İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RADYAL VE ÇEMBERSEL ÇATLAKLI HALKA PLAKLARIN SERBEST TİTREŞİMLERİ

DOKTORA TEZİ
Y. Müh. Aydın DEMİR
(503982015)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12 Eylül 2005
Tezin Savunulduğu Tarih : 21 Aralık 2005

Tez Danışmanı :	**Prof. Dr. Vahit MERMERTAŞ**
Diğer Jüri Üyeleri	**Prof. Dr. Vedat KARADAĞ (İ.T.Ü.)**
	Doç. Dr. Engin ORAKDÖĞEN (İ.T.Ü.)
	Prof. Dr. Necati TAHRALI (Y.T.Ü.)
	Doç. Dr. İsmail YÜKSEK (Y.T.Ü.)

ARALIK 2005

ÖNSÖZ

Çalışmam süresince değerli destek ve yardımlarını gördüğüm Sayın Prof. Dr. Vahit MERMERTAŞ'a teşekkür ederim.

Ayrıca, araştırma görevlisi olarak çalıştığım İ.T.Ü Makina Fakültesi, Makina Teorisi Sistem Dinamiği ve Kontrol Anabilim Dalı'nda çalışan tüm öğretim üyeleri ve elemanlarına ve her zaman yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Aralık 2005 Aydın DEMİR

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR **v**
TABLO LİSTESİ **vi**
ŞEKİL LİSTESİ **vii**
SEMBOL LİSTESİ **xi**
ÖZET **xiv**
SUMMARY **xv**

1. GİRİŞ **1**
1.1 Giriş 1
1.2 Literatür Araştırmaları 2
1.3 Tezin Amacı ve Kapsamı 4

2. ÇATLAK MODELLEME YÖNTEMLERİ **6**
2.1 Çatlağın Modellenmesi 6
2.1.1 Kırılma mekaniği yardımıyla lokal esneklik kavramı 6
2.2 Gerilme Şiddeti Faktörleri 10

3. ÇATLAKLI YAMUK PLAK ELEMAN **14**
3.1 Çatlaksız Yamuk Plak Eleman 14
3.1.1 Katılık matrisi 19
3.1.2 Kütle matrisi 23
3.1.3 Esneklik matrisi 24
3.2 Çatlağın Esneklik Matrisine Etkisi 26
3.3 Çatlaklı Yamuk Plak Eleman 31

4. RADYAL ÇATLAKLI SEKTÖR ELEMAN **36**
4.1 Çatlaksız Sektör Eleman 36
4.1.1 Katılık matrisi 40
4.1.2 Kütle matrisi 43
4.2 Radyal Çatlaklı Sektör Eleman 44

5. ÇEMBERSEL ÇATLAKLI SEKTÖR ELEMAN **49**

6. SAYISAL UYGULAMALAR **56**
6.1 Radyal Çatlaklı Halka Plak 56
6.2 Çembersel Çatlaklı Halka Plak 70

7. SONUÇLAR VE GENEL DEĞERLENDİRME **84**
7.1 Sonuçların Özeti 84
7.2 Gelecekte Yapılabilecek Çalışmalar 85

KAYNAKLAR **86**

EK A **91**

EK B **95**

EK C **100**

EK D **105**

ÖZGEÇMİŞ **108**

KISALTMALAR

C-F : Halka plağın iç kenarı ankastre, dış kenarı serbest sınır şartı
F-C : Halka plağın iç kenarı serbest, dış kenarı ankastre sınır şartı
C-C : Halka plağın iç ve dış kenarı ankastre sınır şartı
S-S : Halka plağın iç ve dış kenarı basit mesnetlenmiş sınır şartı

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 2.1 : Gerilme şiddeti faktörlerini belirleyen yöntemler..... 12
Tablo 3.1 : Yamuk plak elemanın düğüm noktası değerleri…..…… 17
Tablo 4.1 : Sektör plak elemanın düğüm noktası değerleri……. 38
Tablo 6.1 : Çeşitli sınır şartları için çatlaksız halka plağın ($r_{iç} / r_{dış}$ = 0.23) serbest titreşim modları *(i,j)* ve doğal frekansları (*Hz*) …..... 58
Tablo 6.2 : Radyal çatlaklı ve çatlaksız C-F sınır şartlı halka plakların doğal frekanslarının karşılaştırılması, $r_{iç} / r_{dış} = 0.23$…..…….. 58
Tablo 6.3 : Farklı sınır şartları için iç kenardan başlayan radyal çatlaklı halka plağın doğal frekansları (*Hz*)……...……. 64
Tablo 6.4 : Farklı sınır şartları için dış kenardan başlayan radyal çatlaklı halka plağın doğal frekansları (*Hz*)……...……. 65
Tablo 6.5 : Her iki kenarı basit mesnetlenmiş (S-S) halka plağın boyutsuz temel frekansı (λ_{00}), $r_{iç}/r_{dış} = 0.2$ ……...……...…….. 71
Tablo 6.6 : Her iki kenarı ankastre (C-C) halka plağın boyutsuz temel frekansının çatlak konumu ve açısı ile değişimi, $r_{iç}/r_{dış} = 0.2$ …… 71
Tablo 6.7 : Halka plakta çembersel çatlakların konumları, $r_{iç} / r_{dış} = 0.23$..…... 72
Tablo 6.8 : Çembersel çatlaklı (α_c = 360°) iç kenarı ankastre dış kenarı serbest (C-F) halka plağın titreşim modları (*i,j*) ve doğal frekansları ω_{ij} (*Hz*)…… 72
Tablo 6.9 : Farklı sınır şartları ve çatlak sayıları için çembersel çatlaklı (α_c = 360°) halka plağın serbest titreşim modları (*i,j*) ve doğal frekansları ω_{ij} (*Hz*)…… 78
Tablo 6.10 : Hallka plakta çembersel çatlakların konumları, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$ 79

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1 : Çeşitli yüklere maruz çatlaklı yapı……..…..... 6

Şekil 2.2 : Çatlak konumuna göre belirlenen koordinatlar..... 10

Şekil 2.3 : Çatlak yüzey yer değiştirmelerinin üç simetrik temel modları a) Açılma modu b) Kayma modu c) Yırtılma modu…… 12

Şekil 3.1 : Yamuk plak elemanı ve yer değiştirmeleri..... 15

Şekil 3.2 : Yamuk plak elemandaki düğüm kuvvetleri a)Bağımlı düğüm kuvvetleri (S_1- S_{12}) b) Bağımsız düğüm kuvvetleri (F_1- F_9)…… 25

Şekil 3.3 : Çatlaklı yamuk plak elemanda gerilme durumu……..... 28

Şekil 3.4 : Düzeltme fonksiyonu (κ_1)..... 29

Şekil 3.5 : Düzeltme fonksiyonu κ_2)..... 30

Şekil 3.6 : Boyutsuz esnekliklerin bağıl çatlak boyu ile değişimi…..…… 31

Şekil 3.7 : Çatlaklı yamuk plak eleman……..…… 32

Şekil 3.8 : Yamuk plak elemanda statik olarak eşdeğer kuvvetler……..... 34

Şekil 4.1 : Radyal çatlaklı sektör eleman……..…….. 36

Şekil 4.2 : Sektör ve yamuk elemanın geometrik yakınlığı..…..…… 45

Şekil 4.3 :Yamuk elemana göre sektör elemandaki boyut hatası grafiği ($\Delta(hata)$)……..... 46

Şekil 4.4 : Radyal çatlaklı sektör elemanın katılık matrisinin bulunması için aşamalar……. 48

Şekil 5.1 : Çatlaklı yamuk eleman geometrisi……..…….. 49

Şekil 5.2 : Çatlaklı yamuk plak eleman a) Bağımlı düğüm noktası kuvvetleri (S_1- S_{12}) b) Bağımsız düğüm noktası kuvvetleri (F_1- F_9)……. 51

Şekil 5.3 : Çembersel çatlaklı sektör eleman…….. 52

Şekil 5.4 : Çembersel çatlaklı sektör elemanın katılık matrisinin bulunması için aşamalar……. 55

Şekil 6.1 : İç kenardan başlayan dört ve dış kenardan başlayan on iki radyal çatlaklı halka plakta çatlak konumları..…… 57

Şekil 6.2 : Çatlaksız C-F halka plağın ilk üç çap modu (----- : Hareketsiz çaplar) a) Mod (1,0) b) Mod (2,0) c) Mod (3,0)……..... 59

Şekil 6.3 : Çatlaklı C-F halka plağın birinci çap modunun bağıl değişimi ----- : Hareketsiz noktalar , -·-·-· : Çatlak konumları a) Hareketsiz noktalara en yakın çatlak konumları b) Hareketsiz noktalara uzak çatlak konumları……... 60

Şekil 6.4 : Çatlaklı C-F halka plağın ikinci çap modunun bağıl değişimi ----- : Hareketsiz noktalar , -·-·-· : Çatlak konumları a) Hareketsiz noktalara en yakın çatlak konumları b)Hareketsiz noktalara uzak çatlak konumları……... 61

Şekil 6.5 : Çatlaklı C-F halka plağın üçüncü çap modunun bağıl değişimi ----- : Hareketsiz noktalar , -·-·-· : Çatlak konumları

a) Hareketsiz noktalara en yakın çatlak konumları b) Hareketsiz noktalara uzak çatlak konumları…….…….. 62
Şekil 6.6 : F-C halka plağın (1,0) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$……..……. 67
Şekil 6.7 : F-C halka plağın (2,0) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$..……. 67
Şekil 6.8 : F-C halka plağın (3,0) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$..……. 67
Şekil 6.9 : F-C halka plağın (0,1) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$..……. 68
Şekil 6.10 : F-C halka plağın (0,2) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$..……. 68
Şekil 6.11 : F-C halka plağın (0,3) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$..……. 68
Şekil 6.12 : İç kenardan başlayan 4 radyal çatlaklı F-C halka plağın (2,0) mod şeklinin bağıl değişimi, $2a_c/(r_{dış} - r_{iç}) = 0.40$ ……... 69
Şekil 6.13 : İç kenardan başlayan 4 radyal çatlaklı F-C halka plağın (2,0) mod şeklinin bağıl değişimi, $2a_c/(r_{dış} - r_{iç}) = 0.55$ …… 69
Şekil 6.14 : Çembersel çatlaklı bir halka plak……..…… 70
Şekil 6.15 : Çatlaksız C-F halka plağın ilk üç çember modu (-----: Hareketsiz çember konumları) a) Mod (0,1) b) Mod (0,2) c) Mod (0,3)…..... 74
Şekil 6.16 : Çembersel çatlaklı C-F halka plağın birinci çember modunun bağıl değişimi ----- : Hareketsiz noktalar , -·-·-· : Çatlak konumları a) Hareketsiz noktalara en yakın ($r_c/r_{dış}$ = 0.8269#) çatlak konumları b) Hareketsiz noktalara uzak ($r_c/r_{dış}$ = 0.6346#) çatlak konumları…… 75
Şekil 6.17 : Çembersel çatlaklı C-F halka plağın ikinci çember modunun bağıl değişimi ----- : Hareketsiz noktalar , -·-·-· : Çatlak konumları a) Hareketsiz noktalara en yakın ($r_c/r_{dış}$=0.5961#, 0.8653#) çatlak konumları b) Hareketsiz noktalara uzak ($r_c/r_{dış}$=0.5192, 0.7500) çatlak konumları…..…….. 76
Şekil 6.18 : Çembersel çatlaklı C-F halka plağın üçüncü çember modunun bağıl değişimi ----- : Hareketsiz noktalar , -·-·-· : Çatlak konumları a) Hareketsiz noktalara en yakın ($r_c/r_{dış}$=0.4423#, 0.6731#, 0.9038#) çatlak konumları b) Hareketsiz noktalara uzak ($r_c/r_{dış}$=0.4423, 0.6346, 0.8269) çatlak konumları…….. 77
Şekil 6.19 : F-C halka plağın (1,0) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$..…….... 79
Şekil 6.20 : F-C halka plağın (2,0) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$...…….... 80
Şekil 6.21 : F-C halka plağın (3,0) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$...…….... 80
Şekil 6.22 : F-C halka plağın (0,1) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$…..…….... 80
Şekil 6.23 : F-C halka plağın (0,2) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$..…….... 81
Şekil 6.24 : F-C halka plağın (0,3) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$..…….... 81

Şekil 6.25 : Bir çembersel çatlaklı F-C halka plağın (0,3) mod şeklinin bağıl değişimi, $\alpha_c / 2\pi = 0.05$ 82
Şekil 6.26 : İki çembersel çatlaklı F-C halka plağın (0,3) mod şeklinin bağıl değişimi, $\alpha_c / 2\pi = 0.05$ 82
Şekil 6.27 : Bir çembersel çatlaklı F-C halka plağın (0,3) mod şeklinin bağıl değişimi, $\alpha_c / 2\pi = 1.00$ 82
Şekil 6.28 : İki çembersel çatlaklı F-C halka plağın (0,3) mod şeklinin bağıl değişimi, $\alpha_c / 2\pi = 1.00$ 83
Şekil A.1 : C-F halka plağın (0,0) modu..... 91
Şekil A.2 : C-F halka plağın (4,0) modu..... 91
Şekil A.3 : C-F halka plağın (1,1) modu..... 92
Şekil A.4 : C-F halka plağın (2,1) modu..... 92
Şekil A.5 : C-F halka plağın (5,0) modu..... 92
Şekil A.6 : C-F halka plağın (3,1) modu..... 93
Şekil A.7 : C-F halka plağın (6,0) modu..... 93
Şekil A.8 : C-F halka plağın (4,1) modu..... 93
Şekil A.9 : C-F halka plağın (1,2) modu..... 94
Şekil A.10 : C-F halka plağın (1,3) modu..... 94
Şekil A.11 : C-F halka plağın (2,2) modu..... 94
Şekil B.1 : F-C halka plağın (1,0) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$..... 96
Şekil B.2 : F-C halka plağın (2,0) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$..... 96
Şekil B.3 : F-C halka plağın (3,0) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$..... 96
Şekil B.4 : F-C halka plağın (0,1) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$..... 97
Şekil B.5 : F-C palka plağın (0,2) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$..... 97
Şekil B.6 : F-C halka plağın (0,3) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$..... 97
Şekil B.7 : F-C halka plağın (1,0) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$..... 98
Şekil B.8 : F-C halka plağın (2,0) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$..... 98
Şekil B.9 : F-C halka plağın (3,0) modu frekansının çatlak boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$..... 98
Şekil B.10 : F-C halka plağın (0,1) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$..... 99
Şekil B.11 : F-C halka Plağın (0,2) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$..... 99
Şekil B.12 : F-C halka plağın (0,3) modu frekansının çatlak boyu ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$..... 99
Şekil C.1 : F-C halka plağın (1,0) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$..... 101
Şekil C.2 : F-C halka plağın (2,0) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$..... 101
Şekil C.3 : F-C halka plağın (3,0) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$..... 101

Şekil C.4 : F-C halka plağın (0,1) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$…….……. 102
Şekil C.5 : F-C halka plağın (0,2) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$…….……. 102
Şekil C.6 : F-C halka plağın (0,3) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$…….……. 102
Şekil C.7 : F-C halka plağın (1,0) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$…….……. 103
Şekil C.8 : F-C halka plağın (2,0) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$…….……. 103
Şekil C.9 : F-C halka plağın (3,0) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$……... 103
Şekil C.10 : F-C halka plağın (0,1) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$…….……. 104
Şekil C.11 : F-C halka plağın (0,2) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$…….……. 104
Şekil C.12 : F-C halka plağın (0,3) modu frekansının çatlak açısı ve sayısıyla değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$…….……. 104
Şekil D.1 : Radyal veya çembersel çatlaklı halka plakta doğal frekansların elde edildiği programın akış şeması …..…..……..... 106
Şekil D.2 : Radyal veya çembersel çatlaklı halka plakta mod şekillerinin elde edildiği programın akış şeması …… 107

SEMBOL LİSTESİ

A	: Kesit alanı
a	: Çatlak derinliği
a_c	: Çatlak yarı boyu
a_1	: Yamuk elemanın kısa düz kenarı
a_2	: Yamuk elemanın uzun düz kenarı
B	: Birim şekil değiştirmeler ile yer değiştirme alanı arasındaki bağıntıyı sağlayan matris
b	: Yamuk elemanın düz kenarları arasındaki mesafe
b_c	: Çatlak genişliği
C	: Esneklik matrisi
$\mathbf{C_{s\theta}^{o}}$	: Çatlaksız sektör elemanın esneklik matrisi (çembersel çatlak için)
$\mathbf{C_{sr}^{o}}$	: Çatlaksız sektör elemanın esneklik matrisi (radyal çatlak için)
$\mathbf{C_t^o}$	: Çatlaksız yamuk elemanın esneklik matrisi
$\mathbf{C^1}$	: Yamuk eleman içindeki çatlaklı bölgenin esneklik matrisi
c_{ij}	: Çatlağın lokal esneklik matrisinin boyutsuz terimleri
D	: Malzeme matrisi
D	: Plağın eğilme rijitliği ($D = Eh^3/(12(1-\upsilon^2)$
d	: Eleman içindeki yer değiştirme alanı ($d = \{u \quad v \quad w\}^T$)
E	: Elastiklik modülü
EI	: Eğilme rijitliği
E'	: υ ve E değerlerine bağlı bir katsayı
F_i	: Yamuk elemandaki i. bağımsız düğüm noktası kuvveti
$F_1(s)$, $F_2(s)$	: Düzeltme etki fonksiyonları
$F_I(s)$, $F_{II}(s)$	: Düzeltme fonksiyonları
$f_c(g)$	: Boyutsuz düzeltme fonksiyonu
$f_{i,j}$	: Trigonometrik bir fonksiyon
G	: Birim şekil değiştirmeler ile plak elemanın yer değiştirmeleri arasındaki bağıntıyı sağlayan matris
g_k	: Bağıl çatlak boyu ($2a_c/b$)
h	: Plak kalınlığı
i	: Bağımsız düğüm noktası kuvveti indisi
J	: Yamuk elemanın jakobiyen matrisi
$\mathbf{J_s}$	: Sektör elemanın jakobiyen matrisi
$\|\mathbf{J}\|$	: Yamuk elemanın jakobiyen matrisinin determinantı
$\|\mathbf{J}_s\|$	: Sektör elemanın jakobiyen matrisinin determinantı
$\mathbf{J^{-1}}$	: Yamuk elemanın jakobiyen matrisinin tersi
$\mathbf{J_s^{-1}}$	: Sektör elemanın jakobiyen matrisinin tersi
J(a)	: Uzama enerjisi salıverme hızı
j	: Çatlak gerilme modu indisi
K	: Plak katılık matrisi
K	: Gerilme şiddeti faktörü

K_{jiR} : Düzeltilmiş gerilme şiddeti faktörleri

K_I , K_{II} , K_{III} : Açılma, kayma ve yırtılma modları için gerilme şiddeti faktörleri

$\mathbf{k_s}$: Sektör eleman polar koordinatlardaki katılık matrisi

$\mathbf{(k_s)_{car}}$: Sektör eleman kartezyen koordinatlardaki katılık matrisi

$\mathbf{(k_s)_{tra}}$: $\mathbf{L_ç}$ ve **Y** matrisleri ile değişmiş sektör elemanın yeni katılık matrisi

$\mathbf{(k_{src})_{car}}$: Radyal çatlaklı sektör elemanın kartezyen koordinatlardaki katılık matrisi

$\mathbf{(k_{src})_{pol}}$: Radyal çatlaklı sektör elemanın polar koordinatlardaki katılık matrisi

$\mathbf{(k_{s\theta c})_{pol}}$: Çembersel çatlaklı sektör elemanın orijinal polar koordinatlardaki katılık matrisi

$\mathbf{(k_{s\theta c})_{tra}}$: Çembersel çatlaklı sektör elemanın kartezyen koordinatlardaki sırası değişmiş katılık matrisi

$\mathbf{(k_{s\theta c})_{tra_pol}}$: Çembersel çatlaklı sektör elemanın polar koordinatlardaki sırası değişmiş katılık matrisi

$\mathbf{k_t}$: Yamuk eleman katılık matrisi

$\mathbf{k_{tc}}$: Çatlaklı yamuk eleman katılık matrisi

$\mathbf{k_{tij}}$: Yamuk elemanın katılık matrisinin 3x3 boyutundaki alt matrisi

$\mathbf{L_r}$: Radyal çatlaklı durum için sektör elemanın yer değiştirmelerini yamuk elemanın yer değiştirmelerine dönüştüren matris

$\mathbf{L_\theta}$: Çembersel çatlaklı durum için sektör elemanın yer değiştirmelerini yamuk elemanın yer değiştirmelerine dönüştüren matris

M : Plak kütle matrisi

$\mathbf{m_{sr}}$: Sektör eleman kütle matrisi (radyal çatlaklı eleman için)

$\mathbf{m_{src}}$: Radyal çatlaklı sektör eleman kütle matrisi

$\mathbf{m_t}$: Yamuk eleman kütle matrisi

$\mathbf{m_{tij}}$: Yamuk elemanın kütle matrisinin 3x3 boyutundaki alt matrisi

$\mathbf{N_i}$: Şekil fonksiyonunun i. düğüm noktasındaki ifadesi

$\overline{\mathrm{N}}$: Şekil fonksiyonlarına bağlı 3x12 boyutunda matris

$\overline{\overline{\mathrm{N}}}$: Şekil fonksiyonlarına ve koordinatlara bağlı 3x12 boyutunda matris

p : Plak kalınlığının yarısı (h/2)

P_i , P_j : Çatlaklı yapı elamana i ve j yönlerinde etkiyen kuvvet

$\mathbf{q_e}$: Plak elemanın yer değiştirmeleri

$\mathbf{q}_{\mathrm{sec}}$: Sektör elemanın yer değiştirmeleri

$\mathbf{q}^*_{\mathrm{sec}}$: Sektör elemanın yamuk eleman ile aynı sıradaki yer değiştirmeleri

$\mathbf{q}_{\mathrm{tra}}$: Yamuk elemanın yer değiştirmeleri

$\mathbf{q}^*_{\mathrm{tra}}$: Yamuk elemanın sırası değişmiş yeni yer değiştirmeleri

r, θ, z : Silindirik koordinatlar

r_1 : Sektör eleman iç yarıçapı

r_2 : Sektör eleman dış yarıçapı

r_c : Çatlak konumunu belirten yarıçap

$r_{iç}$: Plağın iç yarıçapı

$r_{dış}$: Plağın dış yarıçapı

S_i : Yamuk elemandaki i. düğüm kuvveti

s : Çatlak derinliği/yükseklik (a/h) değerinde boyutsuz bir sayı

T : Yamuk plak elemanın düğüm noktası kuvvetlerini bağımsız düğüm kuvvetlerine dönüştüren matris

$\mathbf{T_r}$: Radyal çatlaklı halka plak elemanın düğüm noktası kuvvetlerini bağımsız düğüm kuvvetlerine dönüştüren matris

$\mathbf{T}_\theta$: Çembersel çatlaklı halka plak elemanın düğüm noktası kuvvetlerini bağımsız düğüm kuvvetlerine dönüştüren matris
T : Plak elemanın kinetik enerjisi
U : Plak elemanın potansiyel enerjisi
U_T : Çatlaktaki uzama enerjisi
u_i : Çatlaklı kiriş elamanın i yönündeki yer değiştirmesi
u, v, w : x, y, z kartezyen koordinatları boyunca oluşacak yer değiştirmeler
V : Plak elemanın hacmi
w_i : i. düğüm noktasındaki plak orta düzlemine dik yer değiştirme değeri
x, y, z : Kartezyen koordinatlar
Y : Sektör elemanın yeni yer değiştirmelerini oluşturan matris
α : Yarı sektör açısı
α_c : Çembersel çatlağın taradığı açı
δ_r : Elemanın 1. düğüm noktası yer değiştirmeleri
δ_f : Elemanın 2. , 3. ve 4. düğüm noktası yer değiştirmeleri
Δ(hata) % : Yamuk elemana göre sektör elemandaki boyut hatası (%)
$\boldsymbol{\varepsilon}$: Birim şekil değiştirme matrisi
κ_1 , κ_2 : Gerilme şiddeti faktörlerini düzelten fonksiyonlar
λ_{ij} : i hareketsiz çapların sayısını ve j hareketsiz çemberlerin sayısını göstermek üzere plağın boyutsuz frekans parametresi
λ^c_{ij} : i hareketsiz çapların sayısını ve j hareketsiz çemberlerin sayısını göstermek üzere plağın çatlaklı durumdaki boyutsuz frekans parametresi
υ : Poisson oranı
ξ, η, ζ : Boyutsuz eğrisel koordinatlar
ρ : Yoğunluk
σ : Gerilme
σ_i : i yönündeki kuvvetten dolayı oluşan gerilme
$\sigma_{i,j}(r,\theta)$: Çatlak ucu kenarından (r,θ) konumundaki gerilme bileşenleri
$\sigma_x(0,y)$: Çatlak yüzeyine etkiyen normal gerilme
$\tau_{xy}(0,y)$: Çatlak yüzeyine etkiyen kayma gerilmesi
ϕ : Düğüm noktasındaki eğriliğe teğet doğrultudaki dönme
ϕ_i : i. düğüm noktasındaki x koordinatı doğrultusundaki dönme
ψ : Radyal doğrultusundaki dönme
ω_n : Doğal frekans
ψ_i : i. düğüm noktasındaki y koordinatı doğrultusundaki dönme
ω_{ij} : i, j sırasıyla yatay ve dikey eksen boyunca mod şekillerindeki yarı dalgaların sayısı olmak üzere plağın doğal frekansları

Simgeler:

$\{\ \}$: Vektör
$[\ ]$: Matris
$[\ ]^T$: Matris transpozesi
$[\ ]^{-1}$: Matrisin tersi
$(\ )'$: x değişkenine göre türev
$(\ \dot{})$: Zamana göre türev

RADYAL VE ÇEMBERSEL ÇATLAKLI HALKA PLAKLARIN SERBEST TİTREŞİMLERİ

ÖZET

Günümüzde çatlaklı yapıların modellenmesi ve dinamik davranışlarının belirlenmesi ile ilgili çalışmalar önem kazanmaktadır. Çatlaklı bir yapının lokal esnekliğinin artması ile, o yapının statik ve dinamik karakteristikleri değişmektedir.

Bu çalışmada sabit kalınlıklı radyal ve çembersel çatlaklı halka plakların serbest titreşimleri sonlu elemanlar yöntemiyle incelenmiştir.

Çatlağın açık ve ilerlemeyen bir yapıda olduğu kabul edilmiştir. Eleman içerisindeki çatlak, terimleri kırılma mekaniği yardımıyla hesaplanabilen bir ek esneklik matrisi ile modellenmiştir.

Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak halka plakların titreşim analizlerinin elde edilmesi amacıyla, radyal ve çembersel çatlaklı bir sektör eleman düşünülmüştür. Bu eleman dört düğüm noktalı ve her bir düğüm noktasında üç serbestliğe sahiptir. Küçük yarı sektör açısı seçilmesi durumunda, sektör ve yamuk elemanın geometrik yakınlığından dolayı, radyal ve çembersel çatlaklı sektör elemanın esneklik matrisleri yamuk plak elemanın formülasyonları kullanılarak elde edilmiştir. Hazırlanan bilgisayar programı ile çatlağın konumu, boyu, sayısı gibi parametreleri değiştirilerek çeşitli sınır şartları için halka plakların doğal frekansları, mod şekilleri incelenmiştir. Geliştirilen elemanla elde edilen sonuçlar, literatürdeki teorik ve deneysel sonuçlarla karşılaştırılarak uyumlu sonuçlar elde edilmiştir.

Çatlağın sayısının, boyunun ve konumunun değiştirilmesinin, plağın doğal frekansları ve titreşim şekilleri üzerine değişik etkileri olduğu gözlenmiştir. Sunulan radyal ve çembersel çatlaklı sektör elemanların çatlaklı halka plakların dinamik analizlerinde kullanılabilecekleri görülmüştür.

FREE VIBRATIONS OF ANNULAR PLATES WITH RADIAL AND CIRCUMFERENTIAL CRACKS

SUMMARY

Nowadays, modeling of cracked structures and determining of their dynamic behaviours have been increased rapidly. As soon as the local flexibility of a cracked plate is increased, static and dynamic characteristics of the plate change.

In this study, free vibrations of annular plates with radial and circumferential cracks are investigated by means of finite element method. The thickness of the used plate is uniform along the whole body.

The cracks occurring in the plate are non-propagating and open. The crack in the element was modeled by an additional flexibility matrix, the terms of which were calculated using fracture mechanics.

For vibration analysis of annular plate by using finite element method, an isoparametric sector type element with radial through and circumferential crack of four nodes and three degrees of freedom at each node is considered. In the event of the selection of small half sector angle, taking into account the closeness of the geometries of the sector and trapezoidal type element, the flexibility matrices of the sector type element with radial and circumferential crack are derived by means of the flexibility matrix of the trapezoidal type element. With the present computer program, the natural frequencies and mode shapes of annular plates are examined for different length, number of cracks and locations of cracks. The theoretical results are also obtained with different boundary conditions. The obtained results of improved elements are compared with the theoretical and experimental results in the literature. The results are in good agreement with the results in the literature.

It is observed that the changes of the length, location and number of cracks have various effects on the natural frequencies and mode shapes of the plate. It has been shown that the present sector type element with radial and circumferential crack can be used for the dynamic analysis of annular plates with cracks.

1. GİRİŞ

1.1 Giriş

Bir yapı üzerindeki çatlak o yapının lokal esnekliğini artırır. Bu nedenle, yapının doğal frekansları, mod şekilleri gibi dinamik karakteristiklerindeki değişimler bir çok araştırmanın konusu olmaktadır.

Teknolojinin sürekli olarak gelişmesine paralel olarak esnek ve hafif elemanların kullanılması titreşim problemlerini de artırmıştır. Uzun ve yüksek genlikli titreşimler makinaların yorulmasına, hasarlı ve çatlaklı yapıların oluşmasına zemin hazırlamaktadır. Yapılarda var olan bir kusur, o yapının istenilen düzeyde çalışmasını etkiler ve sistem güvenliğini tehdit ederek önlenemez zararlı etkilere ve sonuçlara yol açabilir. En tanınmış yapısal kusurların başında gelen çatlaklar, yorulma çatlağı şeklinde oluşabileceği gibi, mekanik kaynaklı olarak da oluşabilmektedirler.

Özellikle makinaların sürekli olarak kullanılması, yapısal kusurların oluşmasını artırmıştır. Türbo makinalarda, uçaklarda, trenlerde, gemilerde, gaz tanklarında vs. gibi birçok yerlerde istenilmeyen kaza, patlama ve benzeri çeşitli problemlerin ortaya çıkmasında malzeme içerisindeki çatlak, kırılma gibi yapısal kusurlar etkili olmaktadır. Bu nedenle iyi bir tasarım ve sistem performansı için bu hasarların tespiti, hasarlı makina parçalarının bakımı, makina çalışmasına ve sistem performansına etkileri, sistemin yeniden ya da başlangıç aşamasında tasarımı gibi problemlerin sürekli olarak göz önünde tutulması gerekir. Bu gibi alet ve makinalarda geniş bir uygulama alanı bulan plak gibi yapılarda oluşabilecek çatlakların plağın doğal frekansları ve mod biçimlerine etkisinin araştırılması tasarım ve makina verimliliği ve güvenliği açısından önemlidir.

1.2 Literatür Araştırmaları

Günümüzden 40-50 yıl öncesinde çatlaklı yapılar üzerinde başlamış olan çalışmaları Dimarogonas [1], kapsamlı bir şekilde sınıflandırmıştır. Wauer [2], çatlaklı rotorların dinamiği üzerine bir literatür araştırmasını sunmuştur. Çatlaklı dönen şaftların parametrik ve lineer olmayan titreşimleri Dimarogonas ve Paipetis [3] tarafından incelenmiştir. Onlar, çatlak civarındaki esneklik matrisini 5x5 boyutunda elde etmişlerdir. Çatlaklı kirişlerin analitik olarak incelemeleri çeşitli yöntemlerle ele alınılmış olup, mekanik empedans yöntemi [4], transfer matris yöntemi [5], Fourier serileri [6], enerji yöntemi [7], sürekli sistem modeli [8], varyasyonlar yöntemi [9] uygulanan yöntemlerdendir. Bu incelemelerde çatlak modellemesi doğrusal ve burulma yay modellemesi, kırılma mekaniği yardımıyla lokal esneklik kavramı ya da sürekli sistem kabulü ile yapılmaktadır. Nümerik incelemeler sonlu elemanlar yöntemi [10-14], parça mod sentezi [15], Frobenius tekniği [16-17] vs. gibi yöntemlerle yapılmıştır. Deneysel olarak çatlaklı kiriş, çubuk, şaft gibi elamanların incelenmesi modal analiz ve sonlu elemanlar yöntemleri ile beraber yapılmıştır [18-21]. Demir ve Mermertaş [22], iki ucu ankastre çatlaklı çubukların serbest ve zorlanmış titreşimlerini çubuğun eğilme titreşimlerine ait reseptansın değişimi ile incelemişlerdir.

Literatür incelemelerinde değişik çatlak tiplerini içeren plakların hasar analizleri, serbest ve zorlanmış titreşim analizleri, stabilite analizleri vs. gibi konular üzerinde çalışılmıştır. Çatlaklı plaklarla yapılan çalışmalara bakıldığında, halka ve dairesel plaklarla ilgili çalışmaların daha az olduğu görülmüştür. Çatlaklı plaklar üzerine yapılan incelemeler, çatlaklı kiriş ve çubuklara nazaran daha az olmakla beraber farklı yöntemler kullanılarak sistemler incelenmiştir. Leissa ve diğ. [23] farklı geometrideki çentik ve keskin radyal çatlaklı dairesel plakların serbest titreşimlerini Ritz yöntemi ile incelemişlerdir. Krawczuk [24], gerilme şiddeti faktörünün bilinmesi durumunda, açık ve ilerlemeyen çatlaklı dikdörtgen plak elemanın katılık matrisinin elde edilmesi için bir metot sunmuştur.

Dolbow ve diğ. [25] sonlu elemanlar yöntemini kullanarak plaklarda çatlak modellemesi ve ilerlemesi için bir çalışma yapmışlar ve kullandıkları yöntemin uygulanabilirliğini araştırmışlardır. Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elastik ya da elasto-plastik çatlaklı dikdörtgen plakların doğal frekansları da incelenmiştir

[26,27]. Qian ve diğ. [28] çatlaklı dikdörtgen plakların sonlu elemanlar modelini oluşturarak titreşim problemlerine uygulanmasını sunmuşlardır. Demir ve Mermertaş [29], çatlaklı dikdörtgen plakların doğal frekans değişimlerini sonlu elemanlar yöntemiyle incelemişlerdir.

Ma ve Huang [30] rezonans frekanslarında çatlaklı plakların titreşimlerini deneysel ve sayısal olarak incelemişlerdir. Ramesh ve diğ. [31] periyodik radyal çatlaklı halka plakların serbest titreşimlerini deneysel olarak belli sınır şartları için çalışmışlardır.

Cornwell ve diğ. [32] enerji yöntemini kullanarak plak gibi yapıların modal özelliklerini bulabilmek amacıyla bir yöntem sunmuşlardır. Lee [33], Rayleigh yöntemini kullanarak iç çatlaklı halka plakların temel frekansını çeşitli sınır şartları için incelemiştir. Stahl ve Keer [34], Green fonksiyonları yaklaşımı ile çatlaklı dikdörtgen plakların stabilitesi ve titreşimi üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Bunlardan farklı olarak çatlaklı şaftlar [35-39], çatlaklı çubuklar [40,41], çatlaklı rotorlar [42-44] ve çatlaklı gaz silindirleri [45] vs. gibi konularda çalışmalara rastlanılmıştır.

Son yıllarda, araştırmacılar çatlaklı yapılarla ilgili çalışmalara devam etmektedirler. Javidruzi ve diğ. [46], basit mesnetli ve düzlem içi yüke maruz çatlaklı silindirik kabukların titreşim, burkulma ve dinamik stabilitesini incelemişlerdir. Douka ve diğerleri [47] dalgacık analizi ile plaklarda çatlak saptamalarına yönelik çalışmaları sunmuşlardır. Dilena ve Morassi [48] kiriş gibi yapılardaki çatlak tanıları için anti rezonans kullanımı ile ilgili incelemeler yapmışlardır. Loutridis ve diğerleri [49] plaklardaki çatlakların yerlerinin tespit edilmesi için iki boyutlu dalgacık dönüşümü yöntemini uygulamışlardır.

Sih [50] ve Tada ve diğ. [51] çeşitli çatlak geometrileri için gerilme şiddeti faktörlerinin nasıl elde edilebileceğine yönelik çalışmalara yer vermişlerdir. Christides ve Barr [52,53] çatlaklı Bernoulli-Euler kiriş teorisini çalışmışlardır. Dimarogonas ve Papadopoulos [54] çatlaklı şaftların titreşimlerini; Springer ve diğ. [55] kesit azalmasıyla çatlak modellemelerinin kiriş titreşimlerine etkileri üzerine incelemeler yapmışlardır. Aliabadi ve diğ. [56] ve Broberg [57] nümerik kırılma mekaniği üzerine çalışmalar yapmışlardır. Yuan ve diğ. [58] radyal veya çembersel çatlaklı dairesel ve halka plakların doğal frekansları üzerine çalışmalarını

sunmuşlardır. Rock ve Hinton [59] sonlu elemanlar yöntemini kullanarak kalın ve ince plakların serbest titreşimlerini incelemişlerdir. Petyt [60] sonlu elemanlar yönteminin titreşim analizine; Przemieniecki [61] yapıların matris analizi teorisine yönelik çalışmalara yer vermişlerdir. Solecki [62] sürekli olmayan fonksiyonların sonlu Fourier dönüşümü yoluyla bir kenarına paralel tek çatlaklı basit mesnetlenmiş dikdörtgen plakların eğilme titreşimleri problemini incelemiştir. Lee ve Lim [63] tam ortasında çatlak bulunan bir dikdörtgensel plağın doğal frekanslarının tahmini için kayma deformasyonunu ve dönme eylemsizliğini de içeren Rayleigh prensibine dayalı bir nümerik yöntem sunmuşlardır. Khadem ve Rezaee [64] titreşim analizlerini kullanarak üniform dış yük altındaki dikdörtgen plaklardaki çatlak tespiti için bir analitik yaklaşım sunmuşlardır. Anifantis ve diğ. [65], çatlaklı halka plağın titreşimlerini incelemişlerdir. Halka plakların titreşim analizi için çembersel bir yüzey çatlağını lokal dönme esnekliği olarak modellemişlerdir. Vogel ve Skinner [66] enine titreşen üniform halka plağın doğal frekanslarını çalışmışlardır. Blevins [67] farklı geometrideki yapıların doğal frekansları ve mod şekillerine yönelik formüllere yer vermiştir.

