ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA
BAZI GENEL KAPALI KÜMELER VE
SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Ümit KARABIYIK

T.C.
Selçuk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN
2008, sayfa:37+viii

Jüri: Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN
Yrd. Doç.Dr. Hasan KÖSE
Yrd. Doç.Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde genel topolojideki bazı kapalı kümeler ve *g*-kapalı kümeler ile *rg*-kapalı kümelerin tanımları verilerek aralarındaki ilişkiler incelendi. Lokal fonksiyon ve ideal topolojik uzay tanımları kullanılarak söz konusu kümelerin ideal topolojik uzaylardaki karşılıkları olan; *Ig*-kapalı, *rIg*-kapalı, τ^*-kapalı[9], *-perfect[7], O^*-kapalı, regüler kapalı[13], regüler *I*-kapalı[25] kümeleri ve aralarındaki ilişkileri inceledik. Bu kümeler arasında yeni özellikler elde ettik.

İkinci bölümde ise ilk bölümde incelenen kümeler yardımıyla; *g*-sürekli[2], *rg*-sürekli[19], *Ig*-sürekli, *rIg*-sürekli, O^*-sürekli, *I*c-sürekli, *RC*-sürekli[22], *RIC*-sürekli[12], completely sürekli[1], perfectly sürekli[17], perfectly *rg*-sürekli[20], perfectly *rIg*-sürekli, strongly sürekli[15], strongly *I*-sürekli, strongly *rg*-sürekli[20], strongly

rIg-sürekli fonksiyonlar tanımlanarak aralarındaki ilişkileri inceledik ve bu fonksiyonlar arasında yeni özellikler elde ettik.

Ayrıca; incelediğimiz küme çeşitleri ve sürekli fonksiyonlarla ilgili yapıla gelmiş çalışmaları da kullanarak çalışmamızın özetini oluşturan bir diyagram elde ettik.

Anahtar kelimeler: İdeal, *Ig*-kapalı küme, *rIg*-kapalı küme, O^*-kapalı küme, topolojik uzay, ideal topolojik uzay, sürekli fonksiyon.

ABSTRACT

MASTER THESIS

SOME GENERALİZED CLOSED SETS AND CONTİNUOUS FUNCTİONS İN İDEAL TOPOLOGİCAL SPACES

Ümit KARABIYIK

Selcuk University
Graduate School Of Naturel And Sciencess
Department Of Mathematics

Supervizor: Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN
2008, page:37+viii

Jury: Yrd. Doç. Dr. Aynur KESKİN
Yrd. Doç.Dr. Hasan KÖSE
Yrd. Doç.Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR

This study consists of two chapters. In the first chapter; some general topological closed sets and *g*-closed sets with *rg*-closed sets definitions has been given connections between them has been examined. I have examined and have got new properties locally function definition and ideal topological space definition has been given these sets ideal topological spaces equivalent; *Ig*-closed, *rIg*-closed, τ^*-closed [9], *-perfect[7], O^*-closed, regular closed [13], regular *I*-closed [25] sets and their connection between them.

In the second chapter by means of which have been examined inthe first chapter; *g*-continuous[2], *rg*-continuous [19], *Ig*-continuous, *rIg*-continuous, O^*- continuous, *Ic*-continuous, *RC*-continuous [22], *RIC*-continuous [12], completely continuous [1], perfectly continuous [17], perfectly *rg*-continuous [20], perfectly *rIg*-continuous, strongly continuous [15], strongly *I*-continuous, strongly *rg*-continuous [20], strongly *rIg*-continuous continuous functions has been defineted connections bet ween them have been examined and got new properties bet ween these functions.

In addition to these, sets that I have examined studyings which have been done for the continuous functions is used, we drew a diagram that is existed its summary.

Key words: Ideal, *Ig*-closed set, *rIg*-closed set, O^*-closed set, topological space, ideal topological space, continuous function.

GİRİŞ

İlk olarak 1970 yılında N.Levine [14], genelleştirilmiş kapalı (kısaca *g-kapalı*) küme kavramını vermiş ve bazı özelliklerini incelemiştir. 1993 yılında N.Palaniappan ve arkadaşları [19], *g-kapalı* kümeden daha zayıf olan regüler genelleştirilmiş kapalı (kısaca *rg-kapalı*) küme kavramını vermiştir.

1933 yılında Kuratowski [13], ideal kavramı yardımıyla bir topolojik uzayda lokal fonksiyon tanımını vererek özelliklerini incelemiştir. 1945 yılında ise Vaidyanathaswamy [23] lokal fonksiyon kavramından faydalanarak bir kapanış işlemi tanımlamıştır ve kapanış işlemi ile elde ettiği kapalı kümelerden yeni bir topoloji oluşturmuştur. 1964 yılında Hayashi [7], Hayashi-uzayı olarak adlandırdığı bir uzay tanımlamıştır. 1975 yılında Samuels [21] idealleri değiştirmek suretiyle yeni araştırmalar yapmıştır.

1990 yılında ise Janković ve Hamlet [9], lokal fonksiyon ile ilgili verilen bütün bilgileri topluca ele alarak yeni özellikler vermişlerdir. O zamandan günümüze kadar idealler üzerinde birçok çalışmalar yapılmış ve halen günümüzdeki pek çok araştırmacı için önemli bir çalışma alanı oluşturmaktadır.

Bu çalışmada (X,τ) topolojik uzayı, üzerinde hiçbir ayırma aksiyomu olmayan uzay olarak kabul edilecektir.

Bir fonksiyonun en genel anlamda sürekliliği şöyle tanımlanmıştır.

(X,τ) ve (Y,φ) topolojik uzayları ile $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer bir $x\in X$ noktası ve f(x) noktasının her $V\subset Y$ komşuluğu için $f(U)\subset V$ olacak şekilde $x\in X$ noktasının bir U komşuluğu varsa, f fonksiyonuna x noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu her $x\in X$ noktasında sürekli ise, bu takdirde f fonksiyonuna süreklidir denir.

1.BÖLÜM
TOPOLOJİK VE İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ KAPALI KÜMELER

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda; genel topolojideki bazı genel kapalı kümelerin, tanımlarını ve karekterizasyonlarını ele aldık. İkinci kısımda ideal topolojik uzaylardaki genel kapalı kümelerin tanımlarını inceledik. Ayrıca, bu iki kısımdaki kümeleri birbirleri ile karşılaştırarak aralarındaki ilişkileri ele aldık.

1.1.Genel Topolojik Uzaylarda Bazı Kümeler

Tanım 1.1.1.([14]) (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $A \subset U$ ve $U \in \tau$ iken; $cl(A) \subset U$ oluyorsa; A kümesine genelleştirilmiş kapalı (kısaca *g*-kapalı) küme denir.

Önerme 1.1.1.([14]) Her kapalı küme, *g*-kapalı bir kümedir.

İspat. (X,τ) topolojik uzayı ile $A \subset U$ olacak şekilde $U \in \tau$ verilsin. A kümesi kapalı olduğundan $cl(A) \subset A$ ve dolayısıyla $cl(A) \subset A \subset U$ elde edilir. O halde $A \subset X$ kümesi *g*-kapalı bir kümedir.

Uyarı 1.1.1. *g*-kapalı bir kümenin kapalı olması gerekmez

Örnek 1.1.1. $X = \{a,b,c\}$ ve $\tau = \{X, \phi, \{a\}\}$ olmak üzere; (X,τ) topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde $A = \{a,b\} \subset X$ kümesi, *g*- kapalıdır fakat kapalı değildir.

Tanım 1.1.2. (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer;

(1) $Int(cl(A)) = A$ ise A kümesine regüler açık küme ([13]),

(2) $cl(Int(A)) = A$ ise A kümesine regüler kapalı küme ([13])denir.

Tez boyunca (X,τ) topolojik uzayındaki tüm regüler açık kümelerin ailesini $RO(X,\tau)$, regüler açık kümelerin tümleyeni regüler kapalı kümelerin ailesinin ise $RC(X,\tau)$ ile göstereceğiz.

Önerme 1.1.2. Her regüler açık küme, açık kümedir ([8]).

İspat. (X,τ) topolojik uzay ve regüler açık bir $A \subset X$ kümesi verilsin. O halde; $Int(cl(A)) = A$ olup, $Int(Int(cl(A))) = Int(A) = Int(cl(A)) = A$ elde edilir. Bu ise *A* kümesinin açık olduğunu gösterir.

Uyarı 1.1.2. Açık bir kümenin regüler açık olması gerekmez([8]).

Örnek 1.1.2. Örnek 1.1.1 deki (X,τ) topolojik uzayında $A = \{a\} \subset X$ kümesi açıktır. Ancak $Int(cl(\{a\})) = Int(X) = X \neq \{a\}$ olduğu için *A* kümesi regüler açık bir küme değildir.

Sonuç 1.1.1. Her regüler kapalı küme, kapalı bir kümedir.

İspat. Tümleme işlemi ve Önerme 1.1.2 gereği, ispat açıktır.

Tanım 1.1.3.([19]) (X,τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $A \subset U$ ve $U \in RO(X,\tau)$ iken, $cl(A) \subset U$ oluyorsa, *A* kümesine regüler genelleştirilmiş kapalı küme (kısaca *rg*-kapalı) küme denir.

N.Palaniappan ve ark.[19] tarafından verilen *g*-kapalı kümeler ile *rg*-kapalı kümeler arasındaki ilişkiyi aşağıdaki önermede ele aldık.

Önerme 1.1.3. ([19]) Her *g*-kapalı küme, *rg*- kapalı kümedir.

Önerme 1.1.3. deki iddianın tersinin doğru olmadığı ([19] da, Örnek 3.9.) ile gösterilmiştir. Önerme 1.1.3. iddianın ne zaman doğru olabileceği sorusunu, A.Rani ve ark.([20]) aşağıdaki tanım ile cevaplamışlardır.

Tanım 1.1.4.([20]) (X,τ) topolojik uzayında her *rg*-kapalı küme *g*-kapalı küme ise, bu takdirde (X,τ) topolojik uzayına T_{rg} - uzayı denir.

Önerme 1.1.1. ve Önerme 1.1.3. gereği, aşağıdaki ifade vardır.

Sonuç 1.1.2. Her kapalı küme, *rg*-kapalı kümedir.

İspat. Sonuç 1.1.1. ve Önerme 1.1.3. gereği ispat açıktır.

Uyarı 1.1.1. ve Önerme 1.1.3. altındaki açıklama gereği, *rg*-kapalı kümenin kapalı küme olmayacağı ([19] da, Örnek 3.9.) ile gösterilmiştir. Sonuç 1.1.2.'deki iddianın tersinin ne zaman doğru olabileceği sorusu, A.Rani ve ark.([20]) tarafından aşağıdaki tanım ile cevaplanmıştır.

