A^{32} + A^{48}).$
$(I+A^{64} + A^{128} + A^{192}).G(3,A^{256})$

$\Psi(768,A)= (I+A+A^2 + A^3).(I+A^4 + A^8 + A^{12}).(I+A^{16} + A^{32} + A^{48}).$
$(I+A^{64} + A^{128} + A^{192}).(I+A^{256} + A^{512})$

şeklinde de hesaplanabilir.

Örnek 2. 36. Yeni Algoritma 2'e göre $\Psi(768,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$\Psi(768,A) = I+A+A^2 + A^3.(I+A+A^2 + A^3 + A^4).G(153,A^5)$
$= I+A+A^2 + A^3.(I+A+A^2 + A^3 + A^4).\{I+A^5 + A^{10} + A^{15}.$
$(I+A^5 + A^{10} + A^{15} + A^{20}).G(30,A^{25})\}$
$= I+A+A^2 + A^3.(I+A+A^2 + A^3 + A^4).\{I+A^5 + A^{10} + A^{15}.$
$(I+A^5 + A^{10} + A^{15} + A^{20}).(I+A^{25} + A^{50} + A^{75} + A^{100}).G(6,A^{125})\}$
$= I+A+A^2 + A^3.(I+A+A^2 + A^3 + A^4).\{I+A^5 + A^{10} + A^{15}.$
$(I+A^5 + A^{10} + A^{15} + A^{20}).(I+A^{25} + A^{50} + A^{75} + A^{100}).$
$[I+A^{125}.(I+A^{125} + A^{250} + A^{375} + A^{500})]\}$

olarak bulunur.

Dimitrov ve ark. (1995), Dimitrov ve ark. (1994)' de verilen algoritmayı aşağıdaki şekilde vermektedirler.

$$G(N,A) = \begin{cases} (I + A+A^2).G(K,A^3), & N = 3K \\ I + (A+A^2+A^3).G(K, A^3), & N = 3K+1 \\ I + A.(A+A^2 + A^3).G(K\ A^3), & N = 3K+2 \end{cases}$$

Bu algoritmaya örnek olarak, $\Psi(1536,A)$ matris polinomunu aşağıdaki şekilde hesaplamışlardır.

$$\Psi(1536,A) = (I+A+A^2).\{I+A^3.(A^3+A^6+A^9).[I+A^9.(A^9+A^{18}+A^{27}).\{I+A^{27}.(A^{27}+A^{54}+A^{81}).(I+A^{81}+A^{162}).(I+A^{243}+A^{486}).(I+A^{729})\}]\}$$

$\Psi(1536,A)$ matris polinomunda 1536 tane toplama işlemi olması gerekirken, bu algoritma ile toplama işlemi sayısı 1497 olarak bulunmaktadır. Bu da verilen algoritmanın yanlış olduğunu göstermektedir.

$\Psi(1536,A)$ matris polinomunun Dimitrov ve ark. (1994), doğru çözümü,

$$\begin{aligned}\Psi(1536,A) &= (I + A+A^2).\Psi(512,A^3) \\ &= (I + A+A^2).\{I + A^3+A^6.(I+A^3+ A^6).\Psi(170, A^9)\} \\ &= (I + A+A^2).\{I + A^3+A^6.(I+A^3+ A^6).[I + A^9+A^{18}.(I+A^9+ A^{18}) \\ &\quad .\ \Psi(56, A^{27})]\} \\ &= (I + A+A^2).\{ I + A^3+A^6.(I+A^3+ A^6).[I + A^9+A^{18}.(I+A^9+ A^{18}). \\ &\quad \{I + A^{27}+A^{54}.(I+A^{27}+ A^{54}).\Psi(18, A^{81})\}]\} \\ &= (I + A+A^2).\{ I + A^3+A^6.(I+A^3+ A^6).[I + A^9+A^{18}.(I+A^9+ A^{18}). \\ &\quad \{I + A^{27}+A^{54}.(I+A^{27}+ A^{54}).(I + A^{81}+A^{162}).\Psi(6,A^{243})\}]\} \\ &= (I + A+A^2).\{ I + A^3+A^6.(I+A^3+ A^6).[I + A^9+A^{18}.(I+A^9+ A^{18}). \\ &\quad \{I + A^{27}+A^{54}.(I+A^{27}+ A^{54}).(I + A^{81}+A^{162}).(I + A^{243}+A^{486}). \\ &\quad (I+A^{729})\}]\}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 37. Dimitrov ve ark. (1995), $\Psi(1536,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$$\Psi(1536,A) = (I+A+A^2).\Psi(512,A^3)$$

$$= (I+A+A^2).(I+A^3).\Psi(256, A^6)$$

$$= (I+A+A^2).(I+A^3).\{I+(A^6+A^{12}+A^{18}).\Psi(85, A^{18})\}$$

$$=(I+A+A^2).(I+A^3).\{I+(A^6+A^{12}+A^{18}).[I+(A^{18}+A^{36}+A^{54}).\Psi(28,A^{54})]\}$$

$$=(I+A+A^2).(I+A^3).\{I+(A^6+A^{12}+A^{18}).[I+(A^{18}+A^{36}+A^{54}).$$

$$\{I + (A^{54}+A^{108}+A^{162}).\Psi(9, A^{162})\}]\}$$

$$= (I+A+A^2).(I+A^3).\{I+(A^6+A^{12}+A^{18}).[I+(A^{18}+A^{36}+A^{54}).$$

$$\{I + (A^{54}+A^{108}+A^{162}).(I + A^{162}+A^{324}).\Psi(3,A^{486})\}]\}$$

$$\Psi(1536,A)=(I+A+A^2).(I+A^3).\{I+(A^6+A^{12}+A^{18}).[I+(A^{18}+A^{36}+A^{54}).$$

$$\{I+(A^{54}+A^{108}+A^{162}).(I+A^{162}+A^{324}).(I+A^{486}+A^{972})\}]\}$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 38. Yeni Algoritma 1'e göre $\Psi(1536,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$1536 = (120000)_4$

$A(0) = A$

$A(0+1) \leftarrow A(0).A(0) = A.A = A^2 = A(1)$

$A(1+1) \leftarrow A(1).A(0) = A^2.A = A^3 = A(2)$

$A(2+1) \leftarrow A(2).A(0) = A^3.A = A^4 = A(3)$

$t = 5$ ve $p = 5-1 = 4$ 'tür.