1.3 Tezin Amacı ve Kapsamı

Mühendislik uygulamalarında sıkça kullanılan dairesel ve halka şeklindeki plakların dinamik davranışları üzerindeki incelemeler, bir çok araştırmacıya konu olmaya devam etmektedir. Debriyaj plakası, kompakt disk, volan vs. gibi makina parçaları çeşitli amaçlar için kullanılan dairesel ve halka plaklardan birkaçıdır.

Literatürde analitik, sayısal, deneysel olarak gerçekleştirilmiş pek çok çalışma var olmakla beraber, radyal ve çembersel çatlaklı halka plakların sonlu elemanlar yöntemiyle analizine yönelik çalışma olmaması bu konu üzerinde çalışmaya teşvik etmiştir.

Tez konusu olan problemin tanıtılması, bu konularda yapılan literatür incelemeleri, tezin 1. bölümünde anlatılmaktadır.

Literatürde var olan çatlak modelleme yöntemleri ile çatlağın modellenmesinde bilinmesi gereken gerilme şiddeti faktörleri kavramının teorik olarak incelemeleri kısa olarak 2. bölümde anlatılmıştır.

Tezin 3. bölümünde literatürde var olan çatlaklı dikdörtgen plak elemanın formülasyonlarından faydalanılarak çatlaklı yamuk plak eleman geliştirilmiştir.

Tezin 4. ve 5. bölümlerinde, sırasıyla radyal ve çembersel çatlaklı sektör elemanların formülasyonları elde edilmiştir.

Tezin 6. bölümünde geliştirilmiş elemanla elde edilen sonuçlar verilmiştir. Radyal ve çembersel çatlağın halka plağın serbest titreşimleri üzerine etkileri farklı çatlak sayıları, boyları ve konumları ile incelenmiş, sayısal sonuçların literatürdeki deneysel ve teorik sonuçlarla karşılaştırmaları yapılmıştır.

Tezin 7. ve son bölümünde, sonuçların genel değerlendirmesi ve ileride yapılabilecek çalışmalar için öneriler yer almaktadır.

Bu çalışmada, sektör ve yamuk tipi elemanların geometrilerinin yakınlığından faydalanılarak radyal ve çembersel çatlaklı sektör elemanın esneklik matrisi elde edilmiştir. Geliştirilen elemanların çatlaklı halka plakların dinamik analizlerinde uygulanabilir olduğu görülmüştür.

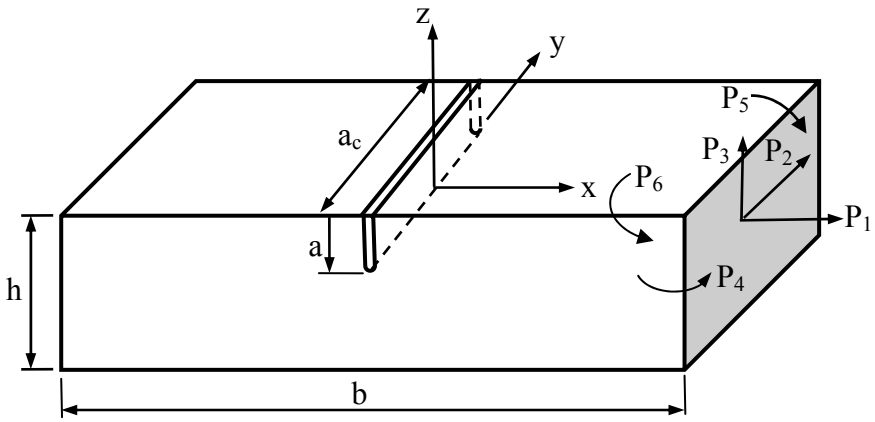
2. ÇATLAK MODELLEME YÖNTEMLERİ

2.1 Çatlağın Modellenmesi

Çatlaklı yapıların modellenmesine yönelik pek çok çalışma vardır. İlk çalışmalarda çatlaklı bölge, büyüklüğü deneysel olarak saptanabilen bir lokal eğilme momenti ya da kesit azalması şeklinde modellenmiştir. Bazı araştırmacılar ise, çatlaklı bölgeyi sürekli sistem kabulü altında ele alarak çalışmalar yapmışlardır. Daha sonraları pek çok araştırmacı, çatlak içeren yapıların titreşim karakteristiklerini, kırılma mekaniği prensipleri ile incelemişlerdir. Bu yöntem, gerilme şiddeti faktöründen faydalanılarak lokal esneklik analizine dayanır. Çatlaklı kirişlerde, çatlaklı bölge lokal esneklik kavramı, kesit azalması ya da sürekli bir kiriş kabulü ile modellenmektedir. Plak gibi yapılardaki çatlaklar ise, kırılma mekaniği prensiplerine dayalı lokal esneklik kavramıyla incelenmektedir.

2.1.1 Kırılma mekaniği yardımıyla lokal esneklik kavramı

Dimarogonas ve Paipetis [3], daha önceleri ortaya atılan Irwin metodunu genelleştirerek beş serbestlik dereceli sistemler için lokal esnekliklerin hesaplanması için bir teori sunmuşlardır.



Şekil 2.1: Çeşitli Yüklere Maruz Çatlaklı Yapı

Daha sonraları, Dimarogonas ve Papadopoulus [54], Şekil 2.1'de görüldüğü gibi altı serbestlik dereceli çeşitli yüklere maruz yapının esneklik matrisini elde etmişlerdir.

Çatlak derinliği *a* olan bir çatlaklı yapı elamanın *i* yönündeki yer değiştirmesi Castigliano teoremine göre;

$$u_i = \frac{\partial}{\partial P_i}\int_0^a J(a)da \qquad \textbf{(2.1)}$$

şeklindedir [3, 51]. Burada, *J(a)* uygulanan P_i yüküne karşılık uzama enerjisi salıverme hızıdır. En genel halde ise,

$$J(a) = \left[\left(\sum_{i=1}^{6} K_{Ii}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{6} K_{IIi}\right)^2 + p\left(\sum_{i=1}^{6} K_{IIIi}\right)^2\right] / E' \qquad \textbf{(2.2)}$$

ile tanımlanmaktadır. Düzlem şekil değiştirme için $E' = \frac{E}{1-\nu^2}$, düzlem gerilme durumu için ise $E' = E$ olarak belirlidir. *K* ise I (açılma modu), II (kayma modu) ve III (yırtılma modu) kırılma modları için gerilme şiddeti faktörleridir. $p = 1+\upsilon$ olup, *E* ve υ sırasıyla elastisite modülü ve Poisson oranıdır. Bu tanımlamalar ile (2.1) ve (2.2) denklemleri kullanılarak çatlağın lokal esnekliği;

$$c_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial P_j \partial P_i}\int_0^a J(a)da \qquad \textbf{(2.3)}$$

ile ifade edilebilmektedir. Örneğin, silindirik bir şaftın kenar çatlağı için gerilme yoğunluk faktörleri kolayca bulunamayacağı için şaft, bir dikdörtgensel bölge elemanlarının birleşimi olarak düşünülmüştür. Bu yüzden uzama enerjisi salıverme hızı *J(a)*, *a* çatlak derinliği için alan üzerinden a_c yarı çatlak boyunca integre edilmelidir [3].

$$c_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial P_j \partial P_i}\int_0^a \int_{-a_c}^{a_c} J(a)dadx \qquad \textbf{(2.4)}$$

burada *x*, çatlak ucu boyunca olan yönü göstermektedir.

(2.2) - (2.4) nolu denklemler, aşağıda ifadeleri verilen gerilme şiddeti faktörleri yardımıyla çatlaklı bölgenin toplam esneklik matrisini verir. R şaftın yarıçapı olmak üzere, gerilme şiddeti faktörleri aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır [51]:

$$K_{I1} = \sigma_1(\pi a)^{1/2} F_1(\frac{a}{h}), \qquad \sigma_1 = \frac{P_1}{(\pi R^2)} \tag{2.5}$$

$$K_{I4} = \sigma_4(\pi a)^{1/2} F_1(\frac{a}{h}), \quad \sigma_4 = \frac{4P_4}{(\pi R^4)x} \tag{2.6}$$

$$K_{I5} = \sigma_5(\pi a)^{1/2} F_2(\frac{a}{h}), \quad \sigma_5 = \frac{4P_5(R^2 - x^2)^{1/2}}{\pi R^4} \tag{2.7}$$

$$K_{II3} = \sigma_3(\pi a)^{1/2} F_{II}(\frac{a}{h}), \quad \sigma_3 = \frac{kP_3}{\pi R^2} \tag{2.8}$$

$$K_{II6} = \sigma_{6II}(\pi a)^{1/2} F_{II}(\frac{a}{h}), \quad \sigma_{6II} = \frac{2P_6 x}{\pi R^4} \tag{2.9}$$

$$K_{III2} = \sigma_2(\pi a)^{1/2} F_{III}(\frac{a}{h}), \qquad \sigma_2 = \frac{kP_3}{(\pi R^2)} \tag{2.10}$$

$$K_{III6} = \sigma_{6III}(\pi a)^{1/2} F_{III}(\frac{a}{h}), \quad \sigma_{6III} = \frac{2P_6(R^2 - x^2)}{(\pi R^2)} \tag{2.11}$$

$$K_{I2} = K_{I3} = K_{I6} = 0 \tag{2.12}$$

$$K_{II1} = K_{II2} = K_{II4} = K_{II5} = 0 \tag{2.13}$$

$$K_{III1} = K_{III3} = K_{III4} = K_{III5} = 0 \tag{2.14}$$

(2.5) - (2.14) nolu denklemlerde,

$$F_1(s) = (\frac{\tan \lambda_c}{\lambda_c})^{1/2} (0.751 + 2.02s + 0.37(1 - \sin \lambda_c)^3) / \cos \lambda_c$$

$$F_2(s) = (\frac{\tan \lambda_c}{\lambda_c})^{1/2} (0.923 + 2.02s + 0.199(1 - \sin \lambda_c)^4) / \cos \lambda_c$$

$$F_{II}(s) = (1.122 - 0.561s + 0.085s^2 + 0.18s^3) / (1 - s)^{1/2}$$

$$F_{III}(s) = (\frac{\tan \lambda_c}{\lambda_c})^{1/2}$$

$$s = \frac{a}{h} \ , \ \lambda_c = \frac{\pi a}{2h}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu denklemlerdeki h ve a plak yüksekliği ve çatlak derinliğidir. Lokal esnekliklerin elde edilmesiyle;

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & c_{14} & c_{15} & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 & 0 & 0 & c_{26} \\ 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ c_{41} & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ c_{51} & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0 \\ 0 & c_{62} & c_{63} & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(2.15)}$$

matrisi elde edilir. Burada, c_{ij}, j yönündeki kuvvete göre i yönündeki deplasmanı ifade etmektedir. Köşegen dışı terimler ise bağlaşıklık etkilerini ifade etmektedir. Esneklik matrisinin tersini alarak,

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}^{-1} \qquad \textbf{(2.16)}$$

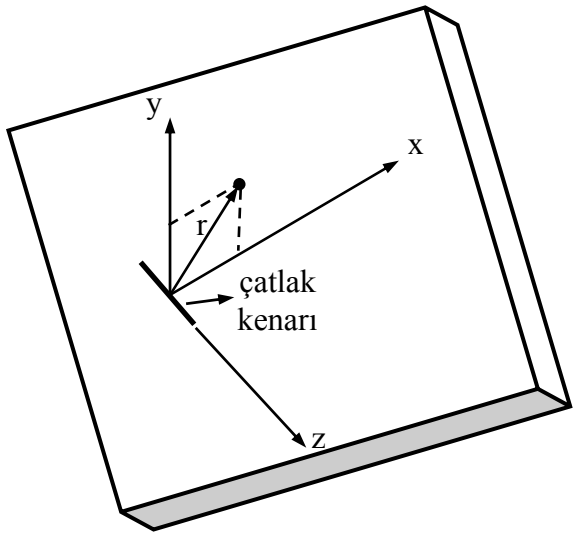
lokal katılık matrisi elde edilmektedir.

Çatlaklı bölge, lokal esneklik yönteminden farklı olarak, yapının geometrisine bağlı olarak değişen farklı kesitli elemanlar kullanılarak, kesit azalmasının modellenmesi yolu ile de formüle edilebilmektedir. Bu amaçla süreksizliği içeren bölümü temsil eden elemanın boyu ile süreksizlik derinliği arasındaki ilişkiyi ifade etmek gerekmektedir. Böylece süreksizlik bölgesi de dahil her doğal frekansın ne kadar değişeceğini tahmin etmek mümkün olmaktadır.

2.2 Gerilme Şiddeti Faktörleri

Yapısal eleman bileşenlerindeki kalıcı gerilmelerin hesaplanması, kritik çatlak boyu ve çatlak büyüme hızının elde edilebilmesi için gerilme şiddeti faktörlerinin bilinmesi gereklidir.

Lineer elastik bölge içerisinde kalındığı sürece iki boyutlu çatlak problemleri için Şekil 2.2'de görüldüğü gibi çatlak ucu kenarından (*x,y*) konumdaki bir noktadaki gerilme bileşenleri



Şekil 2.2: Çatlak Konumuna Göre Belirlenen Koordinatlar

$$\sigma_{i,j}(x,y) = \frac{K}{\sqrt{2\,\pi\, r}}\, f_{i,j} + diğ.terimler\,, \qquad \textbf{(2.17)}$$

şeklinde aynı formda olduğu bilinmektedir [56]. Burada $f_{i,j}$, trigonometrik bir fonksiyondur. K ise gerilme şiddeti faktörü olarak bilinir. Bu nedenle çatlak ucu civarındaki gerilme alanı, gerilme şiddeti faktörü tarafından belirlenmektedir.

Gerilme şiddeti faktörü ile uzama enerjisi salıverme hızı arasında,

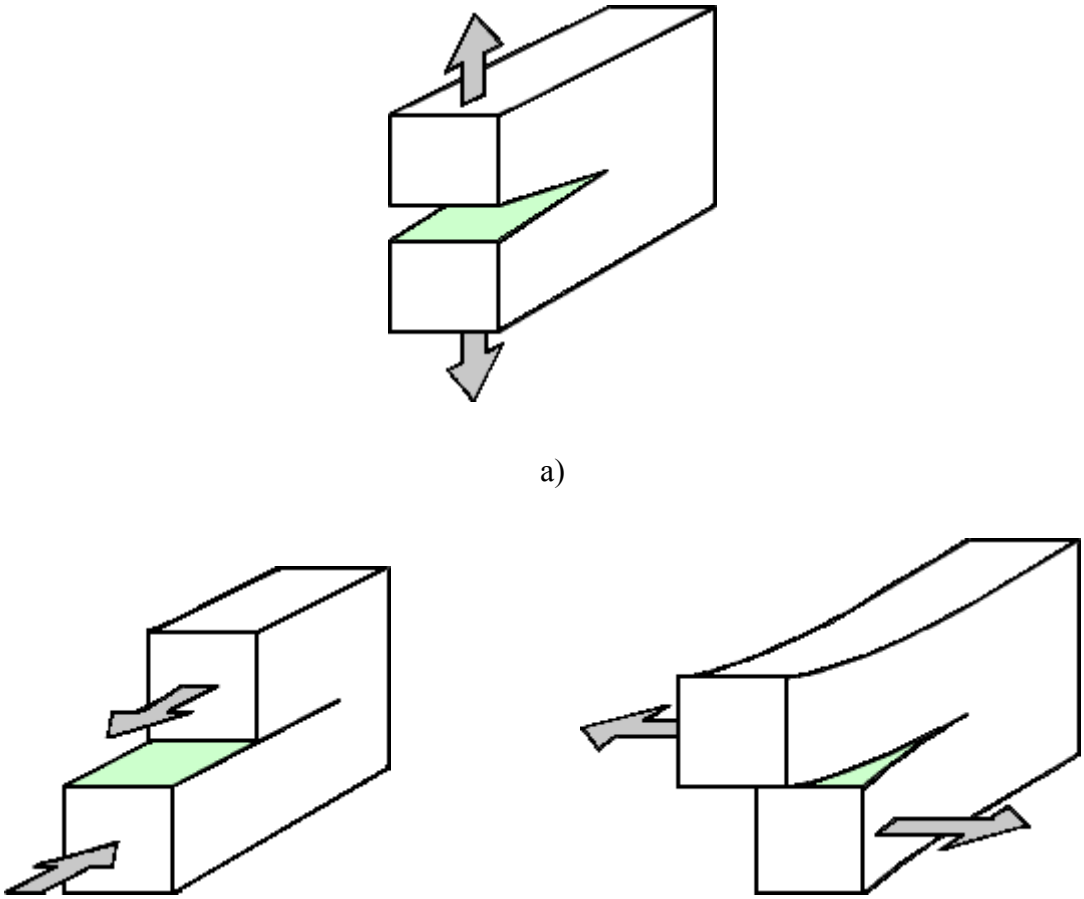
$$J(a) \propto K^2 \tag{2.18}$$

şeklinde bir bağıntı vardır. (2.18) nolu ifadedeki oran sabiti, malzemenin elastik sabitlerinin bir fonksiyonudur. Bu ilişki, aslında kritik K değeri yardımıyla açıklanabilecek çatlak büyümesi için enerji-denge kriteri ile çatlak ucu gerilme alanı arasında bir bağıntı olduğunu göstermektedir.

Lineer elastik kırılma mekaniğindeki bazı varsayımlar ile çatlak ucundaki gerilme alanının K gerilme şiddeti faktörü tarafından karakterize edileceği görülmüştür. Bu, yapı içerisindeki iki çatlağın aynı K değeri ile aynı tarzda hareket edebileceğini durumunu kuvvetlendirmiştir. Böylece, bir yapısal elemandaki bir çatlağın ilerlemesinin tahmin edilebilmesi için K değerinin bilinmesi gereklidir. Genelde K, yapının geometrisinin, yükleme durumunun ve çatlak boyu ve şeklinin bir fonksiyonudur. Bu nedenle gerilme şiddeti faktörü,

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi\, a} \tag{2.19}$$

şeklinde yazılmaktadır. Burada σ gerilme, a çatlak boyu, Y ise geometriye bağlı boyutsuz bir sayıdır [51,56]. Çatlak ve kırılma mekaniği analizlerinde önemli bir rol oynayan çatlaklı bölgenin üç simetrik modu, Şekil 2.3'de gösterilmiştir. Çatlak problemleri, bu üç moda karşılık gelen zorlanmaların birleşimi şeklinde düşünülmektedir. Çatlağın modellenebilmesi için bu üç gerilme şiddeti faktörünün bilinmesi gerekmektedir. Gerilme şiddeti faktörleri, (x,y) konumundaki bir noktada gerilme bileşenleri ile belirlidir [57].



a)

b) c)

Şekil 2.3: Çatlak Yüzey Yer Değiştirmelerinin Üç Simetrik Temel Modları a) Açılma Modu b) Kayma Modu c) Yırtılma Modu

Gerilme şiddeti faktörlerini hesap etmek için kullanılan yöntemler Tablo 2.1'de üç gruba ayrılarak sınıflandırılmıştır [56,57].

Tablo 2.1: Gerilme Şiddeti Faktörlerini Belirleyen Yöntemler

1. Yöntem	2. Yöntem	3. Yöntem
El kitapları	Süperpozisyon	Haritalama
	Gerilme konsantrasyonu	İntegral dönüşümü
	Gerilme dağılımı	Cisim kuvvet yöntemi
	Green fonksiyonları	Kenar fonksiyon yöntemi
	Yaklaşık ağırlık fonksiyonları	Hat yöntemi
	Birleştirici yöntemler	Sonlu elemanlar yöntemi
		Sınır elemanlar yöntemi
		Alternatif yöntemler

Çok basit yapıdan çok karmaşık bir yapıya kadar olan sistemler el kitaplarıyla basit olarak direkt modellenebilmektedir [50,51]. İkinci gruptaki yöntemler, gerilme şiddeti faktörlerini direkt olarak vermezler ama kısa bir zamanla elde edilmeleri mümkündür. Bu yöntemlerin çok hassas sonuçlar vermedikleri görülmüştür. Özelllikle gerilme şiddeti faktörleri sürekli olarak gerekliyse ve çok yüksek doğruluk önemliyse, o zaman üçüncü gruptaki sayısal yöntemler kullanılmalıdır. Genelde, sonlu elemanlar ve sınır elemanlar yöntemi diğer yöntemlere göre daha fazla kullanılan yöntemlerdendir.

Gerilme şiddeti faktörünün bilinmesiyle beraber kalıcı gerilme ve etkileri, yorulma çatlağı ilerlemesi, korozyon gerilmesi çatlağı, plastisite gibi önemli konuların incelenmesinin yolu da açılmıştır.

Çatlak ucundaki gerilme ve yer değiştirme ifadeleri, gerilme şiddeti faktörlerine bağlı olarak belirlenebilmektedir [50,51].

3. ÇATLAKLI YAMUK PLAK ELEMAN

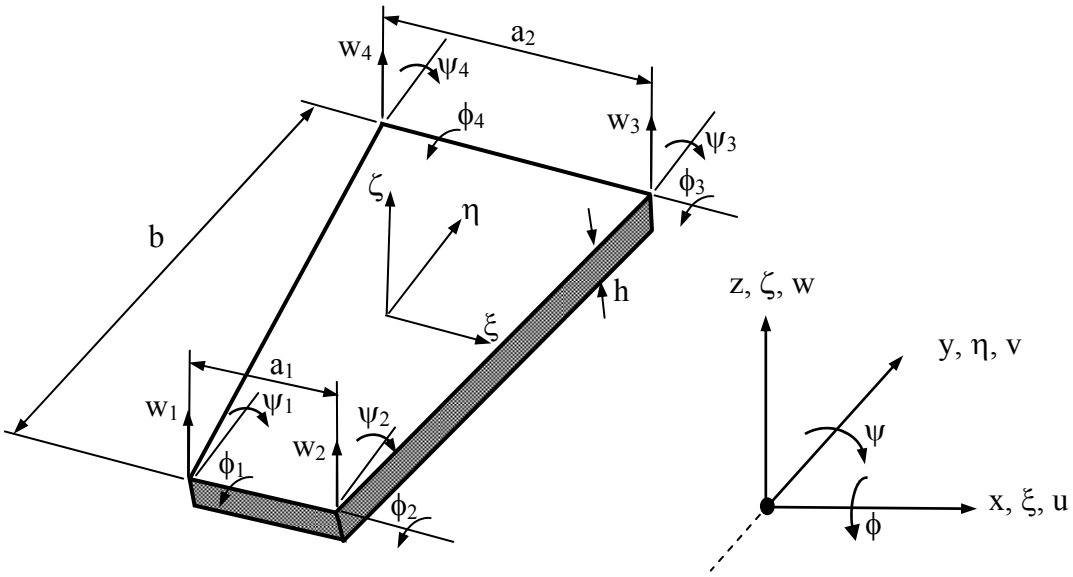
3.1 Çatlaksız Yamuk Plak Eleman

Çatlaklı yapıların titreşim analizleri konusunda çok sayıda yöntem kullanılmaktadır. Bununla beraber, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak yapılan incelemeler gittikçe artmaktadır. Literatürde genellikle çatlaklı dikdörtgen plakların dinamik analizleri konusunda çalışmalara rastlanmıştır. Çatlak modellemesindeki literatürde çoğunlukla 4 düğüm noktalı dikdörtgen plak eleman kullanılmaktadır [24,26-28].

Şekil 3.1'de 4 düğüm noktalı, 12 serbestlik dereceli, h kalınlığındaki yamuk plak eleman gösterilmiştir. Plak elemanı, her düğüm noktası için üç serbestliğe sahiptir. Bunlar plak orta düzlemine dik doğrultudaki w yer değiştirmesi ile bu doğrultuya dik iki eksen etrafındaki ψ ve ϕ dönmeleridir.

Kullanılan plak elemanı için aşağıdaki kabuller geçerlidir [59]:

- Plak malzemesi elastik, homojen ve izotropiktir.
- Düzlemsel gerilmeler nedeniyle plak orta düzlemindeki şekil değiştirmeler, plağın eğilmesiyle meydana gelen deformasyonlara göre çok küçüktür ve bu sebeple ihmal edilebilir.
- Plak deformasyonundan kaynaklanan yer değiştirmeler plak kalınlığına göre çok küçüktür.
- Başlangıçta plak orta düzlemine dik olan doğrular, deformasyondan sonra da düzgün kalırlar, ancak plak, bu doğrultular orta düzleme dik kalmayacak şekilde deforme olur.
- Plak orta düzleminde dik doğrultudaki gerilmeler ihmal edilebilecek mertebededir.
- Plak deformasyonunda plak orta düzlemindeki noktaların yer değiştirmesi, plağın ilk durumundaki düzlemine dik kaldığı düşünülür.



Şekil 3.1: Yamuk Plak Elemanı ve Yer Değiştirmeleri

Bu elemanda *x*, *y*, *z* kartezyen koordinatları ile ξ, η ve ζ boyutsuz eğrisel koordinatlar arasında şekil fonksiyonlarının özelliği kullanılarak,

$$x = \frac{1}{4}\xi\left[(1-\eta)a_1 + (1+\eta)a_2\right]$$
$$y = \frac{b}{2}\eta \qquad \textbf{(3.1)}$$
$$z = \frac{h}{2}\zeta$$

bağıntıları elde edilmektedir. Burada a_1, a_2 ve b elemanın boyutları, h ise plak kalınlığıdır. Elemanda *x*, *y*, *z* kartezyen koordinatları boyunca oluşacak yer değiştirmeler (*u*, *v*, *w*),

$$u = z\psi$$
$$v = -z\phi \qquad \textbf{(3.2)}$$

olarak belirlidir [60]. (3.2) denklemi matris formunda,

$$\boldsymbol{d} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & -z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \psi \\ \phi \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(3.3)}$$

olarak da yazılabilir. Elemanın yer değiştirmeleri ise,

$$w = \sum_{i=1}^{4} N_i w_i$$
$$\psi = \sum_{i=1}^{4} N_i \psi_i \qquad \textbf{(3.4)}$$
$$\phi = \sum_{i=1}^{4} N_i \phi_i$$

şeklinde şekil fonksiyonlarına bağlı olarak tanımlanmaktadır. Düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler göz önüne alındığında, elemanın yer değiştirme alanı (3.3) ve (3.4) nolu denklemler kullanılarak,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{bmatrix} 0 & zN_i(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & 0 & -zN_i(\xi,\eta) \\ N_i(\xi,\eta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \psi \\ \phi \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(3.5)}$$

şeklinde matris formunda ifade edilir. Burada $N_i(\xi,\eta)$ elemanın iki boyutlu şekil fonksiyonları olup,

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta) \qquad \textbf{(3.6)}$$

ifadesiyle belirlidir [60]. Bilindiği gibi, şekil fonksiyonları ilgili düğüm noktasında birim değerini alırken diğer düğüm noktalarında ise sıfır değerini alırlar. Elemana ait x, y, z koordinatları,

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, x_i$$
$$y = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, y_i \qquad \textbf{(3.7)}$$
$$z = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, 0.5\, \zeta\, h_i$$

bağıntılarını sağlamaktadır. Elemanın içindeki yer değiştirmeler her bir düğüm noktasındaki yer değiştirmelerinin toplamı olarak düşünüldüğünde,

$$\begin{Bmatrix} w \\ \psi \\ \phi \end{Bmatrix} = \left[\overline{N}(\xi,\eta)\right]\{q_e\} \tag{3.8}$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\overline{\boldsymbol{N}}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

olarak tanımlı olup, q_e plak elemanın yer değiştirmelerini ifade etmektedir. (3.4) ve (3.8) nolu denklemler birleştirilerek,

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \left[\overline{\overline{N}}(\xi,\eta,\zeta)\right]\{q_e\} \tag{3.10}$$

denklemi elde edilmektedir. Burada,

$$\overline{\overline{\boldsymbol{N}}} = \begin{bmatrix} 0 & zN_1 & 0 & 0 & zN_2 & 0 & 0 & zN_3 & 0 & 0 & zN_4 & 0 \\ 0 & 0 & -zN_1 & 0 & 0 & -zN_2 & 0 & 0 & -zN_3 & 0 & 0 & -zN_4 \\ N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

şeklindedir. Şekil fonksiyonlarındaki ξ_i ve η_i büyüklükleri, boyutsuz eğrisel koordinatların düğüm noktalarında aldığı değerlerdir. Tablo 3.1'de bu değerler görülmektedir.

Tablo 3.1: Yamuk Plak Elemanın Düğüm Noktası Değerleri

i	x_i	y_i	ξ_i	η_i
1	$-\frac{a_1}{2}$	$-\frac{b}{2}$	-1	-1
2	$\frac{a_1}{2}$	$-\frac{b}{2}$	1	-1
3	$\frac{a_2}{2}$	$\frac{b}{2}$	1	1
4	$-\frac{a_2}{2}$	$\frac{b}{2}$	-1	1

Formülasyonlarda kullanılmak üzere bazı türev değerleri,

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

şeklinde gösterilebilir. (3.12) nolu denklemdeki matris,

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

formunda olup $\boldsymbol{J}$ jakobiyen matrisi adını alır; x, y, z koordinatlarına göre türev ifadeleri bu durumda,

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J^{-1}} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \tag{3.14}$$

şeklini alacaktır. (3.13) nolu ifade (3.7) nolu denklem ile birlikte değerlendirilerek,

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4}\left[(1-\eta)a_1 + (1+\eta)a_2\right] & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{4}\xi(a_2 - a_1) & \dfrac{b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{h}{2} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

jakobiyen matrisi elde edilir. Jakobiyen matrisinin tersi,

$$\boldsymbol{J^{-1}} = \begin{bmatrix} J_{11}^{*} & J_{12}^{*} & J_{13}^{*} \\ J_{21}^{*} & J_{22}^{*} & J_{23}^{*} \\ J_{31}^{*} & J_{32}^{*} & J_{33}^{*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4}{(1-\eta)a_1 + (1+\eta)a_2} & 0 & 0 \\ \dfrac{2\xi(a_2 - a_1)}{b\left[(\eta-1)a_1 - (1+\eta)a_2\right]} & \dfrac{2}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{h} \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

determinantı

$$\|\boldsymbol{J}\| = \frac{1}{16} b\, h \left[(1-\eta)a_1 + (1+\eta)a_2\right] \tag{3.17}$$

olarak bulunur. Plak elemanın katılık ve kütle matrislerinin bulunması için potansiyel ve kinetik enerji ifadelerinin oluşturulması gereklidir.

3.1.1 Katılık matrisi

Plak elemanın potansiyel enerjisi,

$$U = \frac{1}{2}\int_{v} \boldsymbol{\varepsilon}^{T}\, \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{\varepsilon}\; dv \tag{3.18}$$

şeklindedir. Homojen ve izotropik bir malzeme için ***D*** malzeme matrisi

$$\boldsymbol{D} = \frac{E}{1-\upsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \dfrac{1-\upsilon}{2} & 0 & 0 \\ & \textit{simetrik} & & \dfrac{(1-\upsilon)\pi^2}{24} & 0 \\ & & & & \dfrac{(1-\upsilon)\pi^2}{24} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

ile tanımlanmakta olup; birim şekil değiştirmeleri ile yer değiştirmeleri arasında

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{G}\, \boldsymbol{d} \;, \tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

bağıntıları vardır. (3.21) nolu eşitlik (3.10) denklemi ile birlikte göz önüne alınırsa,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}\, \boldsymbol{q_e} \tag{3.22}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada,

$$\boldsymbol{B_{5x12}} = \boldsymbol{G_{5x3}}\, \overline{\overline{\boldsymbol{N}}}_{3x12} \tag{3.23}$$

olarak tanımlıdır. ***B*** matrisi eleman geometrisine, şekil fonksiyonlarına ve ***J*** jakobiyen matrisi değerlerine bağlı olarak değişen bir matristir. ***B*** matrisinin birtakım ara işlemler yapıldıktan sonraki ifadesi,

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 & b_{15} & 0 & 0 & b_{18} & 0 & 0 & b_{111} & 0 \\ 0 & 0 & b_{23} & 0 & 0 & b_{26} & 0 & 0 & b_{29} & 0 & 0 & b_{212} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & 0 & b_{35} & b_{36} & 0 & b_{38} & b_{39} & 0 & b_{311} & b_{312} \\ b_{41} & b_{42} & 0 & b_{44} & b_{45} & 0 & b_{47} & b_{48} & 0 & b_{410} & b_{411} & 0 \\ b_{51} & 0 & b_{53} & b_{54} & 0 & b_{56} & b_{57} & 0 & b_{59} & b_{510} & 0 & b_{512} \end{bmatrix}_{5x12} \tag{3.24}$$

formundadır. (3.23) nolu denklemin gerektirdiği türev ifadeleri oluşturulup kısaltmalar yapıldığında *B* matrisinin satırlarının,

$$b_{1j} = p\,\zeta\, t_i \qquad i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 2,5,8,11 \tag{3.25a}$$

$$b_{2j} = -p\,\zeta\, s_i - p\,\zeta\, b_i \quad i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 3,6,9,12 \tag{3.25b}$$

$$b_{3j} = p\,\zeta\, s_i + p\,\zeta\, b_i \quad i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 2,5,8,11$$
$$b_{3j} = -p\,\zeta\, t_i \qquad i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 3,6,9,12 \qquad \textbf{(3.25c)}$$

$$b_{4j} = t_i \qquad i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 1,4,7,10$$
$$b_{4j} = p\ y_i \qquad i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 2,5,8,11 \qquad \textbf{(3.25d)}$$

$$b_{5j} = s_i + b_i \qquad i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 1,4,7,10$$
$$b_{5j} = -p\ y_i \qquad i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 3,6,9,12 \qquad \textbf{(3.25e)}$$

şeklinde olduğu görülmektedir. (3.25) denklemlerinde,

$$t_i = J_{11}{}^{*}\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \qquad \textbf{(3.26a)}$$

$$b_i = J_{22}{}^{*}\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \qquad \textbf{(3.26b)}$$

$$s_i = J_{21}{}^{*}\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \qquad \textbf{(3.26c)}$$

$$y_i = J_{33}{}^{*}\ N_i \qquad \textbf{(3.26d)}$$

$$p = \frac{h}{2} \qquad \textbf{(3.26e)}$$

olarak tanımlanmıştır. (3.23) nolu denklem (3.18) nolu denklem içerisine yerleştirilirek elemanın katılık matrisi,

$$\boldsymbol{k_t} = \int_v \boldsymbol{B}^T\, \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}\, dv \quad , \qquad \textbf{(3.27)}$$

olarak bulunur ve buradan hacim integrali alınarak,

$$\boldsymbol{k_t} = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B}\, \|\boldsymbol{J}\|\, d\xi d\eta d\zeta \tag{3.28}$$

elde edilir [60]. Elde edilen bu katılık matrisi $\boldsymbol{k_t}$, 12x12 boyutlarında simetrik bir matristir. Katılık matrisi $\boldsymbol{k_t}$, 3x3 boyutlarındaki bir $\boldsymbol{k_{tij}}$ alt matrislerinden oluştuğu düşünülerek,

$$\boldsymbol{k_t} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k_{t11}} & \boldsymbol{k_{t12}} & \boldsymbol{k_{t13}} & \boldsymbol{k_{t14}} \\ \boldsymbol{k_{t21}} & \boldsymbol{k_{t22}} & \boldsymbol{k_{t23}} & \boldsymbol{k_{t24}} \\ \boldsymbol{k_{t31}} & \boldsymbol{k_{t32}} & \boldsymbol{k_{t33}} & \boldsymbol{k_{t34}} \\ \boldsymbol{k_{t41}} & \boldsymbol{k_{t42}} & \boldsymbol{k_{t43}} & \boldsymbol{k_{t44}} \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

şeklindedir. $\boldsymbol{k_{tij}}$ alt matrisleri ise,

$$\boldsymbol{k_{tij}} = \frac{E}{1-\upsilon^2} \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} k_{t11} & k_{t12} & k_{t13} \\ k_{t21} & k_{t22} & k_{t23} \\ k_{t31} & k_{t32} & k_{t33} \end{bmatrix} \|\boldsymbol{J}\|\, d\xi d\eta d\zeta \tag{3.30}$$

şeklinde yazılabilir. Her $\boldsymbol{k_{tij}}$ alt matrislerinin (3.30)'da gösterilen elemanları,

$$\begin{aligned}
k_{t11} &= t_i t_j D_{44} + (b_i + s_i)(b_j + s_j) D_{55} \\
k_{t12} &= p t_i y_j D_{44} \\
k_{t13} &= -p(b_i + s_i) y_j D_{55} \\
k_{t21} &= p t_j y_i D_{44} \\
k_{t22} &= p^2 \left[\zeta^2 t_i t_j D_{11} + \zeta^2 (b_i + s_i)(b_j + s_j) D_{33} + y_i y_j D_{44}\right] \\
k_{t23} &= -p^2 \zeta^2 \left[(b_i + s_i) t_j D_{33} + (b_j + s_j) t_i D_{12}\right] \\
k_{t31} &= -p(b_j + s_j) y_i D_{55} \\
k_{t32} &= -p^2 \zeta^2 \left[(b_j + s_j) t_i D_{33} + (b_i + s_i) t_j D_{12}\right] \\
k_{t33} &= p^2 \left[\zeta^2 t_i t_j D_{33} + \zeta^2 (b_i + s_i)(b_j + s_j) D_{22} + y_i y_j D_{55}\right]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

olarak elde edilmektedir.