Tanım 1.1.5.([20]) (X,τ) topolojik uzayında her *rg*-kapalı küme kapalı küme ise, bu takdirde (X,τ) topolojik uzayına $T^{*}_{1/2}$ uzayı denir.

Tez boyunca (X,τ) topolojik uzayındaki tüm kapalı, *g*- kapalı ve *rg*- kapalı kümelerin ailelerini sırayla $\tau^{t}, GC(X,\tau)$ ve $RGC(X,\tau)$ ile göstereceğiz.

g-kapalı (*rg*- kapalı) kümenin tümleyenine *g*-açık ([2]) (*rg*- açık [19]) küme denir. (X,τ) topolojik uzayındaki tüm *g*-açık ve *rg*-açık kümelerin ailelerini sırasıyla $GO(X,\tau)$ ve $RGO(X,\tau)$ ile göstereceğiz.

1.2. İdeal Topolojik Uzaylardaki Bazı Kümeler ve Bu Kümelerin Genel Topolojik uzaylardaki Kümelerle Karşılaştırılmaları

Tanım 1.2.1.([13]) $P(X)$, boş olmayan bir X kümesinin güç kümesi olmak üzere; boş olmayan bir $I \subset P(X)$ ailesi; eğer

(1) $A \in I$ ve $B \subset A$ iken $B \in I$ (kalıtımsallık özelliği)

(2) $A, B \in I$ iken $(A, B) \in I$ (sonlu toplamsallık özelliği)

şartlarını sağlıyorsa; bu takdirde I ailesine X üzerinde bir **ideal** denir.

En sık karşılaşılan idealler; minimal ideal ($I = \{\phi\}$), sonlu kümelerin ideali(I_f), sayılabilir kümelerin ideali (I_c), hiçbir yerde yoğun değil kümelerin ideali (I_n), ölçülebilir kümelerin ideali (I_m) ve maksimal ideal ($I = P(X)$) olarak bilinir([7]).

Tanım 1.2.2.([13]) (X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Ayrıca I ailesi X kümesi üzerinde bir ideal olsun. Bu takdirde;

$$A^*(I, \tau) = \{x \in X : \forall U \in N_{(x)} \text{ için } (U \cap A) \notin I\}$$

kümesine, A kümesinin I ideali ve τ topolojisine bağlı ***lokal fonksiyonu*** denir.

Tez boyunca $A^*(I, \tau)$ yerine A^* sembolünü kullanacağız. A^* kümesi ile A kümesinin lokal fonksiyonundan bahsetmiş olacağız. Lokal fonksiyon ile ilgili literatürde yer alan özellikler aşağıda verilmiştir:

Lemma 1.2.1.([9]) (X, τ) topolojik uzayı, X kümesi üzerinde bir I ideali ile birlikte $A, B \subset X$ kümeleri verilsin. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Eğer $A \subset B$ ise; $A^* \subset B^*$;

(2) $A^* = cl(A^*) \subset cl(A)$**;**

(3) $A^{**} \subset A^*$**;**

(4) $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$**;**

(5) $(A \cap B)^* \subset A^* \cap B^*$**;**

(6) $(A^* - B^*) \subset (A - B)^*$**;**

(7) Eğer $U \in \tau$ ise, $(U \cap A^*) \subset (U \cap A)^*$.

Janković ve Hamlet([9]), topolojik uzay ve ideal kavramlarını kullanarak, ideal topolojik uzayı tanımladılar.

Tanım 1.2.3.([9]) (X, τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde tanımlı I ideali verilsin. I ideali ile birlikte (X, τ) topolojik uzayına, ***ideal topolojik uzay*** denir ve (X, τ, I) şeklinde gösterilir.

İdeal topolojik uzaylar üzerinde yapılan çalışmalar neticesinde bazı özel uzayların tanımlanması da sağlandı. Bu uzayların bazıları aşağıda ele alınmıştır:

Tanım 1.2.4.([7]) (X, τ, I) ideal topolojik uzayı verilsin. Eğer $X = X^*$ ise bu takdirde (X, τ, I) ideal topolojik uzayına, **Hayashi uzayı** denir.

Tanım 1.2.5.([21]) (X, τ, I) ideal topolojik uzayında $\tau \cap I = \{\phi\}$ ise bu takdirde (X, τ, I) ideal topolojik uzayına, **Samuels uzayı** denir.

Janković ve Hamlet ([9]), farklı yıllarda verilen Hayashi uzayı ve Samuels uzayı kavramlarının çakışık olduğunu gösterdiler ve bu iki kavramı, **Hayashi-Samuels** uzayı olarak adlandırdılar.

Şimdi, ideal topolojik uzaylarla ilgili literatürde yer alan bazı tanımları ve aralarındaki ilişkileri inceleyelim.

Tanım 1.2.6. (X,τ,I) ideal topolojik uzayında $A \subset X$ verilsin. Eğer,

(1) $A^* \subset A$ ise A ya τ^*-kapalı küme ([9]);

(2) $A^* = A$ ise A ya $*$-perfect küme ([7]);

(3) $A \subset A^*$ ise A ya *-dense-in-itself küme ([7]) denir.

Tanım 1.2.6' da verilen küme kavramları için aşağıdaki özellikler vardır.

Önerme 1.2.1.([25]) (X,τ,I) ideal topolojik uzayında aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Her $*$-perfect küme, τ^*-kapalıdır

(2) Her $*$-perfect küme, *-dense-in-itself kümedir.

(X,τ,I) daki tüm τ^*-kapalı kümelerin ailesini $\tau^*(X,\tau,I)$ ile göstereceğiz.

Önerme 1.2.2.([11]). Her *-perfect küme, kapalı kümedir.

İspat. A, *-perfect küme olsun. $A^* = A$ olup, Lemma 1.2.1(2) gereği $A^* = cl(A^*) \subset cl(A)$ ve dolayısıyla A kümesinin kapalı olduğu elde edilir.

Uyarı 1.2.1.([11]) Kapalı kümenin *-perfect küme olması gerekmez.

Örnek 1.2.1.([11]) $X = \{a,b,c,d\}$ üzerinde $\tau = \{X,\phi,\{d\},\{a,c\},\{a,c,d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\phi,\{c\},\{d\},\{c,d\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. $A = \{b,d\}$ kümesi, kapalı bir küme olmasına rağmen; *-perfect bir küme değildir. $A = \{b,d\}$ kümesi için, $A \in \tau^t$ olduğundan; A kümesi kapalı bir kümedir. $A^* = \{b\} \neq \{b,d\} = A$ olduğu için, A kümesinin *-perfect küme olmadığı görülür.

Önerme 1.2.3. Kapalı kümeler ile g-kapalı ve *-perfect kümeler çakışıktır.

İspat. $\Rightarrow$ Kapalı bir A kümesinin g-kapalı olduğu Önerme 1.1.1 de verilmişti.

$\Leftarrow A$ kümesi g-kapalı olsun. A kümesinin kapalı olması için aynı zamanda *-perfect olması gereklidir. A kümesi g-kapalı olduğundan $A \subset U \in \tau$ iken $cl(A) \subset U$ şartı sağlanır. A kümesi , *-perfect olduğundan $A = A^*$ olup bu durumda; yukarıdaki ifade $A = A^* \in \tau$ iken $cl(A^*) = cl(A) \subset U$ (1) şekline gelir. Lemma 1.2.1.(2) gereği $cl(A^*) = A^*$ olur. A kümesi, *-perfect olduğundan $A = A^*$ eşitliği ile birlikte $cl(A^*) = A$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla (1) ifadesinde son eşitlik yazılırsa; $A = cl(A^*) = cl(A) \subset U$ ifadesi ile $A = cl(A)$ yani A kümesinin kapalı bir küme olduğu elde edilir.

Uyarı 1.2.2.([11]) Regüler kapalı küme ile *-perfect küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

Örnek 1.2.2.([11]) (X, τ, I) ideal topolojik uzayı, Örnek 1.2.1 de verilen uzay olsun. $A = \{b, d\}$ kümesi, regüler kapalı bir küme olmasına rağmen; *-perfect bir küme değildir.

$A = \{b, d\}$ kümesi için $Int(A) = \{d\}$ ve $cl(Int(A)) = \{b, d\} = A$ olduğundan; A kümesinin regüler kapalı bir küme olduğu elde edilir. Diğer taraftan; $A^* = \phi \neq \{b, d\} = A$ olduğundan; A kümesi *-perfect bir küme değildir.

Örnek1.2.3.([11]) $X = \{a, b, c, d\}, \tau = \{X, \phi, \{a\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, c, d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\phi, \{b\}\}$ ideali ile birlikte (X, τ, I) ideal topolojik uzayı verilsin. $A = \{b, d\}$ kümesi, *-perfect bir küme olmasına rağmen; regüler kapalı bir küme değildir. Gerçekten $A = \{b, d\}$ kümesi için, $A^* = \{b, d\} = A$ olduğundan; A kümesinin *-perfect küme olduğu elde edilir. Ancak; A kümesi için $Int(A) = \phi$ ve $cl(Int(A)) = \phi \neq \{b, d\} = A$ olduğundan; A kümesi regüler kapalı bir küme değildir.

Önerme 1.2.4.([11]) Her kapalı küme, τ^*- kapalı kümedir.

İspat. A kapalı bir küme olsun. Bu takdirde $cl(A) \subset A$ dır. Buradan Lemma 1.2.1.(2) gereği $A^* \subset cl(A)$ olduğundan $A^* \subset cl(A) \subset A$ ve dolayısıyla; $A^* \subset A$ elde edilir. Bu ise A kümesinin, τ^*-kapalı bir küme olduğunu gösterir.

Uyarı 1.2.3.([11]) τ^*-kapalı kümenin kapalı küme olması gerekmez.

Örnek 1.2.4.([11]) $X = \{a,b,c,d\}, \tau = \{X, \phi, \{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\phi, \{c\}, \{d\}, \{c,d\}\}$ ideali ile birlikte (X, τ, I) ideal topolojik uzayı verilsin. $A = \{c,d\}$ kümesi, τ^*-kapalı bir küme olmasına rağmen; kapalı değildir. Gerçekten, $A = \{c,d\} \subset X$ kümesi için, $A^* = \phi$ olduğundan; $A^* = \phi \subset \{c,d\} = A$ elde edilir. Bu ise A kümesinin τ^*-kapalı bir küme olduğunu gösterir. Ancak $cl(A) = X \not\subset \{c,d\} = A$ olduğu için, A kümesi kapalı bir küme değildir.

Tanım 1.2.7. (X, τ, I) ideal topolojik uzayı ile $A \subset X$ kümesi verilsin. A hem açık hem de *-perfect küme ise; A kümesine O*-küme denir.

(X, τ, I) Uzayındaki tüm O*-kümelerin ailesini $O^*(X, \tau, I)$ ile göstereceğiz. İyi bilinir ki hem açık hem de kapalı kümeye **clopen** küme denir. Tez boyunca clopen küme kavramı yerine CO-küme kavramı kullanacağız.