$i_4 = 2$

$i_4 \leftarrow A^{256} \leftarrow A$

$X = I+A(0)+A(1).(I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = I+A^{256} + (A^{256})^2.(I+A^{256} + (A^{256})^2 + (A^{256})^3).I$

$X = I+A^{256}+A^{512}.(I+ A^{256}+A^{512}+ A^{768})$

$i_3 = 0$

$i_3 \leftarrow A^{64} \leftarrow A$

$X = (I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = (I+A^{64} + (A^{64})^2 + (A^{64})^3).X$

$X = (I+ A^{64} + A^{128} + A^{192}).\{ I+A^{256} +A^{512}.(I+ A^{256} +A^{512} + A^{768})\}$

$i_2 = 0, \quad i_2 \leftarrow A^{16} \leftarrow A$

$X = (I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = (I+A^{16} + (A^{16})^2 + (A^{16})^3).(I+ A^{64} + A^{128} + A^{192}).\{ I+A^{256} +A^{512}.$
$(I+ A^{256} +A^{512} + A^{768})\}$

$X =(I+A^{16} +A^{32} +A^{48}).(I+A^{64} + A^{128} + A^{192}).\{I+A^{256} +A^{512}.(I+A^{256} +A^{512} + A^{768})\}$

$i_1 = 0, \quad i_1 \leftarrow A^4 \leftarrow A$

$X = (I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = (I+A^4 + (A^4)^2 + (A^4)^3).(I+ A^{16} + A^{32} + A^{48}).(I+ A^{64} + A^{128} + A^{192}).$
$\{I+A^{256} +A^{512}.(I+ A^{256} +A^{512} + A^{768})\}$

$X = (I+A^4 +A^8 +A^{12}).(I+A^{16} + A^{32} + A^{48}).(I+A^{64} +A^{128} +A^{192}).\{I+A^{256} +A^{512}.$
$(I+A^{256} +A^{512} + A^{768})\}$

$i_0 = 0, \quad i_0 \leftarrow A^1 \leftarrow A$

$X = (I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X =(I+A+A^2 +A^3).(I+A^4 +A^8 +A^{12}).(I+A^{16} +A^{32} +A^{48}).(I+A^{64} +A^{128} +A^{192}).$
$\{I+A^{256} +A^{512}.(I+ A^{256} +A^{512} + A^{768})\}$

olup,

$\Psi(1536,A)=(I+A+A^2 +A^3).(I+A^4 +A^8 +A^{12}).(I+A^{16} +A^{32} +A^{48}).$
$(I+A^{64} +A^{128} +A^{192}).\{I+A^{256} +A^{512}.(I+A^{256} +A^{512} + A^{768})\}$

olarak bulunur. Ya da,

$\Psi(1536,A) = (I+A+A^2 +A^3).G(384,A^4)$
$= (I+A+A^2 +A^3).(I+A^4 +A^8 +A^{12}).G(96,A^{16})$
$= (I+A+A^2 +A^3).(I+A^4 +A^8 +A^{12}).(I+A^{16} +A^{32} +A^{48}).G(24,A^{64})$
$= (I+A+A^2 +A^3).(I+A^4 +A^8 +A^{12}).(I+A^{16} +A^{32} +A^{48}).$
$(I+A^{64} +A^{128} +A^{192}).G(6,A^{256})$

$\Psi(1536,A) = (I+A+A^2 +A^3).(I+A^4 +A^8 +A^{12}).(I +A^{16} +A^{32} +A^{48}).$
$(I+A^{64} +A^{128} +A^{192}).\{I+A^{256} +A^{512}.(I+A^{256} +A^{512} +A^{768})\}$

şeklinde de hesaplanabilir.

Örnek 2. 39. Yeni Algoritma 2'e göre $\Psi(1536,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$$\Psi(1536,A) = I+A.(I+A+A^2+A^3+A^4).G(307,A^5)$$

$$=I+A.(I+A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^5+A^{10}.$$

$$(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20}).G(61,A^{25})\}$$

$$= I+A.(I+A+A^2+A^3+A^4).\{ I+A^5+A^{10}.(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20}).$$

$$[I+A^{25}.(I+A^{25}+A^{50}+A^{75}+A^{100}).G(12,A^{125})]\}$$

$$= I+A.(I+A+A^2+A^3+A^4).\{ I+A^5+A^{10}.(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20}).$$

$$[I+A^{25}.(I+A^{25}+A^{50}+A^{75}+A^{100}).\{I+A^{125}+A^{250}.$$

$$(I+A^{125}+A^{250}+A^{375}+A^{500}).G(2,A^{625})\}]\}$$

$$\Psi(1536,A) = I+A.(I+A+A^2+A^3+A^4).\{ I+A^5+A^{10}.(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20}).$$

$$[I+A^{25}.(I+A^{25}+A^{50}+A^{75}+A^{100}).\{I+A^{125}+A^{250}.$$

$$(I+A^{125}+A^{250}+A^{375}+A^{500}).(I+A^{625})\}]\}$$

olarak bulunur.

Örnek 2. 40. Yeni Algoritma 1'e göre $\Psi(57,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$A(0) = A$

$A(0+1) \leftarrow A(0).A(0) = A.A = A^2 = A(1)$

$A(1+1) \leftarrow A(1).A(0) = A^2.A = A^3 = A(2)$

$A(2+1) \leftarrow A(2).A(0) = A^3.A = A^4 = A(3)$

$57 = (321)_4$ olduğundan $t = 2$ olur.

$X = I+A(0)+A(1)$ olarak alınır ve $A^{16} \leftarrow A$ 'dır.

$X = I+A(0)+A(1)$

$X = I+A^{16}+(A^{16})^2$

$X = I+A^{16}+A^{32}$

$p = 2-1 = 1$

$i_1 = 2$

$i_1 \leftarrow A^4 \leftarrow A$

$X = I+A(0)+A(1).(I+A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = I+A^4 + (A^4)^2.(I+A^4 + (A^4)^2 + (A^4)^3).(I+ A^{16} + A^{32})$

$X =I+ A^4 + A^8.(I+ A^4 + A^8 + A^{12}).(I+ A^{16} + A^{32})$

$i_0 = 1$

$i_0 \leftarrow A^1 \leftarrow A$

$X = I+(A(0)+A(1)+A(2)+A(3)).X$

$X = I+(A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^4+A^8.(I+A^4+A^8+A^{12}).(I+A^{16}+A^{32})\}$

olup,

$\Psi(57,A)=I+(A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^4+A^8.(I+A^4+A^8+A^{12}).(I+A^{16}+A^{32})\}$

olarak bulunur. Ya da,

$\Psi(57,A) = I+A.(I+A+A^2+A^3).G(14,A^4),$

$=I+A.(I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+(A^4)^2.(I+A^4+(A^4)^2+(A^4)^3).G(3,(A^4)^4)\}$

$=I+A.(I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+A^8.(I+A^4+A^8+A^{12}).(I+A^{16}+A^{32})\}$

şeklinde de hesaplanabilir.