3.1.2 Kütle matrisi

Plak elemanın kinetik enerjisi ise ρ plak malzemesi yoğunluğu ve olmak üzere,

$$T = \frac{1}{2}\int_v \rho(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2)\, dv \qquad \textbf{(3.32)}$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Bu denklem (3.3) denklemi ile beraber düşünüldüğünde,

$$T = \frac{1}{2}\int_v \rho\ \dot{\boldsymbol{d}}^{\boldsymbol{T}}\dot{\boldsymbol{d}}\ \ dv \qquad \textbf{(3.33)}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifadedeki $\dot{\boldsymbol{d}}$ terimini oluşturmak üzere, (3.10) denkleminin zamana göre türevi alınarak,

$$\dot{\boldsymbol{d}} = \overline{\overline{\boldsymbol{N}}}\,\dot{\boldsymbol{q}} \qquad \textbf{(3.34)}$$

elde edilir.

(3.33) denklemi içerisine (3.34) denklemi yerleştirilirse,

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{m}_{\boldsymbol{t}}\,\dot{\boldsymbol{q}} \qquad \textbf{(3.35)}$$

bulunur. Buradaki $\boldsymbol{m_t}$,

$$\boldsymbol{m_t} = \int_v \rho\ \overline{\overline{\boldsymbol{N}}}^T\overline{\overline{\boldsymbol{N}}}\ dv \qquad \textbf{(3.36)}$$

şeklinde bir matris olup elemanın kütle matrisini ifade etmektedir, buradan da hacim integrali alınarak, elemanın kütle matrisi $\boldsymbol{m_t}$,

$$\boldsymbol{m_t} = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \rho\ \overline{\overline{\boldsymbol{N}}}^T\overline{\overline{\boldsymbol{N}}}\,\|\boldsymbol{J}\|\, d\xi d\eta d\zeta \qquad \textbf{(3.37)}$$

olarak tanımlanmaktadır [60]. Burada, ρ malzeme yoğunluğu, $\overline{\overline{N}}$ ise (3.11) nolu denklemle tanımlanan şekil fonksiyonlarına bağlı 3x12 boyutunda bir matristir. Elemanın kütle matrisi m_t, 12x12 boyutlarında simetrik bir matristir. Bu matris, 3x3 boyutlarındaki bir m_{tij} alt matrislerinden

$$m_t = \begin{bmatrix} m_{t11} & m_{t12} & m_{t13} & m_{t14} \\ m_{t21} & m_{t22} & m_{t23} & m_{t24} \\ m_{t31} & m_{t32} & m_{t33} & m_{t34} \\ m_{t41} & m_{t42} & m_{t43} & m_{t44} \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

şeklinde meydana gelmiştir. m_{tij} alt matrisleri,

$$m_{tij} = \rho \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} m_{t11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{t22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{t33} \end{bmatrix} \|J\| \, d\xi d\eta d\zeta \tag{3.39}$$

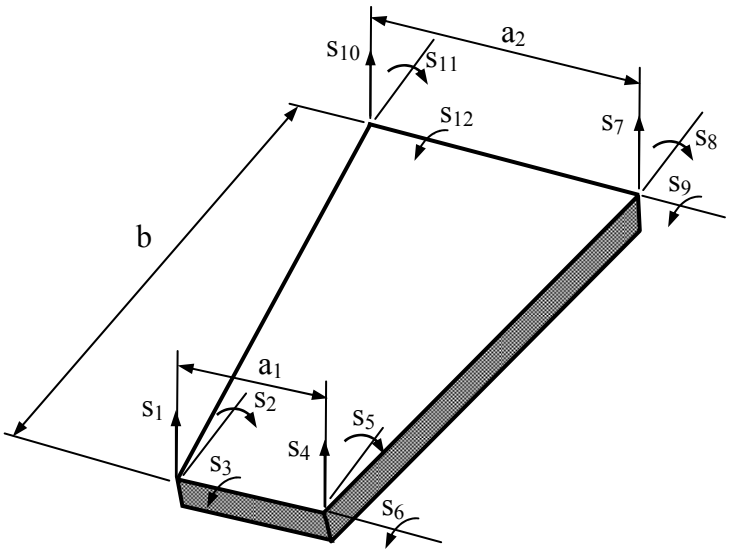
olarak bulunur ve bu alt matrislerin elemanları,

$$\begin{aligned} m_{t11} &= N_i \, N_j \\ m_{t22} &= m_{33} = \frac{1}{3} p^2 \, N_i \, N_j \end{aligned} \tag{3.40}$$

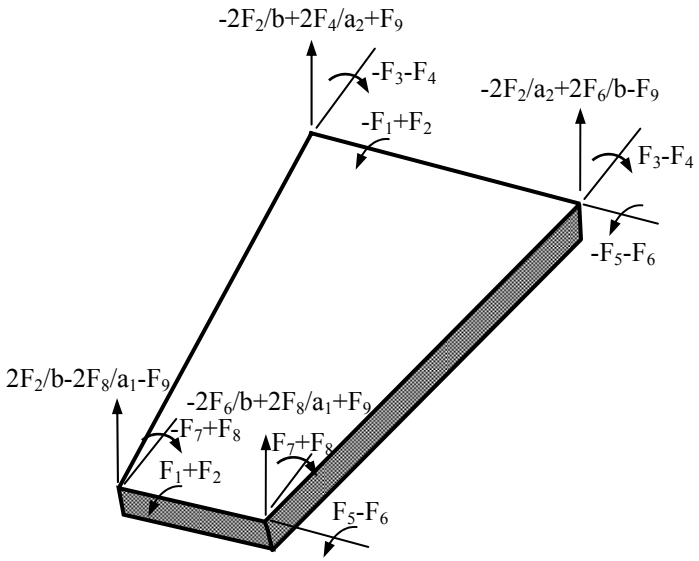
şeklinde elde edilir.

3.1.3 Esneklik matrisi

Yamuk plak eleman, düğüm noktalarında toplam 12 adet bağımlı düğüm kuvvetlerine sahiptir. Bu kuvvetler, Şekil 3.2'de gösterildiği gibi denge denklemleri nedeniyle birbirinden bağımsız dokuz adet kuvvet cinsinden ifade edilebilirler [61].



a)



b)

Şekil 3.2: Yamuk Plak Elemandaki Düğüm Kuvvetleri a) Bağımlı Düğüm Kuvvetleri (S_1- S_{12}) b) Bağımsız Düğüm Kuvvetleri (F_1- F_9)

Plağın 2., 3. ve 4. düğüm noktalarındaki kuvvetleri bağımsız olarak seçilirse,

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{S}_r \\ \boldsymbol{S}_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{t11} & \boldsymbol{k}_{t12} \\ \boldsymbol{k}_{t21} & \boldsymbol{k}_{t22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta}_r \\ \boldsymbol{\delta}_f \end{Bmatrix} \tag{3.41}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada, $\boldsymbol{k}_{t11}$ (3x3), $\boldsymbol{k}_{t12}$ (3x9), $\boldsymbol{k}_{t21}$ (9x3) ve $\boldsymbol{k}_{t22}$ ise (9x9) boyutlarında alt matrisler olup,

$$\boldsymbol{S}_r = \{S_1 \quad S_2 \quad S_3\}^T$$
$$\boldsymbol{S}_f = \{S_4 \quad S_5 \quad \cdots \quad S_{12}\}^T$$
$$\boldsymbol{\delta}_r = \{\delta_1 \quad \delta_2 \quad \delta_3\}^T$$
$$\boldsymbol{\delta}_f = \{\delta_4 \quad \delta_5 \quad \cdots \quad \delta_{12}\}^T$$

ile tanımlıdır. Esneklik matrisini hesaplamak için 1. düğüm noktası kısıtlanılırsa,

$$\boldsymbol{\delta}_r = \boldsymbol{0} \tag{3.42}$$

olmaktadır. Bu durumda (3.41) denkleminden,

$$\boldsymbol{\delta}_f = \boldsymbol{k}_{t22}^{-1} \boldsymbol{S}_f \tag{3.43}$$

$$\boldsymbol{S}_r = \boldsymbol{k}_{t12}\, \boldsymbol{k}_{t22}^{-1} \boldsymbol{S}_f \tag{3.44}$$

olacaktır. Seçilmiş bağımsız sistem düşünüldüğünde, esneklik matrisi

$$\boldsymbol{C}_t^{\,o} = \boldsymbol{k}_{t22}^{-1} \tag{3.45}$$

şeklindedir [28,61].

3.2 Çatlağın Esneklik Matrisine Etkisi

Yamuk plak eleman, y düzlemine paralel olacak şekilde tam ortasından çatlaklı olup Şekil 3.4'de gösterilmiştir. Çatlak tek boyutlu olup, açık ve ilerlemeyen bir yapıdadır. Plak elemanda sabit kayma gerilmeleri ve lineer değişimli normal gerilme alanı olduğu kabul edilmiştir. Aslında bu kabul şekil fonksiyonlarının seçiminden de görülebilmektedir. Çatlaktaki uzama enerjisi U_T ile gösterilirse, Castigliano teoremi uyarınca ek yer değiştirme,

$$u_i = \frac{\partial U_T}{\partial F_i} \tag{3.46}$$

şeklindedir. Uzama enerjisi,

$$U_T = \int_0^{a_c} \frac{\partial U_T}{\partial a_c} da_c = \int_0^{a_c} J(a_c)\, da_c \qquad \textbf{(3.47)}$$

şeklinde yazılabileceğinden,

$$u_i = \frac{\partial}{\partial F_i}\left[\int_0^{a_c} J(a_c)\, da_c \right] \qquad \textbf{(3.48)}$$

formundadır. Bu ifade Paris denklemi olarak da bilinmektedir. Eleman içindeki çatlaktan dolayı oluşan çatlaklı bölgenin ek esneklik matrisi,

$$c_{ij}^{1} = \frac{\partial u_i}{\partial F_j} = \frac{\partial^2}{\partial F_i \partial F_j} \int_0^{a_c} J(a_c)\, da_c \qquad (i = j = 1,9) \qquad \textbf{(3.49)}$$

matris elemanlarından meydana gelen $\boldsymbol{C^1}$ matrisi kullanılarak formüle edilir [26, 27]. F_i, F_j elemana düğüm noktalarında etkiyen bağımsız düğüm kuvvetleri,

$$F_i = S_{i+3} \qquad i = 1,9 \qquad \textbf{(3.50)}$$

şeklinde olup, $J(a_c)$ ise elemanın yer değiştirme enerjisi olup çatlağın zorlanma şekline göre değişen bir büyüklüktür. Düzlem gerilmeler için, $J(a_c)$ ifadesi,

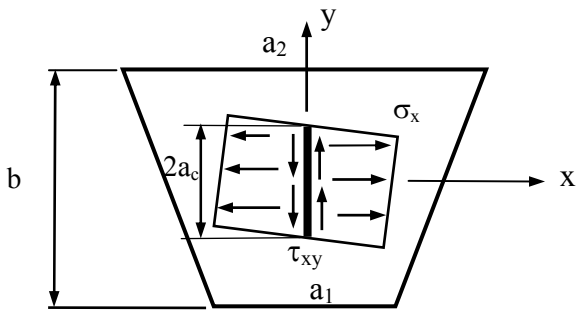
$$J(a_c) = \frac{1}{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{9} K_{Ii}^{\,2} + \sum_{i=1}^{9} K_{IIi}^{\,2}\right) \right] \qquad \textbf{(3.51)}$$

şeklindedir [3]. Burada a_c yarı çatlak boyunu; K_{ji} 'ler (j=I,II ; i=1,9), j çatlak zorlama şekilleri indisi ve i kuvvet indisi olmak üzere gerilme şiddeti faktörleridir. Gerilme şiddeti faktörleri,

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi\, a_c}} \int_{-a_c}^{a_c} \sigma_x(0,y)\left(\frac{a_c + y}{a_c - y}\right) dy \qquad \textbf{(3.52)}$$

$$K_{II} = -\frac{1}{\sqrt{\pi\, a_c}} \int_{-a_c}^{a_c} \tau_{xy}(0,y)\left(\frac{a_c + y}{a_c - y}\right) dy \qquad \textbf{(3.53)}$$

şeklinde tanımlanmıştır [50]. Şekil 3.3'den görülebileceği gibi, $\sigma_x(0,y)$ ve $\tau_{xy}(0,y)$ ise çatlak yüzeyine etkiyen normal ve kayma gerilmeleridir.



Şekil 3.3: Çatlaklı Yamuk Plak Elemanda Gerilme Durumu

Çatlak yüzeyine etkiyen normal ve kayma gerilme değerleri bağımsız düğüm kuvvetlerinin bir fonksiyonu olarak,

$$\sigma_x(0,y) = \frac{24}{bh^3}\left[(0.5 + 3\frac{y}{b})F_3 + (0.5 - 3\frac{y}{b})F_7\right] \qquad \textbf{(3.54)}$$

$$\tau_{xy} = \frac{12z}{h^3} F_9 \qquad \textbf{(3.55)}$$

şeklinde tanımlıdır [61]. Çatlak yüzeyine etkiyen normal ve kayma gerilmesi değerleri dikdörtgen eleman için (3.54)-(3.55) denklemleri ile belirlidir [27]. Yamuk eleman için elemanın ortasında bulunan radyal çatlak boyunca (ξ = 0) normal ve kayma gerilmesi değerleri dikdörtgen elemanın gerilme değerleriyle aynı olmaktadır. Bu nedenle (3.54)-(3.55) denklemleri yamuk eleman için de geçerlidir.

(3.54) ve (3.55) nolu denklemler (3.52) ve (3.53)'de yerlerine yazılır ve elemanın sonlu boyutları dikkate alınırsa,

$$K_{I3} = \frac{24z}{bh^3}\left[(\frac{1}{2} + \frac{3a_c}{2b})F_3)\right]\sqrt{\pi\, a_c}\, f_c(g) \qquad \textbf{(3.56a)}$$

$$K_{I7} = \frac{24z}{bh^3}\left[(\frac{1}{2} - \frac{3a_c}{2b})F_7) \right]\sqrt{\pi\, a_c}\, f_c(g) \qquad \textbf{(3.56b)}$$

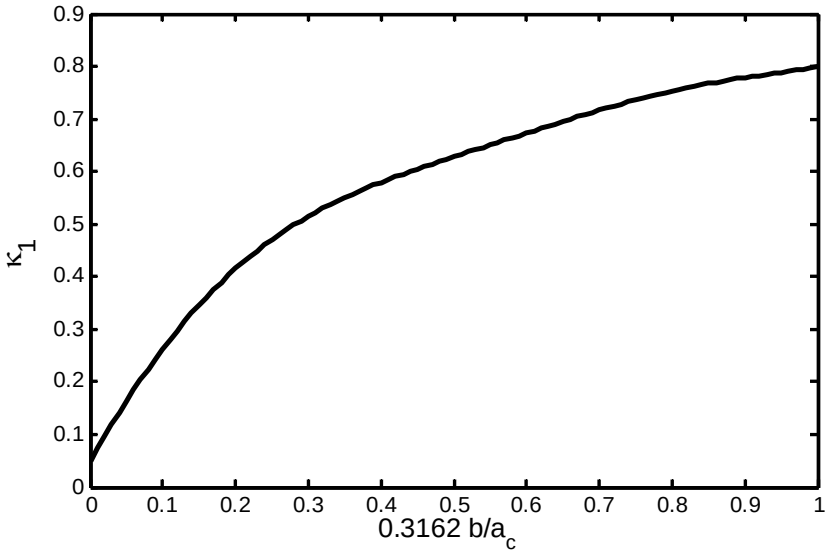
$$K_{II9} = -\frac{12z}{bh^3} F_9 \sqrt{\pi\, a_c}\, f_c(g) \qquad \textbf{(3.56c)}$$

ifadeleri elde edilir. Burada $f_c(g)$ boyutsuz düzeltme fonksiyonu olup,

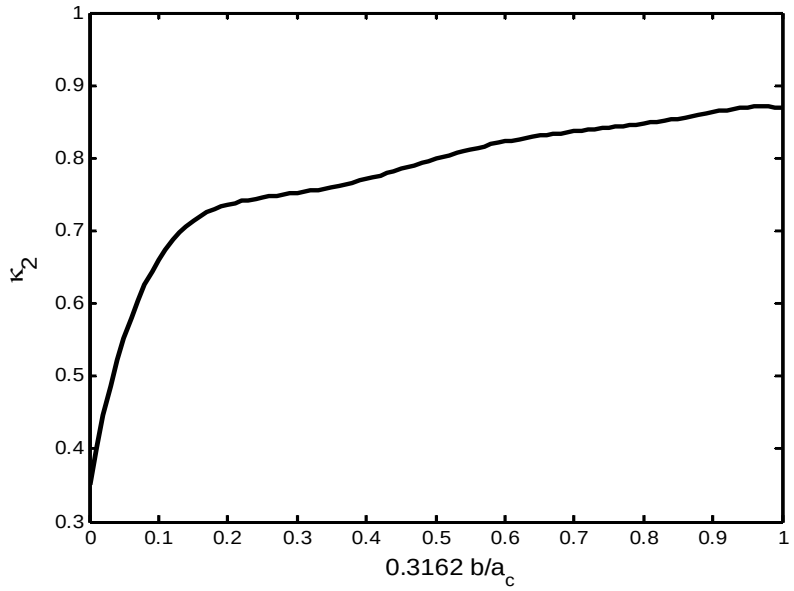
$$f_c(g) = 1 + 0.018\ g + 0.1825\ g^2 + 2.024\ g^3 - 2.431\ g^4 \qquad \textbf{(3.57)}$$

şeklindedir. (3.56a-3.56c) denklemlerinde ihmal edilen kayma deformasyonları için çatlak geometrisi ve malzeme Poisson oranına göre değişebilen κ_j düzeltme fonksiyonları seçilir. Şekil 3.4 ve 3.5'de bu düzeltme katsayıları, υ = 0.3 için gösterilmektedir. Bu değerler kullanılarak düzeltilmiş gerilme şiddeti faktörleri K_{jiR} değerleri aşağıdaki şekilde elde edilir [50].

$$K_{jiR} = \kappa_j K_{ji} \qquad j = 1,2 \ \ ; \ \ i = 3,7,9 \qquad \textbf{(3.58)}$$



Şekil 3.4: Düzeltme Fonksiyonu (κ_1)



Şekil 3.5: Düzeltme Fonksiyonu (κ_2)

(3.56-3.58) nolu ifadeler (3.49-3.51) nolu denklemlerde yerlerine konulur ve birtakım ara işlemler yapılırsa,

$$\boldsymbol{C}^{1} = \frac{6\pi}{Eh^{3}} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & c_{33} & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \textit{simetrik} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & c_{73} & 0 & 0 & 0 & c_{77} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{99} \end{bmatrix} \tag{3.59}$$

matrisi elde edilir. Burada $g_k = 2a_c/b$ olmak üzere,

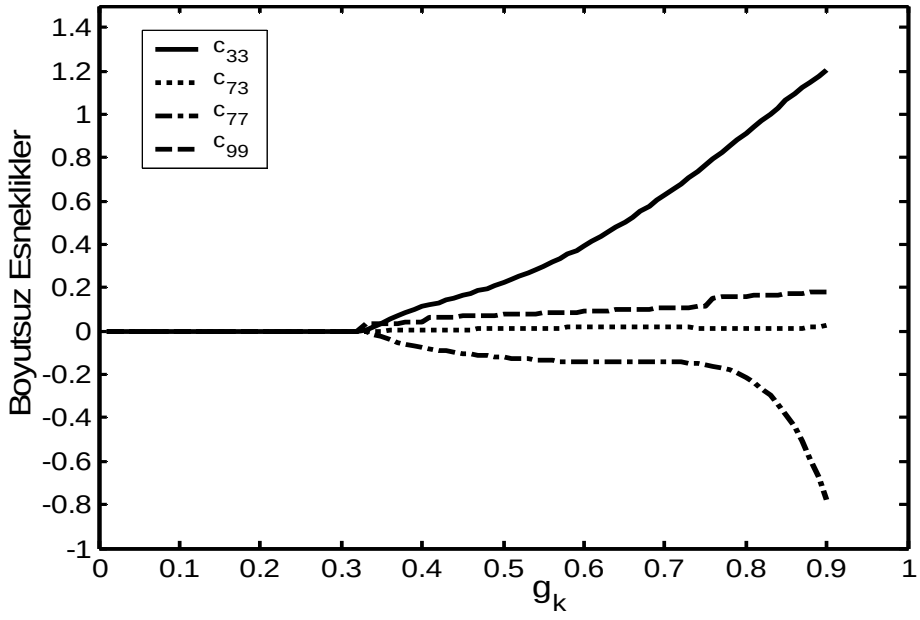
$$c_{33} = 4\kappa_1^{\,2} \int_{-g_k}^{g_k} g(0.5 + 0.75g)^2 f_c^{\,2}(g)dg \tag{3.60a}$$

$$c_{73} = 2\kappa_1^{\,2} \int_{-g_k}^{g_k} g(0.5 + 0.75g)(0.5 - 0.75g) f_c^{\,2}(g)dg \tag{3.60b}$$

$$c_{77} = 4\kappa_1^{\,2} \int_{-g_k}^{g_k} g(0.5 - 0.75g)^2 \, f_c^{\,2}(g) dg \qquad \textbf{(3.60c)}$$

$$c_{99} = b^2 \kappa_2^{\,2} \int_{-g_k}^{g_k} g f_c^{\,2}(g) dg \qquad \textbf{(3.60d)}$$

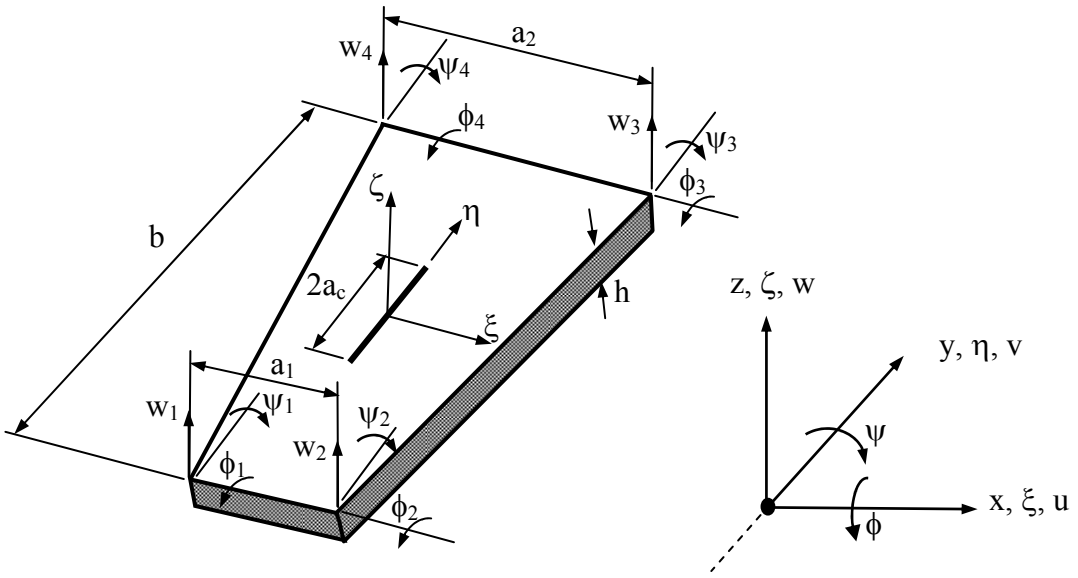
şeklindedir [27]. $\boldsymbol{C^1}$ matrisindeki diagonal olmayan matris elemanları eleman içindeki bağlaşık titreşim durumlarını ifade etmektedir. Şekil 3.6'da çatlağın esneklik matrisini belirleyen ve boyutsuz esneklikler olarak bilinen (3.60) denklemleriyle tanımlı c_{33} , c_{73} , c_{77} , c_{99} matris elemanlarının, g_k bağıl çatlak boyu parametresi ile değişimi gösterilmektedir.



Şekil 3.6: Boyutsuz Esnekliklerin Bağıl Çatlak Boyu İle Değişimi

3.3 Çatlaklı Yamuk Plak Eleman

Çatlaklı yamuk elemanın geometrisi ve incelenen koordinat takımına göre yer değiştirmeleri Şekil 3.7'de gösterilmektedir. Elemanın düğüm noktasındaki kuvvetleri, bağımsız kuvvetler cinsinden yazılarak



Şekil 3.7: Çatlaklı Yamuk Plak Eleman

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{S}_r \\ \boldsymbol{S}_f \end{Bmatrix} = [\boldsymbol{T}]_{12x9} \{\boldsymbol{S}_f\} \tag{3.61}$$

denge durumu elde edilir. (3.44) denklemindeki $\boldsymbol{S}_r$ ifadesi (3.61) denkleminde yazılarak, $\boldsymbol{T}$ matrisi

$$\boldsymbol{T} = \left[\frac{\boldsymbol{k}_{t12}\, \boldsymbol{k}_{t22}^{-1}}{\boldsymbol{I}_{9x9}} \right]_{12x9} \tag{3.62}$$

formunda elde edilir [28].

Bağımsız kuvvetlere dönüşümü sağlayan $\boldsymbol{T}$ matrisi bu şekilde elde edilebileceği gibi, aynı zamanda denge denklemleri yardımıyla da elde edilebilmektedir [61]. Bu durumda, eleman içerisindeki çatlağın yönünün değişmediği, eleman içerisindeki normal gerilmelerin lineer olarak değiştiği ve kayma gerilmelerinin ise sabit kaldığı kabul edilmiştir.

Eleman içerisindeki düğüm kuvvetleri ve momentlerinin dengesi yazıldığında, yamuk plak elemanın düğüm kuvvetleri (S_1- S_{12}),

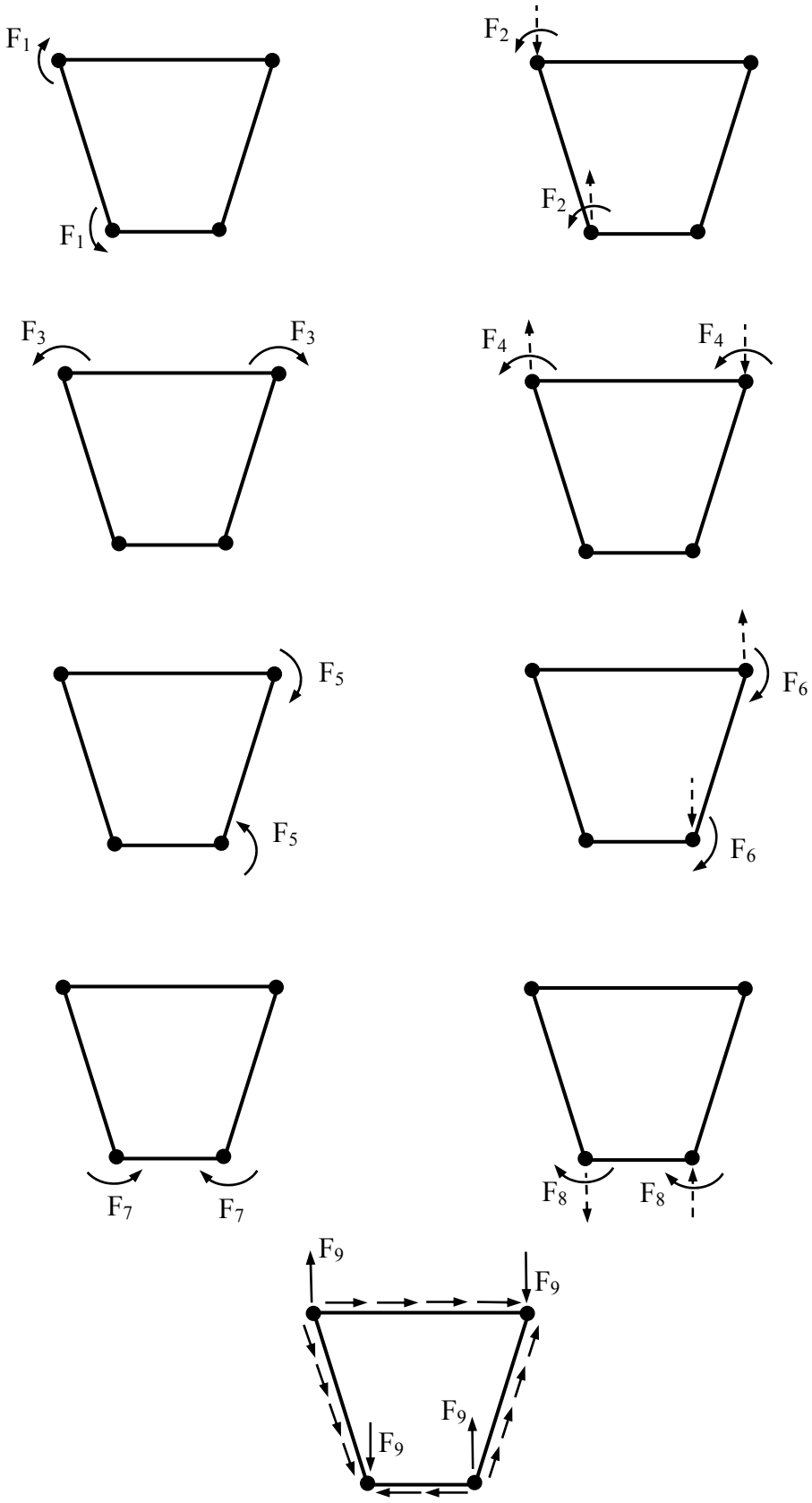
$$S_1 + S_4 + S_7 + S_{10} = 0$$
$$(-S_1 + S_4 + S_7 - S_{10})\frac{b}{2} + S_3 + S_6 + S_9 + S_{12} = 0 \qquad \textbf{(3.63)}$$
$$(S_1 - S_{10})\frac{a_1}{2} + (S_4 - S_7)\frac{a_2}{2} + S_2 + S_5 + S_8 + S_{11} = 0$$

denge denklemlerini sağlamak zorundadır. Eleman için yapılan kabuller ile, düğüm kuvvetlerinin bağımsız kuvvetler cinsinden seçilmesi mümkün olabilmektedir. Bu bağımsız kuvvetler, yamuk elemanın dört kenarına etkiyen simetrik momentler (F_1, F_3, F_5, F_7), elemanın dört kenarına etkiyen anti-simetrik momentler (F_2, F_4, F_6, F_8) ve plağa dik olarak düğüm noktalarında etkiyen kuvvetler (F_9) olarak düşünülebilir. Yamuk plak eleman üzerine etkiyen bağımsız kuvvetlerin statik olarak dengede olabilecek konfigürasyonu Şekil 3.8'de gösterilmiştir [61].

Elemanın düğüm noktalarında etkiyen bağımlı 12 adet düğüm kuvvetinin bağımsız 9 adet düğüm kuvvetine dönüşümü $\boldsymbol{T}$ matrisi ile gerçekleşmektedir. Dönüşümü sağlayan bu matris,

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix}
0 & \frac{2}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{a_1} & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{2}{b} & 0 & \frac{2}{a_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{2}{a_2} & 0 & \frac{2}{b} & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{b} & 0 & \frac{2}{a_1} & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.64)}$$

şeklinde olup tamamıyla yamuk plak elemanın geometrisine (a_1, a_2, b) bağlıdır. Yapılan kabuller ile elde edilen bu matris, eleman içindeki (3.63) denklemini sağlamaktadır.



Şekil 3.8: Yamuk Plak Elemanda Statik Olarak Eşdeğer Kuvvetler

Çatlaklı yamuk plak elemanın katılık matrisi, çatlağın etkisi ile

$$\boldsymbol{k_{tc}} = \boldsymbol{T}\ (\boldsymbol{C_t}^{\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{1}})^{-1}\ \boldsymbol{T}^{\boldsymbol{T}} \qquad \textbf{(3.65)}$$

şeklinde elde edilir [26,27].

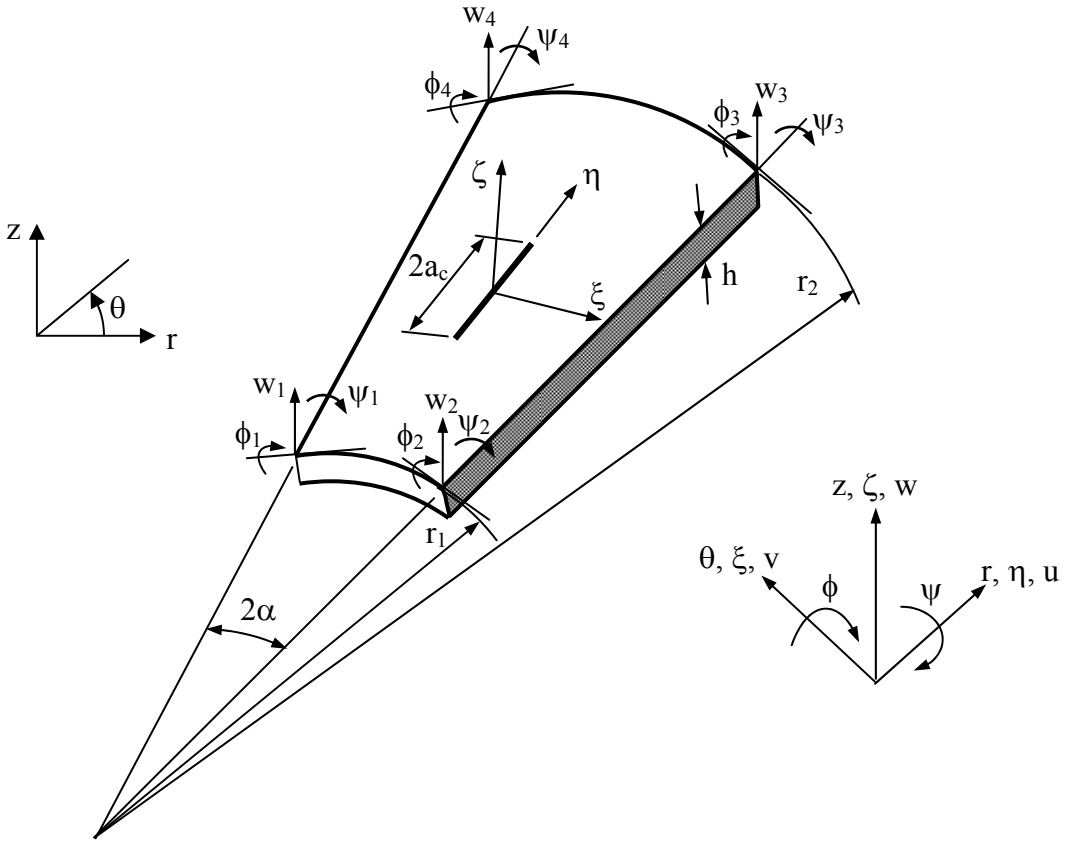
Çatlak sadece katılık matrisinde değişikliğe neden olmakta, kütle matrisi ise değişmeden aynen kalmaktadır [26,27].

4. RADYAL ÇATLAKLI SEKTÖR ELEMAN

4.1 Çatlaksız Sektör Eleman

Bu bölümde, radyal çatlaklı halka plakların doğal frekanslarının elde edilmesi amacıyla radyal çatlaklı sektör eleman geliştirilmiştir. Çatlak, terimleri kırılma mekaniği yardımıyla hesaplanabilen bir ek esneklik matrisi ile modellenmiş ve çatlağın açık, ilerlemeyen yapıda olduğu kabul edilmiştir. Küçük yarı sektör açısı seçilmesi durumunda, sektör ve yamuk elemanın geometrilerinin yakınlığından dolayı, yamuk plak elemanın formülasyonları kullanılarak radyal çatlaklı sektör elemanın esneklik matrisi elde edilmiştir.

Çatlaklı sektör elemanın geometrik özellikleri ve yer değiştirmeleri Şekil 4.1'de gösterilmiştir.



Şekil 4.1: Radyal Çatlaklı Sektör Eleman

Bu eleman r, θ ve z silindirik koordinat takımıyla tanımlanırsa, boyutsuz η, ξ ve ζ eğrisel koordinat takımıyla arasındaki bağıntılar

$$\begin{aligned} r &= 0.5(r_2 - r_1) + r_1 + 0.5(r_2 - r_1)\,\eta \\ \theta &= -\alpha\,\xi \\ z &= 0.5\,\zeta\,h \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada r_1 ve r_2 sektör elemanın sırasıyla iç ve dış yarıçapları, α yarı sektör açısı, h ise plak kalınlığıdır.