Tanım 1.2.8.([25]) (X, τ, I) ideal topolojik uzayının $A \subset X$ alt kümesine; $A = (Int(A))^*$ ise regüler I-kapalı küme denir.

(X, τ, I) ideal topolojik uzayındaki regüler$I$-kapalı kümelerin ailesini $RIC(X, \tau, I)$ ile göstereceğiz.

Önerme 1.2.5.([11]) Her regüler *I*- kapalı küme regüler kapalı kümedir.

Uyarı 1.2.4.([11]) Regüler kapalı kümenin regüler *I*-kapalı küme olması gerekmez.

Örnek 1.2.5. $X=\{a,b,c\}$ üzerinde $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\}\}$ topolojisi ve $I=\{\phi,\{b\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. $A=\{a,c\}\subset X$ kümesi, regüler kapalı küme olmasına rağmen; regüler *I*-kapalı bir küme değildir. $A=\{a,c\}$ kümesi için $Int(A)=\{a\}$ ve $cl(Int(A))=\{a,c\}=A$ olduğundan; A kümesi regüler kapalı bir kümedir. Ancak $A=\{a,c\}$ kümesi için $Int(A)=\{a\}$ ve $\{a\}^*=\{a,c\}=A$ olduğundan; $(Int(A))^*=A$ elde edilir. Bu ise *A* kümesinin regüler *I*-kapalı olmadığını gösterir.

Önerme 1.2.6.([25]) Her regüler *I*- kapalı küme *-perfect kapalı kümedir.

İspat. *A* regüler *I*-kapalı bir küme olsun. Tanım 1.2.8. gereği $(\text{int}(A))^*=A$ yazılır. Ayrıca Lemma 1.2.1.(1) gereği $\text{int}(A)\subset A$, $(\text{int}(A))^*\subset A^*$ olup $A=(\text{int}(A))^*\subset A^*$ yazılır. Bunu kullanarak $A^*=((\text{int}(A))^*)^*\subset(\text{int}(A))^*=A$ elde edilir bu durum bize $A=A^*$ olduğunu gösterir ki *A* kümesinin *-perfect olduğu ispatlanmış olur.

Uyarı 1.2.5.([25]) *-perfect kapalı kümenin regüler *I*-kapalı küme olması gerekmez.

Örnek1.2.6([25]) $X=\{a,b,c\}$ üzerinde $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\}\}$ topolojisi ve $I=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. $A=\{c\}\subset X$ kümesi, *-perfect olmasına rağmen; regüler *I*-kapalı değildir. $A=\{c\}$ kümesi için $A^*=\{c\}=A$ olup *A* kümesi *-perfect dir. $\text{int}(A)=\phi$ ve $\phi\in I$

olup buradan $(\text{int}(A))^* = \phi^* = \phi \neq \{c\} = A$ elde edilir ki bu durum bize A kümesinin regüler I-kapalı olmadığını gösterir.

Önerme 1.2.7. Her O*-küme, CO- küme dir.

İspat. Önerme 1.2.4. kullanılarak ispat direkt elde edilir.

Uyarı 1.2.6. CO- kümenin O*-küme olması gerekmez.

Örnek 1.2.7. $X = \{a,b,c,d\}, \tau = \{X, \phi, \{d\}, \{a,c\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c\}\}$ topolojisi ve $I = \{\phi, \{a\}, \{c\}, \{a,c\}\}$ ideali ile birlikte (X, τ, I) ideal topolojik uzayı verilsin. $A = \{a,b,c\}$, CO-kümedir. Fakat $A = \{a,b,c\}$ kümesi için, $A^* = \{b\} \neq \{a,b,c\} = A$ olduğundan; A kümesi *-perfect değildir. Ayrıca $A \in \tau$ ancak *-perfect küme olmadığından A, O*-küme değildir.

Tanım 1.2.9.([24]) (X, τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Herhangi bir $A \subset X$ kümesi için, $cl^*(A) = A \cup A^*$ şeklinde tanımlanan $cl^* : P(X) \to P(X)$ fonksiyonu; bir Kuratowski kapanış işlemidir.

Tanım 1.2.10.([24]) (X, τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Bu takdirde,

$$\tau^*(I) = \{U \subset X : cl^*(X - U) = (X - U)\}$$

şeklinde tanımlanan $\tau^*(I)$ ailesi, X kümesi üzerinde bir topoloji belirtir. Bu topoloji, τ topolojisinden daha ince bir topolojidir.

Tanım 1.2.11.([24]) (X, τ) topolojik uzayı ile X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Bu takdirde,

$$\beta(I, \tau) = \{U - \text{I} : U \in \tau, \text{I} \in I\}$$

ailesi $\tau^*(I)$ topolojisi için bir tabandır.

Bir topolojik uzay üzerinde γ operasyonu ([10], [18]), aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 1.2.12.([18]) (X,τ) topolojik uzayı verilsin. τ topolojisi üzerinde γ operasyonu, (X,τ) topolojik uzayından, her $V \in \tau$ için $V \subseteq V^{\gamma}$ olacak şekilde X in $P(X)$ güç kümesine tanımlanan bir fonksiyondur. Ayrıca V^{γ}, V nin γ altındaki değerini göstermek üzere; Yani;

$$\gamma : (X,\tau) \to P(X)$$

$$V \to \gamma(V) = V^{\gamma}$$

gösterimi söz konusudur.

Topolojik uzaylardaki genel kapalı küme kavramı, Tanım 1.2.12. ile verilen γ-operatör kavramı yardımıyla Dontchev ve ark.([3]) tarafından aşağıdaki tanım ile genelleştirilmiştir.

Tanım 1.2.13.([3]) (X,τ) topolojik uzayında bir $A \subset X$ alt kümesi ile γ-operatörü verilsin. Eğer $A \subseteq U$ ve $U \in \tau$ iken, $A^{*} \subset U^{\gamma}$ oluyorsa; bu takdirde A kümesine (I,γ)-genelleştirilmiş kapalı küme denir.

([3])'de Dontchev ve arkadaşları, Tanım 1.2.12. de özel olarak γ operatörü yerine $\gamma = I$ alarak **(** burada I birim fonksiyon, yani; her $A \subset X$ için $I(A) = A$ olacak biçimde tanımlanan $I : X \to X$ fonksiyonu**)** (X,τ) topolojik uzayındaki tüm (I,γ)-genelleştirilmiş kapalı kümeler için I-genelleştirilmiş kapalı (Ig-kapalı) küme kavramını kullanmışlardır.

Tez boyunca (X,τ) topolojik uzayındaki tüm I-genelleştirilmiş kapalı kümelerin ailesini $IGC(X,\tau)$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.2.14. (X,τ) topolojik uzayında bir $A \subset X$ alt kümesi ile γ-operatörü verilsin. Eğer $A \subseteq U$ ve $U \in RO(X,\tau)$ iken, $cl(A^*) \subset U^\gamma$ oluyorsa; bu takdirde *A* kümesine regüler (I,γ)-genelleştirilmiş kapalı küme denir.

γ operatörü yerine $\gamma = I$ alarak (burada I birim fonksiyon yani her $A \subset X$ için $I(A) = A$ olacak biçimde tanımlanan $I : X \to X$) (X,τ) topolojik uzayındaki tüm regüler (I,γ)-genelleştirilmiş kapalı kümeler için regüler *I*-genelleştirilmiş kapalı (*rIg*-kapalı) küme kavramını kullanacağız.

Tanım 1.2.15. (X,τ,I) ideal topolojik uzayı ile bu uzay üzerinde tanımlanan bir γ operatörü verilsin. Öyleki $\gamma = I$ olsun. Bu takdirde,

(1) r*I*g-kapalı bir kümenin tümleyenine regüler *I*-genelleştirilmiş açık(r*I*g-açık) küme

(2) *I*g-kapalı kümenin tümleyenine *I*g- açık küme denir.

(X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki tüm *rIg*-açık kümeler ile *Ig*-açık kümelerin ailelerini sırayla $RGIO(X,\tau)$ ve $IGO(X,\tau)$ ile göstereceğiz.

Lemma 1.2.1.(2) gereği $A^* = cl(A^*)$ olduğundan Tanım 1.2.14. aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

"(X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $A \subset U \in RO(X,\tau)$ iken $A^* \subset U$ oluyorsa *A* kümesine regüler *I*-genelleştirilmiş küme (kısaca *rIg*-kapalı) küme denir."

(X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki tüm *Ig-kapalı* ve *rIg*-kapalı kümelerin ailesini $IGC(X,\tau,I)$ ve $RIGC(X,\tau,I)$ ile göstereceğiz.

Önerme 1.2.8. Her *Ig*-kapalı küme *rIg*-kapalı kümedir.

İspat. İspat, Önerme 1.1.3. e benzer şekilde Tanım 1.2.13. ve Tanım 1.2.14. kullanılarak elde edilir.

Uyarı 1.2.7. *rIg*-kapalı kümenin *Ig*-kapalı küme olması gerekmez.

Örnek 1.2.8. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{\phi,X,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ topolojisi ile birlikte $I=\{\phi,\{c\}\}$ ideali verilsin. $A=\{a\}\subset X$ ve $A^*=\{a\}^*=\{a,c\}$ olup $A^*=\{a\}^*\subset\{a,c\}\subset X\in RO(X,\tau)$ elde edilirki A kümesi *rIg*-kapalı bir küme olur. Ancak $A=\{a\}\subset\{a\}\in\tau$ olup $A^*=\{a\}^*=\{a,c\}\not\subset\{a\}$ olduğundan dolayı A kümesi *I*g kapalı küme değildir.

İdeal topolojik uzaylardaki bazı kümeler ile genel topolojideki kümeler arasında aşağıdaki ilişkilerin varlığı elde edilir.

Önerme 1.2.9. (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki herhangi bir $A\subset X$ kümesi için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Her *g*-kapalı küme *Ig*-kapalı kümedir([3], Teorem 2.1.);

(2) Her *rg*-kapalı küme *rIg*-kapalı kümedir.

İspat. İlgili Tanım ve Lemma 1.2.1(2), Önerme 1.1.3. ve Sonuç 1.1.1. kullanılarak ispat direkt elde edilir.

Uyarı 1.2.8. (X,τ,I) ideal topolojik uzayında aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) *Ig*-kapalı kümenin *g*-kapalı olması gerekmez ([3]);

(2) *rIg*-kapalı kümenin *rg*-kapalı olması gerekmez.

Örnek 1.2.9. (1)*Ig*-kapalı kümenin *g*-kapalı olması gerekmez. Gerçekten; $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{\phi,X,\{a\},\{b,d\}\{a,b,d\}\}$ topolojisi ve $I=\{\phi,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ alalım. $A=\{a,b\}\subset X$ alalım. $U=\{a,b,d\}\in\tau$ ve

$A^* = \{a,b\}^* = \{b,d\}$ olduğundan A kümesi, Ig-kapalı bir kümedir. Ancak $cl(A) = X \not\subset U$ olduğundan *g*-kapalı bir küme değildir.