Örnek 2. 41. Yeni Algoritma 1'e göre $\Psi(45,A)$ matris polinomunu hesaplayalım.

$45 = (231)_4$

$A(0) = A$

$A(0+1) \leftarrow A(0).A(0) = A.A = A^2 = A(1)$

$A(1+1) \leftarrow A(1).A(0) = A^2.A = A^3 = A(2)$

$A(2+1) \leftarrow A(2).A(0) = A^3.A = A^4 = A(3)$

$45 = (231)_4$ olduğundan $t = 2$ ' dir.

$X = I+A(0)$ olarak alınır.

$A^{16} \leftarrow A$

$X = I+ A^{16}$

$p = 2-1 =1$

$i_1 = 3$

$i_1 \leftarrow A^4 \leftarrow A$

$X = I+A(0)+A(1)+A(2).(I +A(0)+A(1)+A(2)).X$

$X = I+A^4 + (A^4)^2 + (A^4)^3.(I+A^4 + (A^4)^2 + (A^4)^3).(I+ A^{16})$

$X = I + A^4 + A^8 + A^{12}.(I + A^4 + A^8 + A^{12}).(I + A^{16})$

$i_0 = 1$

$i_0 \leftarrow A^1 \leftarrow A$

$X = I+(A(0)+A(1)+A(2)+A(3)).X$

$X = I+(A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^4+A^8+A^{12}.(I+A^4+A^8+A^{12}).(I+A^{16})\}$

olup,

$\Psi(45,A) = I+(A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^4+A^8+A^{12}.(I+A^4+A^8+A^{12}).(I+A^{16})\}$

olarak bulunur. Ya da,

$\Psi(45,A) = I+A.(I+A+A^2+A^3).G(11,A^4)$

$=I+A(I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+(A^4)^2+(A^4)^3.(I+A^4+(A^4)^2+(A^4)^3).G(2,A^{16})\}$

$\Psi(45,A) = I + A.(I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+A^8+A^{12}.(I+A^4+A^8+A^{12}).(I+A^{16})\}$

şeklinde de hesaplanabilir.

3. Ψ(N, A) MATRİS POLİNOMUNUN ALGORİTMALAR YARDIMIYLA HESAPLANMASI İLE İLGİLİ NÜMERİK ÖRNEKLER

Örnek 3. 1. Westreich (1989),

$$\Psi(22, A)=I+(A+A^2+A^3).\{(I+A^{12}).(I+A^3+A^6)+A^9\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(22,A) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}\right).$$

$$\left\{\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 24 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 12 & 1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 18 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix}22 & 0\\ 462 & 22\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 2. Lei ve ark. (1992),

$$\Psi(22,A)=(I+A).\{I+(A^2+A^4).[I+(A^4+A^8).(I+A^8)]\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(22,A) =\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right).\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}\right).\right.$$

$$\left.\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{bmatrix}\right)\right]\right\}$$

$$= \begin{bmatrix}22 & 0\\ 462 & 22\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 3. Dutta ve ark. (1992),

$$\Psi(22,A)=(I+A).\{(I+A^2).[(I+A^4).(I+A^8)+A^{16}]+A^{20}\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi\,(22,A)=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right).\left\{\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}\right).\right.$$

$$\left.\left[\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 32 & 1\end{bmatrix}\right]+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 40 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

olup,

$$\Psi\,(22,A)=\begin{bmatrix}22 & 0\\ 462 & 22\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 4. Dimitrov ve ark. (1994),

$$\Psi\,(22,A)=I+(A+A^{2}+A^{3}).\{I+(A^{3}+A^{6}+A^{9}).(I+A^{9})\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi\,(22,A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}\right).$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 12 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 18 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 18 & 1\end{bmatrix}\right)\right\}$$

olup,

$$\Psi\,(22,A)=\begin{bmatrix}22 & 0\\ 462 & 22\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 5. Dimitrov ve ark. (1995),

$$\Psi\,(22,A)=I+(A+A^{2}+A^{3}).\{I+(A^{3}+A^{6}+A^{9}).(I+A^{9})\}$$

olarak bulunmuştu. Bunu $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygularsak

$$\Psi\,(22,A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}\right).$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 12 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 18 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 18 & 1\end{bmatrix}\right)\right\}$$

olup,

$$\Psi\,(22,A) = \begin{bmatrix}22 & 0\\ 462 & 22\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 6. Yeni Algoritma 1'e göre, Bölüm 2' de

$$\Psi\,(22,A)=I+A+A^{2}.(I+A+A^{2}+A^{3}).\{I+A^{4}.(I+A^{4}+A^{8}+A^{12})\}$$

olarak bulunmuştu. Bunu $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygularsak

$$\Psi\,(22,A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}\right).$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 24 & 1\end{bmatrix}\right)\right\}$$

olup,

$$\Psi\,(22,A) = \begin{bmatrix}22 & 0\\ 462 & 22\end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 3. 7. Yeni Algoritma 2'e göre,Bölüm 2' de

$$\Psi\,(22,A)=I+A+A^{2}.(I+A+A^{2}+A^{3}+A^{4}).(I+A^{5}+A^{10}+A^{15})$$

olarak bulunmuştu. Bunu $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi\,(22,A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}\right).$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 10 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 20 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 30 & 1\end{bmatrix}\right)$$

olur. Böylece $\Psi\,(22,A) = \begin{bmatrix}22 & 0\\ 462 & 22\end{bmatrix}$

olarak bulunur.