Sektör eleman içindeki yer değiştirmeler (u, v, w),

$$\begin{aligned} u &= z\,\phi \\ v &= -z\psi \end{aligned} \tag{4.2}$$

olarak belirlidir [60]. (4.2) denklemi matris formunda,

$$\boldsymbol{d} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & -z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \phi \\ \psi \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

olarak yazılabilir. Elemanın yer değiştirmeleri ise,

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^{4} N_i\, w_i \\ \phi &= \sum_{i=1}^{4} N_i \phi_i \\ \psi &= \sum_{i=1}^{4} N_i \psi_i \end{aligned} \tag{4.4}$$

şeklinde şekil fonksiyonlarına bağlı olarak tanımlanmaktadır. Eleman içindeki yer değiştirme alanı yaklaşık olarak

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{bmatrix} 0 & zN_i(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & 0 & -zN_i(\xi,\eta) \\ N_i(\xi,\eta) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \phi_i \\ \psi_i \end{Bmatrix} \tag{4.5}$$

şeklindedir**.** Burada $N_i(\xi,\eta)$ eşparametrik elemanın iki boyutlu şekil fonksiyonları olup, (3.6) denklemiyle belirlidir. Elemana ait r, θ, z koordinatları,

$$r = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, r_i$$
$$\theta = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, \theta_i \qquad \textbf{(4.6)}$$
$$z = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, 0.5\,\zeta\, h_i$$

bağıntılarını sağlamaktadır. Sektör elemanın yer değiştirmeleri her bir düğüm noktasındaki yer değiştirmeler cinsinden,

$$\begin{Bmatrix} w \\ \phi \\ \psi \end{Bmatrix} = \left[\overline{N}(\xi,\eta)\right]\{q_e\} \qquad \textbf{(4.7)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\overline{\boldsymbol{N}}(\xi,\eta)$ matrisi (3.9) ifadesiyle aynıdır. (4.4) ve (4.7) nolu denklemler birleştirilirse, (3.10) denklemi elde edilmektedir. Burada, $\overline{\overline{\boldsymbol{N}}}$ matrisi (3.11) denklemiyle tamamen aynıdır.

Tablo 4.1 sektör plak elemanın düğüm noktası değerlerini göstermektedir. Şekil fonksiyonlarındaki ξ_i ve η_i büyüklükleri, boyutsuz eğrisel koordinatların düğüm noktalarında aldığı değerlerdir.

Tablo 4.1: Sektör Plak Elemanın Düğüm Noktası Değerleri

i	r_i	θ_i	ξ_i	η_i
1	r_1	α	-1	-1
2	r_1	$-\alpha$	1	-1
3	r_2	$-\alpha$	1	1
4	r_2	α	-1	1

Elemanın katılık ve kütle matrisleri için gerekli bazı türev değerleri,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}_s \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{4.8}$$

şeklinde gösterilebilir. (4.8) nolu denklemdeki $\boldsymbol{J}_s$ jakobiyen matrisi,

$$\boldsymbol{J}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta} & \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

formundadır. x, y, z koordinatlarına göre türev ifadeleri,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{J}_s^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \tag{4.10}$$

şeklindedir. (4.9) nolu ifade (4.6) nolu denklem ile birlikte değerlendirilirse,

$$\boldsymbol{J}_s = \begin{bmatrix} J_{s11} & J_{s12} & J_{s13} \\ J_{s21} & J_{s22} & J_{s23} \\ J_{s31} & J_{s32} & J_{s33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \frac{r_2 - r_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h}{2} \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

jakobiyen matrisi elde edilir. Jakobiyen matrisinin tersi,

$$\boldsymbol{J}_s^{-1} = \begin{bmatrix} J_{s11}^{*} & J_{s12}^{*} & J_{s13}^{*} \\ J_{s21}^{*} & J_{s22}^{*} & J_{s23}^{*} \\ J_{s31}^{*} & J_{s32}^{*} & J_{s33}^{*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{r_2 - r_1} & 0 \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{h} \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

determinantı

$$\|\boldsymbol{J}_s\| = \frac{1}{4} h\alpha (r_2 - r_1) \tag{4.13}$$

olarak bulunur.

4.1.1 Katılık matrisi

Plak elemanın potansiyel enerjisi (3.18) denklemiyle belirlidir. Bu denklemdeki $\boldsymbol{D}$ malzeme matrisi (3.19) şeklindedir. Elemanın birim şekil değiştirmeleri ile yer değiştirmeleri arasında

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \boldsymbol{G}_s \, \boldsymbol{d}\,, \tag{4.14}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \\ 2\varepsilon_{rz} \\ 2\varepsilon_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{4.15}$$

bağıntıları vardır. (4.15) nolu demklem (3.10) denklemi ile birlikte göz önüne alınırsa,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \boldsymbol{B}_s \, \boldsymbol{q}_e \tag{4.16}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada,

$$\boldsymbol{B}_{s\,5x12} = \boldsymbol{G}_{s\,5x3}\, \overline{\overline{N}}_{3x12} \tag{4.17}$$

olarak tanımlıdır. Bu şekilde elde edilen $\boldsymbol{B_s}$ matrisinin birtakım ara işlemler yapıldıktan sonraki ifadesi,

$$\boldsymbol{B_s} = \begin{bmatrix} 0 & b_{s12} & 0 & 0 & b_{s15} & 0 & 0 & b_{s18} & 0 & 0 & b_{s111} & 0 \\ 0 & b_{s22} & b_{s23} & 0 & b_{s25} & b_{s26} & 0 & b_{s28} & b_{s29} & 0 & b_{s211} & b_{s212} \\ 0 & b_{s32} & b_{s33} & 0 & b_{s35} & b_{s36} & 0 & b_{s38} & b_{s39} & 0 & b_{s311} & b_{s312} \\ b_{s41} & b_{s42} & 0 & b_{s44} & b_{s45} & 0 & b_{s47} & b_{s48} & 0 & b_{s410} & b_{s411} & 0 \\ b_{s51} & 0 & b_{s53} & b_{s54} & 0 & b_{s56} & b_{s57} & 0 & b_{s59} & b_{s510} & 0 & b_{s512} \end{bmatrix}_{5x12} \quad \textbf{(4.18)}$$

formundadır. (4.17) nolu denklemdeki türev ifadeleri elde edildikten ve birtakım kısaltmalar yapıldıktan sonra $\boldsymbol{B_s}$ matrisi,

$$b_{s1j} = p\,\zeta\,t_{si} \qquad i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 2,5,8,11 \qquad \textbf{(4.19a)}$$

$$\begin{aligned} b_{s2j} &= \frac{1}{r}\,p\,\zeta\;N_i && i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 2,5,8,11 \\ b_{s2j} &= -\frac{1}{r}\,p\,\zeta\;b_{si} && i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 3,6,9,12 \end{aligned} \qquad \textbf{(4.19b)}$$

$$\begin{aligned} b_{s3j} &= \frac{1}{r}\,p\,\zeta\;b_{si} && i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 2,5,8,11 \\ b_{s3j} &= \frac{1}{r}\,p\,\zeta\;N_i - p\,\zeta\,t_{si} && i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 3,6,9,12 \end{aligned} \qquad \textbf{(4.19c)}$$

$$\begin{aligned} b_{s4j} &= t_{si} && i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 1,4,7,10 \\ b_{s4j} &= p\;\;y_{si} && i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 2,5,8,11 \end{aligned} \qquad \textbf{(4.19d)}$$

$$\begin{aligned} b_{s5j} &= \frac{1}{r}\;b_{si} && i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 1,4,7,10 \\ b_{s5j} &= -\,p\;\;y_{si} && i = 1,2,3,4 \quad , \quad j = 3,6,9,12 \end{aligned} \qquad \textbf{(4.19e)}$$

satırlarından oluşmaktadır. (4.19) denklemlerinde,

$$t_{si} = J_{s12}^{\,*}\,\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \qquad \textbf{(4.20a)}$$

$$b_{si} = J_{s21}^{\,*}\,\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \qquad \textbf{(4.20b)}$$

$$y_{si} = J_{s33}^{*} N_i \qquad \textbf{(4.20c)}$$

olarak tanımlanmıştır. (4.17) nolu denklem (3.18) nolu denklem içerisine yerleştirilir ve $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon_s}$ olduğu düşünülürse, elemanın katılık matrisi,

$$\boldsymbol{k_s} = \int_{v} \boldsymbol{B_s}^{T} \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B_s}\; dv \quad , \qquad \textbf{(4.21)}$$

ve buradan integral açılarak,

$$\boldsymbol{k_s} = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \boldsymbol{B_s}^{T} \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{B_s}\, \left\|\boldsymbol{J_s}\right\|\; d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad \textbf{(4.22)}$$

olarak bulunur [60]. $\boldsymbol{D}$ malzeme matrisi (3.19) nolu ifadede verilmiştir. Sektör elemanın katılık matrisi $\boldsymbol{k_s}$,

$$\boldsymbol{k_s} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{s11} & \boldsymbol{k}_{s12} & \boldsymbol{k}_{s13} & \boldsymbol{k}_{s14} \\ \boldsymbol{k}_{s21} & \boldsymbol{k}_{s22} & \boldsymbol{k}_{s23} & \boldsymbol{k}_{s24} \\ \boldsymbol{k}_{s31} & \boldsymbol{k}_{s32} & \boldsymbol{k}_{s33} & \boldsymbol{k}_{s34} \\ \boldsymbol{k}_{s41} & \boldsymbol{k}_{s42} & \boldsymbol{k}_{s43} & \boldsymbol{k}_{s44} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(4.23)}$$

şeklinde (3x3) boyutlarındaki $\boldsymbol{k_{sij}}$ alt matrislerinden oluşmaktadır. Bu alt matrisler ise,

$$\boldsymbol{k_{sij}} = \frac{2E}{1-\upsilon^2} \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{s11} & \boldsymbol{k}_{s12} & \boldsymbol{k}_{s13} \\ \boldsymbol{k}_{s21} & \boldsymbol{k}_{s22} & \boldsymbol{k}_{s23} \\ \boldsymbol{k}_{s31} & \boldsymbol{k}_{s32} & \boldsymbol{k}_{s33} \end{bmatrix} \left\|\boldsymbol{J_s}\right\| d\xi\, d\,\eta\, d\zeta \qquad \textbf{(4.24)}$$

şeklindedir. Her $\boldsymbol{k_{sij}}$ alt matrislerinin (4.24)'nolu denklemde gösterilen elemanları,

$$
\begin{aligned}
k_{s\,11} &= t_{si}t_{sj}D_{44} + \frac{b_{si}b_{sj}}{r^2}D_{55} \\
k_{s\,12} &= pt_{si}y_{sj}D_{44} \\
k_{s\,13} &= -p\frac{b_{si}y_{sj}}{r}D_{55} \\
k_{s\,21} &= pt_{sj}y_{si}D_{44} \\
k_{s\,22} &= p^2\left[\zeta^2 t_{si}t_{sj}D_{11} + \zeta^2\frac{b_{si}b_{sj}}{r^2}D_{33} + \zeta^2\frac{N_j}{r}(t_{si}D_{12} + \frac{N_i}{r}D_{22}) + y_{si}y_{sj}D_{44}\right] \\
k_{s\,23} &= -\frac{p^2\zeta^2}{r}\left[(-t_{sj} + \frac{N_j}{r})b_{si}D_{33} - t_{si}b_{sj}D_{12} + \frac{N_i b_{sj}}{r}D_{22}\right] \\
k_{s\,31} &= -\frac{pD_{55}}{r}b_{sj}y_{si} \\
k_{s\,32} &= \frac{p^2\zeta^2}{r}\left[-t_{sj}b_{si}D_{21} - \frac{b_{si}N_j}{r}D_{22} + b_{sj}D_{33}(-t_{si} + \frac{N_i}{r})\right] \\
k_{s\,33} &= p^2\left[\zeta^2\frac{b_{si}b_{sj}}{r^2}D_{22} + \zeta^2(-t_{si} + \frac{N_i}{r})(-t_{sj} + \frac{N_j}{r})D_{33} + y_{si}y_{sj}D_{55}\right]
\end{aligned}
\qquad \textbf{(4.25)}
$$

şeklinde elde edilir.

4.1.2 Kütle matrisi

Plak elemanın kinetik enerjisi ise ρ plak malzemesi yoğunluğu olmak üzere, (3.32) denklemi ile ifade edilmektedir. (3.32) nolu denklem (4.3) denklemi ile birlikte değerlendirilirse, (3.33) nolu denkleme gelinmektedir. Bu denklemdeki $\dot{\boldsymbol{d}}$ terimi, (3.10) denkleminin zamana göre türevinden (3.34) denklemi olarak elde edilmektedir. (3.33) denklemi içerisine (3.34) denklemi yerleştirilirse,

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{m}_s\, \dot{\boldsymbol{q}} \qquad \textbf{(4.26)}$$

olarak bulunur. Buradaki $\boldsymbol{m_s}$,

$$\mathrm{m_s} = \int_v \rho\, \overline{\overline{\boldsymbol{N}}}^T \overline{\overline{\boldsymbol{N}}}\, dv \qquad \textbf{(4.27)}$$

şeklinde bir matris olup sektör elemanın kütle matrisini ifade etmektedir. Hacim integrali alınarak, elemanın kütle matrisi $\boldsymbol{m_s}$,

$$\boldsymbol{m}_s = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \rho\, \overline{\overline{\boldsymbol{N}}}^T \overline{\overline{\boldsymbol{N}}} \left\| \boldsymbol{J}_s \right\| d\xi\xi d\eta d \tag{4.28}$$

olarak tanımlanmaktadır [60]. Burada $\overline{\overline{\boldsymbol{N}}}$, (3.11) nolu denklemle tanımlanan 3x12 boyutunda bir matristir. Elemanın kütle matrisi $\boldsymbol{m}_s$, 3x3 boyutlarındaki $\boldsymbol{m}_{sij}$ alt matrislerinden

$$\boldsymbol{m}_s = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_{s11} & \boldsymbol{m}_{s12} & \boldsymbol{m}_{s13} & \boldsymbol{m}_{s14} \\ \boldsymbol{m}_{s21} & \boldsymbol{m}_{s22} & \boldsymbol{m}_{s23} & \boldsymbol{m}_{s24} \\ \boldsymbol{m}_{s31} & \boldsymbol{m}_{s32} & \boldsymbol{m}_{s33} & \boldsymbol{m}_{s34} \\ \boldsymbol{m}_{s41} & \boldsymbol{m}_{s42} & \boldsymbol{m}_{s43} & \boldsymbol{m}_{s44} \end{bmatrix} \tag{4.29}$$

oluştuğu düşünülürse, bu $\boldsymbol{m}_{sij}$ alt matrisleri,

$$\boldsymbol{m}_{sij} = \rho \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} m_{s11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{s22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{s33} \end{bmatrix} \left\| \boldsymbol{J}_s \right\| d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{4.30}$$

olarak bulunur. Bu alt matrislerin elemanları,

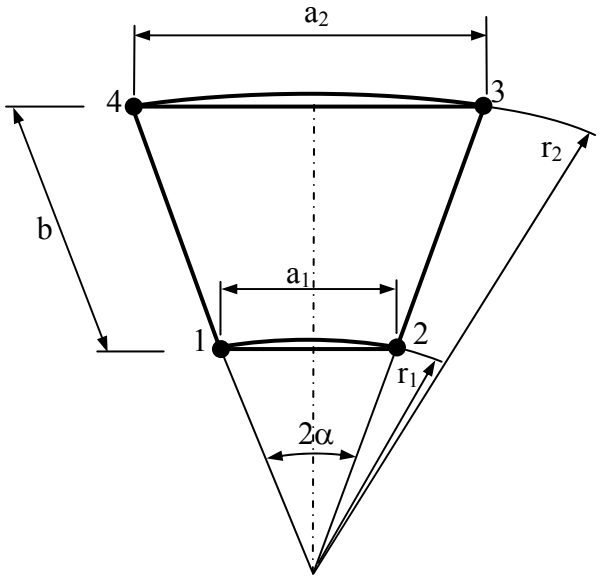
$$\begin{aligned} m_{s11} &= N_i\, N_j \\ m_{s22} &= m_{s33} = z^2\, N_i\, N_j \end{aligned} \tag{4.31}$$

şeklindedir. Böylece sektör elemanın katılık matrisi $\boldsymbol{k}_s$ ve kütle matrisi $\boldsymbol{m}_s$ elde edilmiş olmaktadır.

4.2 Radyal Çatlaklı Sektör Eleman

Ortasında radyal yönde çatlak bulunan sektör elemanın katılık matrisi, geometrik ölçüleri kendisi ile yakın olan yamuk elemanın formülasyonları kullanılarak elde edilmiştir. Şekil 4.2'de sektör eleman ile yakın ölçülere sahip olan yamuk eleman görülmektedir. Bu yamuk elemanın boyutları sektör elemanın α, r_1 ve r_2 boyutları kullanılarak aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

$$a_1 \cong 2\, r_1\, sin\alpha$$
$$a_2 \cong 2\, r_2\, sin\alpha \qquad \textbf{(4.32)}$$
$$b = (r_2 - r_1)\, cos\alpha$$

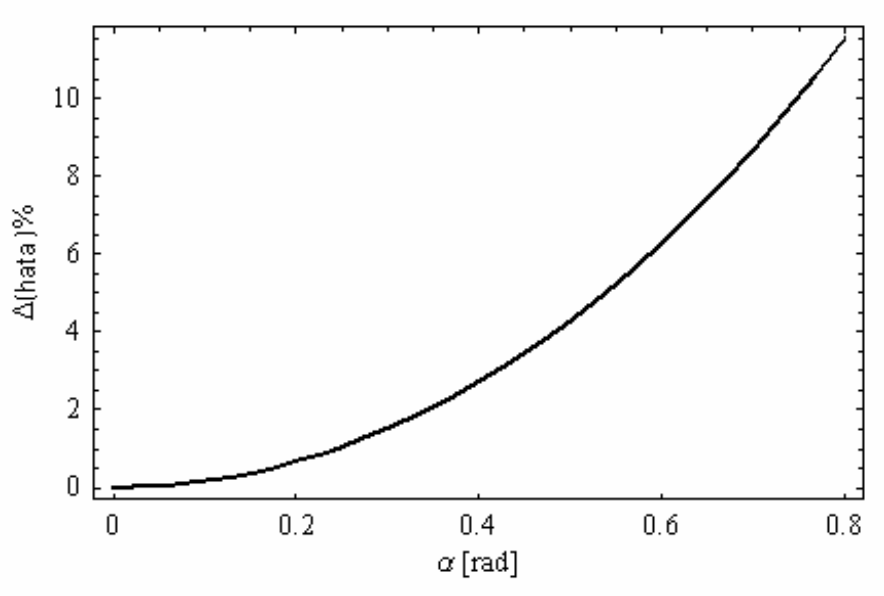


Şekil 4.2: Sektör ve Yamuk Elemanın Geometrik Yakınlığı

Bu durumda, yan kenarları sektör eleman ile aynı ölçülere sahip, alt ve üst kenarları ise, α [rad.] yarı sektör açısına bağlı olarak,

$$\Delta(\text{hata})\% = \frac{2r_i\alpha - 2r_i sin\alpha}{2r_i sin\alpha}100 = \frac{\alpha - sin\alpha}{sin\alpha}100 \quad , \; i = 1,2\,. \qquad \textbf{(4.33)}$$

şeklinde tanımlanan bir hata ile sektör elemanın geometrik ölçülerine yakın bir yamuk eleman elde edilmektedir. Şekil 4.3'de bu boyut hatasının değerleri α yarı sektör açısının değişimine göre gösterilmektedir. Yarı sektör açısının yüksek değerlerinde yamuk ve sektör elemanın geometrik yakınlığı azalarak, α açısı büyüdüğü için boyut hatası Δ da artmaktadır.



Şekil 4.3: Yamuk Elemana Göre Sektör Elemandaki Boyut Hatası Grafiği (*Δ(hata)*)

Böyle bir yaklaşımın geçerli olabilmesi için α yarı sektör açısının olabildiğince küçük seçilmesi gereklidir. Bu çalışmada α = 0.06545 rad. olarak kullanıldığından, boyut hatası Δ = % 0.07 olmaktadır.

Elde edilen çatlaksız sektör elemanın katılık matrisi ile çatlaksız yamuk elemanın katılık matrisi karşılaştırıldığında, genelde her iki matrisin bir çok elemanı aynı olmakla beraber, çalışmada kullanılan sayısal değerlerle (r_1 = 30 mm, r_2 =35 mm, α = 0.06545 rad., h = 3.18 mm, ρ = 2720 kg/m^3, E = 6.9 10^9 N/m^2, υ = 0.33) yamuk ve sektör elemanların katılık matrisi elemanlarının birebir karşılaştırılması sonucunda ortalama hata % 0.45 olmaktadır.

Şekil 4.1'de gösterilen sektör elemanın yer değiştirmeleri ($\boldsymbol{q}_{sec}$), Şekil 3.1'de gösterildiği gibi yamuk elemanın düğüm noktalarındaki yer değiştirmeleri ($\boldsymbol{q}_{tra}$) cinsinden ifade edilebilmesi için kartezyen koordinatlara dönüştürülür. Aşağıda verilen (12x12) boyutundaki $\boldsymbol{L}_r$ matrisi bu dönüşümü sağlamaktadır.

$$\boldsymbol{q}_{sec} = \boldsymbol{L}_r \, \boldsymbol{q}_{tra} \qquad \textbf{(4.34)}$$

$$L_r = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 \end{bmatrix},\ L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & -\cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \end{bmatrix},\ L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.35)}$$

Bu durumda sektör elemanın katılık matrisi kartezyen koordinatlarda,

$$(k_s)_{car} = L_r^T\, k_s\, L_r \quad \textbf{(4.36)}$$

şeklindedir. Kartezyen koordinatlara dönüştürme işlemi tamamlandıktan sonra, çatlaksız sektör elemanın esneklik matrisi $C_{sr}^{\ 0}$ ve dönüşüm matrisi T_r, Bölüm 3'de anlatıldığı şekilde, (3.41)'de verilen alt matrislere ayırma işlemine benzer olarak aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$(k_s)_{car} = \begin{bmatrix} (k_s)_{car_11} & (k_s)_{car_12} \\ (k_s)_{car_21} & (k_s)_{car_22} \end{bmatrix} \quad \textbf{(4.37)}$$

$$C_{sr}^{\ o} = (k_s)_{car_22}^{-1} \quad \textbf{(4.38)}$$

$$T_r = \left[\frac{(k_s)_{car_12}\ (k_s)_{car_22}^{-1}}{I_{9x9}} \right]_{12x9} \quad \textbf{(4.39)}$$

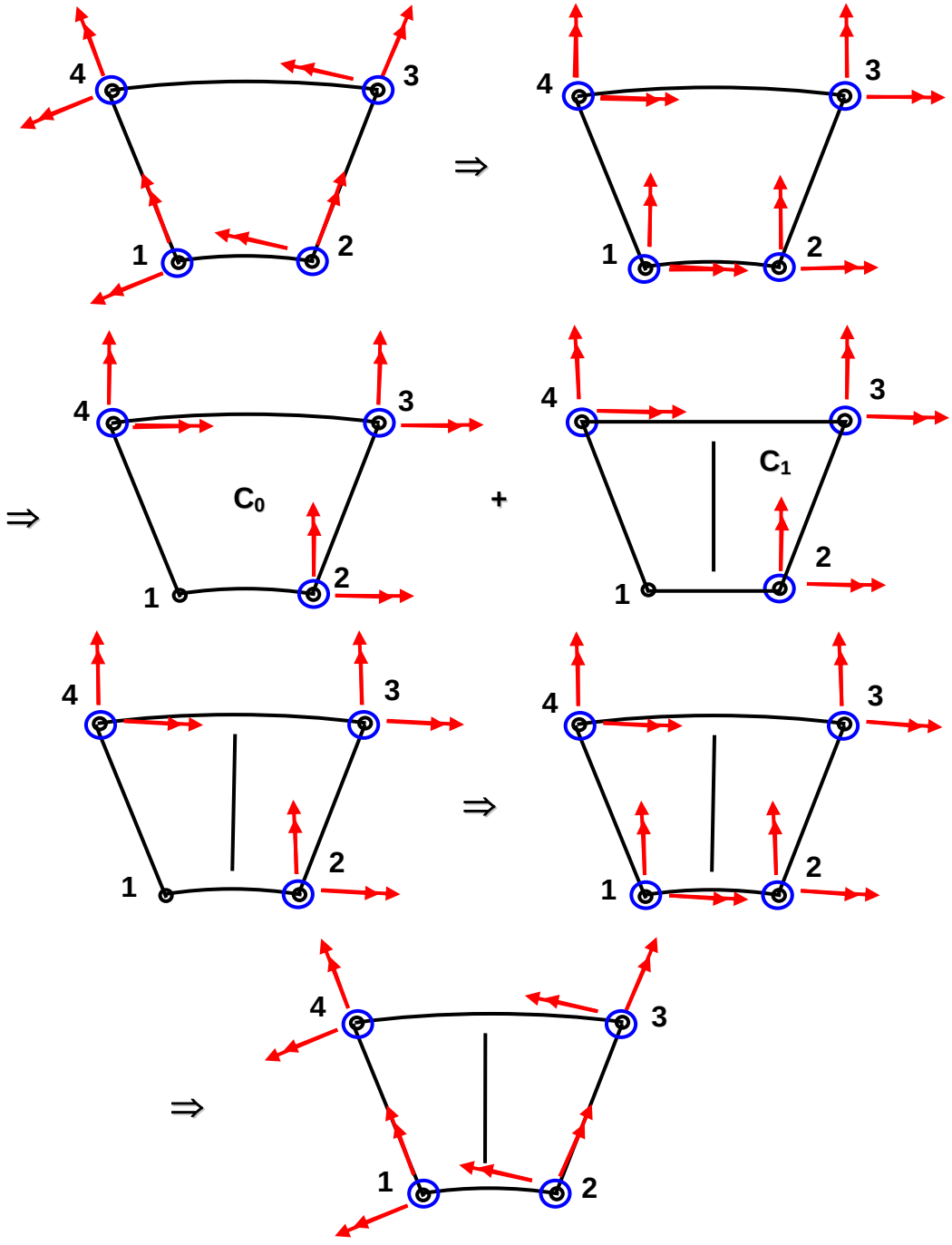
Burada, $(k_s)_{car_11}$ (3x3), $(k_s)_{car_12}$ (3x9), $(k_s)_{car_21}$ (9x3) ve $(k_s)_{car_22}$ ise $(k_s)_{car}$ katılık matrisinin (9x9) boyutlarındaki alt matrislerdir. (3.59) nolu denklem ile bulunan C^1 matrisi kullanılarak çatlaklı sektör elemanın kartezyen koordinatlarda katılık matrisi,

$$(k_{src})_{car} = T_r\ (C_{sr}^{\ 0} + C^1)^{-1}\ T_r^T \quad \textbf{(4.40)}$$

şeklinde olmaktadır. Sonra elde edilen bu katılık matrisi L_r matrisi kullanılarak,

$$(k_{src})_{pol} = (L_r^{-1})^T\ (k_{src})_{car}\ L_r^{-1} \quad \textbf{(4.41)}$$

sektör elemanın polar koordinatları cinsinden elde edilir. Şekil 4.4 radyal çatlaklı sektör elemanın katılık matrisinin elde edilmesine yönelik aşamaları sırasıyla göstermektedir.



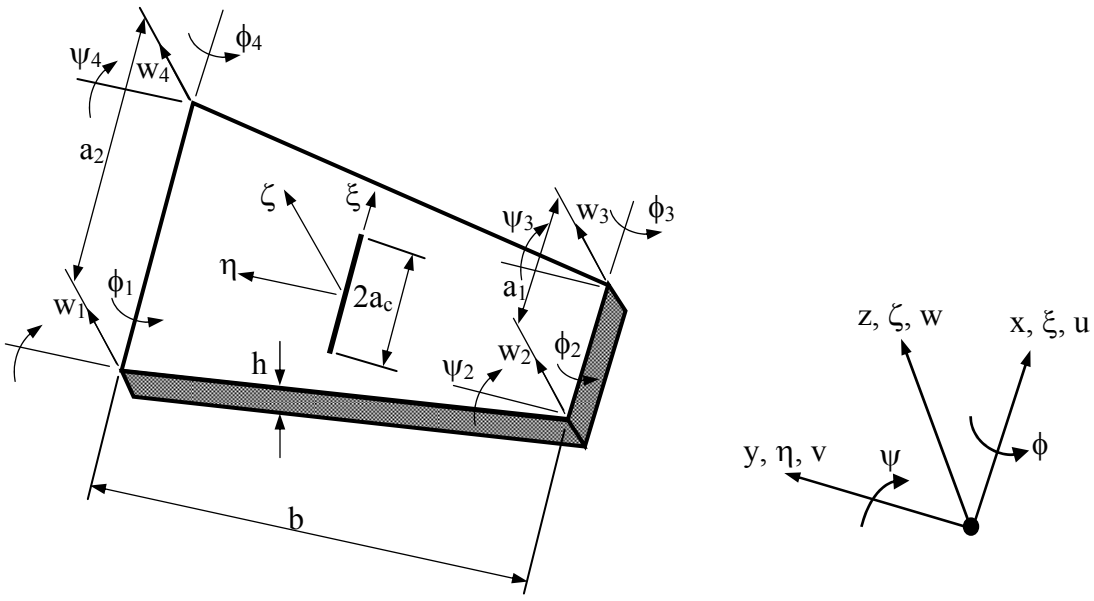
Şekil 4.4: Radyal Çatlaklı Sektör Elemanın Katılık Matrisinin Bulunması İçin Aşamalar

Eleman kütle özellikleri değişmediği için radyal çatlaklı sektör elemanın kütle matrisi $\boldsymbol{m}_{src}$, çatlaksız elemanın kütle matrisi $\boldsymbol{m}_{sr}$ ile aynı olmaktadır.

5. ÇEMBERSEL ÇATLAKLI SEKTÖR ELEMAN

Çembersel çatlaklı sektör elemanın esneklik matrisi yarı sektör açısının küçük seçilmesi durumunda sektör ve yamuk elemanların geometrik yakınlığından faydalanılarak elde edilmiş, sektör elemanın içerisindeki çembersel çatlak için de aynı hata sınırları içinde doğrusal kabulü yapılmıştır.

Geometrik olarak yakın kabulü yapılan çatlaklı yamuk eleman ve yer değiştirmeleri Şekil 5.1'de gösterilmiştir. Eleman 4 düğüm noktalı, 12 serbestlik dereceli olup sabit kalınlıklıdır. Düğüm noktası yer değiştirmeleri, plak düzlemine dik doğrultudaki yer değiştirme w ve sırasıyla plağın (x-z) ve (y-z) orta düzlemlerine dik doğrultulardaki ψ ve ϕ dönmeleridir. Bu yamuk eleman kartezyen koordinatlarda (3.1) denklemleri ile tanımlanmaktadır. Çatlaksız yamuk elemanın formülasyonları, katılık matrisi $\boldsymbol{k}_t$ ve kütle matrisi $\boldsymbol{m}_t$'nin elde edilmesi ile ilgili bilgiler Bölüm 3'te verilmiştir.



Şekil 5.1: Çatlaklı Yamuk Eleman Geometrisi

Eleman içindeki toplam 12 adet düğüm noktası kuvvetleri ve momentleri, aşağıdaki denge denklemleri yardımıyla bağımsız 9 adet kuvvet ve momentler ile tanımlanabilmektedir [61]:

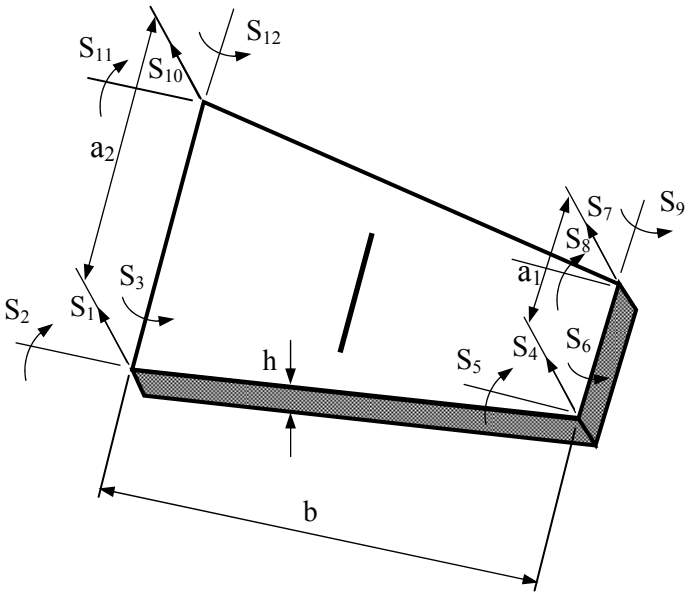
$$
\begin{aligned}
&S_1 + S_4 + S_7 + S_{10} = 0 \\
&(-S_1 + S_{10})\frac{a_2}{2} + (S_7 - S_4)\frac{a_1}{2} + S_2 + S_5 + S_8 + S_{11} = 0 \\
&(S_1 - S_4 + S_{10} - S_7)\frac{b}{2} + S_3 + S_6 + S_9 + S_{12} = 0
\end{aligned}
\qquad \textbf{(5.1)}
$$

Bağımsız 9 adet kuvvet ve momentlere dönüşümü sağlayan $\boldsymbol{T_\theta}$ dönüşüm matrisi, düğüm noktalarındaki kuvvet ve momentlerin sırasındaki değişiklik göz önünde tutularak (3.41)-(3.45) denklemlerindeki işlemlere benzer olarak elde edilebilmektedir. Bu matris ile elde edilen düğüm noktası kuvvet ve momentleri (5.1) denge denklemlerini sağlamaktadır.

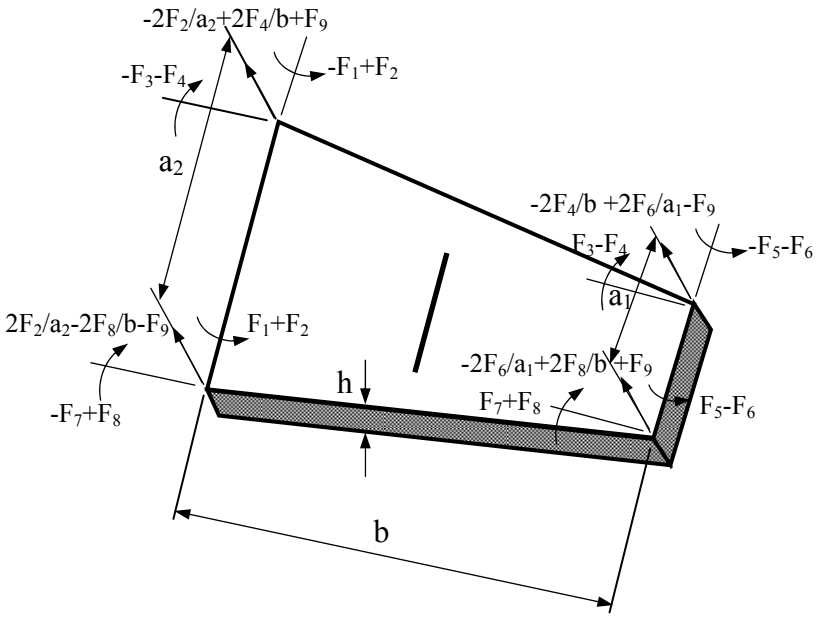
Şekil 5.1'de gösterilen yamuk elemanda çatlağın pozisyonu x yönüne paraleldir. Çatlak modellenirken çatlağın yönünün değişmediği, eleman içerisindeki normal gerilmelerin lineer olarak değiştiği ve kayma gerilmelerinin ise sabit kaldığı kabul edilmiştir.

Şekil 5.2a elemanın 12 adet düğüm kuvvetini (S_1- S_{12}), Şekil 5.2b ise bu kuvvetlerin bağımsız 9 adet kuvvet (F_1- F_9) cinsinden değerlerini göstermektedir.

Yamuk plak elemandaki bağımsız 9 adet kuvvet, elemanın dört kenarına etkiyen simetrik momentler (F_1, F_3, F_5, F_7), anti-simetrik momentler (F_2, F_4, F_6, F_8) ve plağa dik olarak düğüm noktalarında etkiyen kuvvetler (F_9) şeklinde olup, yamuk elemana etkime durumları Şekil 3.8'de gösterilmiştir.