(2) *rIg*-kapalı kümenin *rg*-kapalı olması gerekmez. Gerçekten; $X = \{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\phi, X, \{c\}, \{a,c\}\{b,c\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\phi, \{c\}, \{d\}, \{c,d\}\}$ alalım. $A = \{c,d\} \subset \{a,c,d\} \in RO(X,\tau)$ alalım. $A^* = \{a,c\}^* = \phi \subset \{a,c,d\}$ olduğundan A kümesi *rIg*-kapalı bir kümedir. Fakat; $A = \{c,d\}$ için $cl(A) = X \not\subset \{a,c,d\}$ olduğundan A kümesi *rg*-kapalı bir küme değildir.

Uyarı 1.2.9. Önerme 1.2.9.(2) de verilen önermenin tersinin ne zaman doğru olacağı sorusu, aşağıdaki gibi cevaplarız.

Önerme 1.2.10. (X,τ,I) ideal topolojik uzayında $A \in RIGC(X,\tau,I)$ verilsin. Eğer A kümesi *-dense-in-itself bir küme ise; bu takdirde $A \in RGC(X,\tau)$ dir.

İspat. $A \in RIGC(X,\tau,I)$ olduğundan;Tanım 1.2.5. gereği $A \subset U \in RO(X,\tau)$ iken $cl(A^*) \subset U$ bağıntısı sağlanır. A kümesi, *-dense-in-itself bir küme olduğundan; $A \subset A^*$ dolayısıyla $cl(A) \subset cl(A^*)$ ifadesi gerçeklenir. Sonuç olarak, $A \subset U \in RO(X,\tau)$ iken $cl(A) \subset U$ elde edilir. Bu ise, Tanım 1.1.3. gereği A kümesinin *rg*-kapalı olduğunu gösterir.

Regüler I-genelleştirilmiş kapalı kümenin tümleyenine regüler I-genelleştirilmiş açık küme ve I-genelleştirilmiş kapalı kümenin tümleyenine I-genelleştirilmiş açık küme denir. (X,τ,I) ideal topolojik uzayındaki tüm regüler I-genelleştirilmiş açık ve I-genelleştirilmiş açık kümelerin ailelerini sırasıyla $RIGO(X,\tau,I)$ ve $IGO(X,\tau,I)$ ile göstereceğiz.

Önerme 1.2.11. (X,τ,I), ideal topolojik uzayındaki $A\subset X$ için aşağıdakiler eşdeğerdir.

(1) Her *O**-küme, regüler *I*-kapalıdır.

(2) Her regüler *I*-kapalı küme, τ^*-kapalı dır.([25])

(3) Her τ^*-kapalı küme, *I*g-kapalı dır.

İspat. (1) $A\in O^*$-küme olsun. O halde $A\in\tau$ ve A kümesi, *-perfect kümedir. A kümesi, açık küme olduğundan $A=Int(A)$ olup eşitliğin her iki tarafın lokal fonksiyonu alınırsa; $A^*=(Int(A))^*$ elde edilir. A kümesi, *-perfect küme olduğundan $A^*=A$ olup, son iki eşitlik birlikte ele alınacak $A=(Int(A))^*$ bulunur. Bu ise, $A\subset X$ kümesinin regüler *I*- kapalı küme olduğunu gösterir.

(2) Her regüler *I*-kapalı kümenin *-perfect küme olduğu ([25]) de verilmiştir. Her *-perfect kümenin de τ^*-kapalı olduğu verilen tanımlardan açıktır.

(3) A kümesi, τ^*-kapalı küme ve $A\subset U\in\tau$ olsun. A kümesi, τ^*-kapalı küme olduğundan $A^*\subset A\subset U$ ve dolayısıyla $A^*\subset U$ elde edilir. Böylece A kümesi, *I*g-kapalı küme olur.

Uyarı 1.2.10. Önerme 1.2.11.de verilen gerektirmelerin tersleri genelde doğru değildir.

(1) Regüler *I*-kapalı kümenin *O**-küme olması gerekmez,

(2) τ^*-kapalı kümenin regüler *I*-kapalı olması gerekmez,

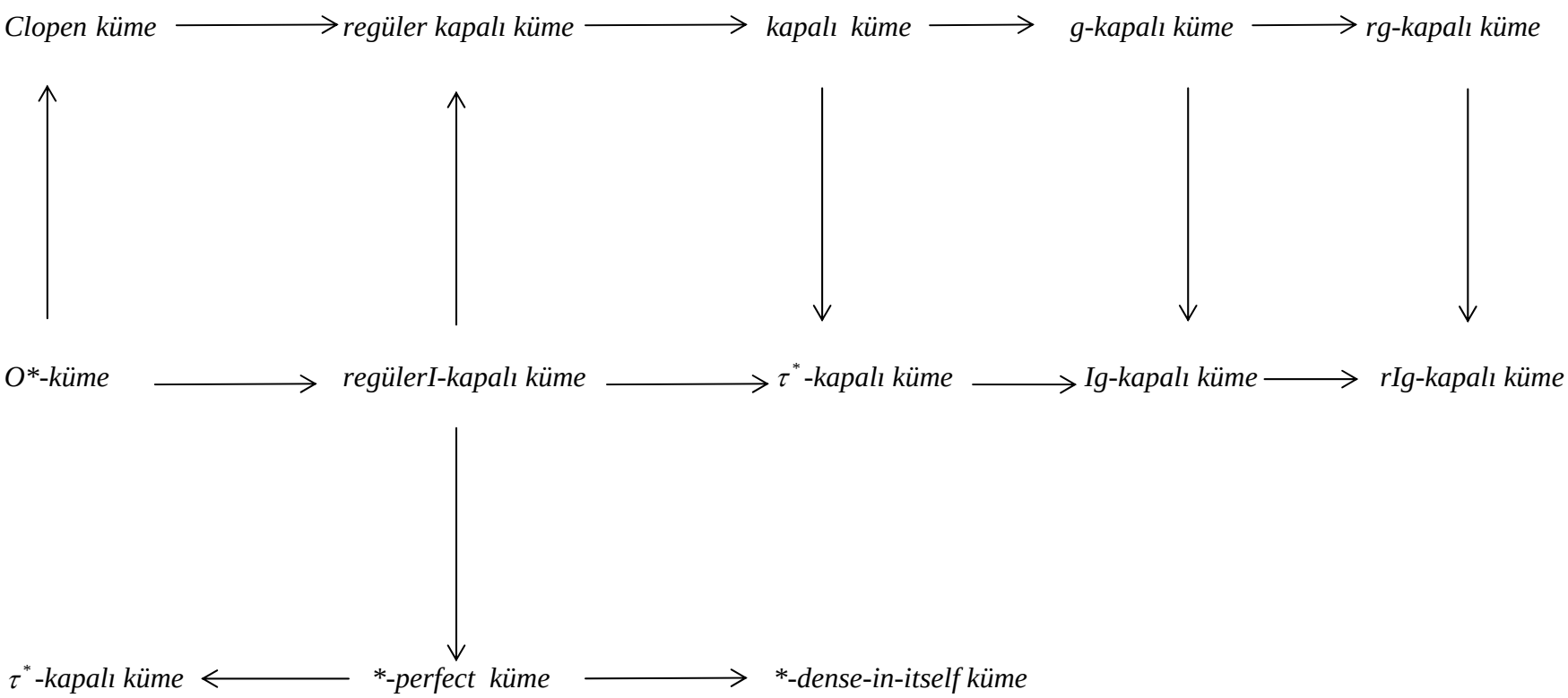
(3) *I*g-kapalı kümenin τ^*-kapalı küme olması gerekmez.

Örnek 1.2.10. Örnek 1.2.9. daki uzayda $A=\{a,c\}$ alalım. $Int(A)=\{a\}$ olur ve $Int(A)^*=\{a,c\}=A$ elde edilirki A kümesi regüler *I*-kapalı bir kümedir. $A\notin\tau$ ile birlikte $A^*=\{a,c\}=A$ olur ki A kümesi *-perfect olsa da *O**-küme değildir.

Örnek 1.2.11.([25]) $X=\{a,b,c\}$ üzerinde $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\}\}$ topolojisi ve $I=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. $A=\{c\}\subset X$ kümesi *-perfect küme dolayısıyla Önerme 1.2.11.(2) gereği, τ^*-kapalı küme olmasına rağmen; regüler *I*-kapalı bir küme değildir. $A=\{c\}$ kümesi için, $A^*=\{c\}\subset A$ olduğundan; A kümesi τ^*-kapalı bir kümedir. Ancak $A=\{c\}$ kümesi için $Int(A)=\phi$ ve $\phi^*=\phi$ olduğundan; $(Int(A))^*=\phi$ elde edilir. Bu ise A kümesinin regüler *I*-kapalı olmadığını gösterir.

Örnek 1.2.12. $X=\{a,b,c\}$ üzerinde $\tau=\{X,\phi,\{b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ topolojisi ve $I=\{\phi,\{b\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. $A=\{c,b\}\subset U=\{a,b,c\}$ açık bir küme olsun. Bu takdirde; $A^*=\{a,c\}\subset U$ olur ki A kümesi *I*g-kapalı bir kümedir. Fakat $A^*=\{a,c\}\not\subset\{c,b\}=A$ olduğundan A kümesi τ^*-kapalı küme değildir.

Yukarıda verilen önermeler ve tanımlar ışığında, kümeler arasında aşağıdaki ilişkilergeçerlidir.


Clopen küme
regüler kapalı küme
kapalı küme
g-kapalı küme
rg-kapalı küme
O*-küme
regülerI-kapalı küme
τ*-kapalı küme
Ig-kapalı küme
rIg-kapalı küme
τ*-kapalı küme
*-perfect küme
*-dense-in-itself küme

Şekil 1.1.

2. BÖLÜM
GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Bu bölümde, ilk bölümde incelenen küme çeşitlerini kullanarak topolojik uzaylarda sürekli ve genelleştirilmiş sürekli fonksiyonlar ile bunların ideal topolojik uzaylardaki karşılıkları tanımlanıp, özelliklerini araştırdık.

Tanım 2.1. $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $F\in\ \varphi^t$ için,

(1) $f^{-1}(F)\in\tau^t$ oluyorsa; f fonksiyonuna sürekli fonksiyon;

(2) $f^{-1}(F)\in RGC(X,\tau)$ ise; f fonksiyonuna regüler genelleştirilmiş sürekli fonksiyon (kısaca *rg*-sürekli) fonksiyon ([19]);

(3) $f^{-1}(F)\in GC(X,\tau)$ ise, bu takdirde f fonksiyonuna *g*-sürekli fonksiyon ([2]) denir.