Örnek 3. 8. Westreich (1989),

$$\Psi(30,A)=(I+A).(I+A^2+A^4).\{I+(A^6+A^{12}).(I+A^{12})\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(30,A)=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}\right).$$
$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 12 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 24 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 24 & 1\end{bmatrix}\right)\right\}$$

olup,

$$\Psi(30,A)=\begin{bmatrix}30 & 0\\ 870 & 30\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 9. Lei ve ark. (1992),

$$\Psi(30,A)=(I+A).\{I+(A^2+A^4).[I+(A^4+A^8).(I+A^8+A^{16})]\}$$

olarak bulunmuştu. Bunu $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(30,A)=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right).\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}\right).\right.$$
$$\left.\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 32 & 1\end{bmatrix}\right)\right]\right\}$$
$$=\begin{bmatrix}30 & 0\\ 870 & 30\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 10. Dutta ve ark. (1992),

$$\Psi(30,A)=(I+A).\{(I+A^2).[(I+A^4).(I+A^8+A^{16})+A^{24}]+A^{28}\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(30,A)=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\right).\left\{\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}\right).\right.$$

$$\left.\left[\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\8&1\end{bmatrix}\right).\left(\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\16&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\32&1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}1&0\\48&1\end{bmatrix}\right]+\begin{bmatrix}1&0\\56&1\end{bmatrix}\right\}$$

olur. Böylece

$$\Psi(30,A)=\begin{bmatrix}30&0\\870&30\end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 3. 11. Dimitrov ve ark. (1994),

$$\Psi(30,A)=(I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6+A^9).(I+A^9+A^{18})\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(30,A)=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}\right).$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1&0\\6&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\12&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\18&1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\18&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\36&1\end{bmatrix}\right)\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}30&0\\870&30\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 12. Dimitrov ve ark. (1995),

$$\Psi(30,A)=(I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6+A^9).(I+A^9+A^{18})\}$$

olarak bulunmuştu. Bunu $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(30,A)=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}\right).$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1&0\\6&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\12&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\18&1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\18&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\36&1\end{bmatrix}\right)\right\}$$

olur. Böylece

$$\Psi(30,A)=\begin{bmatrix}30 & 0\\ 870 & 30\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 13. Yeni Algoritma 1'e göre,

$$\Psi(30,A)=I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+A^8+A^{12}.(I+A^4+A^8+A^{12})\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(30,A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}\right).$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 24 & 1\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 24 & 1\end{bmatrix}\right)\right\}$$

olup,

$$\Psi(30,A)=\begin{bmatrix}30 & 0\\ 870 & 30\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 14. Yeni Algoritma 2'e göre,

$$\Psi(30,A)=(I+A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^5.(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20})\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(30,A)=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}\right).\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 10 & 1\end{bmatrix}.\right.$$

$$\left.\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 10 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 20 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 30 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 40 & 1\end{bmatrix}\right)\right\}$$

olup,

$$\Psi(30,A)=\begin{bmatrix}30 & 0\\ 870 & 30\end{bmatrix}$$

elde edilir.

Örnek 3. 15. Lei ve ark. (1992),

$$\Psi(82,A)=(I+A).\{I+(A^2+A^4).(I+A^4).(I+A^8).[I+(A^{16}+A^{32}).(I+A^{32})]\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(82,A)=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right).\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}\right).\right.$$

$$\left.\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{bmatrix}\right).\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 32 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 64 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 64 & 1\end{bmatrix}\right)\right]\right\}$$

olur. Böylece

$$\Psi(82,A)=\begin{bmatrix}82 & 0\\ 6642 & 82\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 16. Dutta ve ark. (1992),

$$\Psi(82,A)=(I+A).\{(I+A^2).(I+A^4).(I+A^8).[(I+A^{16}).(I+A^{32})+A^{64}]+A^{80}\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(82,A)=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right).\left\{\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}\right).\right.$$

$$\left.\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{bmatrix}\right).\left[\left(\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 32 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 64 & 1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 128 & 1\end{bmatrix}\right]\right.$$

$$\left.+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 160 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}82 & 0\\ 6642 & 82\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 17. Dimitrov ve ark. (1994),

$$\Psi(82,A)=I+(A+A^2+A^3).(I+A^3+A^6).(I+A^9+A^{18}).(I+A^{27}+A^{54})$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(82,A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 12 & 1\end{bmatrix}\right).$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 18 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 36 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 54 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 108 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}82 & 0\\ 6642 & 82\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 18. Dimitrov ve ark. (1995),

$$\Psi(82,A)=I+(A+A^2+A^3).(I+A^3+A^6).(I+A^9+A^{18}).(I+A^{27}+A^{54})$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(82,A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 12 & 1\end{bmatrix}\right).$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 18 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 36 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 54 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 108 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}82 & 0\\ 6642 & 82\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 19. Yeni Algoritma 1'e göre,

$$\Psi(82,A)=I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3).(I+A^4+A^8+A^{12}).\{I+A^{16}.(I+A^{16}+A^{32}+A^{48})\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(82,A) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}\right).$$
$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 24 & 1\end{bmatrix}\right).$$
$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 32 & 1\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 32 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 64 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 96 & 1\end{bmatrix}\right)\right\}$$

olup,

$$\Psi(82,A) = \begin{bmatrix}82 & 0\\ 6642 & 82\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 20. Yeni Algoritma 2'e göre,

$$\Psi(82,A)=I+A+A^2(I+A+A^2+A^3+A^4).\left\{I+A^5.(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20}).(I+A^{25}+A^{50})\right\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(82,A)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}\right).$$
$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 10 & 1\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 10 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 20 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 30 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 40 & 1\end{bmatrix}\right).$$
$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 50 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 100 & 1\end{bmatrix}\right)\right\}$$
$$=\begin{bmatrix}82 & 0\\ 6642 & 82\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 21. Lei ve ark. (1992),

$$\Psi(105,A)=I+(A+A^2).(I+A^2).(I+A^4).\{I+(A^8+A^{16}).(I+A^{16}).(I+A^{32}+A^{64})\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(105,A)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\8&1\end{bmatrix}\right).$$
$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1&0\\16&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\32&1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\32&1\end{bmatrix}\right).\right.$$
$$\left.\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\64&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\128&1\end{bmatrix}\right)\right\}$$

olup,

$$\Psi(105,A)=\begin{bmatrix}105&0\\10920&105\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Örnek 3. 22. Dutta ve ark. (1992),

$$\Psi(105,A)=I+A.(I+A).(I+A^2).(I+A^4).\{(I+A^8).(I+A^{16}).(I+A^{32}+A^{64})+A^{96}\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(105,A)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}\right).$$
$$\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\8&1\end{bmatrix}\right).\left\{\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\16&1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\32&1\end{bmatrix}\right).\right.$$
$$\left.\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\64&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\128&1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}1&0\\192&1\end{bmatrix}\right\}$$
$$=\begin{bmatrix}105&0\\10920&105\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 23. Dimitrov ve ark. (1994),