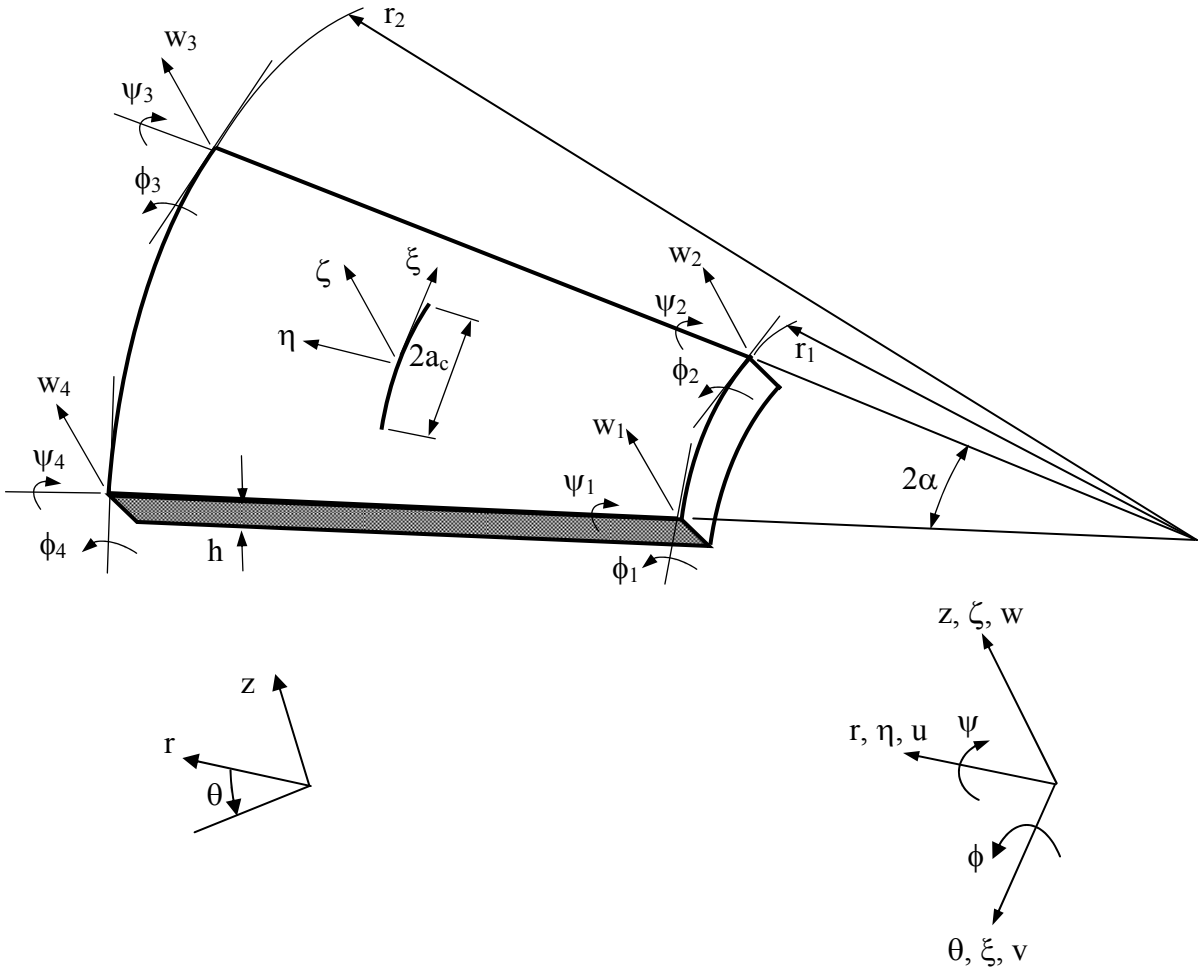


a)



b)

Şekil 5.2: Çatlaklı Yamuk Plak Eleman a) Bağımlı Düğüm Noktası Kuvvetleri (S_1- S_{12}) b) Bağımsız Düğüm Noktası Kuvvetleri (F_1- F_9)



Şekil 5.3: Çembersel Çatlaklı Sektör Eleman

Şekil 5.3'de gösterilen çatlaklı sektör eleman *r,* θ ve *z* silindirik koordinatları ile boyutsuz η, ξ ve ζ eğrisel koordinat takımıyla (4.1) bağıntıları geçerlidir.

Şekil 5.3'de gösterilen çembersel çatlaklı elaman ile geometrik yakınlık kurulan Şekil 5.1'deki çatlaklı yamuk elemanın boyutları (4.32) bağıntıları yardımıyla bulunur. Yamuk eleman kullanılmasıyla yapılan boyut hatası (4.33) denklemi ile aynıdır. Eleman içersindeki çembersel çatlağın doğrusal kabul edilmesi ile yapılan hata da (4.33) denklemi ile aynı olmaktadır.

Bu bağıl boyut hatası Şekil 4.3'de belli sınırlar arasında gösterilmiştir. Küçük yarı sektör açısının kullanılması, bu bağıl hata değerini azaltmaktadır. Bu çalışmada α = 0.06545 rad. (3.75°) olarak kullanılmıştır. Bu durumda boyut hatası Δ = % 0.07 olmaktadır.

Şekil 5.3'de gösterilen sektör elemanın katılık matrisi $\boldsymbol{k}_s$ ve kütle matrisi $\boldsymbol{m}_s$ Bölüm 4'de açıklandığı şekilde elde edilir. Bu elemanın yer değiştirmeleri ile Şekil 5.1'de gösterilen yamuk elemanın yer değiştirmelerinin aynı sırada olabilmesi için, aşağıda verilen $\boldsymbol{Y}$ matrisi kullanılarak sırası değiştirilir.

$$\boldsymbol{q}_{sec} = \boldsymbol{Y}\,\boldsymbol{q}^{*}_{sec} \tag{5.2}$$

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & ise \quad i = k,\ j = 9+k, \quad k = 1,\cdots,3 \\ 0 & digerleri \quad i = k,\ j = k-3, \quad k = 4,\cdots,12 \end{cases} . \tag{5.3}$$

Daha sonra, sektör elemanın yeni yer değiştirmeleri aşağıda verilen $\boldsymbol{L}_{\theta}$ matrisi ile yamuk elemanın kartezyen koordinatlarına dönüştürülür.

$$\boldsymbol{q}^{*}_{sec} = \boldsymbol{L}_{\theta}\ \boldsymbol{q}^{*}_{tra} \tag{5.4}$$

$$\boldsymbol{L}_{\theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{L}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{L}_4 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{L}_4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{L}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix},\ \boldsymbol{L}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

Yukarıda bahsedilen dönüştürme işlemi tamamlandıktan sonra, çatlaksız sektör elemanın katılık matrisi,

$$(\boldsymbol{k}_s)_{tra} = \boldsymbol{L}_{\theta}^{T}\ \boldsymbol{Y}^{T}\boldsymbol{k}_s\ \boldsymbol{Y}\,\boldsymbol{L}_{\theta} \tag{5.6}$$

olarak kartezyen koordinatlarda elde edilir.

Bölüm 3'te açıklanan formülasyonlara benzer şekilde çatlaklı sektör elemanın 9x9 boyutundaki katılık matrisi $(\boldsymbol{k}_{s\theta c})_{tra}$, $\boldsymbol{T}_{\theta}$ dönüşüm matrisinden faydalanılarak,

$$(\boldsymbol{k}_{s\theta c})_{tra} = \boldsymbol{T}_{\theta}\ (\boldsymbol{C}_{s\theta}^{\ 0} + \boldsymbol{C}^{1})^{-1}\ \boldsymbol{T}_{\theta}^{T} \tag{5.7}$$

şeklinde elde edilmektedir [26,27].

Kartezyen koordinatlarda elde edilen $(k_s)_{tra}$ katılık matrisi,

$$(k_s)_{tra} = \begin{bmatrix} (k_s)_{tra_11} & (k_s)_{tra_12} \\ (k_s)_{tra_21} & (k_s)_{tra_22} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

şeklinde alt matrislere ayrılmaktadır. Burada $(k_s)_{tra_11}$ (3x3), $(k_s)_{tra_12}$ (3x9), $(k_s)_{tra_21}$ (9x3) ve $(k_s)_{tra_22}$ ise $(k_s)_{tra}$ katılık matrisinin (9x9) boyutlarındaki alt matrisleridir. (3.41)-(3.45)'de verilen işlemlere benzer olarak,

$$C_{s\theta}{}^{o} = (k_s)_{tra_22}{}^{-1} \tag{5.9}$$

ve (3.62)'de verilen formülasyondan,

$$T_\theta = \left[\frac{(k_s)_{tra_12}\ (k_s)_{tra_22}{}^{-1}}{I_{9x9}} \right]_{12x9} \tag{5.10}$$

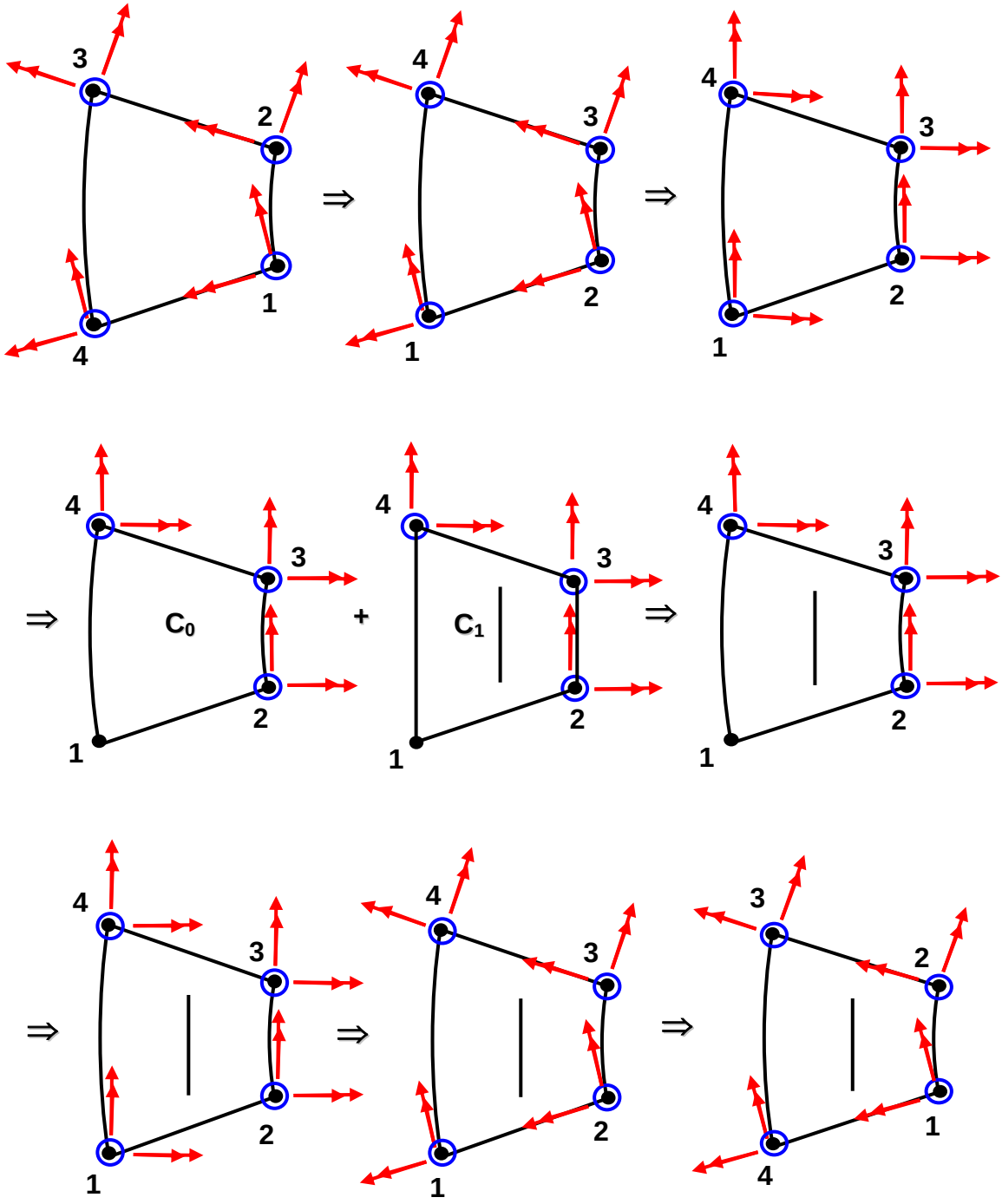
olarak elde edilmektedir. C^1 matrisi ise (3.59) denklemi ile elde edilen çatlak nedeniyle oluşan ek esneklik matrisidir. Böylece (5.9) denklemi ile sektör elemanın esneklik matrisi, (5.7) denklemi ile de çembersel çatlaklı sektör elemanın katılık matrisi kartezyen koordinatlarda elde edilir. Elde edilen bu katılık matrisi, sırasıyla L_θ matrisi ile sırası değişmiş polar koordinatlara,

$$(k_{s\theta c})_{tra_pol} = (L_\theta{}^{-1})^T\ (k_{s\theta c})_{tra}\ L_\theta{}^{-1} \tag{5.11}$$

sonra da Y matrisi ile,

$$(k_{s\theta c})_{pol} = (Y^{-1})^T\ (k_{s\theta c})_{tra_pol}\ Y^{-1} \tag{5.12}$$

düğüm noktalarının sırası değiştirilerek sektör elemanın orijinal polar koordinatlarına dönüştürülür. Şekil 5.4 çembersel çatlaklı sektör elemanın katılık matrisinin elde edilmesine yönelik aşamaları sırasıyla göstermektedir.



Şekil 5.4: Çembersel Çatlaklı Sektör Elemanın Katılık Matrisinin Bulunması İçin Aşamalar

Elemanın kütle özellikleri değişmediği için çembersel çatlaklı sektör elemanın kütle matrisi, çatlaksız sektör elemanın kütle matrisi ile aynı olmaktadır [26,27].

6. SAYISAL UYGULAMALAR

6.1 Radyal Çatlaklı Halka Plak

Halka plağın sonlu elemanlar modeli, Şekil 6.2'de gösterildiği gibi radyal ve açısal yönlerde sırasıyla 20x48 sayıda sektör eleman kullanılarak oluşturulmuştur. Sayısal sonuçların karşılaştırılabilmesi için halka plak [31] nolu referanstaki halka plağın boyutları ile aynı seçilmiştir ($r_{iç}$ = 30 mm, $r_{dış}$ =130 mm, $r_{iç} / r_{dış}$ = 0.23, h=3.18 mm, ρ = 2720 kg/m^3, E = 6.910^9 N/m^2, υ = 0.33 (Alüminyum)). Çatlağın iç veya dış kenardan başlaması durumuna göre, radyal çatlaklı halka plakların serbest titreşimleri değişik sınır şartları, çatlak sayıları ve çatlak boyları için incelenmiştir. Plağın teorik incelemelerinde F-C (iç kenar serbest, dış kenar ankastre), C-F (iç kenar ankastre, dış kenar serbest), C-C (iç ve dış kenar ankastre) ve S-S (iç ve dış kenar basit mesnetlenmiş) sınır şartları kullanılmıştır.

Çatlaklı halka plağın serbest titreşimlerine ait doğal frekansları ve mod şekilleri,

$$\left[\boldsymbol{K}-\omega_{ij}^{2}\,\boldsymbol{M}\right]\left\{\boldsymbol{X_{ij}}\right\}=\{\boldsymbol{0}\} \tag{6.1}$$

özdeğer probleminin çözümü ile elde edilmiştir. Burada, i hareketsiz çapların sayısını ve j hareketsiz çemberlerin sayısını göstermek üzere ω_{ij} halka plağın doğal frekansını, $\boldsymbol{K}$ ve $\boldsymbol{M}$ halka plağın katılık ve kütle matrislerini, $\boldsymbol{X_{ij}}$ özvektörü ise bu doğal frekansa karşılık gelen mod şeklini göstermektedir.

Halka plağın dış yarıçapı $r_{dış}$ ve eğilme rijitliği

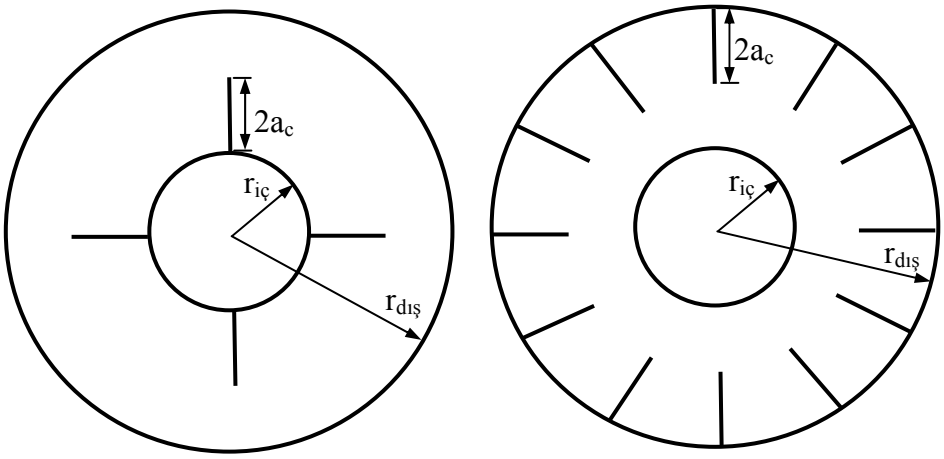
$$D=\frac{E\,h^{3}}{12(1-\upsilon^{2})} \tag{6.2}$$

olmak üzere, boyutsuz frekans parametresi,

$$\lambda_{ij} = \omega_{ij} r_{dış}^{\ 2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \qquad \textbf{(6.3)}$$

olarak elde edilir.

Şekil 6.1 birbirinden eşit uzaklıkta ve aynı çatlak boylarına sahip iç kenardan ilerleyen dört ve dış kenardan ilerleyen on iki radyal çatlaklı halka plak geometrilerini göstermektedir.



Şekil 6.1: İç Kenardan Başlayan Dört ve Dış Kenardan Başlayan On İki Radyal Çatlaklı Halka Plakta Çatlak Konumları

Tablo 6.1'de iç ve dış yarıçaplar oranı $r_{iç} / r_{dış}$ = 0.23 olan çatlaksız halka plağın çeşitli sınır şartları için serbest titreşim modları *(i,j)* ve bu modlara ait doğal frekansları görülmektedir.

Tablo 6.2 iç kenarı ankastre, dış kenarı serbest halka plağın hareketsiz çemberlerin sıfır olduğu mod şekillerini ve bu mod şekillerine ait doğal frekansları, çatlakların bulunduğu sektör grup numaralarına (1-48) ve seçilen çatlak sayılarına göre göstermektedir. Radyal çatlağın hareketsiz çapa en yakın olduğu durumdaki sektör grup numaraları ($^{\#}$) işareti ile gösterilmiştir. Çatlağın ele alınan sektör elemanın ortasında olması nedeniyle, çatlakların konumları hareketsiz çap konumlarının tam üzerine getirilememiştir. Tablo 6.2'den söz konusu halka plağın (1,0) modunda 2 adet çatlak, plak üzerinde hareketsiz çap konumlarına en yakın 1 ve 25 nolu sektör gruplarında bulunduğu zaman doğal frekans değişiminin en az olduğu görülmektedir.

Tablo 6.1: Çeşitli Sınır Şartları İçin Halka Plağın ($r_{iç}$ / $r_{dış}$ = 0.23) Serbest Titreşim Modları *(i,j)* ve Doğal Frekansları (*Hz*).

Mod No	Sınır Şartları C-F	F-C	C-C	S-S
1	231.26 (1,0)	487.25 (0,0)	1727.56 (0,0)	833.83 (0,0)
2	260.13 (0,0)	889.12 (1,0)	1755.83 (1,0)	931.63 (1,0)
3	319.31 (2,0)	1461.64 (2,0)	2040.19 (2,0)	1271.88 (2,0)
4	589.44 (3,0)	2102.03 (0,1)	2525.11 (3,0)	1715.65 (3,0)
5	1725.25 (0,1)	2207.71 (1,1)	4773.31 (4,0)	3159.22 (0,1)
6	1749.92 (4,0)	2563.62 (3,0)	5638.44 (0,1)	3367.24 (1,1)
7	1806.43 (1,1)	2665.14 (2,1)	5771.14 (1,1)	3766.84 (2,1)
8	2060.32 (2,1)	3375.29 (4,1)	6659.38 (5,0)	4475.28 (3,1)
9	2267.28 (5,0)	3419.24 (5,0)	7147.79 (2,1)	4563.66 (4,0)
10	2514.13 (3,1)	4129.32 (0,2)	7325.37 (1,2)	5227.74 (5,0)
11	2662.21 (6,0)	4306.78 (3,1)	7591.17 (3,1)	5404.23 (6,0)
12	3469.37 (4,1)	5242.84 (1,2)	8460.04 (4,1)	7015.44 (0,2)
13	4208.11 (1,2)	6788.13 (6,0)	9324.73 (6,0)	7923.02 (4,1)
14	7628.74 (0,2)	7575.46 (4,0)	12358.24 (0,2)	9372.29 (1,2)
15	8753.24 (1,3)	8914.28 (2,2)	14431.29 (1,3)	11214.33 (2,2)
16	9436.41 (2,2)	10569.27 (1,3)	17439.12 (2,2)	13249.22 (0,3)
17	11274.96 (0,3)	13449.14 (0,3)	19245.76 (0,3)	16749.14 (1,3)

Aynı uzunlukta iki adet çatlak, aynı mod şeklinde, hareketin en fazla olduğu 13 ve 37 nolu sektör gruplarında bulunduğunda ise, doğal frekanstaki düşme daha fazla olmaktadır. Şekil 6.3'de bu mod şeklinde radyal çatlak ve hareketsiz çap konumları gösterilmiştir.

Tablo 6.2: Radyal Çatlaklı ve Çatlaksız C-F Sınır Şartlı Halka Plakların Doğal Frekanslarının Karşılaştırılması, $r_{iç}$ / $r_{dış}$ = 0.23

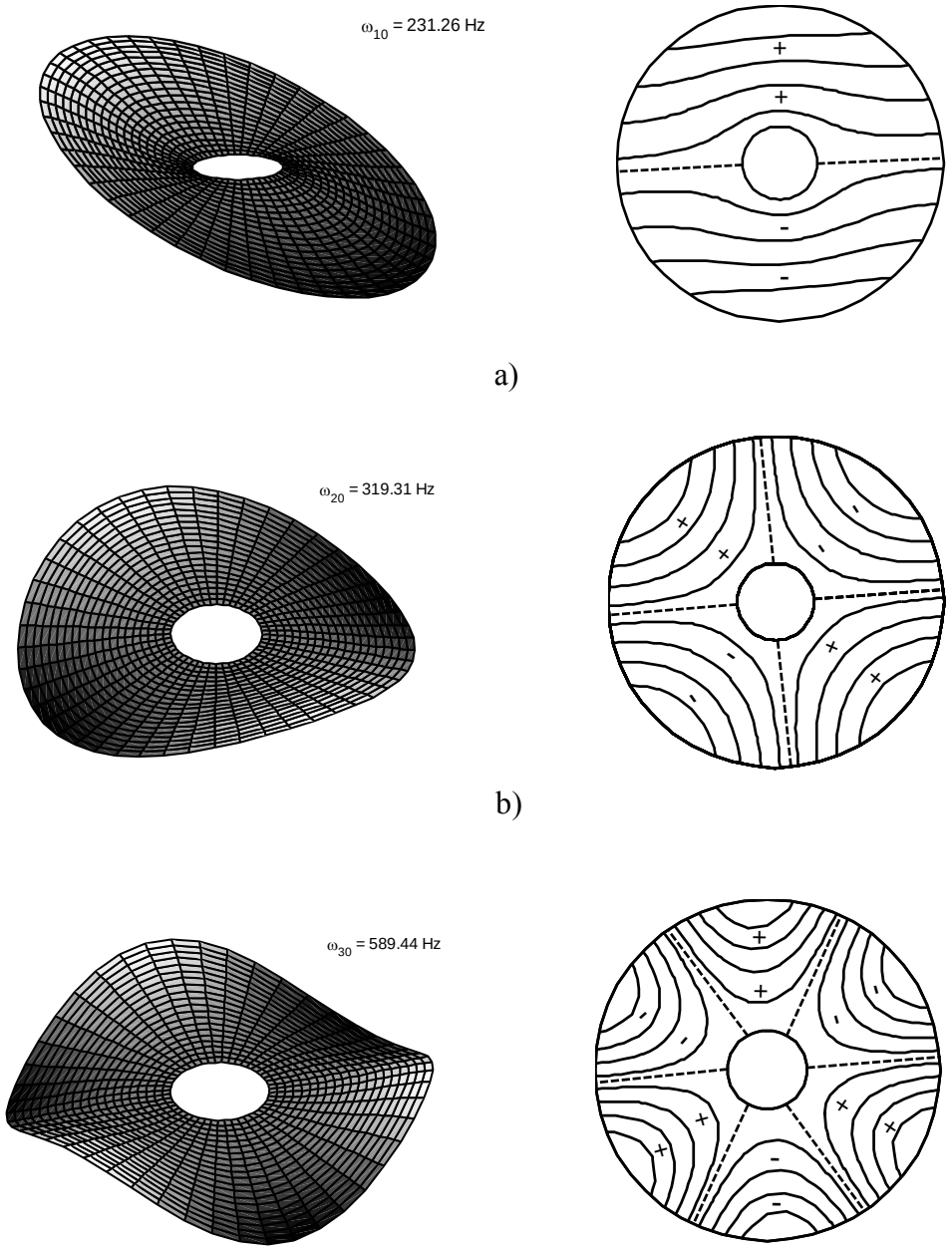
Sınır Şartı	Çatlak Sayısı	Açısal yöndeki çatlaklı eleman konumları (sektör grup numaraları)	ω_{ij} (*Hz*) ve (*i,j*)
C-F		Çatlaksız	231.26 (1,0)
	2	1[#], 25[#]	230.96 (1,0)
	2	13, 37	228.14 (1,0)
		Çatlaksız	319.31 (2,0)
	4	1[#], 13[#], 25[#], 37[#]	318.89 (2,0)
	4	7, 19, 31, 43	315.24 (2,0)
		Çatlaksız	589.44 (3,0)
	6	1[#], 9[#], 17[#], 25[#], 33[#], 41[#]	588.49 (3,0)
	6	5, 13, 21, 29, 37, 45	583.71 (3,0)

[#] İlgili moda ait hareketsiz çaplara en yakın sektör grup numaraları.

Benzer karşılaştırmalar, Tablo 6.2'de 4 ve 6 çatlak sayıları için, plağın ikinci (2,0) ve üçüncü (3,0) çap modları için de yapılabilir. Tablo 6.2'de, çatlak konumları hareketsiz çaplara yakın olduğu zaman, çatlağın doğal frekanslarına etkisi azalmakta

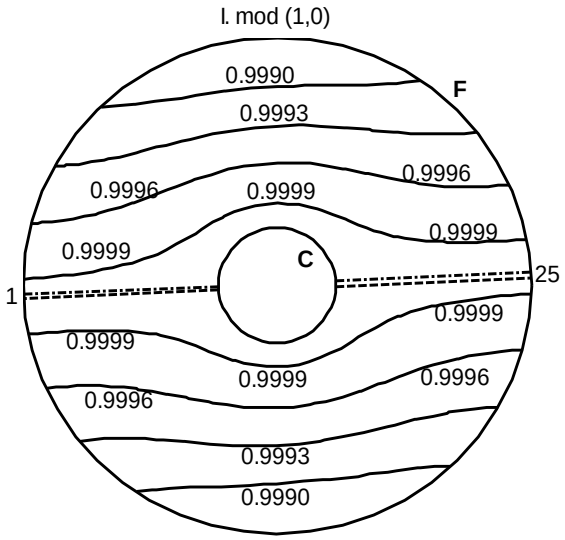
ve doğal frekans değerleri çatlaksız plağın değerlerine doğru yaklaştığı görülmektedir. Eğer çatlaklar hareketsiz çaplardan uzak konumda olurlarsa, etkileri daha fazla olmakta ve plağın doğal frekansları daha fazla düşmektedir.

Şekil 6.2 çatlaksız C-F halka plağın ilk üç (1,0), (2,0) ve (3,0) çap modunu, bu mod şekillerine ait doğal frekansları ve hareketsiz çap konumlarını göstermektedir.

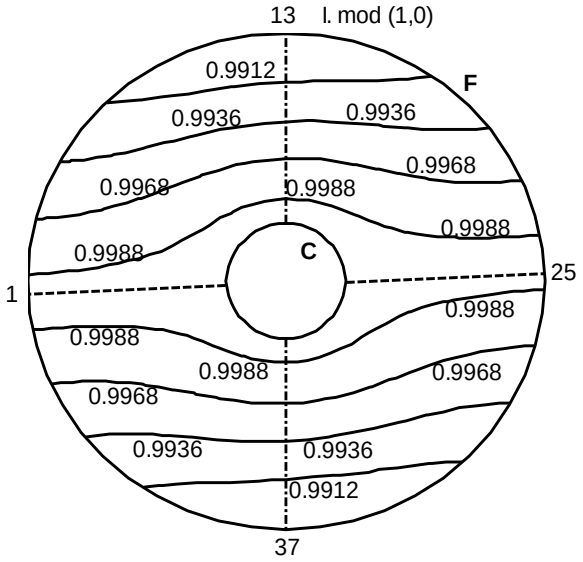


Şekil 6.2: Çatlaksız C-F Halka Plağın İlk Üç Çap Modu (----- : Hareketsiz Çaplar) a) Mod (1,0) b) Mod (2,0) c) Mod (3,0)

Şekil 6.3'de halka plağın (1,0) modunda hareketsiz çap doğrultusuna en yakın ve uzak 2 radyal çatlağın konumu gösterilmiştir.



a)

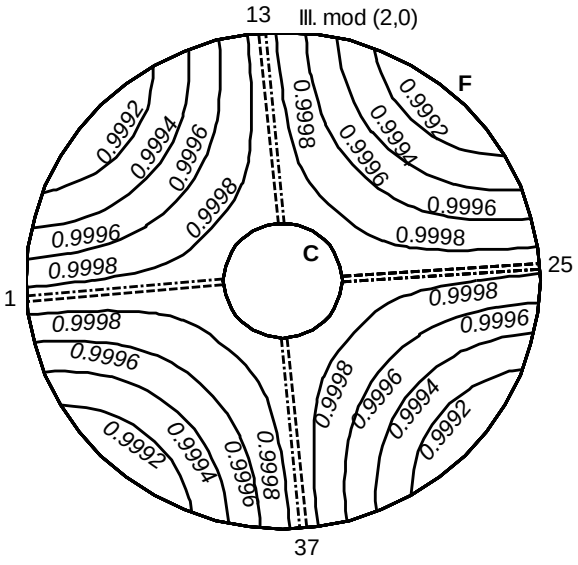


b)

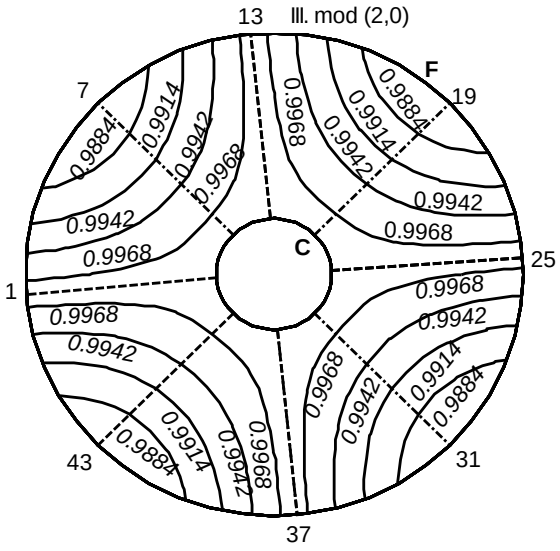
Şekil 6.3: Çatlaklı C-F Halka Plağın Birinci Çap Modunun Bağıl Değişimi ----- : Hareketsiz Noktalar , -·-·-· : Çatlak Konumları a) Hareketsiz Noktalara En Yakın Çatlak Konumları b) Hareketsiz Noktalara Uzak Çatlak Konumları

Şekil 6.4'de (2,0), Şekil 6.5'de (3,0) modunda sırasıyla hareketsiz çap doğrultularına en yakın ve uzak 4 ve 6 adet radyal çatlağın konumları görülmektedir.

Bu şekillerdeki sayısal değerler radyal çatlaklı halka plağın hareketsiz çap modlarındaki eş yükseklik eğrilerinin çatlaksız durumdaki değerlerine oranlarıdır. Bu sayıların 1'e eşit olması mod şekillerinin değişmediği anlamına gelmektedir.



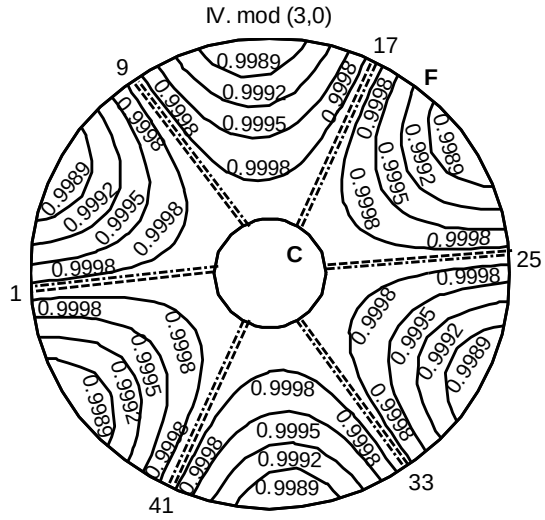
a)



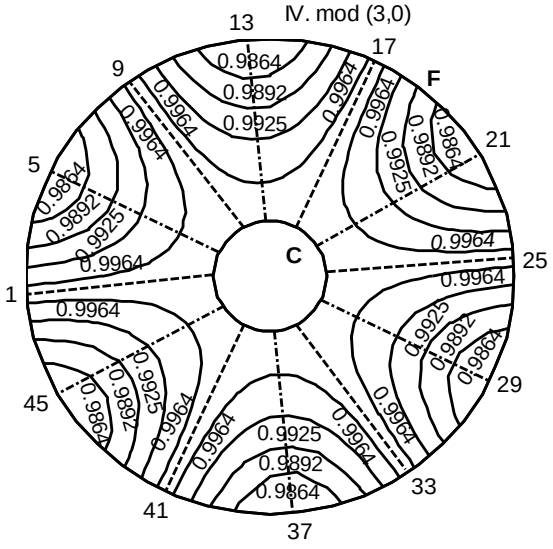
b)

Şekil 6.4: Çatlaklı C-F Halka Plağın İkinci Çap Modunun Bağıl Değişimi ----- : Hareketsiz Noktalar , -·-·-· : Çatlak Konumları a) Hareketsiz Noktalara En Yakın Çatlak Konumları b) Hareketsiz Noktalara Uzak Çatlak Konumları

Şekil 6.3a'da hareketsiz çaplara yakın konumda olan (1 ve 25 nolu sektör gruplarına) iki adet radyal çatlağın mod şekilleri üzerinde meydana getirdiği değişimin, Şekil 6.3b'de uzak konumda (hareketin en fazla olduğu 13 ve 37 nolu sektör gruplarına) bulunması durumuna göre daha az olduğu görülmektedir.



a)



b)

Şekil 6.5: Çatlaklı C-F Halka Plağın Üçüncü Çap Modunun Bağıl Değişimi ----- : Hareketsiz Noktalar , -·-·-· : Çatlak Konumları a) Hareketsiz Noktalara En Yakın Çatlak Konumları b) Hareketsiz Noktalara Uzak Çatlak Konumları

Bu durum, benzer olarak Şekil 6.4-6.5'de de görülmektedir. Bu karşılaştırmalar ile halka plağın mod şekillerindeki değişim daha fazla olduğu zaman, o moda ait doğal frekanstaki azalma da daha fazla olmaktadır.

Tablo 6.3 ve Tablo 6.4 sırasıyla iç ve dış kenardan ilerleyen radyal çatlaklı halka plakların ilk on dört doğal frekansını F-C, C-F, C-C ve S-S sınır şartları için vermektedir. Sayısal sonuçlar 4, 6 ve 12 çatlak sayıları; 40 ve 75 mm çatlak boyları ile elde edilmiştir. Tablo 6.3 ve Tablo 6.4'de verilen çatlaklı durumdaki doğal frekansların Tablo 6.1'deki çatlaksız durumdaki doğal frekanslar ile karşılaştırıldığında, çatlakların genel olarak boyları ya da sayılarındaki artışın halka plağın doğal frekansları üzerindeki azaltıcı etkisi görülmektedir. Bazı durumlarda halka plağın doğal frekansları, kendisinden daha kısa veya daha az sayıda radyal çatlak içeren halka plağın doğal frekansları ile karşılaştırıldığında, doğal frekanslarda azalma beklenirken bunun tersine yükselme meydana gelmektedir. Halka plağın çember modlarının sıfır olduğu mod şekillerinde ortaya çıkan bu karşılaştırmalar tablolarda koyu renk ile gösterilmiştir. Tablo 6.3 ve Tablo 6.4'de verilen sayısal değerler Ref. [31]'deki deneysel sonuçlarla uyumlu olmakta ve doğal frekanslardaki bu artış eğilimi deneysel sonuçlarda da görülmektedir.

Tablo 6.3-6.4'de verilmiş olan halka plağın doğal frekansları Ek A'da verilen mod şekillerinin incelenmesi ile belirlenmiştir.

Sayısal uygulamalarda, Bölüm 4 ve 5'de formülasyonları verilen çatlaklı sektör elemanda çatlak boyu, sektör elemanın boyunca alınmış (g_k = 1) ve halka plakta çatlak boyu, birbirini takip eden sektör elemanların boyutlarının sınırları ile modellenmiştir.