Önerme 2.1. $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Eğer f sürekli fonksiyon ise, f aynı zamanda *g*-sürekli ([2]) dir.

(2) Eğer f *g*-sürekli fonksiyon ise, f aynı zamanda *rg*-sürekli ([20]) olur.

Uyarı 2.1. Önerme 2.1. ile verilen gerektirmenin tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte sırasıyla verilmiştir.

Örnek 2.1.([20]) (1) $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\phi,\{a\}\}$topolojisi ve $Y=\{p,q\}$ kümesi üzerinde $\varphi=\{X,\phi,\{q\}\}$ topolojisi verilsin. Bu takdirde $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu *f(b)=p ve f(a)=f(c)=q* tanımlansın.$\{q\}\subset Y$ dir. Fakat $f^{-1}(\{q\})=\{a,c\}$ X üzerinde açık küme olmadığından f fonksiyonu g-süreklidir fakat sürekli değildir.

(2) $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\phi,\{a\}\}$topolojisi ve $Y=\{p,q\}$ kümesi üzerinde $\varphi=\{X,\phi,\{p\}\}$ topolojisi verilsin.

Bu takdirde $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu *f(a)=q ve f(b)=f(c)=p* şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu, *rg*-süreklidir fakat *g*- sürekli değildir.

Teorem 2.1.([20]) $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir:

(1) f fonksiyonu, *rg*-süreklidir.

(2) *Y* nin her açık alt kümesinin ters görüntüsü, *X* de *rg*-açıktır;

(3) *Y* nin her kapalı alt kümesinin ters görüntüsü *X* de *rg*-kapalıdır.

İspat. (1)$\Rightarrow$(2) *G* kümesi *Y* de bir açık küme olsun. $(Y-G)$ kapalı kümedir. f rg-sürekli olduğundan; $f^{-1}(Y-G)\subset X$, *X* de *rg*-kapalı bir alt kümedir. dolayısıyla $f^{-1}(Y-G)=X-f^{-1}(G)$ eşitliği gereği $(X-f^{-1}(G))$ *rg*-kapalı bir küme ve $f^{-1}(G)\subset X$, *X* de *rg*-açık kümedir

Benzer şekilde (2)$\Rightarrow$(3) ve (3)$\Rightarrow$(1) ispatlanır.

Teorem 2.2.([20]) $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu, *g*-sürekli fonksiyon ve $g:(Y,\varphi)\to(Z,\sigma)$ fonksiyonu, sürekli fonksiyon ise; $gof:(X,\tau)\to(Z,\sigma)$ bileşke fonksiyonu *rg*-süreklidir.

İspat. *U* kümesi, *Z* kümesinin kapalı bir alt kümesi olsun. *g* sürekli bir fonksiyon olduğundan $g^{-1}(U)$, *Y* kümesinin kapalı alt kümesidir. f fonksiyonu *g*-sürekli olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(U))$, *X* kümesinde *g*-kapalıdır. Dolayısıyla bileşke fonksiyonun tersi ile ilgili $f^{-1}(g^{-1}(U))=(gof)^{-1}(U)$ eşitlik gereği (gof) bileşke fonksiyonunun *rg*-sürekli olduğu görülür.

Teorem 2.3.([20]) $(X,\tau),(Z,\sigma)$ herhangi iki topolojik uzay ve (Y,φ) uzayı $T^{*}_{1/2}$- uzayı olsun. Eğer $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ ile g:$(Y,\varphi)\to(Z,\sigma)$ fonksiyonları *rg*-sürekli ise bu takdirde $gof:(X,\tau)\to(Z,\sigma)$ bileşke fonksiyonu, *rg*- sürekli dir.

İspat. F kümesi, Z kümesinin kapalı bir alt kümesi olsun. g fonksiyonu *rg*-sürekli olduğundan $g^{-1}(F) \subset Y$ *rg*-kapalıdır. (Y,φ) uzayı $T^{*}_{1/2}$-uzayı olduğundan; $g^{-1}(F) \subset Y$, Y de kapalıdır. f *rg*-sürekli olduğundan; $f^{-1}(g^{-1}(F)) \subset X$, X' de *rg*-kapalı küme olur. Dolayısıyla (gof) bileşke fonksiyonu *rg*-süreklidir.

Teorem 2.4.([20]) $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$; kapalı sürekli fonksiyon, (X,τ); $T^{*}_{1/2}$ -uzayı ve g:$(Y,\varphi) \to (Z,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $gof : (X,\tau) \to (Z,\sigma)$ bileşke fonksiyonu *rg*- sürekli ise, bu takdirde g fonksiyonu süreklidir.

İspat. $\Rightarrow$ f kapalı ve sürekli bir fonksiyon, kabul edelim ki (gof) rg-sürekli bir fonksiyon ve A kümesi, Z kümesinin kapalı alt kümesi olsun. $(gof)^{-1}(A)$, X 'de *rg*-kapalıdır ve dolayısıyla $(gof)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ nin, X kümesi üzerinde *rg*-kapalı kapalı olduğu görülür. $f(f^{-1}(g^{-1}(A)))$, Y kümesi üzerinde kapalı bir kümedir. Bu durumda $g^{-1}(A)$, Y kümesi üzerinde kapalı bir küme olduğu görülür ve g sürekli fonksiyondur.

$\Leftarrow$ Kabul edelim ki g sürekli bir fonksiyon ve F kümesi, Z kümesinin kapalı bir alt kümesi olsun. $g^{-1}(F) \subset Y$, Y kümesi üzerinde kapalı bir kümedir. f sürekli fonksiyon olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(F)) \subset X$, X kümesi üzerinde kapalıdır. Önerme 1.1.1. ve Önerme 1.1.3. gereği $(gof)^{-1}(F)$, X kümesi üzerinde *rg*-kapalıdır ve (gof) bileşke fonksiyonunun *rg*-sürekli olduğu görülür.

Teorem 2.5.([19]) $f:(X,\tau) \to (\ Y,\varphi)$ fonksiyonu regüler sürekli fonksiyon ise, f fonksiyonu *rg*-süreklidir.

İspat. F kümesi, Y kümesi üzerinde kapalı olsun. $f^{-1}(F)$ X kümesi üzerinde regüler kapalıdır. Her regüler kapalı küme *rg*-kapalı olduğundan $f^{-1}(F)$, X kümesi

üzerinde de *rg*-kapalı bir kümedir. Buradan f fonksiyonunun *rg*-sürekli olduğu görülür.

Uyarı 2.2. Bununla birlikte Teorem 2.5. in tersinin doğru olmadığı aşağıdaki örnekte verilmiştir.

Örnek 2.2.([19]) $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\phi,\{c,d\}\}$ topolojisi ve $Y=\{p,q\}$ kümesi üzerinde $\varphi=\{Y,\phi,\{p\}\}$ topolojisi verilsin. Bu takdirde $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu *f(c)=p ve f(a)=f(d)=q* şeklinde tanımlansın. $\{q\}$ kümesi, Y de kapalı küme ve $f^{-1}(q)=\{a,d\}$ olur. X ve ϕ regüler açık kümeler ve $\{a,d\}\subset X$ için ve $\{a,d\}\in RC(X,\tau)$ olur. Bu ise f fonksiyonun *rg*-sürekli olduğunu belirtir. Ancak $\{p\}$, Y kümesinin açık bir alt kümesi için; $f^{-1}(\{p\})=\{c\}\notin RO(X,\tau)$ olduğundan f fonksiyonu regüler sürekli değildir.

Tanım 2.2. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $F\in\varphi^t$ için,

(1) $f^{-1}(F)\in RIGC(X,\tau,I)$ ise, bu takdirde f fonksiyonuna *rIg*-sürekli fonksiyon,

(2) $f^{-1}(F)\in IGC(X,\tau,I)$ ise, bu takdirde f fonksiyonuna *Ig*-sürekli fonksiyon denir.

Teorem 2.6. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir:

(1) f fonksiyonu, *rIg* –süreklidir;

(2) Y kümesinin her açık alt kümesinin ters görüntüsü, X kümesi üzerinde *rIg* –açıktır;

(3) Y kümesinin her kapalı alt kümesinin ters görüntüsü X kümesi üzerinde *rIg* -kapalıdır.

İspat. (1)$\Rightarrow$(2) G kümesi Y kümesi üzerinde açık bir küme ise, $(Y-G)$ kapalı kümedir. f fonksiyonu *rIg*-sürekli olduğundan; $f^{-1}(Y-G)\subset X$, X kümesi üzerinde bir *rIg*-kapalı bir alt kümedir. $f^{-1}(Y-G)=X-f^{-1}(G)$ eşitliği gereği

$X - f^{-1}(G) \subset X$ *rIg*-kapalı ve buradan $f^{-1}(G) \subset X$, X kümesi üzerinde *rIg*-açıktır.

Benzer şekilde (2)$\Rightarrow$(3) ve (3)$\Rightarrow$(1) ispatlanır.

Teorem 2.7. $f:(X,\tau,I) \to (Y,\varphi)$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir.

(1) *f* fonksiyonu, *rIg*-süreklidir;

(2) Her $V \in \varphi$ için, $f^{-1}(V) \in RIGO(X,\tau,I)$.

İspat. Tümleme ile ispat açıktır.

Teorem 2.8. $f:(X,\tau,I) \to (Y,\varphi)$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir.

(1) *f* fonksiyonu, *Ig*-süreklidir;

(2) Her $V \in \varphi$ için, $f^{-1}(V) \in IGO(X,\tau,I)$.

İspat. Tümleme ile ispat açıktır.

Önerme 2.2. $f:(X,\tau,I) \to (Y,\varphi)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Eğer f g-sürekli fonksiyon ise, f aynı zamanda *rg*-süreklidir;

(2) Eğer f *I*g-sürekli fonksiyon ise, f aynı zamanda *rIg* -süreklidir;

(3) Eğer f g-sürekli fonksiyon ise, f aynı zamanda *Ig*-süreklidir;

(4) Eğer f *rg*-sürekli fonksiyon ise, f aynı zamanda *rIg* -süreklidir.

İspat. İspatlar; sırayla Önerme 1.1.3. , Önerme 1.2.8. , Önerme 1.2.9.(1) ve Önerme 1.2.2.(2) ile verilen gerektirmelerin direkt sonuçlarıdır.

Uyarı 2.3. Önerme 2.2. nin terslerinin genelde doğru olmadığı aşağıdaki örnekte verilmiştir.