$$\Psi(105,A)=(I+A+A^2).\left\{I+A^3+A^6.(I+A^3+A^6).[I+A^9+A^{18}.(I+A^9+A^{18}).(I+A^{27}+A^{54})]\right\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(105,A)=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}\right).\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\6&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\12&1\end{bmatrix}.\right.$$

$$\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\6&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\12&1\end{bmatrix}\right).\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\18&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\36&1\end{bmatrix}.\right.$$

$$\left.\left.\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\18&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\36&1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\54&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\108&1\end{bmatrix}\right)\right]\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}105&0\\10920&105\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 24. Dimitrov ve ark. (1995),

$$\Psi(105,A)=(I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6).[I+(A^6+A^{12}).(I+A^{12}).(I+A^{24}+A^{48}+A^{72})]\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(105,A)=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}\right).\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1&0\\6&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\12&1\end{bmatrix}\right).\right.$$

$$\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1&0\\12&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\24&1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\24&1\end{bmatrix}\right).\right.$$

$$\left.\left.\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\48&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\96&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\144&1\end{bmatrix}\right)\right]\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}105&0\\10920&105\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 25. Yeni Algoritma 1'e göre,

$$\Psi(105,A)=I+A.(I+A+A^2+A^3).\left\{I+A^4+A^8.\left[I+A^4+A^8+A^{12}).\left\{I+A^{16}+A^{32}.(I+A^{16}+A^{32}+A^{48})\right\}\right]\right\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(105,A)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\6&1\end{bmatrix}\right).$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\8&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\16&1\end{bmatrix}.\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\8&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\16&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\24&1\end{bmatrix}.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\32&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\64&1\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\32&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\64&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\96&1\end{bmatrix}\right)\right]\right]\right\}$$

olup,

$$\Psi(105,A)=\begin{bmatrix}105&0\\10920&105\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 26. Yeni Algoritma 2'e göre,

$$\Psi(105,A)=(I+A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^5.(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20}).(I+A^{25}+A^{50}+A^{75})\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(105,A)=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\6&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\8&1\end{bmatrix}\right).$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\10&1\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\10&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\20&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\30&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\40&1\end{bmatrix}\right)\right.$$

$$\left..\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\50&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\100&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\150&1\end{bmatrix}\right)\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}105&0\\10920&105\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 27. Lei ve ark. (1992),

$$\Psi(232,A)=(I+A).(I+A^2).(I+A^4).\{I+(A^8+A^{16}).(I+A^{16}).[I+(A^{32}+A^{64}).(I+A^{64}+A^{128})]\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi\,(232,A) = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}\right)\cdot$$

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 32 & 1\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 32 & 1\end{bmatrix}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 64 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 128 & 1\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 128 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 256 & 1\end{bmatrix}\right)\right]\right\}$$

$$= \begin{bmatrix}232 & 0\\ 53592 & 232\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 28. Dutta ve ark. (1992),

$\Psi(232,A)=(I+A).(I+A^2).(I+A^4).\{(I+A^8).(I+A^{16}).[(I+A^{32}).(I+A^{64}+A^{128})+A^{192}]+A^{224}\}$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi\,(232,A) = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}\right)\cdot$$

$$\left\{\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 32 & 1\end{bmatrix}\right)\right.$$

$$\left[\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 64 & 1\end{bmatrix}\right)\cdot\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 128 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 256 & 1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 384 & 1\end{bmatrix}\right]+$$

$$\left.\begin{bmatrix}1 & 0\\ 448 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

$$= \begin{bmatrix}232 & 0\\ 53592 & 232\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 29. Dimitrov ve ark. (1994),

$\Psi\,(232,A)=I+(A+A^2+A^3).\{I+A^3+A^6.(I+A^3+A^6).[I+(A^9+A^{18}+A^{27}).\{I+A^{27}+A^{54}$

$.(I+A^{27}+A^{54}).(I+A^{81})\}]\}$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi\,(232,A) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}\right).\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 12 & 1\end{bmatrix}.\right.$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 12 & 1\end{bmatrix}\right).\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 18 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 36 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 54 & 1\end{bmatrix}\right).\right.$$

$$\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 54 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 108 & 1\end{bmatrix}.\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 54 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 108 & 1\end{bmatrix}\right).\right.$$

$$\left.\left.\left.\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 162 & 1\end{bmatrix}\right)\right]\right]\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}232 & 0\\ 53592 & 232\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 30. Dimitrov ve ark. (1995),

$$\Psi\,(232,A)=I+(A+A^{2}+A^{3})\{I+(A^{3}+A^{6}).(I+A^{6}).[I+(A^{12}+A^{24}+A^{36}).(I+A^{36}+A^{72}).$$
$$(I+A^{108})]\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi\,(232,A) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}\right).\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 12 & 1\end{bmatrix}\right).\right.$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 12 & 1\end{bmatrix}\right).\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 24 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 48 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 72 & 1\end{bmatrix}\right).\right.$$

$$\left.\left.\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 72 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 144 & 1\end{bmatrix}\right).\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 216 & 1\end{bmatrix}\right)\right]\right\}$$

$$=\begin{bmatrix}232 & 0\\ 53592 & 232\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 31. Yeni Algoritma 1'e göre,

$$\Psi(232,A) = (I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+A^8.(I+A^4+A^8+A^{12}).$$
$$[I+A^{16}+A^{32}.(I+A^{16}+A^{32}+A^{48}).(I+A^{64}+A^{128})]\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(232,A) = \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}\right).\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{bmatrix}.\right.$$
$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 16 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 24 & 1\end{bmatrix}\right).\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 32 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 64 & 1\end{bmatrix}.\right.$$
$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 32 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 64 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 96 & 1\end{bmatrix}\right)$$
$$\left.\left.\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 128 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 256 & 1\end{bmatrix}\right)\right]\right\}$$
$$=\begin{bmatrix}232 & 0\\ 53592 & 232\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 3. 32. Yeni Algoritma 2'e göre,

$$\Psi(232,A) = I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^5.(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20}).$$
$$[I+A^{25}+A^{50}+A^{75}+A^{100}.(I+A^{25}+A^{50}+A^{75}+A^{100})]\}$$

olarak bulunmuştu. Bu algoritmayı $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ matrisine uygulayalım.

$$\Psi(232,A) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}.$$
$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{bmatrix}\right).\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 10 & 1\end{bmatrix}.\right.$$
$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 10 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 20 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 30 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 40 & 1\end{bmatrix}\right).$$
$$\left[\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 50 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 100 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 150 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 200 & 1\end{bmatrix}.\right.$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 50 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 100 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 150 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 200 & 1\end{bmatrix}\right)\Bigg]\Bigg\}$$

$$= \begin{bmatrix}232 & 0\\ 53592 & 232\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

4. Ψ(N, A) MATRİS POLİNOMUNUN HESAPLANMASI İLE İLGİLİ ALGORİTMALARIN KARŞILAŞTIRILMASI

Westreich (1989),

$$\Psi(22,A) = I + (A + A^2 + A^3).\{(I+A^{12}).(I+A^3+A^6) + A^9\},$$

7 matris çarpımı içermektedir.