Tablo 6.3: Farklı Sınır Şartları İçin İç Kenardan Başlayan Radyal Çatlaklı Halka Plağın Doğal Frekansları (*Hz*)

Mod	Çatlak	F-C Çatlak Boyları		C-F Çatlak Boyları		C-C Çatlak Boyları		S-S Çatlak Boyları	
(i,j)	Sayısı	40 mm	75 mm	40 mm	75 mm	40 mm	75 mm	40 mm	75 mm
(0,0)	4	481.72	480.21	233.22 (241)*	229.35 (225)*	1720.31	1718.52	830.43	828.58
	6	478.86	477.42	231.25 (234)*	220.11 (203)*	1717.92	1715.13	828.66	827.33
	12	476.49	475.48	206.19 (220)*	204.34 (190)*	1716.23	1714.54	827.49	825.95
(1,0)	4	882.45	881.18	203.35 (198)*	202.33 (195)*	1748.43	1746.95	928.61	927.46
	6	881.61	879.64	204.72 (205)*	201.16 (188)*	1746.13	1745.11	926.52	924.55
	12	879.75	876.43	202.91 (200)*	200.65 (180)*	1744.44	1742.82	924.32	921.34
(2,0)	4	1452.27	1450.88	312.17 (294)*	309.49 (292)*	2031.52	2030.35	1262.18	1259.83
	6	1451.94	1452.36	310.76 (293)*	311.27 (300)*	2032.41	2031.42	1260.47	1260.19
	12	1449.79	1449.44	311.12 (299)*	309.54 (281)*	2030.21	2030.67	1258.32	1258.03
(3,0)	4	2552.51	2551.11	579.87 (583)*	572.23 (567)*	2512.44	2511.02	1704.75	1702.46
	6	2550.12	2552.38	577.96 (582)*	574.02 (580)*	2510.15	2509.07	1706.55	1703.24
	12	2549.64	2549.13	575.84 (578)*	567.32 (525)*	2508.54	2510.21	1702.11	1697.18
(4,0)	4	7563.89	7558.95	1743.96	1737.18	4758.31	4758.72	4552.22	4550.55
	6	7567.29	7560.12	1740.29	1739.72	4756.29	4759.13	4553.38	4551.68
	12	7561.15	7555.62	1738.82	1734.66	4552.39	4752.13	4550.32	4547.94
(5,0)	4	3403.13	3401.73	2259.54	2252.08	6642.71	6638.08	5215.35	5211.27
	6	3405.57	3403.22	2256.24	2254.12	6640.46	6639.62	5212.43	5209.34
	12	3401.71	3399.11	2254.23	2249.99	6639.72	6635.36	5210.55	5208.26
(6,0)	4	6762.28	6758.04	2655.17	2649.93	9312.77	9308.46	5398.57	5395.23
	6	6758.21	6759.83	2652.46	2651.02	9309.42	9309.04	5400.46	5396.32
	12	6754.52	6753.12	2649.75	2644.66	9307.33	9304.93	5395.14	5391.93
(0,1)	4	2092.35	2090.12	1609.33 (1549)*	1606.41 (1525)*	5619.26	5616.75	3143.37	3141.25
	6	2090.22	2087.59	1606.24 (1544)*	1603.34 (1506)*	5615.49	5612.53	3140.31	3136.18
	12	2085.22	2082.66	1601.55 (1529)*	1598.25 (1456)*	5610.21	5606.96	3133.84	3126.64
(0,2)	4	4120.24	4117.12	7618.28	7613.52	12343.2	12338.46	7012.72	7005.58
	6	4117.69	4115.08	7613.41	7610.82	12328.1	12331.01	7003.51	7000.67
	12	4112.73	4109.16	7607.44	7605.31	12315.8	12319.78	6996.23	6992.52
(1,1)	4	2193.74	2190.82	1804.19	1802.43	5743.51	5741.73	3349.85	3346.66
	6	2188.13	2186.26	1802.32	1799.29	5740.81	5738.89	3345.56	3342.26
	12	2185.22	2183.65	1799.36	1797.53	5736.11	5733.42	3343.35	3338.34
(2,1)	4	2667.84	2663.25	2057.91	2052.23	7121.22	7119.63	3758.13	3752.99
	6	2664.73	2661.15	2054.04	2048.02	7119.54	7116.08	3755.54	3748.25
	12	2662.12	2658.14	2045.38	2042.02	7111.13	7111.07	3750.62	3742.73
(3,1)	4	4300.26	4298.26	2542.33	2538.23	7568.23	7563.38	4459.34	4456.19
	6	4296.55	4293.42	2538.47	2435.16	7562.24	7560.85	4456.73	4452.45
	12	4292.22	4290.35	2504.76	2494.79	7558.19	7556.55	4452.31	4449.32
(4,1)	4	3361.11	3360.88	3463.22	3461.41	8452.77	8449.93	7917.15	7912.81
	6	3358.29	3356.12	3460.44	3458.26	8445.53	8443.47	7913.62	7910.34
	12	3356.22	3353.35	3458.24	3455.62	8441.48	8437.81	7910.32	7907.12
(1,2)	4	5235.66	5231.48	4200.39	4198.93	7310.82	7308.62	9352.36	9349.66
	6	5230.35	5227.12	4197.22	4194.33	7306.41	7303.49	9349.24	9347.25
	12	5227.31	5225.36	4193.63	4191.47	7301.17	7300.89	9345.39	9346.14

***** Ref. [31]'in deneysel sonuçları

Tablo 6.4: Farklı Sınır Şartları İçin Dış Kenardan Başlayan Radyal Çatlaklı Halka Plağın Doğal Frekansları (*Hz*)

Mod	Çatlak	F-C Çatlak Boyları		C-F Çatlak Boyları		C-C Çatlak Boyları		S-S Çatlak Boyları	
(i,j)	Sayısı	40 mm	75 mm	40 mm	75 mm	40 mm	75 mm	40 mm	75 mm
(0,0)	4	482.18	480.95	230.22	228.11	1726.36	1724.21	833.73	831.21
	6	480.13	479.38	228.19 (249)*	226.71 (233)*	1723.47	1720.89	831.52	829.39
	12	477.96	476.66	227.13	225.54	1721.22	1718.91	830.13	828.11
(1,0)	4	883.91	881.26	204.85	203.17	1754.44	1752.58	927.11	925.37
	6	882.14	879.25	200.77 (180)*	201.83 (201)*	1752.32	1750.64	925.81	923.23
	12	879.64	877.42	201.33	200.06	1749.88	1747.97	924.41	921.99
(2,0)	4	1454.61	1452.23	313.77	312.28	2032.52	2029.16	1261.14	1258.71
	6	1452.43	1453.22	311.76	313.32	2031.31	2030.51	1258.73	1254.55
	12	1453.33	1448.48	310.58	310.16	2028.91	2027.42	1256.76	1255.27
(3,0)	4	2558.35	2555.52	561.56	555.74	2515.62	2511.61	1715.02	1712.62
	6	2556.95	2553.92	555.88 (491)*	556.14 (516)*	2513.78	2512.67	1713.08	1713.04
	12	2555.63	2550.14	551.89	550.33	2510.82	2508.75	1711.65	1709.88
(4,0)	4	7569.22	7566.72	1742.32	1738.97	4762.54	4758.57	4553.44	4550.41
	6	7567.14	7567.92	1740.23	1739.77	4759.74	4756.71	4554.06	4551.27
	12	7565.43	7563.24	1736.97	1735.12	4758.19	4753.43	4550.64	4548.72
(5,0)	4	3405.74	3403.42	2266.85	2259.84	6650.22	6645.45	5218.88	5215.62
	6	3407.29	3401.73	2263.16	2261.08	6647.43	6646.64	5214.93	5212.35
	12	3403.55	3400.02	2260.15	2255.06	6645.27	6642.87	5211.72	5209.81
(6,0)	4	6775.96	6773.95	2663.63	2657.12	9319.55	9314.45	5405.16	5399.53
	6	6777.44	6775.24	2660.65	2659.13	9316.77	9315.72	5407.38	5401.59
	12	6772.03	6771.17	2657.29	2653.38	9314.84	9311.69	5401.91	5395.51
(0,1)	4	2092.77	2090.01	1723.32	1722.03	5626.66	5623.44	3143.45	3141.24
	6	2090.22	2088.42	1720.34	1717.24	5623.16	5619.65	3140.35	3139.79
	12	2087.43	2083.94	1718.38	1714.63	5621.24	5617.52	3137.76	3136.14
(0,2)	4	4123.42	4121.75	7620.23	7618.59	12331.61	12327.12	7011.57	7009.29
	6	4118.19	4116.34	7617.53	7615.92	12323.94	12320.37	7008.92	7007.64
	12	4112.21	4111.02	7615.02	7614.07	12312.23	12308.16	7007.14	7004.13
(1,1)	4	2183.47	2180.44	1807.56	1803.66	5743.57	5740.08	3345.16	3342.62
	6	2180.83	2177.51	1805.22	1800.72	5740.44	5735.14	3341.44	3340.91
	12	2178.13	2175.42	1804.05	1798.91	5738.21	5733.67	3340.24	3339.21
(2,1)	4	2661.14	2658.37	2054.92	2049.33	7130.55	7127.51	3744.55	3735.66
	6	2659.33	2655.84	2051.32	2047.13	7126.25	7124.91	3741.77	3731.83
	12	2655.37	2654.13	2050.21	2044.11	7124.71	7122.41	3739.84	3728.04
(3,1)	4	4292.83	4290.23	2509.14	2502.81	7563.31	7560.52	4465.79	4462.87
	6	4290.10	4288.64	2507.46	2501.07	7561.66	7558.91	4463.11	4459.89
	12	4287.11	4284.88	2506.42	2498.78	7558.24	7555.45	4459.99	4457.18
(4,1)	4	3363.36	3358.12	3470.61	3466.31	8455.56	8452.62	7923.32	7921.91
	6	3356.21	3355.47	3468.32	3463.51	8451.81	8449.22	7921.46	7916.81
	12	3352.18	3350.98	3464.81	3459.84	8449.57	8446.26	7915.52	7913.74
(1,2)	4	5242.17	5240.62	4201.53	4200.02	7311.13	7310.75	9356.61	9353.71
	6	5237.44	5235.13	4198.39	4196.92	7310.24	7307.91	9349.24	9348.25
	12	5235.34	5232.37	4196.49	4193.17	7307.02	7305.72	9347.24	9348.88

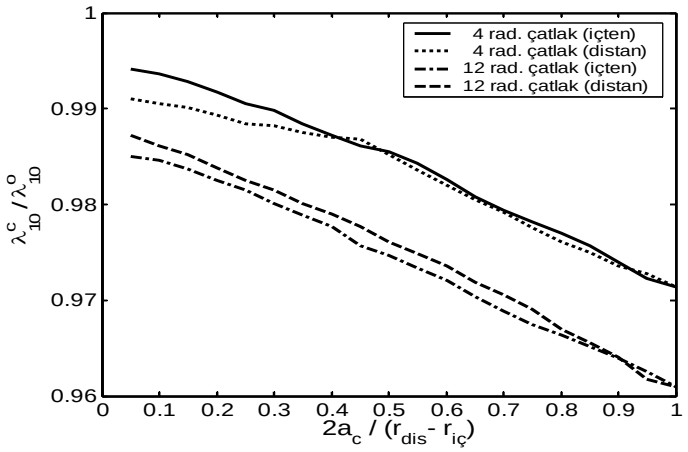
* Ref. [31]'in deneysel sonuçları

Elde edilen sayısal değerlerin Ref [33]'in deneysel sonuçları ile karşılaştırılmasından sonra, Şekil 6.6-6.13'de iç kenarı serbest dış kenarı ankastre (F-C) radyal çatlaklı halka plağın ($r_{iç}$ = 20 mm, $r_{dış}$ =100 mm ($r_{iç}$ / $r_{dış}$ = 0.2), h = 1 mm, ρ = 7800 kg/m^3, E = 1.93 10^{11} N/m^2, υ = 0.3) serbest titreşim modlarını ve bu modlara ait doğal frekansları çatlaksız durumdaki değerleri ile karşılaştırmalı olarak grafikler halinde verilmiştir.

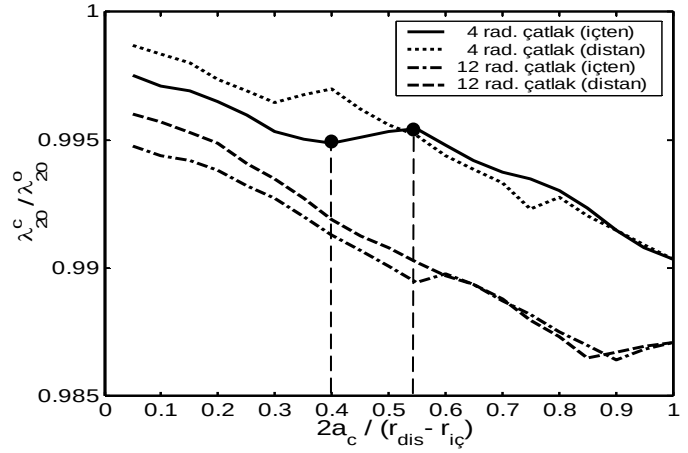
Şekil 6.6-6.11'de iç kenarı serbest dış kenarı ankastre (F-C) halka plağın çeşitli mod şekilleri için çatlaklı durumdaki doğal frekansının çatlaksız durumdaki doğal frekansına oranı, boyutsuz çatlak boyunun değişimine göre gösterilmiştir. Bu şekillerde iç veya dış kenardan başlayan 4 ve 12 radyal çatlak sayıları göz önüne alınmıştır.

Genelde çatlak boyu veya sayısı arttıkça doğal frekanslarda azalmalar görülmekte, bazı çatlak boylarında çatlağın plağın iç veya dış kenarından başlaması durumunda doğal frekans değerleri aynı olmaktadır. Bu grafiklerde dikkat çekici bir nokta da, radyal çatlak boyunun uzaması ile halka plağın hareketsiz çap modlarına ait doğal frekanslarda azalma beklenirken yükselmeler meydana gelmesidir. Halka plağın (0,1) , (0,2) ve (0,3) gibi hareketsiz çember modlarına ait doğal frekans değişimlerini gösteren Şekil 6.9-6.11 incelendiğinde çatlak boyu artığı zaman halka plağın doğal frekans değerleri sürekli olarak azalmaktadır.

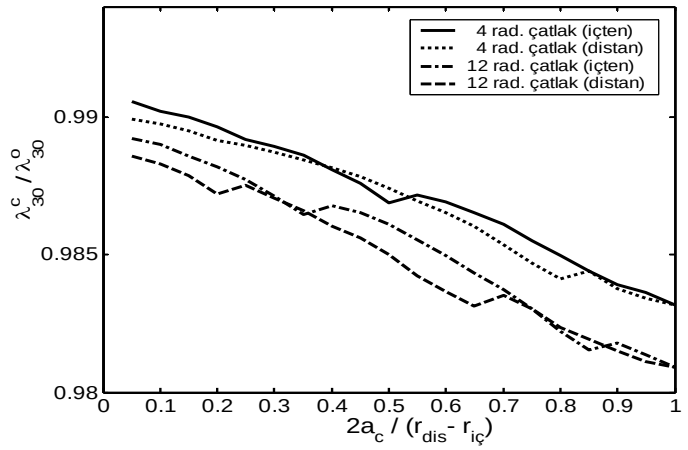
Şekil 6.7'de iç kenarı serbest, dış kenarı ankastre ve 4 radyal çatlaklı halka plağın (2,0) mod şekline ait doğal frekanslarının, boyutsuz çatlak boyunun ($2a_c/(r_{dış}-r_{iç})$) 0.40 ile 0.55 değerleri arasında arttığı görülmektedir. Doğal frekanslardaki bu artışın mod şekilleri üzerindeki etkisi Şekil 6.12 ve 6.13'de halka plağın eş yükseklik eğrilerinin çatlaksız durumdaki değerlerine oranları kullanılarak gösterilmiştir.



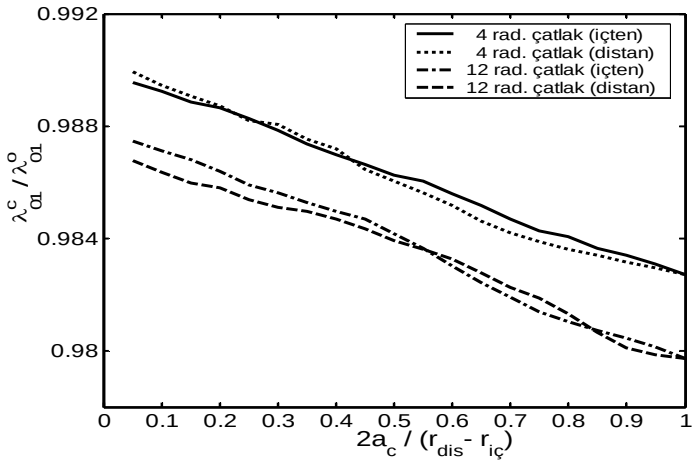
Şekil 6.6: F-C Halka Plağın (1,0) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$



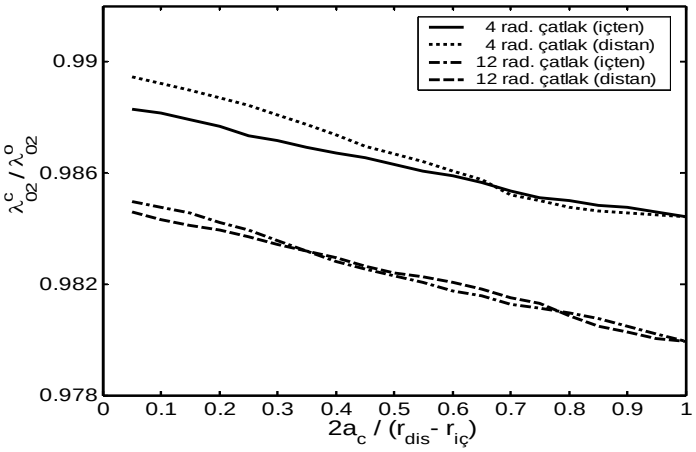
Şekil 6.7: F-C Halka Plağın (2,0) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$



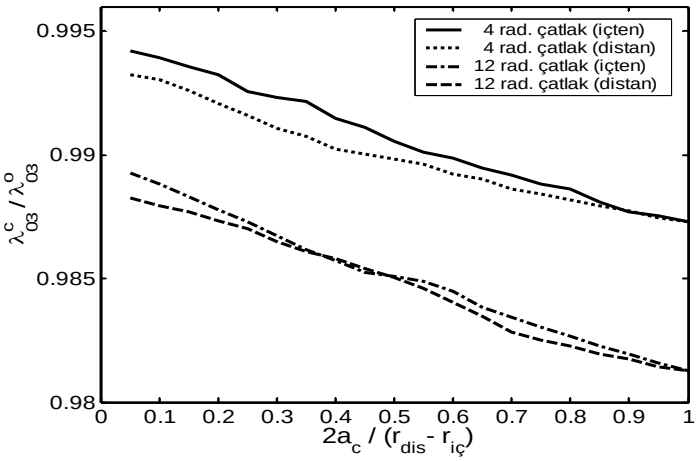
Şekil 6.8: F-C Halka Plağın (3,0) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$



Şekil 6.9: F-C Halka Plağın (0,1) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$

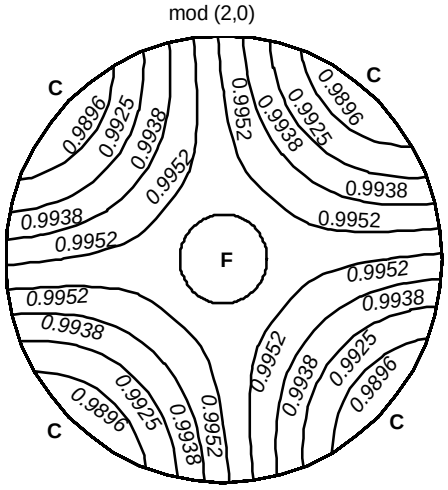


Şekil 6.10: F-C Halka Plağın (0,2) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$

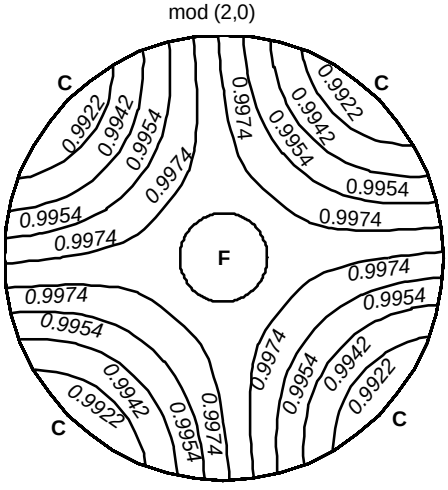


Şekil 6.11: F-C Halka Plağın (0,3) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$

Şekil 6.12 ve 6.13 birlikte incelendiğinde, Şekil 6.13'de $2a_c/(r_{dış}-r_{iç})$ = 0.55 çatlak boyu için elde edilen eş yükseklik eğri değerlerinin bağıl değişiminin $2a_c/(r_{dış}-r_{iç})$ = 0.40 çatlak boyu için elde edilen değişim oranlarına göre 1'e daha yakın olduğu görülmektedir. Bu durumda, daha az değişimin meydana geldiği boyutsuz çatlak boyu 0.55 olan plağın doğal frekansındaki azalma, boyutsuz çatlak boyu 0.40 olan plağa göre daha az olmaktadır. Hareketsiz çap modlarına ait doğal frekans oranlarını veren Şekil 6.7-6.8 'de farklı çatlak sayıları ve boylarında da benzer artışlar gözlenmektedir.



Şekil 6.12: İç Kenardan Başlayan 4 Radyal Çatlaklı F-C Halka Plağın (2,0) Mod Şeklinin Bağıl Değişimi, $2a_c/(r_{dış}-r_{iç})=0.40$

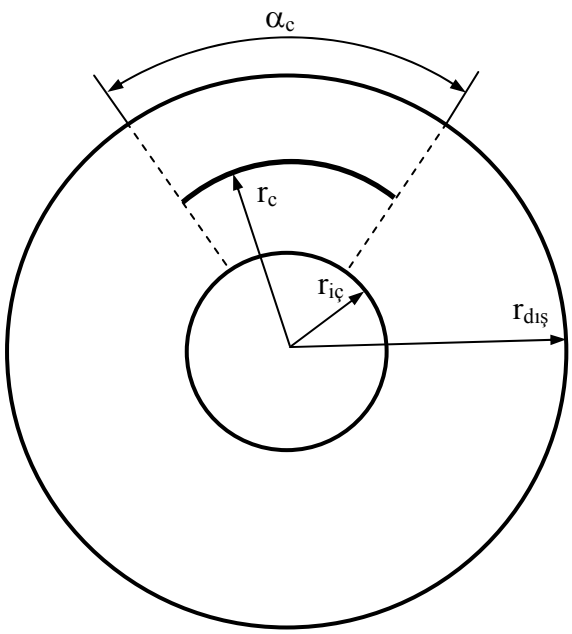


Şekil 6.13: İç Kenardan Başlayan 4 Radyal Çatlaklı F-C Halka Plağın (2,0) Mod Şeklinin Bağıl Değişimi, $2a_c/(r_{dış}-r_{iç})=0.55$

Çeşitli radyal çatlakların, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$ ve $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$ yarıçaplar oranına sahip halka plakların doğal frekansları üzerindeki etkileri grafikler halinde Ek B'de verilmiştir. Bu grafiklerde de bazı çatlak boylarında, hareketsiz çap modlarına ait doğal frekanslar çatlak boyunun artması ile artmakta, buna karşılık hareketsiz çember modlarında doğal frekans değerleri sürekli olarak azalmaktadır.

6.2 Çembersel Çatlaklı Halka Plak

Şekil 6.14'de görülen çembersel çatlaklı bir halka plakta r_c çatlak yarıçapını, α_c çembersel çatlağın taradığı açıyı göstermektedir.



Şekil 6.14: Çembersel Çatlaklı Bir Halka Plak

Tablo 6.5'de her iki kenarı basit mesnetli (S-S) ve Tablo 6.6'de her iki kenarı ankastre (C-C) çembersel çatlaklı halka plağın ($r_{iç}$ = 10 mm, $r_{dış}$ =50 mm, $r_{iç}/r_{dış} = 0.2$, h = 0.3 mm, ρ = 2720 kg/m^3, E = 6.910^9 N/m^2, υ = 0.33) çeşitli çatlak yarıçapları ve açıları için boyutsuz temel frekans parametreleri (λ_{00}) Ref. [33] ile karşılaştırmalı olarak verilmiş ve uyumlu sonuçlar elde edilmiştir. Bu boyutlardaki (S-S) çatlaksız halka plağın boyutsuz temel frekans parametresi ise 17.193, (C-C) çatlaksız halka plağın boyutsuz temel frekans parametresi ise 40.591'dir. Bu tablolarda bütün temel frekans değerleri çembersel çatlağın etkisi ile azalmaktadır. Bu çalışma ve Ref. [33]'ün Rayleigh metodu ile elde ettiği sayısal değerlerde, ele

alınan sınır şartları için temel frekansın en az olduğu konum, çembersel çatlağın $r_c / r_{dış}$ = 0.55 değerinde elde edilmektedir. Bunun nedeni, bu konumun (0,0) mod şeklinde plağın en hareketli bölgesine diğer konumlarına göre daha yakın ve dolayısıyla da çatlağın bu bölgede doğal frekans üzerindeki azaltıcı etkisinin daha fazla olmasıdır.

Tablo 6.5: Her İki Kenarı Basit Mesnetlenmiş (S-S) Halka Plağın Boyutsuz Temel Frekansı (λ_{00}), $r_{iç}/r_{dış} = 0.2$

$r_c / r_{dış}$	α_c					
	30°	60°	90°	120°	150°	180°
0.25	16.721	16.729	16.739	16.744	16.746	16.749
	16.782*	16.818*	16.862*	16.917*	16.986*	17.076*
0.40	16.612	16.506	16.391	16.174	15.992	15.744
	16.626*	16.483*	16.320*	16.132*	15.912*	15.651*
0.55	16.402	16.053	15.665	15.157	14.628	14.103
	16.397*	16.012*	15.591*	15.129*	14.619*	14.052*
0.75	16.451	16.137	15.742	15.331	14.808	14.245
	16.444*	16.102*	15.719*	15.286*	14.793*	14.224*
0.90	16.664	16.622	16.514	16.402	16.258	16.074
	16.683*	16.603*	16.508*	16.391*	16.246*	16.061*

* Ref. [33]

Tablo 6.6: Her İki Kenarı Ankastre (C-C) Halka Plağın Boyutsuz Temel Frekansının Çatlak Konumu ve Açısı İle Değişimi, $r_{iç}/r_{dış} = 0.2$

$r_c / r_{dış}$	α_c					
	30°	60°	90°	120°	150°	180°
0.25	35.032	35.326	35.683	36.097	36.664	37.391
	35.015*	35.305*	35.655*	36.088*	36.637*	37.355*
0.55	34.272	33.784	33.164	32.498	31.774	30.985
	34.267*	33.720*	33.123*	32.471*	31.753*	30.959*
0.90	35.288	35.894	36.593	37.445	38.509	39.883
	35.274*	35.865*	36.571*	37.428*	38.493*	39.852*

* Ref. [33]

Tablo 6.8 ve 6.9'da elde edilen sayısal sonuçlar, [31] nolu referanstaki halka plağın ($r_{iç}$ = 30 mm, $r_{dış}$ =130 mm, $r_{iç} / r_{dış}$ = 0.23, h = 3.18 mm, ρ = 2720 kg/m^3, E = 6.910^9 N/m^2, υ = 0.33 (Alüminyum)) boyutları ile aynı seçilerek, çembersel çatlaklı halka plakların F-C, C-F, S-S ve C-C sınır şartları için ve çatlak açısı α_c = 360°

alınarak elde edilmiştir. Tablo 6.7'de ise, bu hesaplamalarda kullanılan çembersel çatlakların sayıları ve konumları gösterilmiştir.

Tablo 6.7: Halka Plakta Çembersel Çatlakların Konumları, $r_{iç} / r_{dış} = 0.23$

Çatlak Sayısı	Çatlakların Konumları $r_c / r_{dış}$
1	0.6346
2	0.5192 , 0.7500
3	0.4423 , 0.6346 , 0.8269
4	0.4038 , 0.5577 , 0.7115 , 0.8654
5	0.3654 , 0.4808 , 0.5961 , 0.7115 , 0.8269

Tablo 6.8 iç kenarı ankastre dış kenarı serbest (C-F) halka plağın hareketsiz çapların sıfır olduğu mod şekillerini ve bu mod şekillerine ait doğal frekansları, çatlakların konumlarına ($r_c/r_{dış}$) ve seçilen çatlak sayılarına göre göstermektedir. Bu tabloda çembersel çatlakların hareketsiz çemberlere en yakın olduğu konumlar ($^{\#}$) işareti ile gösterilmiştir. Çatlağın ele alınan sektör elemanın ortasında olması nedeniyle, çatlakların konumları hareketsiz çember konumlarının tam üzerine getirilememiştir.

Tablo 6.8: Çembersel Çatlaklı (α_c = 360°) İç Kenarı Ankastre Dış Kenarı Serbest (C-F) Halka Plağın Titreşim Modları (i,j) ve Doğal Frekansları ω_{ij} (Hz)

Sınır Şartı	Çatlak Sayısı	Çatlakların Konumları $(r_c / r_{dış})$	ω_{ij} ve (i,j)
C-F		Çatlaksız	1725.25 (0,1)
	1	$0.8269^{\#}$	1724.32 (0,1)
	1	0.6346	1712.91 (0,1)
		Çatlaksız	7628.74 (0,2)
	2	$0.5961^{\#}$, $0.8653^{\#}$	7627.71 (0,2)
	1	0.5192	7623.12 (0,2)
	1	0.7500	7621.55 (0,2)
	2	0.5192 , 0.7500	7615.58 (0,2)
		Çatlaksız	11274.96 (0,3)
	3	$0.4423^{\#}$, $0.6731^{\#}$, $0.9038^{\#}$	11272.59 (0,3)
	1	0.4391	11270.89 (0,3)
	1	0.6346	11265.22 (0,3)
	1	0.8269	11257.66 (0,3)
	3	0.4391 , 0.6346 , 0.8269	11246.81 (0,3)

$^{\#}$ İlgili moda ait hareketsiz çemberlere en yakın konumlar

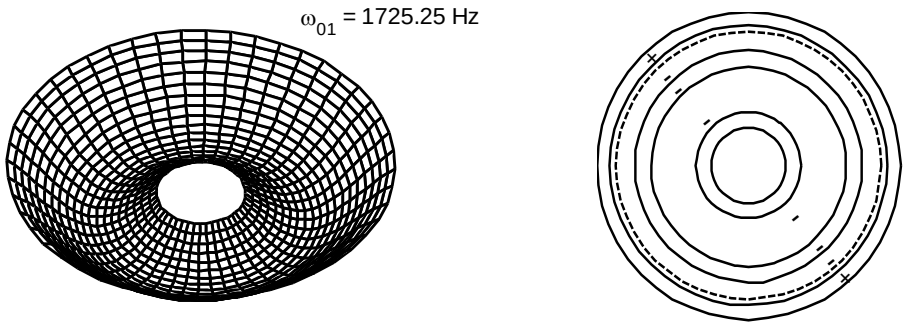
Tablo 6.8'den görüldüğü gibi halka plağın (0,1) hareketsiz çember modunda 1 adet çembersel çatlak, plağın hareketsiz çemberine yakın konuma ($r_c/r_{dış}$= 0.8269) yerleştirilirse, doğal frekans değişimi en az durumdadır. Bu çembersel çatlak plak üzerindeki hareketin daha fazla olduğu ($r_c/r_{dış}$=0.6346) konumda olursa doğal

frekanstaki düşme daha fazla olmaktadır. Bu durum halka plağın (0,2) ve (0,3) çember modlarında da benzer şekilde görülmektedir.

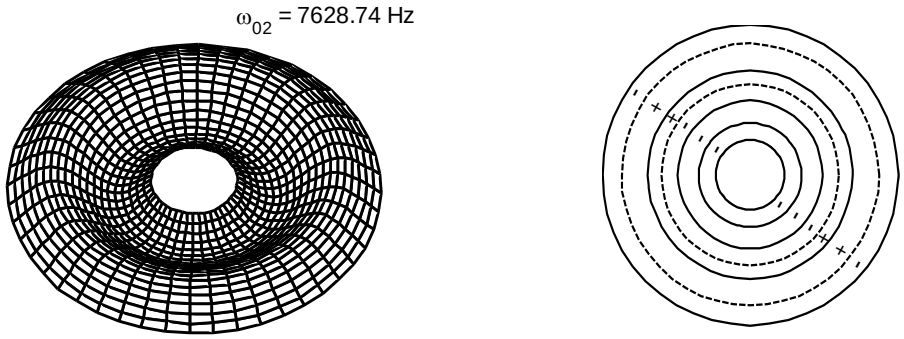
Tablo 6.8'de (0,2) titreşim modunda 1 adet çembersel çatlağın $r_c/r_{dış}$=0.5192 ve $r_c/r_{dış}$=0.75 konumlarında ayrı ayrı bulunması durumunda bu moda ait doğal frekanstaki azalmanın, hareketsiz çemberlere en yakın $r_c/r_{dış}$=0.5961 ve 0.8653 konumlarında 2 adet çembersel çatlak bulunması haline göre daha fazla olduğu görülmektedir. Bu durumda, 1 adet çatlağın etkisi, 2 adet çatlağın etkisinden daha fazla olmuştur. Bu etki, göz önüne alınan titreşim moduna ve çatlakların konumlarına göre değişiklik gösterebilmektedir. Benzer şekilde, Tablo 6.8'de (0,3) hareketsiz çember moduna ait sonuçların karşılaştırılması ile, plağın daha hareketli konumlarında bulunan 1 adet çatlağın etkisinin, hareketsiz bölgelere yakın 3 adet çatlağın etkisinden daha fazla olduğu gözlenebilir.

Şekil 6.15'de Tablo 6.8'de verilen sayısal sonuçlar ile ilgili olarak çatlaksız halka plağın mod şekilleri ve bu mod şekillerine ait doğal frekansları gösterilmektedir.

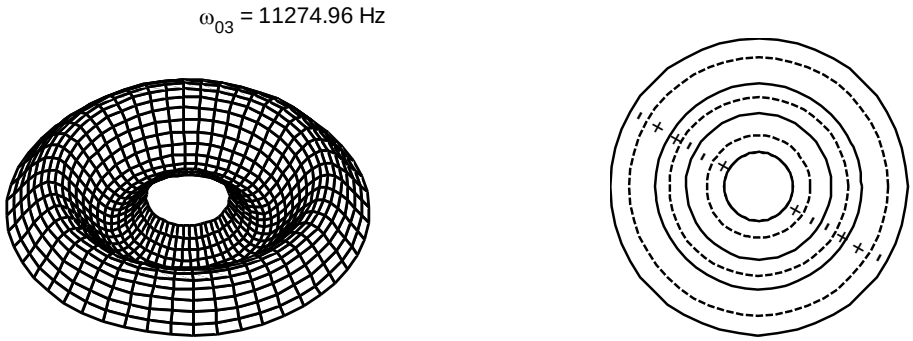
Şekil 6.16-6.18'de Tablo 6.8'de verilen sayısal sonuçlar ile ilgili olarak çembersel çatlaklı halka plağın hareketsiz çember modlarındaki eş yükseklik eğrilerinin çatlaksız durumdaki değerlerine oranları gösterilmiştir. Bu sayıların 1'e eşit olması mod şekillerinin değişmediği anlamına gelmektedir. Bu şekillerden, çembersel çatlakların konumlarının halka plağın titreşim moduna ait hareketsiz çemberlerine yakın olması durumunda, plağın çember mod şekillerinin ve bu moda ait doğal frekansların daha az değiştiği görülmektedir.



a)

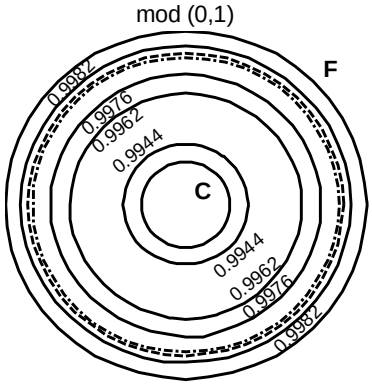


b)

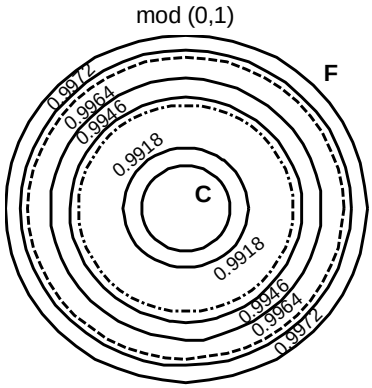


c)

Şekil 6.15: Çatlaksız C-F Halka Plağın İlk Üç Çember Modu (----- : Hareketsiz Çember Konumları) a) Mod (0,1) b) Mod (0,2) c) Mod (0,3)

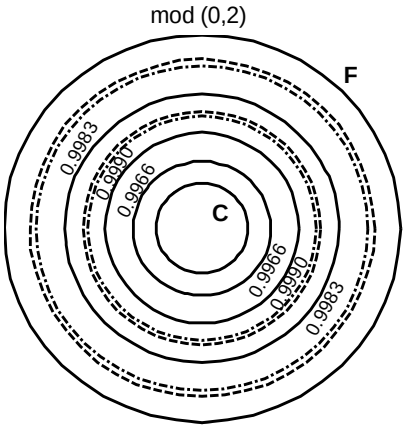


a)

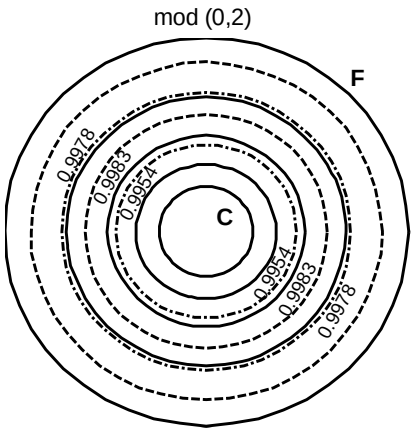


b)

Şekil 6.16: Çembersel Çatlaklı C-F Halka Plağın Birinci Çember Modunun Bağıl Değişimi ----- : Hareketsiz Noktalar , -·-·-· : Çatlak Konumları a) Hareketsiz Noktalara En Yakın ($r_c/r_{dış}$=0.8269[#]) Çatlak Konumları b) Hareketsiz Noktalara Uzak ($r_c/r_{dış}$=0.6346) Çatlak Konumları

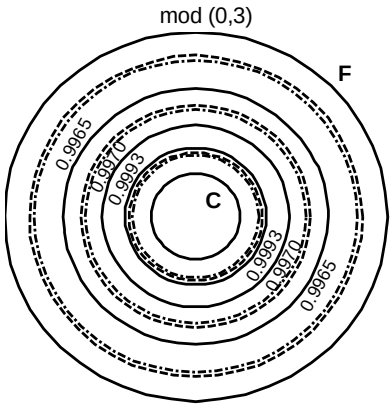


a)

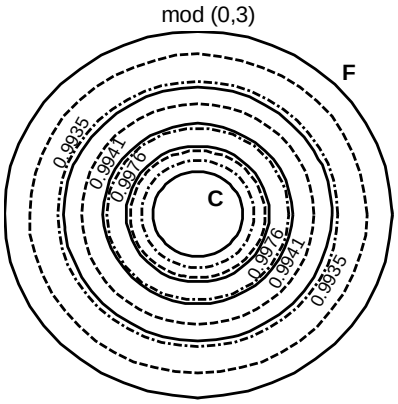


b)

Şekil 6.17: Çembersel Çatlaklı C-F Halka Plağın İkinci Çember Modunun Bağıl Değişimi ----- : Hareketsiz Noktalar , -·-·-· : Çatlak Konumları a) Hareketsiz Noktalara En Yakın ($r_c/r_{dış}$ = 0.5961$^{\#}$, 0.8653$^{\#}$) Çatlak Konumları b) Hareketsiz Noktalara Uzak ($r_c/r_{dış}$=0.5192, 0.7500) Çatlak Konumları



a)



b)

Şekil 6.18: Çembersel Çatlaklı C-F Halka Plağın Üçüncü Çember Modunun Bağıl Değişimi ----- : Hareketsiz Noktalar , -·-·-· : Çatlak Konumları a) Hareketsiz Noktalara En Yakın ($r_c/r_{dış}$=0.4423$^{\#}$, 0.6731$^{\#}$, 0.9038$^{\#}$) Çatlak Konumları b) Hareketsiz Noktalara Uzak ($r_c/r_{dış}$=0.4423, 0.6346, 0.8269) Çatlak Konumları

Tablo 6.9'da Tablo 6.7'de verilen çembersel çatlak (α_c = 360°) konumları için halka plağın çeşitli mod şekillerine ait doğal frekansları farklı sınır şartlarında elde edilmiştir. Bu tablodan, halka plak üzerindeki çembersel çatlak sayılarındaki artışların, genel olarak plağın doğal frekansları üzerinde azaltıcı etki yaptığı görülmekte fakat, bazı durumlarda çembersel çatlak sayısının artması ile halka plağın hareketsiz çember modlarına ait doğal frekanslarda azalma beklenirken yükselmeler meydana gelmektedir. Karşılaştırılan bu değerler tabloda koyu renk olarak gösterilmiştir. Bu durum, halka plağın hareketsiz çaplarının sıfır olduğu mod şekillerinde ortaya çıkmakta, buna karşılık (1,0), (2,0), (3,0) ve (4,0) gibi hareketsiz çap modlarına ait doğal frekanslar artan çatlak sayıları ile sürekli olarak azalmaktadır.