Örnek 2.3.(1) f fonksiyonu *rg*-sürekli bir fonksiyon olmasına rağmen *g*-sürekli olmayabilir. Gerçekten;

$X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{\phi,X,\{a\},\{b\}\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d\}\}$ topolojisi ile birlikte (X,τ) uzayı ve $Y=\{p,q\}$ kümesi üzerinde $\varphi=\{Y,\phi,\{p\}\}$ topolojisi ile birlikte (Y,φ) uzayı alalım. $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonunu *f(b)=f(d)=p, f(a)=f(c)=q* şeklinde tanımlayalım. *{q}* kümesi *Y* de kapalı bir küme ve $f^{-1}(q)=\{a,c\}$ olur ki f fonksiyonu *rg*-sürekli bir fonksiyondur. Fakat $cl\{a,c\}=\{a,c,d\}\not\subset\{a,b,c\}$ olduğundan $\{a,c\}$ kümesi *g*-kapalı bir küme değildir ve dolayısıyla *f* fonksiyonu *g*-sürekli değildir.

(2) f fonksiyonu *rIg*-sürekli bir fonksiyon olmasına rağmen *Ig*-sürekli olmayabilir. Gerçekten;
$X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{\phi,X,\{a\},\{b\}\{a,b\}\}$ topolojisi ve $I=\{\phi,\{c\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. $Y=\{p,q\}$ kümesi üzerinde $\varphi=\{Y,\phi,\{q\}\}$ topolojisi ile birlikte (Y,φ) topolojik uzayı verilsin. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonunu *f(a)=p, f(b)=f(c)=q* şeklinde tanımlayalım. f fonksiyonu Örnek 1.2.1gereği *rIg*-sürekli bir fonksiyon olup *Ig*-sürekli değildir.

(3) f fonksiyonu *Ig*-sürekli bir fonksiyon olmasına rağmen g-sürekli olmayabilir. Gerçekten;
$X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{\phi,X,\{a\},\{b,d\}\{a,b,d\}\}$ topolojisi ve $I=\{\phi,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. $Y=\{p,q\}$ kümesi üzerinde $\varphi=\{Y,\phi,\{q\}\}$ topolojisi ile birlikte (Y,φ) topolojik uzayı verilsin. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonunu *f(a)=f(b)=p, f(c)=f(d)=q* şeklinde tanımlayalım. *{p}* kümesi *Y* de kapalı bir küme ve $f^{-1}(q)=\{a,b\}$ olur. $U=\{a,b,d\}\in\tau$ için $\{a,b\}^*=\{b,d\}\subset U$ olur ki bu durum f fonksiyonun *I*g-sürekli fonksiyon olduğunu gösterir. Fakat $cl(\{a,b\})=X\not\subset U$ olduğundan *f* fonksiyonu g-sürekli fonksiyon değildir.

(4) f fonksiyonu *rIg*-sürekli bir fonksiyon olmasına rağmen *rg*-sürekli olmayabilir. Gerçekten;

$X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{\phi,X,\{c\},\{a,c\}\{b,c\}\{a,b,c\},\{a,c,d\}\}$ topolojisi ve $I=\{\phi,\{c\},\{d\},\{c,d\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. $Y=\{p,q\}$ kümesi üzerinde $\varphi=\{Y,\phi,\{p\}\}$ topolojisi ile birlikte (Y,φ) topolojik uzayı verilsin. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonunu *f(a)=f(b)=p, f(c)=f(d)=q* şeklinde tanımlayalım. *{q}* kümesi *Y* de kapalı bir küme ve $f^{-1}(q)=\{c,d\}$ olur. $U=\{a,c,d\}\subset RO(X,\tau)$ alalım. Buradan $\{a,c\}\subset\{a,c,d\}$ olduğu görülür. $cl(\{c,d\}^*)=cl(\phi)=\phi\subset\{a,c\}$ olur ki bu durum f fonksiyonun *rIg*-sürekli olduğunu gösterir. Fakat $cl(\{a,c\})=X\not\subset U=\{a,c,d\}$ olduğundan f fonksiyonu *rg*-sürekli fonksiyon değildir.

Tanım 2.3. $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $F\in\varphi^t$ için, $f^{-1}(F)\in O^*(X,\tau)$ ise; bu takdirde *f* fonksiyonuna O^*-sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.4. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $F\in\varphi^t$ için, $f^{-1}(F)\in\tau^*(X,\tau,I)$ ise; bu takdirde *f* fonksiyonuna *I*c-sürekli fonksiyon denir.

Önerme 2.3. Her *Ic-sürekli* fonksiyon, *Ig-sürekli* fonksiyondur.

Uyarı 2.4. Önerme 2.3. ile verilen önermenin genelde tersinin doğru olmadığını aşağıdaki örnek ile verdik.

Örnek 2.4. $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\phi,\{b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\}$ topolojisi ve $I=\{\phi,\{b\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. $Y=\{p,q\}$ kümesi üzerinde $\varphi=\{Y,\phi,\{p\}\}$ topolojisi ile birlikte (Y,φ) topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde $f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu *ve f(c)=f(b)=q, f(a)=p* şeklinde tanımlansın. *{q}* kümesi *Y* de kapalı bir küme ve $f^{-1}(\{q\})=\{b,c\}$ olur. $U=\{a,b,c\}\in\tau$ için $\{b,c\}^*=\{a,c\}\subset U$ olur ki bu ise f

fonksiyonun *I*g-sürekli fonksiyon olduğunu gösterir. Fakat $\{b,c\}^* = \{a,c\} \not\subset \{b,c\}$ olduğundan f fonksiyonu *Ic*-sürekli fonksiyon değildir.

Teorem 2.9. $f:(X,\tau,I) \to (Y,\varphi)$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir.

(1) *f*, *Ic*-sürekli fonksiyondur;

(2) Her $V \in \varphi$ için, $f^{-1}(V) \in \tau^*(X,\tau,I)$;

İspat. Tümleme ile ispat açıktır.

Tanım 2.5.([22]) $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $U \in \varphi$ için, $f^{-1}(U) \in RC(X,\tau)$ ise; bu takdirde *f* fonksiyonuna *RC*-sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.6.([17]) $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $U \in \varphi$ için, $f^{-1}(U) \in CO(X,\tau)$ ise; bu takdirde f fonksiyonuna perfectly(mükemmel şekilde) sürekli fonksiyon denir.

Teorem 2.10. $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir.

(1) *f* fonksiyonu, perfectly süreklidir;

(2) Her $V \in \varphi^t$ için $f^{-1}(V) \in CO(X,\tau)$.

İspat. Tümleme ile ispat açıktır.

Tanım 2.7.([1]) $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $U \in \varphi$ için, $f^{-1}(U) \in RO(X,\tau)$ ise; bu takdirde f fonksiyonuna completely(tamamen) sürekli fonksiyon denir.

Teorem 2.11. $f:(X,\tau) \to (Y,\varphi)$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir.

(1) *f* fonksiyonu, completely süreklidir;

(2) Her $V \in \varphi^t$ için, $f^{-1}(V) \in RC(X,\tau)$.

İspat. Tümleme ile ispat açıktır.

Tanım 2.8.([12]) $f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $F\in\varphi^t$ için, $f^{-1}(F)\in RIC(X,\tau,I)$ ise; bu takdirde f fonksiyonuna RIC-sürekli fonksiyon denir.

Sürekli fonksiyonun zayıf çeşitleri kadar kuvvetli çeşitleri de önemli olup bunlardan en önemlilerden birisi Tanım 2.9. da ele alınmıştır.

Tanım 2.9. $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer

(1) Her $V\subset Y$ için, $f^{-1}(V)\in CO(X,\tau)$ ise yada eşdeğeri olarak $A\subset X$ olmak üzere $f(cl(A))\subset f(A)$ oluyorsa bu takdirde; f fonksiyonuna strongly sürekli ([15]),

(2) Her $V\in RGO(Y,\varphi)$ için, $f^{-1}(V)\in\tau$ ise; f fonksiyonuna strongly *rg*-sürekli fonksiyon ([20]) denir.

Teorem 2.12.([20]) Eğer $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$**,** strongly *rg*-sürekli bir fonksiyon ve $g:(Y,\varphi)\to(Z,\sigma)$ *rg*-sürekli bir fonksiyon ise bu takdirde $gof:(X,\tau)\to(Z,\sigma)$ bileşke fonksiyonu, sürekli fonksiyondur

.

İspat. $V\in\sigma$ olsun. *g*, *rg*-sürekli bir fonksiyon olduğundan; $g^{-1}(Z)\in RGO(Y,\varphi)$ olur. Ayrıca *f*, strongly rg-sürekli bir fonksiyon olduğundan; $f^{-1}(g^{-1}(Z))\in\tau$ olur. Böylece; $(gof)^{-1}(Z)=f^{-1}(g^{-1}(Z))\in\tau$ olur ki, bu da gof bileşke fonksiyonun sürekli olduğunu gösterir.

Tanım 2.10.([20]) $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer, her $V\in RGO(Y,\varphi)$ için, $f^{-1}(V)\in CO(X,\tau)$ ise; f fonksiyonuna perfectly *rg*-sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.9. ve Tanım 2.10. ile verilen süreklilik çeşitleri ([20]) de aşağıdaki iki önermede olduğu gibi karşılaştırılmıştır.

Önerme 2.4.([20]) $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1)Eğer f strongly sürekli bir fonksiyon ise, f aynı zamanda strongly *rg*-süreklidir ,

(2)Eğer *f* strongly *rg*-sürekli fonksiyon ise, *f* aynı zamanda süreklidir.

Uyarı 2.5. Önerme 2.4. ile verilen gerektirmelerin terslerinin genelde doğru olmadığı, ([14]) de aşağıdaki gibi verilmiştir.

Örnek 2.5. (1) $X=\{a,b,c\}=Y$ ve $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, $\varphi=\{Y,\phi,\{a,b\}\}$ ve $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin.$V=\{a\}$ için $f^{-1}(V)=\{a\}$ X kümesi üzerinde açık küme fakat kapalı küme değildir. Bu yüzden f fonksiyonu strongly *rg*- süreklidir fakat strongly sürekli değildir

(2) $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde, $\tau=\{X,\phi,\{a\}\}$ topolojisi ve $Y=\{p,q,r\}$ kümesi üzerinde $\varphi=\{Y,\phi,\{p,q\}\}$ topolojisi verilsin. $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu $f(a)=f(b)=p$ ve $f(c)=q$ şeklinde tanımlansın. $V=\{p\}\subset RGO(Y,\varphi)$ olmak üzere $f^{-1}(V)=\{a,b\}$ X kümesi üzerinde açık küme değildir. Bu yüzden f fonksiyonu süreklidir fakat strongly *rg*-sürekli değildir.

Önerme 2.5. $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Eğer f strongly sürekli fonksiyon ise, f aynı zamanda perfectly *rg*-süreklidir.

İspat: Tanım 2.9(1). ve Tanım 2.10. gereği ispat açıktır.

(2) Eğer f perfectly *rg*-sürekli fonksiyon ise, f aynı zamanda strongly rg-süreklidir ([20]).

Uyarı 2.6. Önerme 2.5. ile verilen gerektirmelerin terslerinin genelde doğru olmadığı aşağıda ele alındı.