Lei ve ark. (1992),

$$\Psi(22,A)=(I+A).\{I+(A^2 + A^4).[I+(A^4 + A^8).(I+ A^8)]\},$$

6 matris çarpımı içermektedir.

Dutta ve ark. (1992),

$$\Psi(22,A)=(I+A).\{(I+A^2).[(I+A^4).(I+A^8)+A^{16}]+A^{20}\},$$

8 matris çarpımı içermektedir.

Dimitrov ve ark. (1994),

$$\Psi(22,A)=I+(A+A^2+A^3).\{I+(A^3+A^6+A^9).(I+A^9)\},$$

6 matris çarpımı içermektedir.

Dimitrov ve ark. (1995),

$$\Psi(22,A)=I+(A+A^2+A^3).\{I+(A^3+A^6+A^9).(I+A^9)\},$$

6 matris çarpımı içermektedir.

Yeni Algoritma 1,

$$\Psi(22,A)=I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3).\{I+A^4.(I+A^4+A^8+A^{12})\},$$

8 matris çarpımı içermektedir.

Yeni Algoritma 2,

$$\Psi(22,A) = I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3+A^4).(I+A^5+A^{10}+A^{15}),$$

8 matris çarpımı içermektedir.

Westreich (1989),

$$\Psi(30,A) = (I + A).(I+ A^2+A^4).\{I+ (A^6+A^{12}).(I+ A^{12})\},$$

7 matris çarpımı içermektedir.

Lei ve ark. (1992),

$$\Psi(30,A)=(I+A).\{I+(A^2+A^4).[I+(A^4+A^8).(I+A^8+A^{16})]\},$$

7 matris içermektedir.

Dutta ve ark. (1992),

$$\Psi(30,A)=(I+A).(I+A^2).[(I+A^4).(I+A^8+A^{16})+A^{24}] + A^{28}\}$$

9 matris çarpımı içermektedir.

Dimitrov ve ark. (1994),

$$\Psi(30,A)=(I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6+A^9).(I+A^9+A^{18})\},$$

7 matris çarpımı içermektedir.

Dimitrov ve ark. (1995),

$$\Psi(30,A) = (I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6+A^9).(I+A^9+A^{18})\},$$

7 matris çarpımı içermektedir.

Yeni Algoritma 1,

$$\Psi(30,A)=I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+A^8+A^{12}.(I+A^4+A^8+A^{12})\},$$

8 matris çarpımı içermektedir.

Yeni Algoritma 2,

$$\Psi(30,A) = (I+A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^5.(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20})\},$$

9 matris çarpımı içermektedir.

Lei ve ark. (1992),

$$\Psi(82,A)=(I+A).\{I+(A^2+A^4).(I+A^4).(I+A^8).[I+(A^{16}+A^{32}).(I+A^{32})]\},$$

10 matris çarpımı içermektedir.

Dutta ve ark. (1992),

$$\Psi(82,A)=(I+A).\{(I+A^2).(I+A^4).(I+A^8).[(I+A^{16}).(I+A^{32})+A^{64}]+A^{80}\},$$

12 matris çarpımı içermektedir.

Dimitrov ve ark. (1994),

$$\Psi(82,A)=I+(A+A^2+A^3).(I+A^3+A^6).(I+A^9+A^{18}).(I+A^{27}+A^{54}),$$

10 matris çarpımı içermektedir.

Dimitrov ve ark. (1995),

$$\Psi(82,A)=I+(A+A^2+A^3).(I+A^3+A^6).(I+A^9+A^{18}).(I+A^{27}+A^{54}),$$

10 matris çarpımı içermektedir.

Yeni Algoritma 1,

$$\Psi(82,A)=I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3).(I+A^4+A^8+A^{12}).\{I+A^{16}.(I+A^{16}+A^{32}+A^{48})\}$$

12 matris çarpımı içermektedir.

Yeni Algoritma 2,

$$\Psi(82,A) = I+A+A^2(I+A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^5(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20}).(I+A^{25}+A^{50})\},$$

13 matris çarpımı içermektedir.

Lei ve ark. (1992),

$$\Psi(105,A)=I+(A+A^2).(I+A^2).(I+A^4).\{I+(A^8+A^{16}).(I+A^{16}).(I+A^{32}+A^{64})\},$$

11 matris çarpımı içermektedir.

Dutta ve ark. (1992),

$$\Psi(105,A)=I+A.(I+A).(I+A^2).(I+A^4).\{(I+A^8).(I+A^{16}).(I+A^{32}+A^{64})+A^{96}\},$$

13 matris çarpımı içermektedir.

Dimitrov ve ark. (1994),

$$\Psi(105,A) = (I+A+A^2).\{I+A^3+A^6.(I+A^3+A^6).[I+A^9+A^{18}.(I+A^9+A^{18}).$$
$$(I+A^{27}+A^{54})]\},$$

12 matris çarpımı içermektedir.

Dimitrov ve ark. (1995),

$$\Psi(105,A) = (I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6).[I+(A^6+A^{12}).(I+A^{12}).(I+A^{24}+A^{48}+A^{72})]\}$$

11 matris çarpımı içermektedir.

Yeni Algoritma 1,

$$\Psi(105,A) = I+A.(I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+A^8.(I+A^4+A^8+A^{12}).$$
$$[I+A^{16}+A^{32}.(I+A^{16}+A^{32}+A^{48})]\},$$

13 matris çarpımı içermektedir.

Yeni Algoritma 2,

$$\Psi(105,A)=(I+A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^5.(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20}).(I+A^{25}+A^{50}+A^{75})\}$$

13 matris çarpımı içermektedir.