Tablo 6.9: Farklı Sınır Şartları ve Çatlak Sayıları İçin Çembersel Çatlaklı (α_c = 360°) Halka Plağın Serbest Titreşim Modları (i,j) ve Doğal Frekansları ω_{ij} (Hz)

Modlar (i,j)	Çatlak Sayıları	F-C	C-F	C-C	S-S
(0,0)	1	481.36	239.73	1717.53	829.68
	2	479.41	237.18	1714.13	828.22
	3	478.35	235.34	1712.04	826.34
(1,0)	1	884.72	214.24	1751.54	931.22
	2	883.03	212.35	1749.41	929.62
	3	881.66	210.64	1446.68	928.55
(2,0)	1	1448.14	314.32	2033.44	1271.78
	2	1445.91	312.58	2031.92	1269.84
	3	1443.93	311.52	2030.15	1268.18
(3,0)	1	2548.76	579.48	2514.34	1710.83
	2	2546.11	577.17	2512.12	1708.14
	3	2543.83	575.98	2509.99	1706.83
(4,0)	1	7566.52	1741.48	4754.83	4550.52
	2	7563.19	1739.87	4752.62	4548.83
	3	7559.77	1737.81	4750.55	4545.42
(0,1)	1	2097.74	1714.95	5620.97	3151.87
	2	2095.56	1712.62	5622.26	3148.58
	3	2092.57	1709.13	5617.37	3144.35
	4	2093.28	1710.61	5614.94	3145.16
	5	2091.63	1706.56	5612.21	3141.22
(0,2)	1	4115.84	7612.37	12232.44	7005.82
	2	4113.29	7610.38	12234.56	7003.17
	3	4110.22	7607.31	12228.65	6999.97
	4	4111.75	7608.69	12229.73	7001.22
	5	4114.63	7605.73	12225.93	6996.63
(0,3)	1	13215.67	11248.03	19240.63	13232.23
	2	13212.34	11249.54	19236.48	13227.88
	3	13213.89	11245.83	19233.13	13222.25
	4	13209.72	11242.78	19234.52	13224.54
	5	13207.45	11240.23	19230.33	13218.35
(1,1)	1	2205.87	1803.27	5755.82	3353.96
	2	2203.33	1800.29	5753.25	3351.96
	3	2199.77	1798.26	5749.72	3350.04
(2,1)	1	2663.44	2054.41	7131.16	3366.61
	2	2661.55	2051.36	7128.34	3365.08
	3	2658.28	2049.62	7126.45	3362.25
(3,1)	1	4229.11	2508.89	7580.71	4456.22
	2	4226.39	2506.73	7575.18	4452.16
	3	4224.49	2505.16	7573.13	4450.36
(4,1)	1	3373.81	3464.63	8455.74	7915.76
	2	3370.13	3461.53	8452.34	7911.53
	3	3368.95	3459.44	8450.74	7908.95
(1,2)	1	5235.63	4207.89	7318.31	9358.02
	2	5232.64	4205.22	7315.62	9355.47
	3	5230.52	4204.33	7313.64	9353.83

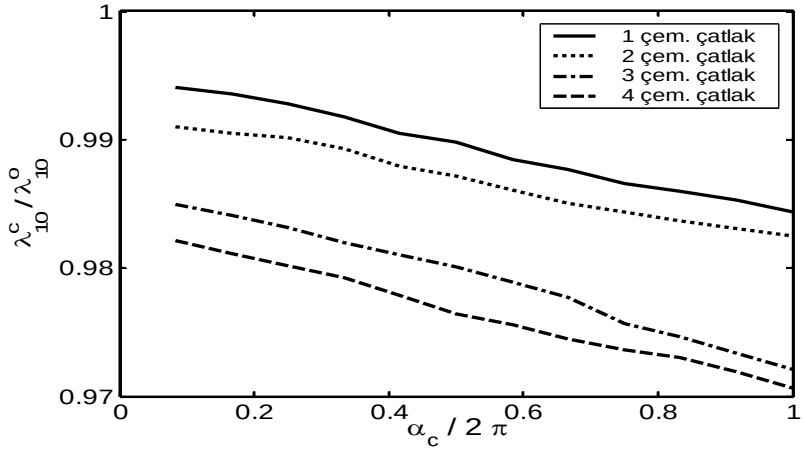
Şekil 6.19-6.26'da çatlak açısının etkisi, iç kenarı serbest dış kenarı ankastre (F-C) çembersel çatlaklı halka plağın ($r_{iç}$ = 20 mm, $r_{dış}$ =100 mm ($r_{iç} / r_{dış}$ = 0.2), h = 1 mm, ρ = 7800 kg/m^3, E = 1.93 10^{11} N/m^2, υ = 0.3) doğal frekansları ve mod şekilleri çatlaksız durumdaki değerleri ile karşılaştırılarak incelenmiştir. Tablo 6.10'da bu hesaplamalarda kullanılan çembersel çatlakların sayılarını konumları ile birlikte verilmektedir.

Tablo 6.10: Halka Plakta Çembersel Çatlakların Konumları, $r_{iç} / r_{dış}$ = 0.2

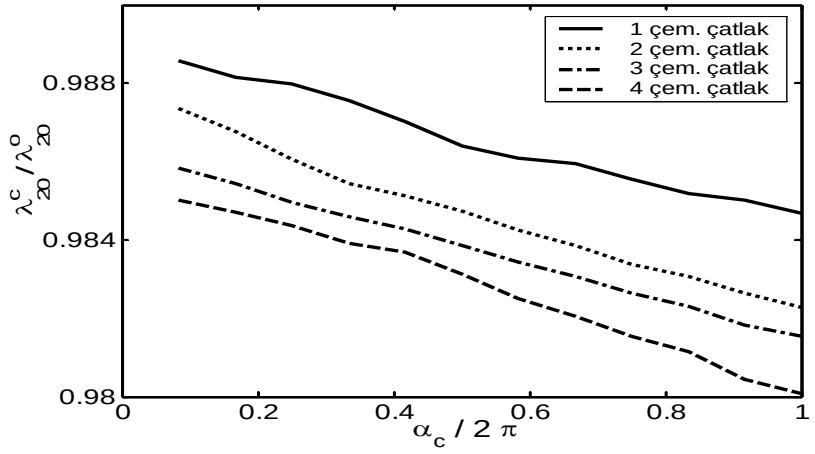
Çatlak Sayısı	Çatlakların Konumları $r_c / r_{dış}$
1	0.62
2	0.46 , 0.74
3	0.42 , 0.62 , 0.82
4	0.42 , 0.62 , 0.82 , 0.86

Şekil 6.24'de aynı çatlak açılarında farklı çembersel çatlak sayıları için halka plağın (0,3) çember moduna ait doğal frekanslarının aynı olduğu görülmektedir.

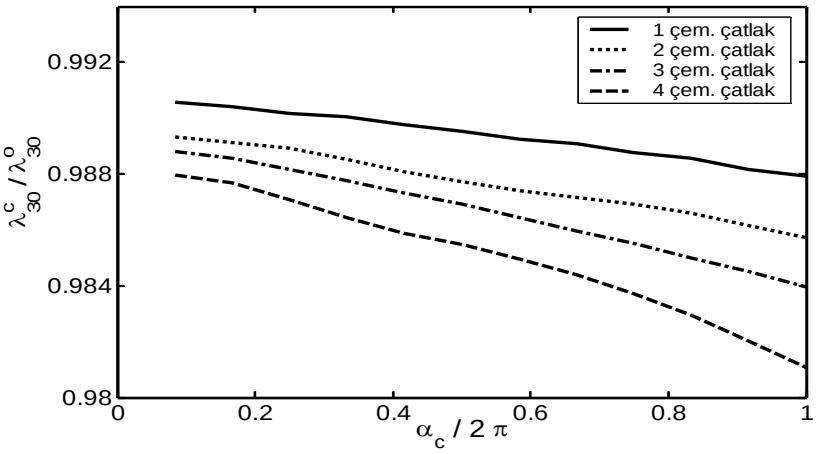
Şekil 6.24'de 2 çembersel çatlaklı F-C halka plağın (0,3) mod şekline ait doğal frekansının küçük çatlak açıları için 1 çembersel çatlaklı halka plağın doğal frekansından küçük, büyük çatlak açıları için ise, büyük olduğu görülmektedir. Doğal frekanslardaki bu değişimin mod şekilleri üzerindeki etkisi, Şekil 6.25-6.28'de grafiğin α_c / 2π = 0.05 ve 1.00 değerleri için halka plağın eş yükseklik eğrilerinin çatlaksız durumdaki değerlerine oranları kullanılarak gösterilmiştir.



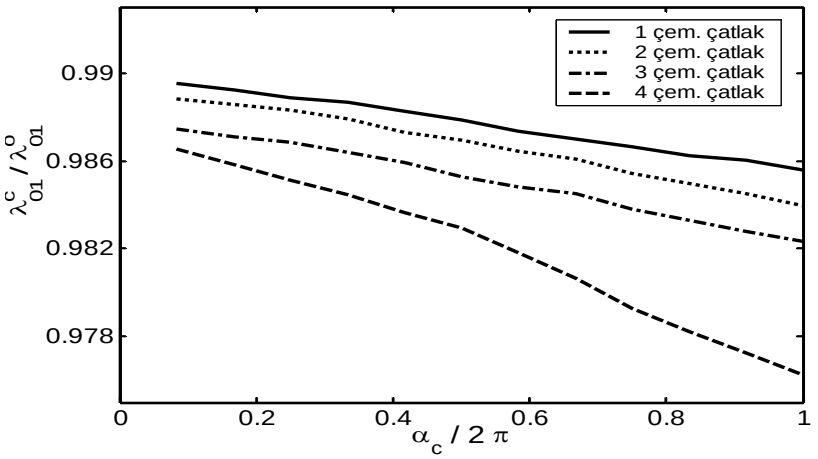
Şekil 6.19: F-C Halka Plağın (1,0) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış}$ = 0.2



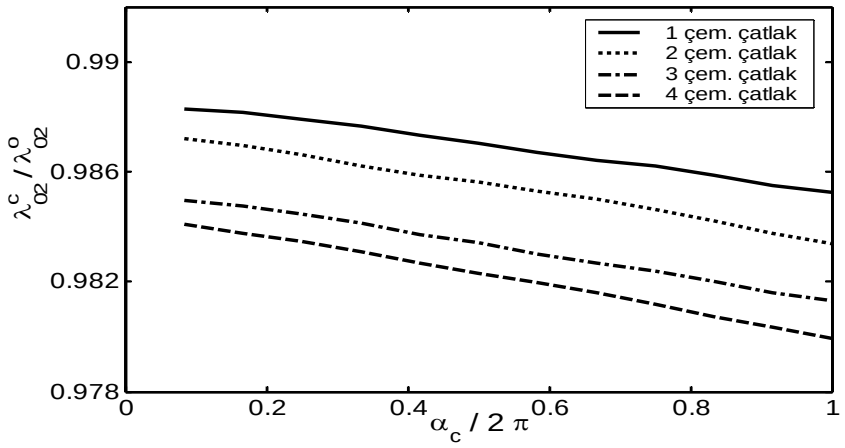
Şekil 6.20: F-C Halka Plağın (2,0) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$



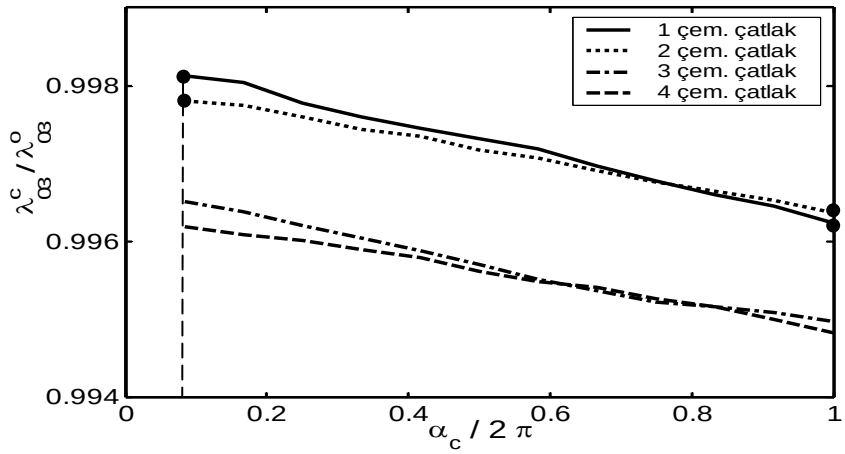
Şekil 6.21: F-C Halka Plağın (3,0) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$



Şekil 6.22: F-C Halka Plağın (0,1) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$



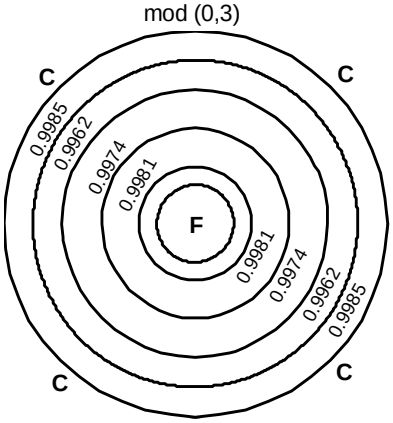
Şekil 6.23: F-C Halka Plağın (0,2) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$



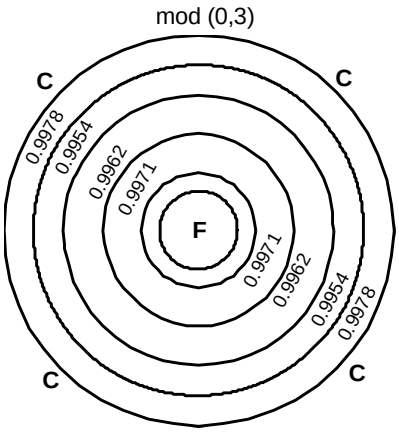
Şekil 6.24: F-C Halka Plağın (0,3) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.2$

Şekil 6.25 ve 6.26'da, aynı çatlak açısı için 2 çembersel çatlaklı halka plağın (0,3) mod şeklinin bağıl değişimi, 1 çembersel çatlaklı halka plağın mod şeklinin bağıl değişiminden daha fazla, Şekil 6.27 ve 6.28'de ise daha az olmaktadır.

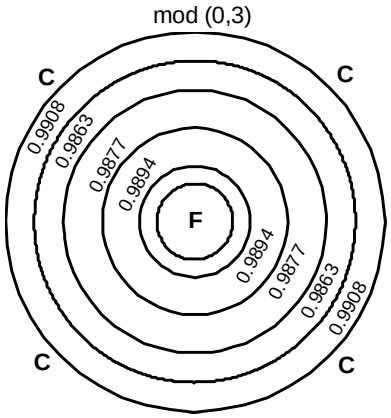
Çeşitli çembersel çatlakların, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$ ve $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$ yarıçaplar oranına sahip halka plakların doğal frekansları üzerindeki etkileri grafikler halinde Ek C'de verilmiştir. Bu grafiklerde de bazı çatlak boylarında hareketsiz çember modlarına ait doğal frekanslarda çatlak boyunun artmasına rağmen artmalar görülmekte, buna karşılık hareketsiz çap modlarında doğal frekans değerleri sürekli olarak azalmaktadır.



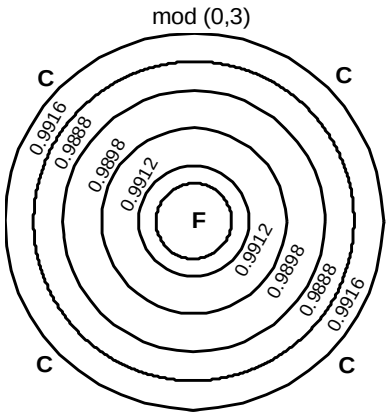
Şekil 6.25: Bir Çembersel Çatlaklı F-C Halka Plağın (0,3) Mod Şeklinin Bağıl Değişimi, $\alpha_c / 2\pi = 0.05$



Şekil 6.26: İki Çembersel Çatlaklı F-C Halka Plağın (0,3) Mod Şeklinin Bağıl Değişimi, $\alpha_c / 2\pi = 0.05$



Şekil 6.27: Bir Çembersel Çatlaklı F-C Halka Plağın (0,3) Mod Şeklinin Bağıl Değişimi, $\alpha_c / 2\pi = 1.00$



Şekil 6.28: İki Çembersel Çatlaklı F-C Halka Plağın (0,3) Mod Şeklinin Bağıl Değişimi, $\alpha_c / 2\pi = 1.00$

Radyal ve çembersel çatlaklı halka plaklar için elde edilen sayısal sonuçlar, Ek D'de verilen MATLAB 6.5'te yazılmış sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak özdeğer analizi yapan program ile elde edilmiştir.

7. SONUÇLAR VE GENEL DEĞERLENDİRME

Bu tezde, radyal ve çembersel çatlağın halka plağın serbest titreşimlerine etkileri incelenmiş, çatlaklar kırılma mekaniği yardımıyla hesaplanabilen bir ek esneklik matrisi ile modellenmiştir. Çatlağın açık, dallanmayan ve ilerlemeyen yapıda olduğu kabul edilmiştir. Çatlaklı yamuk elemanın esneklik matrisi, dikdörtgen elemanın formülasyonlarından faydalanılarak çıkartıldıktan sonra sektör ve yamuk elemanların geometrilerinin yakınlığından faydalanılarak radyal ve çembersel çatlaklı sektör elemanın esneklik matrisi elde edilmiştir. Radyal ve çembersel çatlaklı halka plakların doğal frekansları ve mod şekilleri ile ilgili olarak bulunan sayısal değerler, literatürdeki deneysel ve teorik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Gerek bu değerlerin bire bir karşılaştırması, gerekse karşılaştırmaların yapıldığı aralıklardaki değişimlerin uyumu, geliştirilen sonlu elemanların çatlaklı halka plakların dinamik analizlerinde uygulanabilirliğini göstermektedir.

7.1 Sonuçların Özeti

Radyal ve çembersel çatlaklı halka plakların serbest titreşimleri ile ilgili elde edilen sonuçlar aşağıda maddeler halinde özetlenmiştir:

i- Halka plak üzerindeki radyal çatlak boylarındaki ve sayılarındaki artışlar, genel olarak plağın doğal frekansları üzerinde azaltıcı etki yapmakta, fakat bazı radyal çatlak konumları için çatlak boyunun uzaması ile halka plağın hareketsiz çap modlarına ait doğal frekanslarda azalma beklenirken yükselmeler meydana gelmektedir. Bu durum, halka plağın çember modlarının sıfır olduğu mod şekillerinde ortaya çıkmaktadır.

ii- Halka plak üzerindeki çembersel çatlak sayılarındaki artışlar, genel olarak plağın doğal frekansları üzerinde azaltıcı etki yapmakta, fakat bazı durumlarda, çembersel çatlak sayısının artması ile halka plağın hareketsiz çember modlarına ait doğal frekanslarda azalma beklenirken yükselmeler meydana gelmektedir. Bu durum, halka

plağın hareketsiz çap modlarının sıfır olduğu mod şekillerinde ortaya çıkmakta, buna karşılık hareketsiz çap modlarına ait doğal frekanslar ise sürekli olarak azalmaktadır.

iii- Çatlak, halka plağın hareketsiz noktalarına yakın konumunda bulunursa, çatlağın plağın doğal frekansları üzerindeki etkisi az, uzak olursa etkisi fazla olmaktadır.

iv- Halka plağın doğal frekansının daha az değiştiği durumda mod şekilleri de daha az değişmektedir.

v- Her iki kenarı basit mesnetli (S-S) ve her iki kenarı ankastre (C-C) halka plakta, çembersel çatlağın konumu orta bölgeden plağın kenarlarına doğru yaklaştıkça etkisi azalmakta ve halka plağın (0,0) titreşim modundaki temel frekansı artmaktadır.

vi- Bazı radyal çatlak boylarında çatlağın plağın iç veya dış kenarından başlaması durumunda doğal frekans değerleri aynı olmaktadır.

7. 2 Gelecekte Yapılabilecek Çalışmalar

İleride yapılabilecek çalışmalar şu şekilde sıralanabilir:

i- Radyal ve çembersel çatlaklı sektör eleman için, çatlağın ek esneklik matrisinin doğrudan polar koordinatlar kullanılarak elde edilmesi.

ii- Radyal ve çembersel çatlaklı sektör elemanın stabilite matrisinin elde edilmesi.

iii- Radyal ve çembersel çatlaklı halka plakların statik ve dinamik stabilite analizleri.

iv- Literatürdeki deneysel sonuçlarla karşılaştırılan sonuçlar haricindeki diğer teorik sonuçların deneysel olarak sağlanması.

KAYNAKLAR

[1] **Dimarogonas, A.D.,** 1996. Vibration of Cracked Structures: A State of the Art Review, *Engineering Fracture Mechanics*, **55(5),** 831-857.

[2] **Wauer, J.,** 1990. On the Dynamics of Cracked Rotors: A Literature Survey, *Applied Mechanics Reviews*, **43(1),** 13-17.

[3] **Dimarogonas, A.D. and Paipetis, A.S.,** 1983. Analytical Methods In Rotor Dynamics, Applied Science Publishers LTD., England.

[4] **Bamnios, G. and Trochides, A.,** 1995. Dynamic Behaviour of a Cracked Cantilever Beam, *Applied Acoustics*, **45,** 97-112.

[5] **Takahashi, I.**, 1999. Vibration and Stability of Non-Uniform Cracked Timoshenko Beam Subjected to Follower Force, *Computers and Structures*, **71,** 585-591.

[6] **Zheng, D.Y. and Fan, S.C.,** 2001. Natural Frequencies of a Non-Uniform Beam with Multiple Cracks via Modified Fourier Series, *Journal of Sound and Vibration*, **242(4),** 701-717.

[7] **Yang, X.F., Swamidas, A.S.J. and Seshadri, R.,** 2001. Crack Identification in Vibrating Beam Using The Energy Method, *Journal of Sound and Vibration*, **244(2),** 339-357.

[8] **Carneiro, S.H.S. and Inman, D.J.,** 2002. Continuous Model for the Transverse Vibration of Cracked Timoshenko Beams, *Journal of Vibration and Acoustics*, **124,** 310-320.

[9] **Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D. and Yao, J.,** 1998. A Continuous Cracked Beam Vibration Theory, *Journal of Sound and Vibration*, **215(1),** 17-34.

[10] **Krawczuk, M.,** 1993. Natural Vibration of Cracked Rotating Beams, *Acta Mechanica*, **99,** 35-48.

[11] **Krawczuk, M., Zak, A. and Ostachowicz, W.,** 2000. Elastic Beam Finite Element with a Transverse Elasto-Plastic Crack, *Finite Elements in Analysis and Design*, **34,** 61-73.

[12] **Gounaris, G. and Dimarogonas, A.D.,** 1988. A Finite Element of a Cracked Prismatic Beam for Structural Analysis, *Computers and Structures*, **28(3),** 309-313.

[13] **Saavedra, P.N. and Cuitino, L.A.,** 2001. Crack Detection and Vibration Behaviour of Cracked Beams, *Computers and Structures*, **79,** 1451-1459.

[14] **Tharp, T.M.,** 1987. A Finite Element for Edge-Cracked Beam Columns, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **24,** 1941-1950.

[15] **Kısa, M., Brandon, J. and Topçu, M.,** 1998. Free vibration analysis of cracked beams by a combination of finite elements and component mode synthesis methods, *Computers and Structures*, **67,** 215-223.

[16] **Chaudhari, T.D. and Maiti, S.K.,** 2000. A Study of Vibration of Geometrically Segmented Beams with and without Crack, *International Journal of Solids and Structures*, **37,** 761-779.

[17] **Chaudhari, T.D. and Maiti, S.K.,** 1999. Modelling of Transverse Vibration of Beam of Linearly Variable Depth with Edge, *Engineering Fracture Mechanics*, **63,** 425-445.

[18] **Ihsak, S. I., Liu, G.R. and Lim, S.P.,** 2000. Study on characterization of horizantal cracks in isotropic beams, *Journal of Sound and Vibration*, **238(4),** 661-671.

[19] **Chati, M., Rand, R. and Mukherjee, S.,** 1997. Modal Analysis of a Cracked Beam, *Journal of Sound and Vibration*, **207(2),** 249-270.

[20] **Silva, J.M.M. and Gomes, A.J.M.,** 1990. Experimental Dynamic Analysis of Cracked Free-Free Beams, Experimental Mechanics, 3**9,** 20-25.

[21] **Sekhar, A.S. and Prabhu, B.S.,** 1992. Crack Detection and Vibration Characteristics of Cracked Shafts, *Journal of Sound and Vibration*, **157,** 375-381.

[22] **Demir A. ve Mermertaş V.,** 2001. İki Ucu Ankastre Çatlak Çubukta Serbest ve Zorlanmış Titreşimler, *10. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu*, Selçuk Üniversitesi, Konya, 635-644.

[23] **Leissa, A.W., McGee, O.G. and Huang, C.S.,** 1993. Vibrations of Circular Plates Having V-Notches or Sharp Radial Cracks, *Journal of Sound and Vibration,* **161(2),** 227-239.

[24] **Krawczuk, M.,** 1993. A Rectangular Plate Finite Element with an Open Crack, *Computers and Structures*, **46(3),** 487-493.

[25] **Dolbow, J., Moes, N. and Belytschko, T.,** 2000. Modeling Fracture in Mindlin-Reissner Plates with the Extended Finite Element Method, *International Journal of Solids and Structures*, **37,** 7161-7183.

[26] **Krawczuk, M., Zak, A. and Ostachowicz, W.,** 2001. Finite Element Model of Plate with Elasto-Plastic Through Crack, *Computers and Structures*, **79,** 519-532.

[27] **Krawczuk, M.,** 1993. Natural Vibrations of Rectangular Plates with a Through Crack, *Archieve of Applied Mechanics*, **63,** 491-504.

[28] **Qian, G.L., Gu, S.N. and Jiang, J.S.,** 1991. A Finite Element Model of Cracked Plates and Application to Vibration Problems, *Computers and Structures*, **39(5),** 483-487.

[29] **Demir A. ve Mermertaş V.,** 2003. Çatlaklı Dikdörtgen Plaklarda Doğal Frekanslar, *11. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu*, Gazi Üniversitesi, Ankara, 143-148.

[30] **Ma, C.-C. and Huang, C.-H.,** 2001. Experimental and Numerical Analysis of Vibrating Cracked Plates at Resonant Frequencies, *Experimental Mechanics*, **41(1),** 8-18.

[31] **Ramesh, K., Chauhan, D.S. and Mallik, A.K.,** 1997. Free Vibration of an Annular Plate with Periodic Radial Cracks, *Journal of Sound and Vibration,* **206(2),** 266-274.

[32] **Cornwell, P., Doebling, S.W. and Farrar, C.R.,** 1999. Application of the Strain Energy Damage Detection Method to Plate Like Structures, *Journal of Sound and Vibration*, **224(2),** 359-374.

[33] **Lee, H.P.,** 1992. Fundamental Frequencies of Annular Plates with Internal Cracks, *Computers and Structures,* **43(6),** 1085-1089.

[34] **Stahl, B. and Keer, L.M.,** 1972. Vibration and Stability of Cracked Rectangular Plates, *International Journal of Solids and Structures,* **8(1),** 69-91.

[35] **Papadopoulos, C.A. and Dimarogonas, A.D.,** 1988. Coupled Longitudinal and Bending Vibrations of a Cracked Shaft, *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design (ASME)*, **110,** 1-8.

[36] **Sekhar, A.S. and Prabhu, B.S.,** 1994. Vibration and Stress Fluctuation in Cracked Shafts, *Journal of Sound and Vibration*, **169(5),** 655-667.

[37] **Ballo, I.,** 1998. Non-Linear Effects of Vibration of a Continuous Transverse Cracked slender Shaft, *Journal of Sound and Vibration*, **217(2),** 321-333.

[38] **El-Dannanh, E.H., Farghaly, S.H.,** 1994. Natural Vibrations of Cracked Shafts Carrying Elastically Mounted End Mass, *Journal of Sound and Vibration*, **170(5),** 607-620.

[39] **Chen, L.W. and Chen, H.K.,** 1995. Stability Analyses of a Cracked Shaft Subjected to the End Load, *Journal of Sound and Vibration*, **188(4),** 497-513.

[40] **Chondros, T.G., Dimarogonas, A.D. and Yao, J.,** 1997. A Consistent Cracked Bar Vibration Theory, *Journal of Sound and Vibration*, **200(3),** 303-313.

[41] **Collins, K.R., Plaut, R.H. and Wauer, J.,** 1992. Free and Forced Longitudinal Vibrations of a Cantilevered Bar with a Crack, *Journal of Vibration and Acoustics*, **114,** 171-177.

[42] **Hamidi, L., Pastorel, H., Mansour, W.M. and Massoud, M.,** 1994. Modal Parameters for Cracked Rotors: Models and Comparisons, *Journal of Sound and Vibration*, **175(2),** 265-278.

[43] **Mohiuddin, M.A. and Khulief, Y.A.,** 1998. Modal Characteristics of Cracked Rotors Using a Conical Shaft Finite Element, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **162,** 223-247.

[44] **Sekhar, A.S.,** 1999. Vibration Characteristics of a Cracked Rotor with Two Open Cracks, *Journal of Sound and Vibration*, **223(4),** 497-512.

[45] **Wake, R.N. and Evans, J.T.,** 1999. The Effect of Cracks on the Natural Frequencies of Axi-symmetric Vibration Modes of Gas Cylinders, *Engineering Fracture Mechanics*, **64,** 177-191.

[46] **Javidruzi, M., Vafai, A., Chen, J.F. and Chilton, J.C.,** 2004. Vibration, Buckling and Dynamic Stability of Cracked Cylindrical Shells, *Thin Walled Structures,* **42,** 79-99.

[47] **Douka, E., Loutridis, S. and Trochidis, A.,** 2004. Crack Identification in Plates Using Wavelet Analysis, *Journal of Sound and Vibration,* **270,** 279-295.

[48] **Dilena, M. and Morassi, A.,** 2004. The Use of Antiresonances for Crack Detection in Beams, *Journal of Sound and Vibration,* **276,** 195-214.

[49] **Loutridis, S., Douka, E., Hadjileon, L.J. and Trochidis, A.,** 2005. A Two-Dimensional Wavelet Transform for Detection of Cracks in Plates, *Engineering Structures,* **27,** 1327-1338.

[50] **Sih, G.C.,** 1973. Handbook of Stress Intensity Factors, Bethlehem, P.A. Lehigh University.

[51] **Tada, H., Paris, P.C. and Irwin, G.R.,** 1985.The Stress Analysis of Cracks Handbook, Del Research Corporation, Hellertown, Pensylvania, U.S.A.

[52] **Christides, S. and Barr, A.D.S.,** 1984. One-Dimensional Theory of Cracked Bernoulli-Euler Beams, *International Journal of Mechanical Science*, 26(11/12), 639-648.

[53] **Christides, S. and Barr, A.D.S.,** 1986. Torsional vibration of cracked beams of non-circular section, *International Journal of Mechanical Science*, **28**, 473-490**.**

[54] **Dimarogonas, A.D. and Papadopoulos, C.A.** 1983. Vibration of cracked shafts in bending, *Journal of Sound and Vibration*, **91,** 583-593.

[55] **Springer, W.T., Lawrence, K.L. and Lawley, T.J.,** 1987. The Effect of a Symmetric Discontinuity on Adjacent Material in a Longitudinally Vibrating Uniform Beam, *Experimental Mechanics*, **27,** 168-171.

[56] **Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P.,** 1991. Numerical Fracture Mechanics, Computational Mechanics Publications, Southampton.

[57] **Broberg, K.B.,** 1999. Cracks and Fracture, Academic Pres, London.

[58] **Yuan, J., Young, P.G. and Dickinson, S.M.,** 1994. Natural Frequencies of Circular and Annular Plates with Radial or Circumferential Cracks, *Computers and Structures,* **53(2),** 327-334.

[59] **Rock, T. and Hinton, E.,** 1974. Free Vibration and Transient Response of Thick and Thin Plates Using Finite Element Method, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics,* **3,** 51-63.

[60] **Petyt, M.,** 1990. Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Cambridge University Press, United Kingdom.

[61] **J.S. Przemieniecki,** 1968. Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill Company, New York.

[62] **Solecki, R.,** 1983. Bending Vibration of a Simply Supported Rectangular Plate With a Crack Parallel to One Edge, *Engineering Fracture Mechanics,* **18(6),** 1111-1118.

[63] **Lee, H.P. and Lim, S.P.,** 1993. Vibration of Cracked Rectangular Plates Including Transverse Shear Deformation and Rotary Inertia, *Computers and Structures,* **49(4),** 715-718.

[64] **Khadem, S.E. and Rezaee, M.,** 2000. An Analytical Approach for Obtaining the Location and Depth of an All-Over Part-Through Crack on Externally in-Plane Loaded Rectangular Plate Using Vibration Analysis, *Journal of Sound and Vibration,* **230(2),** 291-308.

[65] **Anifantis, N.K., Actis, R.L. and Dimarogonas, A.D.,** 1994. Vibration of Cracked Annular Plates, *Engineering Fracture Mechanics,* **49(3),** 371-379.

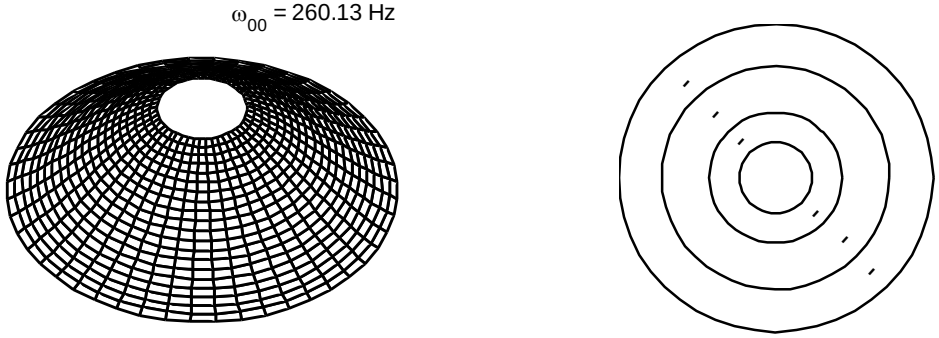
[66] **Vogel, S. M. and Skinner, D. W.,** 1965. Natural Frequencies of Transversely Vibrating Uniform Annular Plates, *Journal of Applied Mechanics,* **32(E),** 926-931.

[67] **Blevins, R.D.,** 1979. Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold Company, USA.