Örnek 2.6.(1) $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ topolojisi ve $Y = \{p,q,r\}$ üzerinde $\varphi = \{Y, \phi, \{p,q\}\}$ topolojisi verilsin. $f : (X,\tau) \to (Y,\varphi)$ fonksiyonu $f(a) = f(c) = p$ ve $f(b) = q$ şeklinde tanımlanıyor. $G = \{p,q\} \subset RGO(Y,\varphi)$ olmak üzere $f^{-1}(G) = \{a,b,c\}$ X kümesi üzerinde hem açık küme hem de kapalı küme olduğu için f fonksiyonu perfectly *rg*-sürekli fonksiyondur. Fakat $\{q\} \in Y$ olmak üzere $f^{-1}(\{q\}) = \{b\}$ X kümesi üzerinde açık küme olup kapalı küme değildir. Bu yüzden *f* fonksiyonu strongly sürekli fonksiyon değildir.

(2) $X = \{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ topolojisi ve $Y = \{p,q,r\}$ üzerinde $\varphi = \{Y, \phi, \{p,q\}\}$ topolojisi verilsin. $f : (X,\tau) \to (Y,\varphi)$ fonksiyonu $f(a) = f(b) = p$ ve $f(c) = q$ şeklinde tanımlanıyor. f fonksiyonu strongly *rg*-sürekli fonksiyondur. $V = \{p\} \subset RGO(Y,\varphi)$ olmak üzere $f^{-1}(V) = \{a,b\}$ X kümesi üzerinde açık küme fakat kapalı küme değildir. Bu yüzden *f* fonksiyonu perfectly *rg*-sürekli fonksiyon değildir ([20]).

Önerme 2.6. $f : (X,\tau) \to (Y,\varphi)$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) Eğer f strongly sürekli fonksiyon ise, f aynı zamanda perfectly süreklidir([4]).

(2) Eğer f perfectly sürekli fonksiyon ise, f aynı zamanda completely süreklidir([6]).

(3) Eğer *f* completely sürekli fonksiyon ise, f aynı zamanda süreklidir[5].

Uyarı 2.7. Önerme 2.6. ile verilen gerektirmelerin terslerinin genelde doğru olmadığı aşağıda ele alındı.

Örnek 2.7. (1),(2) $X=\{a,b,c\}, Y=\{p,q\}$ ve $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, $\varphi=\{Y,\phi,\{q\}\}$ $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu $f(a)=f(c)=q$ ve $f(b)=p$ şeklinde tanımlansın. $V=\{q\}\subset Y$ olmak üzere $f^{-1}(V)=\{a,c\}\in RO(X,\tau)$ olduğundan f fonksiyonu completely sürekli fonksiyondur. Fakat $\{q\}\in Y$ olmak üzere $f^{-1}(\{q\})=\{a,c\}$ X kümesi üzerinde kapalı küme olup açık küme değildir. Bu yüzden f fonksiyonu strongly sürekli fonksiyon değildir.

(2) $X=\{a,b,c\}, Y=\{p,q\}$ ve $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}, \varphi=\{Y,\phi,\{q\},\{p\}\}$ $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu $f(b)=f(c)=p$ ve $f(b)=q$ şeklinde tanımlansın. İlgili tanımlar kullanılarak f fonksiyonun sürekli fonksiyon olduğu görülmektedir. Fakat $V=\{p\}\subset Y$ olmak üzere $f^{-1}(V)=\{b,c\}\notin RO(X,\tau)$ olduğundan f fonksiyonu completely sürekli fonksiyon değildir.

Yukarıda verilen fonksiyon tanımlarının ideal topolojik uzaylardaki karşılıkları aşağıdaki gibidir:

Tanım 2.11. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi,J)$ fonksiyonu verilsin. Eğer

(1) Her $V\in\varphi$ için, $f^{-1}(V)\in O^{*}(X,\tau,I)$ ise; f fonksiyonuna strongly I- süreklidir;

(2) Her $V\in RIGO(Y,\varphi,J)$ için $f^{-1}(V)\in\tau$ (X,τ,I) ise; f fonksiyonuna strongly rIg-süreklidir denir.

Önerme 2.7. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi,J)$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir:

(1) Eğer f strongly sürekli bir fonksiyon ise; f aynı zamanda strongly I- süreklidir;

(2) Eğer f strongly I-sürekli fonksiyon ise; f aynı zamanda strongly rIg - süreklidir.

Uyarı 2.8. Önerme 2.7. ile verilen gerektirmelerin terslerinin genelde doğru olmadığı aşağıda ele alındı.

Örnek 2.8. (1) $X=\{a,b,c\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b,c\}\}$ topolojisi ve $I=\{\phi,\{c\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. $Y=\{p,q\}$ kümesi üzerinde $\varphi=\{Y,\phi,\{p\}\}$ topolojisi ve $J=\{\phi,\{p\}\}$ ideali ile birlikte (Y,φ,J) ideal topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde $f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi,J)$ fonksiyonu $f(b)=f(c)=p$, $f(a)=q$ şeklinde tanımlansın. $V=\{p\}\subset Y$ olmak üzere, $f^{-1}(V)=\{b,c\}$ açık küme elde edilir. Ayrıca $\{b,c\}^{*}=\{b,c\}$ olduğundan; f fonksiyonu, strongly I-sürekli olup strongly sürekli değildir.

(2) $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi, $\tau=\{X,\phi,\{d\},\{a,c\},\{a,c,d\},\{a,b,c\}\}$ topolojisi ve $I=\{\phi,\{a\},\{c\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. $Y=\{p,q\}$ kümesi üzerinde $\varphi=\{Y,\phi,\{p\}\}$ topolojisi ve $J=\{\phi,\{p\}\}$ ideali ile birlikte (Y,φ,J) ideal topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde $f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi,J)$ fonksiyonu $f(b)=f(c)=f(a)=p$ ve $f(d)=q$ şeklinde tanımlansın. $V=\{p\}\subset Y$ olmak üzere $f^{-1}(V)=\{a,b,c\}$ açık küme elde edilir. Ayrıca $\{a,b,c\}\subset\{a,b,c\}\in RO(X,\tau)$ ve $\{a,b,c\}^{*}=cl(\{b\})=\{b\}\subset\{a,b,c\}$ elde edilir. Bu ise f fonksiyonun strongly rIg-sürekli olduğunu gösterir. Fakat $\{a,b,c\}\in CO(X,\tau)$ olduğundan f fonksiyonu strongly I-sürekli fonksiyon değildir.

Teorem 2.13. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi,J)$, strongly rIg-sürekli bir fonksiyon olsun ve $g:(Y,\varphi,J)\to(Z,\sigma)$, rIg-sürekli bir fonksiyon ise bu takdirde $gof:(X,\tau,I)\to(Z,\sigma)$ bileşke fonksiyonu süreklidir.

İspat. $V\in\sigma$ olsun. g, $r_I g$ -sürekli bir fonksiyon olduğundan; $g^{-1}(V)\in RGO(Y,\varphi,J)$ olur. Ayrıca f, strongly rIg-sürekli fonksiyon olduğundan;

$f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \tau$ olur. Böylece; $(gof)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \tau$ olur ki, bu da *gof* bileşke fonksiyonun sürekli olduğunu gösterir.

Tanım 2.12. $f : (X, \tau, I) \to (Y, \varphi, J)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $V \in RIGO(Y, \varphi, J)$ için, $f^{-1}(V) \in CO(X, \tau, I)$ ise; f fonksiyonuna perfectly *rIg*-sürekli fonksiyon denir.

Teorem 2.14. $f : (X, \tau) \to (Y, \varphi, J)$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir:

(1) f, perfectly *rIg*-süreklidir;

(2) Her $V \in RIGO(Y, \varphi, J)$ için, $f^{-1}(V) \in \tau$ ve $f^{-1}(V) \in \tau^t$;

(3) Her $F \in RIGC(Y, \varphi, J)$ için, $f^{-1}(F) \in \tau$ ve $f^{-1}(F) \in \tau^t$.

İspat . (1) $\Rightarrow$ (2) Tanımdan açıkça görülmektedir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $F \in RIGC(Y, \varphi, J)$ olsun. $(Y - V) \in RIGO(Y, \varphi, J)$ dır. (2) den $f^{-1}(Y - F) \in \tau$ ve $f^{-1}(Y - F) \in \tau^t$ olur. Dolayısıyla ;

$f^{-1}(Y - F) \in \tau = f^{-1}(Y) - f^{-1}(F) = (X - f^{-1}(F)) \in \tau$ ve $(X - f^{-1}(F)) \in \tau^t$ ile birlikte $f^{-1}(F) \in \tau$ ve $f^{-1}(F) \in \tau^t$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

(3) $\Rightarrow$ (1) $V \in RIGO(Y, \varphi, J)$. O halde $(Y - V) \in RIGC(Y, \varphi, J)$ olur. (3) den $f^{-1}(Y - V) \in \tau$ ve $f^{-1}(Y - V) \in \tau^t$ elde dilir. Dolayısıyla ;

$f^{-1}(Y - V) \in \tau = f^{-1}(Y) - f^{-1}(V) = (X - f^{-1}(V)) \in \tau$ ve $(X - f^{-1}(V)) \in \tau^t$ ile birlikte $f^{-1}(V) \in \tau$ ve $f^{-1}(V) \in \tau^t$ elde edilir. Böylece tanım gereği *f* fonksiyonu perfectly *rIg*-sürekli fonksiyon olur.

Önerme 2.8. $f : (X, \tau, I) \to (Y, \varphi, J)$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir:

(1) Eğer *f* perfectly *rIg*-sürekli fonksiyon ise, f aynı zamanda *rIg*-süreklidir.

(2) Eğer *f* perfectly *rIg*-sürekli fonksiyon ise, f aynı zamanda RIC-süreklidir.

(3) Eğer *f* perfectly RIC–sürekli fonksiyon ise, *f* aynı zamanda *I*c-süreklidir. fonksiyondur.

Uyarı 2.9. Önerme 2.8. ile verilen gerektirmelerin terslerinin genelde doğru olmadığı aşağıda ele alındı.

Örnek 2.9. (1) $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi, $\tau=\{X,\phi,\{d\},\{a,c\},\{a,c,d\},\{a,b,c\}\}$ topolojisi ve $I=\{\phi,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. $Y=\{p,q\}$ kümesi üzerinde $\varphi=\{Y,\phi,\{p,q\}\}$ topolojisi ve $J=\{\phi,\{p\}\}$ ideali ile birlikte (Y,φ,J) ideal topolojik uzayı verilsin. Ayrıca $f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi,J)$ fonksiyonu, *f(a)=f(c)=f(d)=p* ve *f(b)=q* şeklinde tanımlansın. $V=\{p\}\subset Y$ olmak üzere, $f^{-1}(V)=\{a,c,d\}$ açık küme elde edilir. Ayrıca $\{a,c,d\}\subset\{a,c,d\}\in RO(X,\tau,I)$ ve $\{a,c,d\}^{*}=cl(\{d\})=\{d\}\subset\{a,c,d\}$ elde edilir ki *f* fonksiyonu strongly *rIg*-süreklidir. Fakat $\{a,c,d\}\in\tau$ ve $\{a,c,d\}\notin\tau^{t}$ olduğundan; *f* fonksiyonu perfectly *rIg*-sürekli değildir.