Lei ve ark. (1992),

$$\Psi(232,A) = (I+A).(I+A^2).(I+A^4).\{I+(A^8+A^{16}).(I+A^{16}).$$
$$[I+(A^{32}+A^{64}).(I+A^{64}+A^{128})]\},$$

13 matris çarpımı içermektedir.

Dutta ve ark. (1992),

$$\Psi(232,A) = (I+A).(I+A^2).(I+A^4).\{(I+A^8).(I+A^{16}).[(I+A^{32}).$$
$$(I+A^{64}+A^{128})+A^{192}]+A^{224}\},$$

15 matris çarpımı içermektedir.

Dimitrov ve ark. (1994),

$$\Psi(232,A) = I+(A+A^2+A^3).\{I+A^3+A^6.(I+A^3+A^6).[I+(A^9+A^{18}+A^{27}).$$
$$\{I + A^{27}+A^{54}.(I+A^{27} + A^{54}).(I+ A^{81})\}]\},$$

14 matris çarpımı içermektedir.

Dimitrov ve ark. (1995),

$$\Psi(232,A) = I+(A+A^2+A^3).\{I+(A^3+A^6).(I+A^6).[I+(A^{12} +A^{24}+A^{36}).$$
$$(I+A^{36}+A^{72}).(I + A^{36}+A^{72}).(I+ A^{108})]\},$$

14 matris çarpımı içermektedir.

Yeni Algoritma 1,

$$\Psi(232,A) = (I+A+A^2+A^3).\{I+A^4+A^8.(I+A^4+A^8+A^{12}).[I+A^{16}+A^{32}.$$
$$(I+A^{16}+A^{32}+A^{48}).(I+A^{64}+A^{128})]\},$$

15 matris çarpımı içermektedir.

Yeni Algoritma 2,

$$\Psi(232,A) = I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3+A^4).\{I+A^5.(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20}).$$
$$[I+A^{25}+A^{50}+A^{75}+A^{100}.(I+A^{25}+A^{50}+A^{75}+A^{100})]\},$$

15 matris çarpımı içermektedir.

Dimitrov ve ark. (1994),

$$\Psi(768,A) = (I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6+A^9).[I+(A^9+A^{18}+A^{27}).\{I+(A^{27}+A^{54}+A^{81}).$$
$$(I+A^{81}+A^{162}).(I+ A^{243}+A^{486})\}]\},$$

16 matris çarpımı içermektedir.

Dimitrov ve ark. (1995),

$$\Psi(768,A) = (I+A+A^2).\{I+(A^3+A^6+A^9).(I+(A^9+A^{18}+A^{27}).[I+(A^{27}+A^{54}+A^{81}).$$
$$(I + A^{81}+A^{162}).(I+A^{243}+A^{486})]\},$$

16 matris çarpımı içermektedir.

Yeni Algoritma 1,

$$\Psi(768,A) = (I+A+A^2+A^3).(I+A^4+A^8+A^{12}).(I+A^{16}+A^{32}+A^{48}).$$
$$(I+A^{64}+A^{128}+A^{192}).(I+A^{256}+A^{512}),$$

17 matris çarpımı içermektedir.

Yeni Algoritma 2,

$$\Psi(768,A) = I+A+A^2+A^3.(I+A+A^2+A^3+A^4).\{ I+A^5+A^{10}+A^{15}.$$
$$(I+A^5+A^{10}+A^{15}+A^{20}).(I+A^{25} +A^{50}+A^{75}+A^{100}).$$

$$[I+A^{125}.(I+A^{125}+A^{250}+A^{375}+A^{500})]\},$$

21 matris çarpımı içermektedir.

Dimitrov ve ark. (1994),

$$\Psi(1536,A) = (I+A+A^{2}).\{I+A^{3}+A^{6}.(I+A^{3}+A^{6}).[I+A^{9}+A^{18}.$$
$$(I+A^{9}+A^{18}).\{I+A^{27}+A^{54}.(I+A^{27}+A^{54}).(I+A^{81}+A^{162}).$$
$$(I+A^{243}+A^{486}).(I+A^{729})\}]\},$$

21 matris çarpımı içermektedir.

Dimitrov ve ark. (1995),

$$\Psi(1536,A) = (I+A+A^{2}).(I+A^{3}).\{I+(A^{6}+A^{12}+A^{18}).[I+(A^{18}+A^{36}+A^{54}).$$
$$\{I+(A^{54}+A^{108}+A^{162}).(I+A^{162}+A^{324}).(I+A^{486}+A^{972})\}]\},$$

18 matris çarpımı içermektedir.

Yeni Algoritma 1,

$$\Psi(1536,A) = (I+A+A^{2}+A^{3}).(I+A^{4}+A^{8}+A^{12}).(I+A^{16}+A^{32}+A^{48}).$$
$$(I+A^{64}+A^{128}+A^{192}).\{I+A^{256}+A^{512}.(I+A^{256}+A^{512}+A^{768})\},$$

19 matris çarpımı içermektedir.

Yeni Algoritma 2,

$$\Psi(1536,A) = I+A.(I+A+A^{2}+A^{3}+A^{4}).\{I+A^{5}.(I+A^{5}+A^{10}+A^{15}+A^{20}).$$
$$[I+A^{25}.(I+A^{25}+A^{50}+A^{75}+A^{100}).\{I+A^{125}+A^{250}.$$
$$(I+A^{125}+A^{250}+A^{375}+A^{500}).(I+A^{625})\}]\},$$

24 matris çarpımı içermektedir.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

$\Psi(22,A)$ matris polinomu; Westreich (1989), 7 matris çarpımı, Lei ve ark. (1992), 6 matris çarpımı, Dutta ve ark. (1992), 8 matris çarpımı, Dimitrov ve ark. (1994), 6 matris çarpımı, Dimitrov ve ark. (1995), 6 matris çarpımı, Yeni Algoritma 1, 8 matris çarpımı, Yeni Algoritma 2, 8 matris çarpımı içermektedir.

$\Psi(30,A)$ matris polinomu; Westreich (1989), 7 matris çarpımı, Lei ve ark. (1992), 7 matris çarpımı, Dutta ve ark. (1992), 9 matris çarpımı, Dimitrov ve ark. (1994), 7 matris çarpımı, Dimitrov ve ark. (1995), 7 matris çarpımı, Yeni Algoritma 1, 7 matris çarpımı, Yeni Algoritma 2, 9 matris çarpımı içermektedir.