(2) $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{b,d\},\{a,b,d\}\}$ topolojisi ve $I=\{\phi,\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. $Y=\{p,q\}$ kümesi üzerinde $\varphi=\{Y,\phi,\{p\}\}$ topolojisi ve $J=\{\phi,\{p\}\}$ ideali ile birlikte (Y,φ,J) ideal topolojik uzayı verilsin. Ayrıca $f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi,J)$ fonksiyonu, *f(a)=f(c)=q* ve *f(b)=f(d)=p* şeklinde tanımlansın. $V=\{p\}\subset Y$ ve $F=\{q\}\subset\varphi^{t}$ olmak üzere; $f^{-1}(F)=\{a,c\}=Int(\{a,c\})^{*}$ olur ki, f fonksiyonu RIC-süreklidir. Ayrıca $V=\{p\}\in RIGO(X)$ ve $f^{-1}(V)=\{b,d\}\in\tau$ olup kapalı küme değildir. Bundan dolayı *f* fonksiyonu perfectly *rIg*-sürekli değildir.

(3) $X=\{a,b,c\}$, $\tau=\{X,\phi,\{a\},\{a,b\}\}$ topolojisi ve $I=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ ideali ile birlikte (X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. $Y=\{p,q\}$ kümesi üzerinde $\varphi=\{Y,\phi,\{p\}\}$ topolojisi ile birlikte (Y,φ,J) ideal topolojik uzayı verilsin. Ayrıca

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi,J)$ fonksiyonu, *f(a)=f(b)=p*, *f(c)=q* şeklinde tanımlansın. $F=\{q\}\in\varphi^t$ ve $f^{-1}(F)=\{c\}=\{c\}^*\subset\{c\}$ olduğundan *f*, *I*c-sürekli fonksiyondur. $F=\{c\}$ için $Int(F)=\phi$ ve $\phi^*=\phi$ olduğundan; $Int(F)^*=\phi$ elde edilir ki bu durum bize *f* fonksiyonunun *RIC*-sürekli olmadığını gösterir

Tanım 2.13. Her açık alt kümesi *-dense-in itself küme olan uzaya **-uzayı ([11])denir.

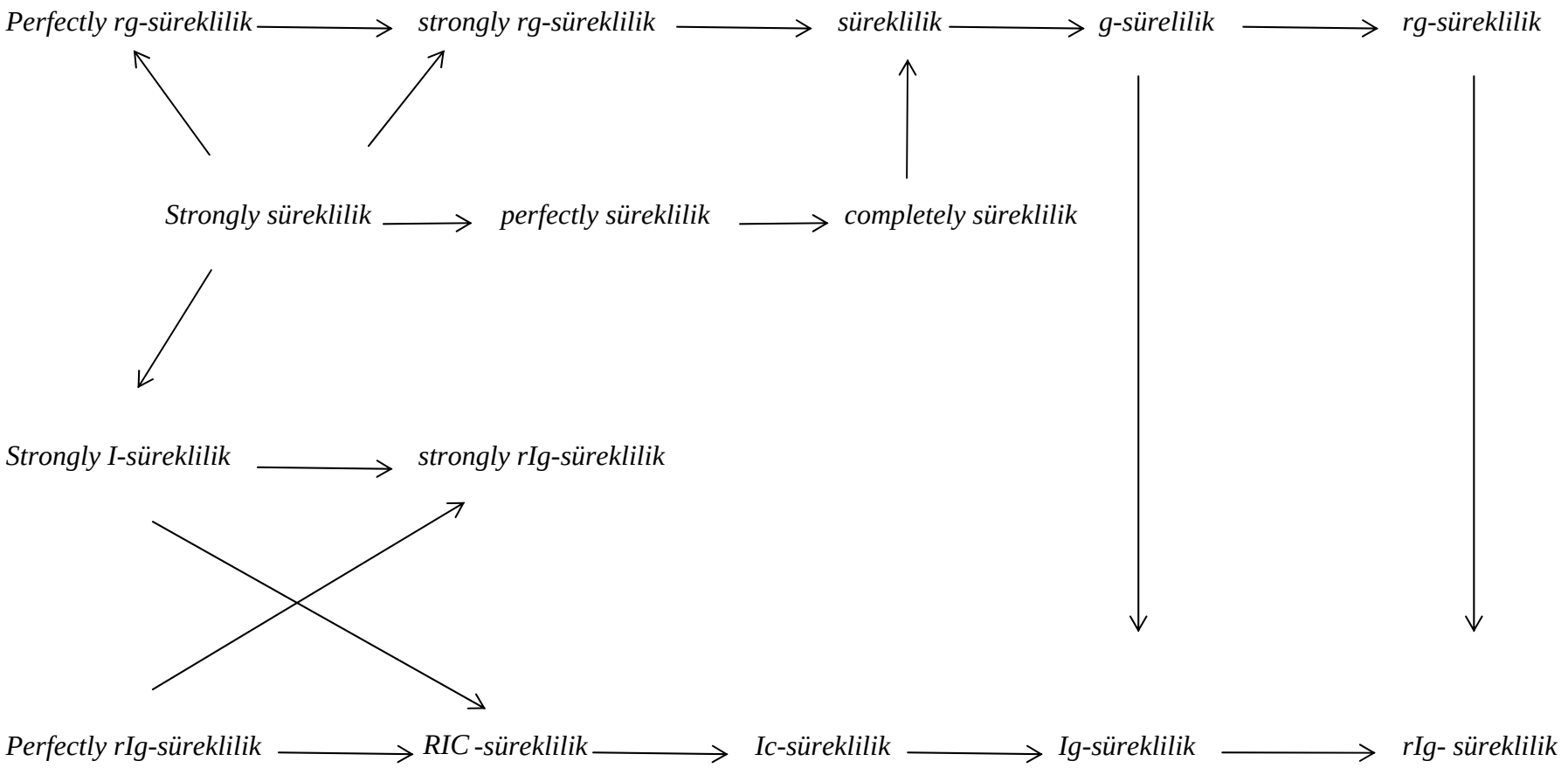
Önerme 2.9. $f:(X,\tau,I)\to(Y,\varphi,J)$ fonksiyonu verilsin. Eğer, f fonksiyonu *rIg*-sürekli ve (X,τ,I) **-uzayı ise, *f* fonksiyonu *rg*-süreklidir.

İspat: Tanım 2.13. , Tanım 1.2.14. ve Tanım 1.1.3. gereği ispat açıktır.

İlgili tanımlar kullanılarak aşağıdaki sonuç direkt elde edilir.

Sonuç 2.1. **-uzayında *rIg*-süreklilik ile *rg*-süreklilik kavramları çakışıktır.

Şekil 1.1. ve ilgili süreklilik tanımları kullanılarak aşağıdaki diyagramı verebiliriz.


Perfectly rg-süreklilik
strongly rg-süreklilik
süreklilik
g-sürelilik
rg-süreklilik
Strongly süreklilik
perfectly süreklilik
completely süreklilik
Strongly I-süreklilik
strongly rIg-süreklilik
Perfectly rIg-süreklilik
RIC -süreklilik
Ic-süreklilik
Ig-süreklilik
rIg- süreklilik

Şekil 2.2.

KAYNAKLAR

[1]. Arya, S.P. and Gupta, R.1974. On strongly continuous mappings, Kyung pook Math. J.14, 131-143

[2]. Balachandran, K., Sundram, P., and Maki, H. 1991. On generalized continuous maps in topological spaces, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. 12, 5-13.

[3]. Dontchev, J., Ganster, M. and Noiri, T.1999. Unıfied operation approach of generalized closed sets via topological ideals, Math Japonica 49(3), 395-401.

[4] Dontchev, J. and Noiri, T.1999. Contra-semicontinuous functions, Math.Pannonica 10,159-168

[5] Ekici, E.2007. On almost πgp -continuous functions, Chaos,Solitons and Fractals 32(5),1935-1944

[6] Ekici, E.2008. On contra πg -continuous functions, Chaos,Solitons and Fractals 35(1), 71-81

[7]. Hayashi, E. 1964. Topologies defined by local properties, Math. Ann. 156, 205-215.

[8]. Janković, D.S. 1983. On locally irreducible spaces, Ann. Soc. Sci. Bruxelles Ser. I, 97, 59-72.

[9]. Janković, D. and Hamlet, T.R.1990. New topologies from old via ideals, Amer. Math. Monthly, 97, 295-310.

[10] Kasara, S. 1979.Operation-compact spaces, Math.Japon.,24,97-105

[11]. Keskin, A. 2003. New decompositions of contiunity in ideal topological spaces, PhD. Thesis, Konya.

[12] . Keskin, A., Noiri, T. and Yuksel S. 2004. f_I -sets and decomposition of $R_I C$ -continuity, Acta Math. Hungar. 104(4), 307-313.

[13]. Kuratowski, K, 1933, Topologie I, Warszawa.

[14]. Levine, N.1970. Generalized closed sets in topology, Rend. Circ. Math. Palermo (2), 19, 89-96.

[15]. Levine, N. 1960. Strong continuity in topological space, Amer. Math. Monthly 67, 269.

[16]. Noiri, T.1996. Mildly normal spaces and some functions, Kyungpook Math. J.36, 183-190.

[17]. Noiri, T. 1984.Supercontinuity and some strong forms of continuity, Indian J. Pure Appl. Math.15(3), 241-250.

[18] Ogata, H. 1983. Operations on topological spaces and associated topology, Math.Japon. 38, 981-985.

[19]. Palaniappan, N. and Rao, K.C. 1993. Regular generalized closed sets, Kyungpook Math. J. 33, 211-219

[20]. Rani, A. and Balachandran, K.1997. On regular Generalized Continuous Maps in Topological Spaces, Kyunpook Math. J. 37, 305-314.

[21]. Samuels, P.1975. A topology formed from a given topological space, J. London Math. Soc. (2), Studies 10,409-416.

[22]. Tong, T. 1989. On decomposition of continuity in topological spaces, Acta Math. Hungar. 54(1-2), 51-55.

[23]. Vaidyanathaswamy, R.1945. The localization theory in set-topology, Proc. Indian Acad. Sci. Studies 20,51-61.

[24]. Vaidyanathaswamy, R.1960. Set Topology, Chelsea Publishing Company, New York.

[25]. Yuksel, S., Keskin, A. and Noiri, T. 2004. Idealization of decomposition theorem, Acta Math. Hungar. 102 (4), 269-277