$\Psi(82,A)$ matris polinomu**,;** Lei ve ark. (1992), 10 matris çarpımı, Dutta ve ark. (1992), 12 matris çarpımı, Dimitrov ve ark. (1994), 10 matris çarpımı, Dimitrov ve ark. (1995), 10 matris çarpımı, Yeni Algoritma 1, 10 matris çarpımı, Yeni Algoritma 2, 13 matris çarpımı içermektedir.

$\Psi(105,A)$ matris polinomu; Lei ve ark. (1992), 11 matris çarpımı, Dutta ve ark. (1992), 13 matris çarpımı, Dimitrov ve ark. (1994), 12 matris çarpımı, Dimitrov ve ark. (1995), 11 matris çarpımı, Yeni Algoritma 1, 13 matris çarpımı, Yeni Algoritma 2, 13 matris çarpımı içermektedir.

$\Psi(232,A)$ matris polinomu, Lei ve ark. (1992), 13 matris çarpımı, Dutta ve ark. (1992), 15 matris çarpımı, Dimitrov ve ark. (1994), 14 matris çarpımı, Dimitrov ve ark. (1995), 14 matris çarpımı, Yeni Algoritma 1, 15 matris çarpımı, Yeni Algoritma 2, 15 matris çarpımı içermektedir.

$\Psi(768,A)$ matris polinomu; Dimitrov ve ark. (1994), 14 matris çarpımı, Dimitrov ve ark. (1995), 14 matris çarpımı, Yeni Algoritma 1, 17 matris çarpımı, Yeni Algoritma 2, 21 matris çarpımı içermektedir.

$\Psi(1536,A)$ matris polinomu; Dimitrov ve ark. (1994), 21 matris çarpımı, Dimitrov ve ark. (1995), 18 matris çarpımı, Yeni Algoritma 1, 19 matris çarpımı, Yeni Algoritma 2, 24 matris çarpımı içermektedir.

Sonuç olarak Dimitrov ve ark. (1995), $\Psi(N,A)$ matris polinomunun hesaplanması, daha az matris çarpımı içerdiğinden daha etkili bir algoritmadır. Ancak Yeni Algoritma 1 ve Yeni Algoritma 2 ile elde edilen algoritmalarda da

yapılan kısaltmalar algoritmayı daha kolay yapmaktadır. Örneğin, Yeni Algoritma 1'de,

$$\Psi(N,A)=\begin{cases}(I+A+A^2+A^3).G(K,A^4), & N=4k\\ I+A.(I+A+A^2+A^3).G(K,A^4), & N=4k+1\\ I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3).G(K,A^4), & N=4k+2\\ I+A+A^2+A^3.(I+A+A^2+A^3).G(K,A^4), & N=4k+3\end{cases}$$

$I+A+A^2+A^3 = B$ olarak yazılırsa,

$$\Psi(N,A)=\begin{cases}B.G(K,A^4), & N=4k\\ I+A.B.G(K,A^4), & N=4k+1\\ I+A+A^2.B.G(K,A^4) & N=4k+2\\ I+A+A^2+A^3.B.G(K,A^4), & N=4k+3\end{cases}$$

hesaplama daha kolay yapılır. Aynı şekilde yeni algoritma 2' de,

$$\Psi(N,A)=\begin{cases}(I+A+A^2+A^3+A^4).G(K,A^5), & N=5k\\ I+A.(I+A+A^2+A^3+A^4).G(K,A^5), & N=5k+1\\ I+A+A^2.(I+A+A^2+A^3+A^4).G(K,A^5), & N=5k+2\\ I+A+A^2+A^3.(I+A+A^2+A^3+A^4).G(K,A^5), & N=5k+3\\ I+A+A^2+A^3+A^4.(I+A+A^2+A^3+A^4).G(K,A^5), & N=5k+4\end{cases}$$

$I+A+A^2+A^3+A^4 = C$ olarak yazılırsa,

$$\Psi(N,A)=\begin{cases}C.G(K,A^5), & N=5k\\ I+A.C.G(K,A^5), & N=5k+1\\ I+A+A^2.C.G(K,A^5), & N=5k+2\\ I+A+A^2+A^3.C.G(K,A^5), & N=5k+3\\ I+A+A^2+A^3+A^4.C.G(K,A^5), & N=5k+4\end{cases}$$

hesaplama daha kolay yapılır.

6. KAYNAKLAR

Carnahan B., Luther H. A. ve Wilkes J. O., 1969, Applied Numerical Methods, New York: Wiley.

Dimitrov V. ve Donevsky B., 1994, A Limited Disproof to the Conjecture of Evaluating the Matrix Polynomial Ψ (N,A)= I+ $A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$, IEEE Transactions on Circuits and Systems – I; Funtamental Theory and Applications, Vol. 41, No:3, 247-248.

Dimitrov V. ve Cooklev Todor., 1995, Hybrid Algorithm for the Computation of the Matrix Polynomial I+ $A + A^2 + \ldots + A^{n-1}$, IEEE Transactions on Circuits and Systems – I; Funtamental Theory and Applications, Vol. 42, No:7, 377-380.

Dursun A., 1999, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü , Konya.

Dutto Roy S. C. ve Minocha S., 1992, On The Evaluation of a Matrix Polynominal, IEEE Transactions On Circuits and Systems – I; Funtamental Theory and Applications, Vol. 39, No: 7, 567-570.

Golub G. H. ve Van Loan C. F., 1983, Matrix Computations, Baltimore, MD: John Hopkins Univ. Press.

Johnson J. C. ve Philips C. L., 1971, An Algorithm for the Computation of the İntegral of the State Transition Matrix, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-16, 204-205.

Knuth D. E., 1981, The Art of Computer Programming, Reading, MA: Addison-Wesley, Vol. 2, Second Ed.

Lei L. ve Nakamura T., 1992, A Fast Algorithm for Evaluating the Matrix Polynomial $I+A+A^2+\ldots+A^{n-1}$, IEEE Transactions On Circuits and Systems – I; Funtamental Theory and Applications, Vol. 39, No. 4, 299-300.

Paterson M. S. ve Stockmeyer L. J., 1973, On The Number of Nonscalar Multiplications Necessary to Evaluate Polynomials, SIAM J. Comp., Vol. 2, 60-66.

Westreich D., 1989, Evaluating The Matrix Polynominal $I+A+A^2+\ldots+A^{n-1}$, IEEE Transactions On Circuits and Systems ,Vol. 36, No:1, 162-164.