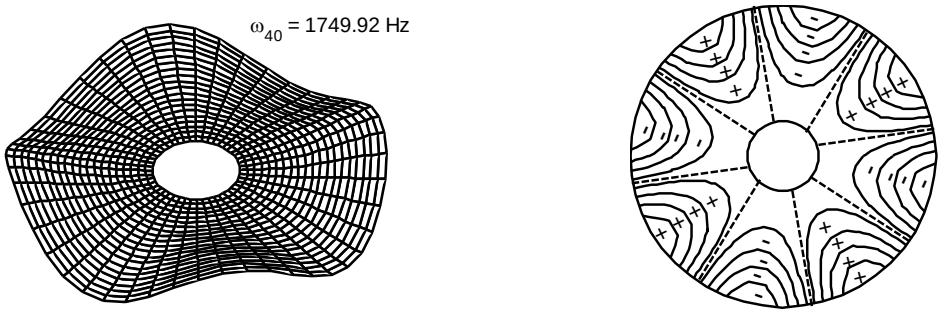
EK A

C-F HALKA PLAK MODLARI

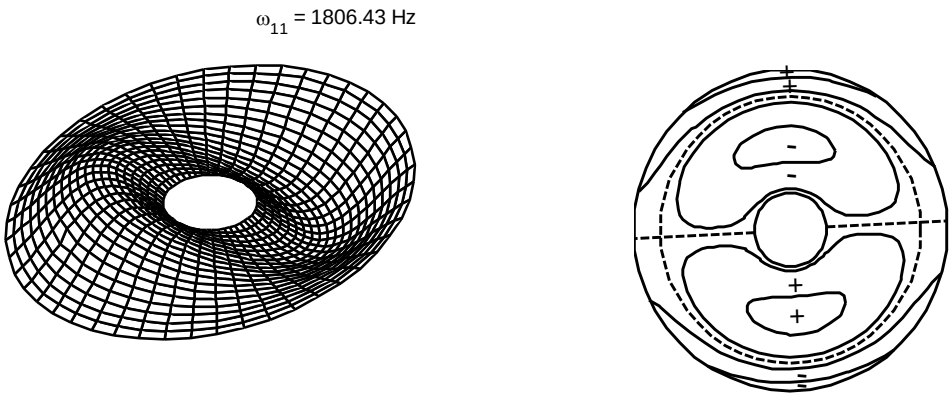
İç kenarı ankastre dış kenarı serbest (C-F) halka plak ($r_{iç}$ = 30 mm, $r_{dış}$ =130 mm, $r_{iç}/r_{dış} = 0.23$, h = 3.18 mm, ρ = 2720 kg/m^3, $E = 6.910^9$ N/m^2, $\upsilon = 0.33$), radyal ve açısal yönlerde sırasıyla 20x48 adet sektör elemana bölünmüş ve titreşim mod şekilleri ile doğal frekansları elde edilmiştir. Halka plağın 960 (48x20) adet düğüm noktasının plak düzlemine dik doğrultudaki yer değiştirme değerleri ile mod şekilleri elde edilmiştir. Halka plağın ilk üç çap modu ile ilk üç çember modu ise Bölüm 6'da gösterilmiştir. Şekil A.1-A.11'de, Tablo 6.3-6.4'de verilen C-F halka plağın diğer mod şekilleri gösterilmektedir.



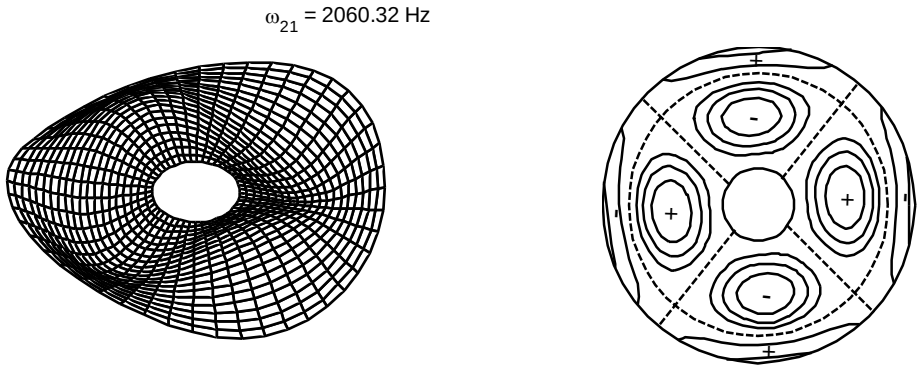
Şekil A.1: C-F Halka Plağın (0,0) Modu



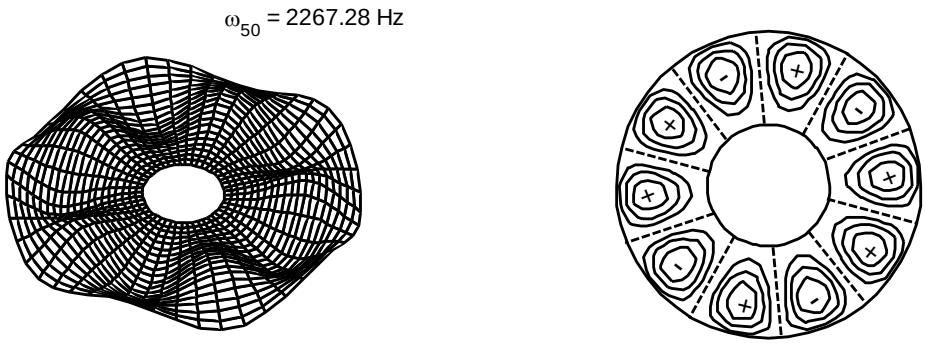
Şekil A.2: C-F Halka Plağın (4,0) Modu



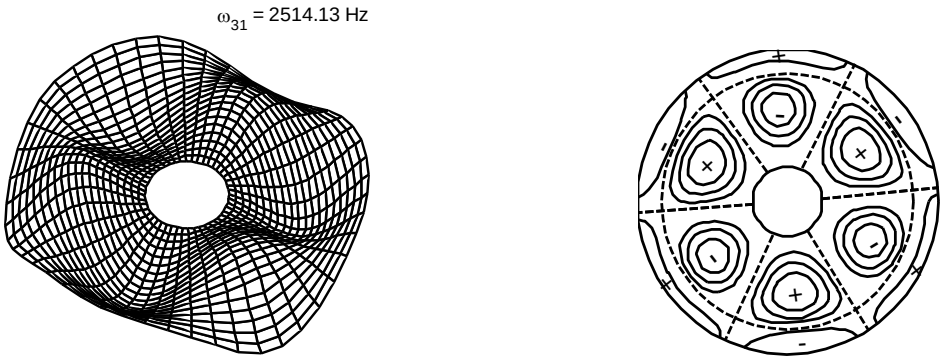
Şekil A.3: C-F Halka Plağın (1,1) Modu



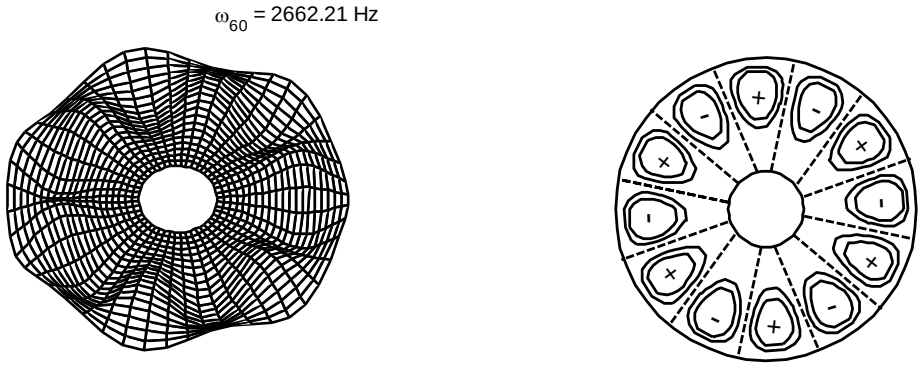
Şekil A.4: C-F Halka Plağın (2,1) Modu



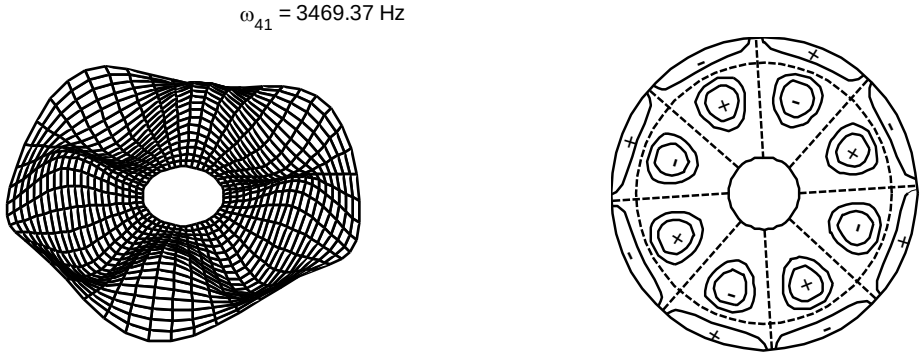
Şekil A.5: C-F Halka Plağın (5,0) Modu



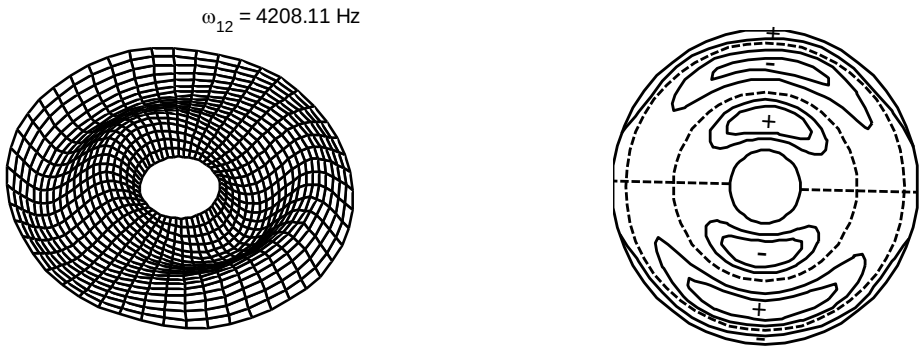
Şekil A.6: C-F Halka Plağın (3,1) Modu



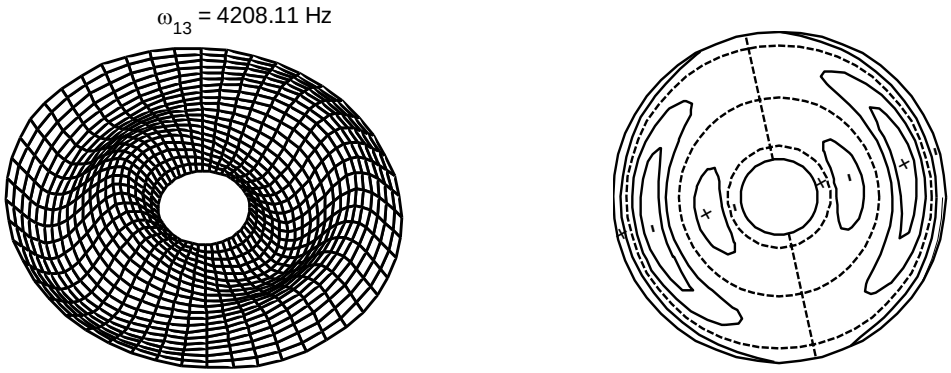
Şekil A.7: C-F Halka Plağın (6,0) Modu



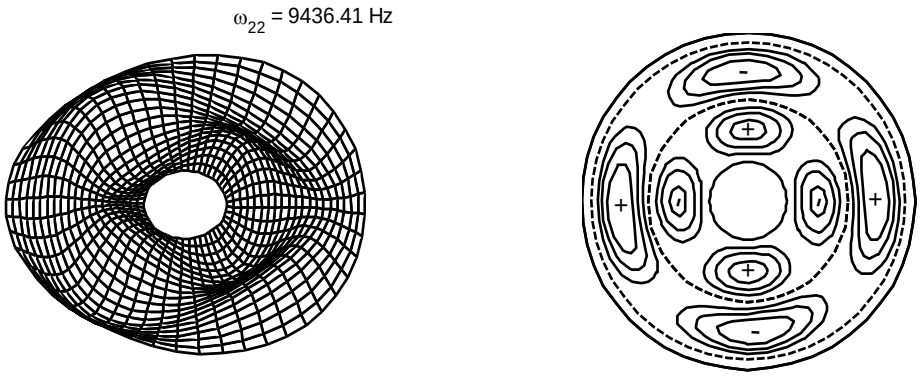
Şekil A.8: C-F Halka Plağın (4,1) Modu



Şekil A.9: C-F Halka Plağın (1,2) Modu



Şekil A.10: C-F Halka Plağın (1,3) Modu

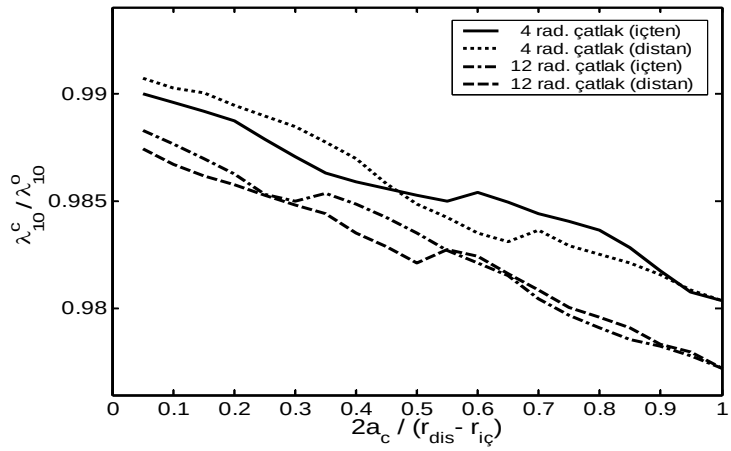


Şekil A.11: C-F Halka Plağın (2,2) Modu

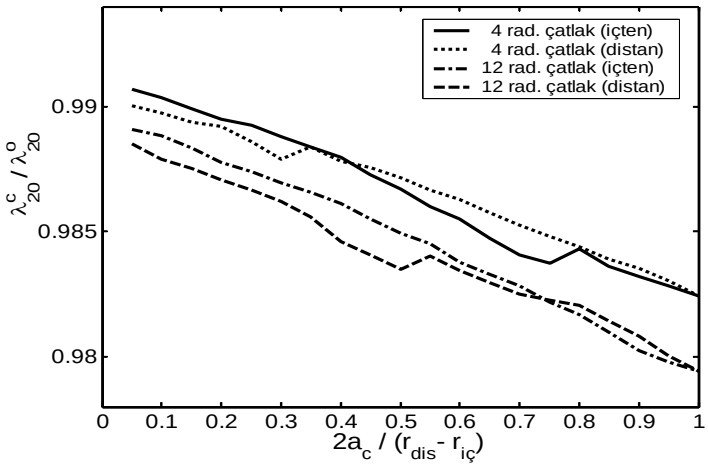
EK B

RADYAL ÇATLAKLI F-C HALKA PLAK GRAFİKLERİ

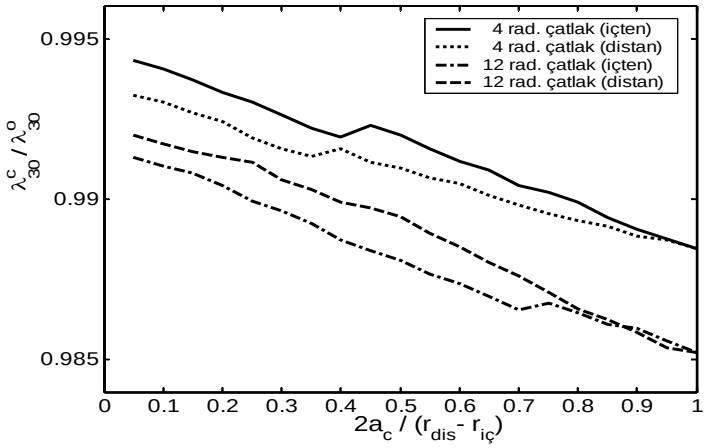
Şekil B.1-B.12'de iç kenarı serbest dış kenarı ankastre (F-C) radyal çatlaklı halka plağın ($r_{dış}$=100 mm, h=1 mm, ρ =7800 kg/m^3, E=1.93 10^{11} N/m^2, υ=0.3) serbest titreşim modları ve bu modlara ait doğal frekansları çatlaksız durumdaki değerleri ile karşılaştırmalı olarak grafikler halinde verilmiştir. Sayısal sonuçlarda, bu halka plağın iç yarıçapı Şekil B.1-B.6 için $r_{iç}$=50 mm, Şekil B.7-B.12 için ise $r_{iç}$=80 mm alınmıştır.



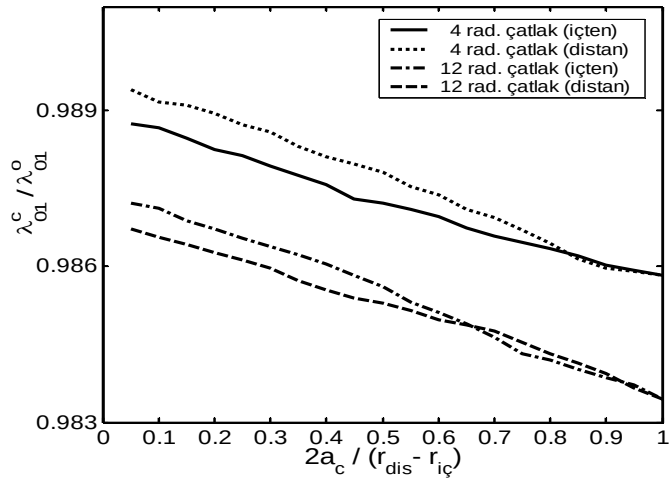
Şekil B.1: F-C Halka Plağın (1,0) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$



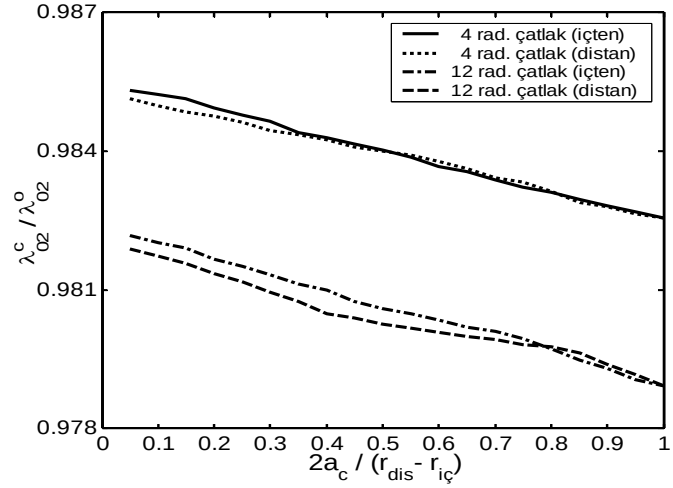
Şekil B.2: F-C Halka Plağın (2,0) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$



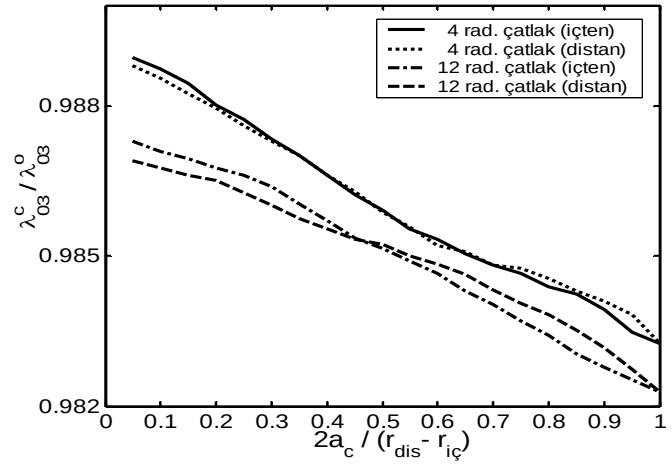
Şekil B.3: F-C Halka Plağın (3,0) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$



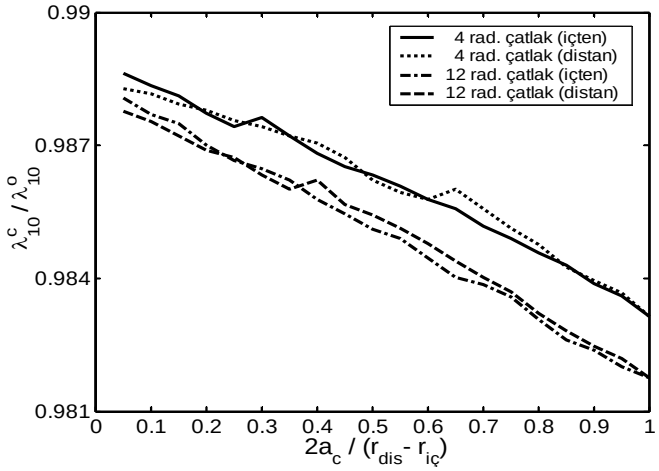
Şekil B.4: F-C Halka Plağın (0,1) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$



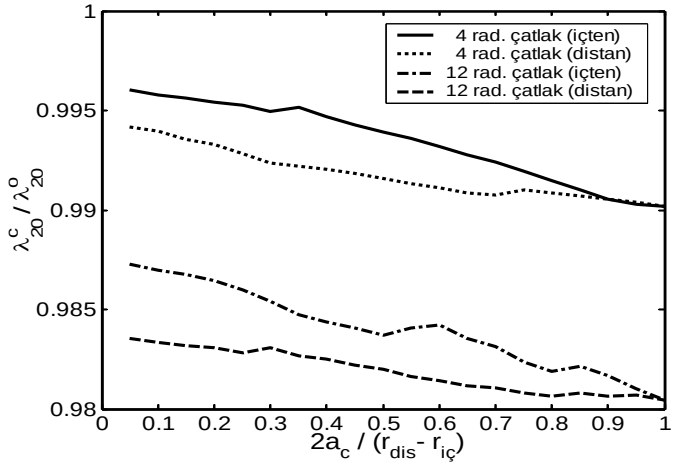
Şekil B.5: F-C Halka Plağın (0,2) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$



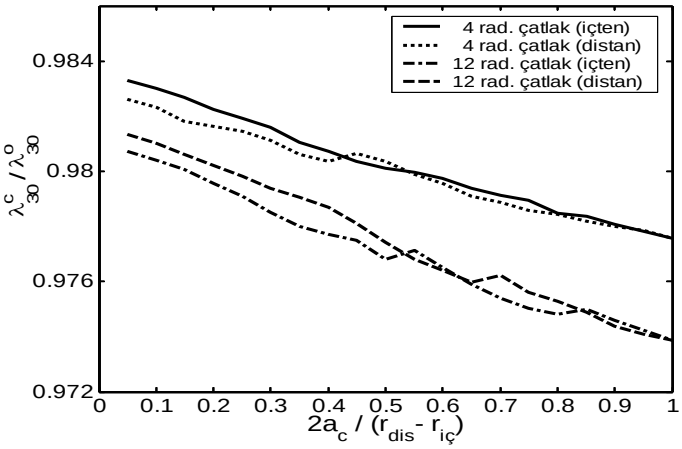
Şekil B.6: F-C Halka Plağın (0,3) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$



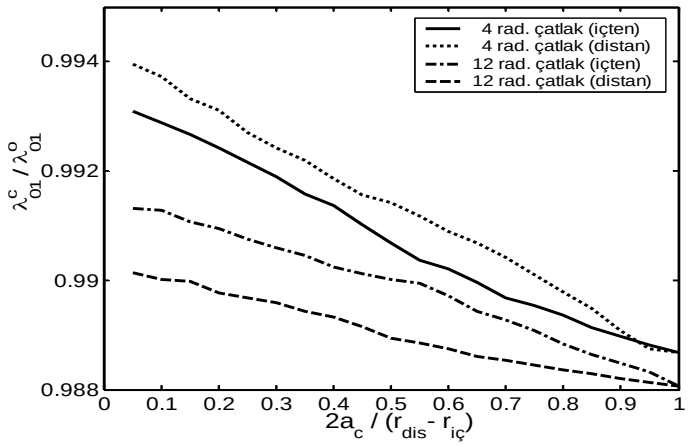
Şekil B.7: F-C Halka Plağın (1,0) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$



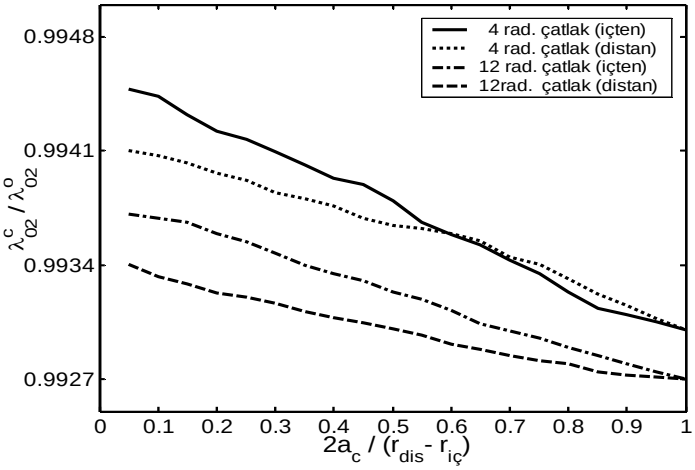
Şekil B.8: F-C Halka Plağın (2,0) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$



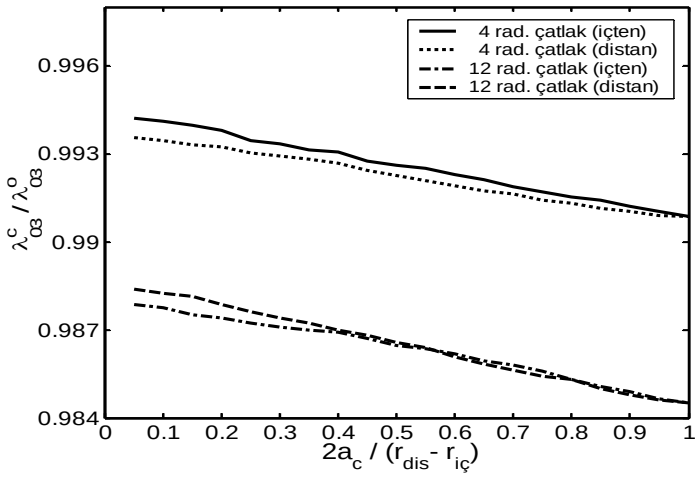
Şekil B.9: F-C Halka Plağın (3,0) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$



Şekil B.10: F-C Halka Plağın (0,1) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$



Şekil B.11: F-C Halka Plağın (0,2) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$

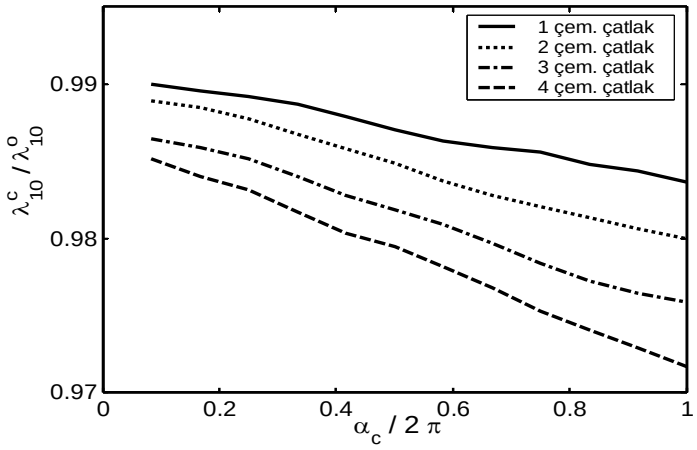


Şekil B.12: F-C Halka Plağın (0,2) Modu Frekansının Çatlak Boyu ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$

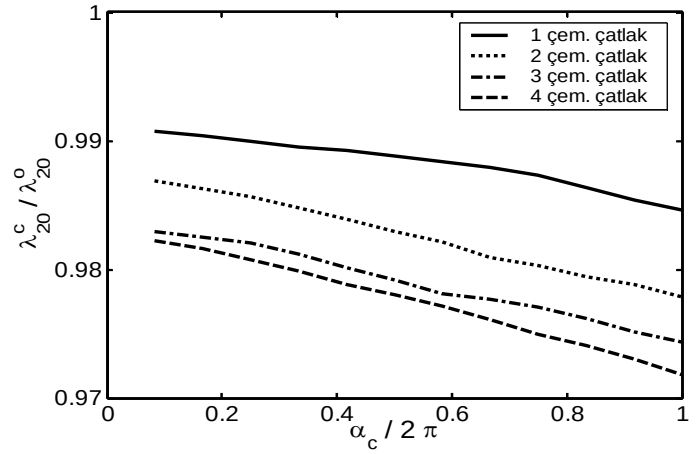
EK C

ÇEMBERSEL ÇATLAKLI F-C HALKA PLAK GRAFİKLERİ

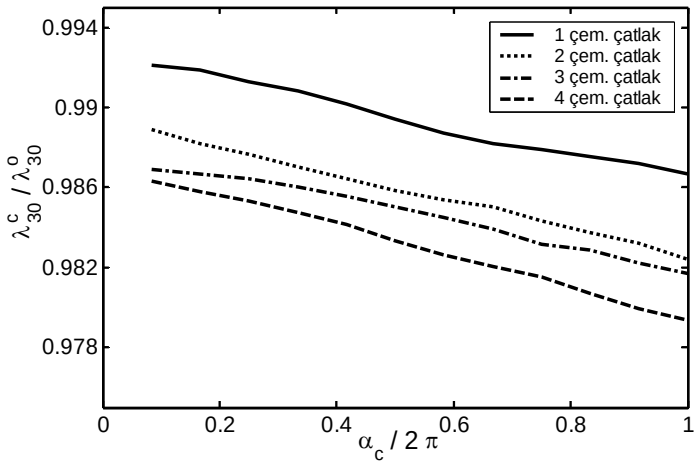
Şekil C.1-C.12'de iç kenarı serbest dış kenarı ankastre (F-C) çembersel çatlaklı halka plağın ($r_{dış}$=100 mm, h=1 mm, ρ=7800 kg/m^3, E=1.93 10^{11} N/m^2, υ=0.3) serbest titreşim modları ve bu modlara ait doğal frekansları çatlaksız durumdaki değerleri ile karşılaştırmalı olarak grafikler halinde verilmiştir. Sayısal sonuçlarda, bu halka plağın iç yarıçapı Şekil C.1-C.6 için $r_{iç}$=50 mm, Şekil C.7-C.12 için ise $r_{iç}$=80 mm alınmış ve Tablo 6.10'da verilen çembersel çatlak konumları kullanılmıştır.



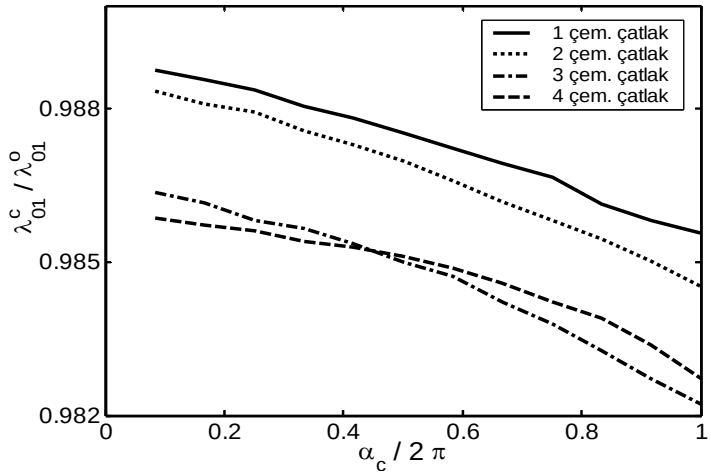
Şekil C.1: F-C Halka Plağın (1,0) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$



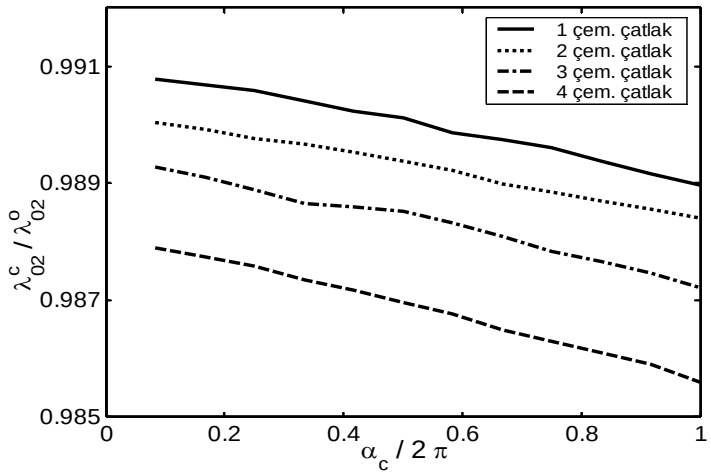
Şekil C.2: F-C Halka Plağın (2,0) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$



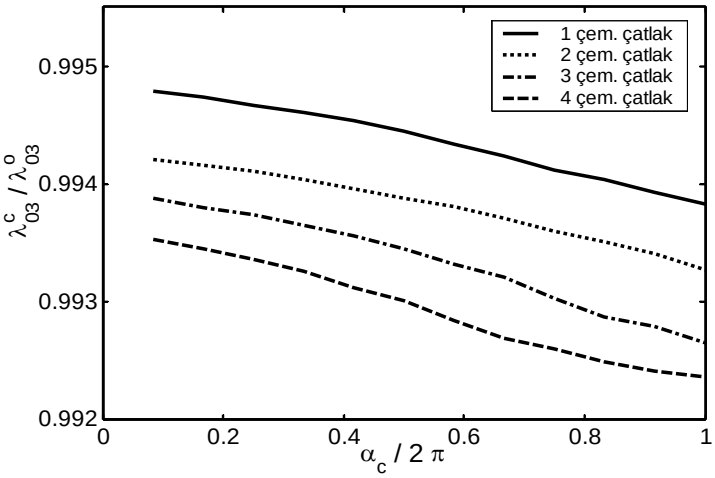
Şekil C.3: F-C Halka Plağın (3,0) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$



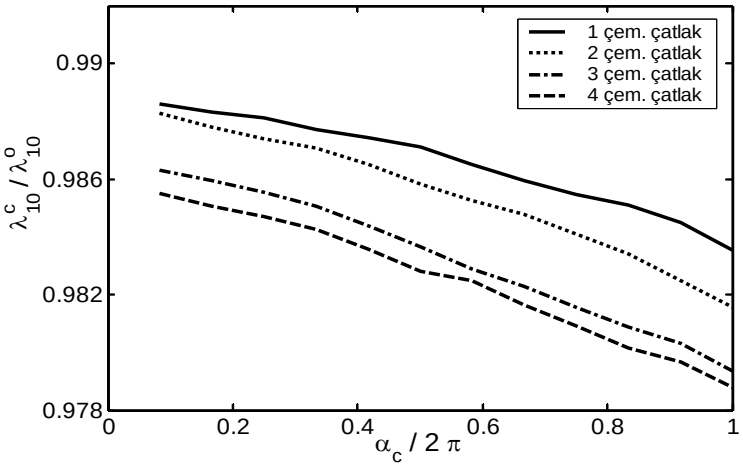
Şekil C.4: F-C Halka Plağın (0,1) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$



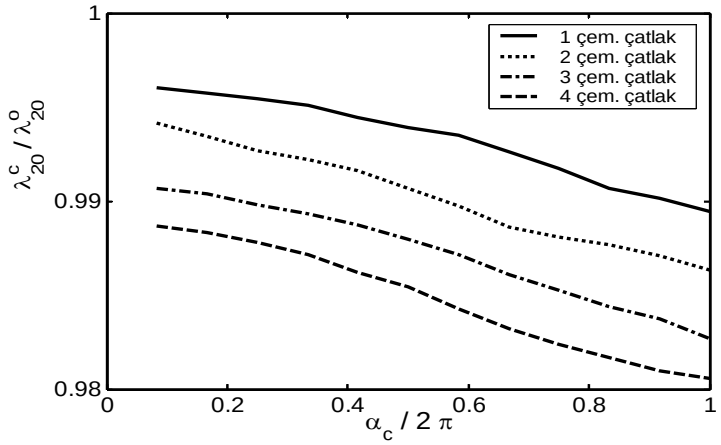
Şekil C.5: F-C Halka Plağın (0,2) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$



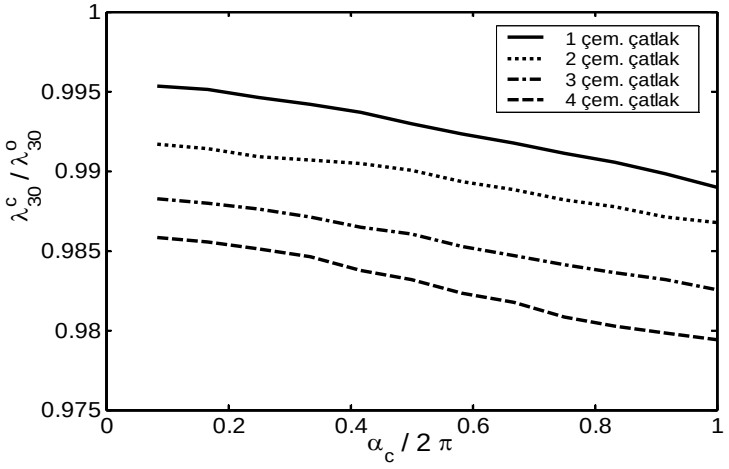
Şekil C.6: F-C Halka Plağın (0,3) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.5$



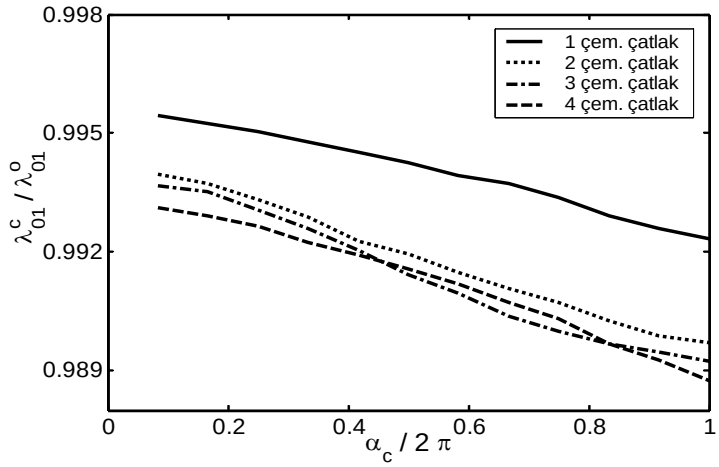
Şekil C.7: F-C Halka Plağın (1,0) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$



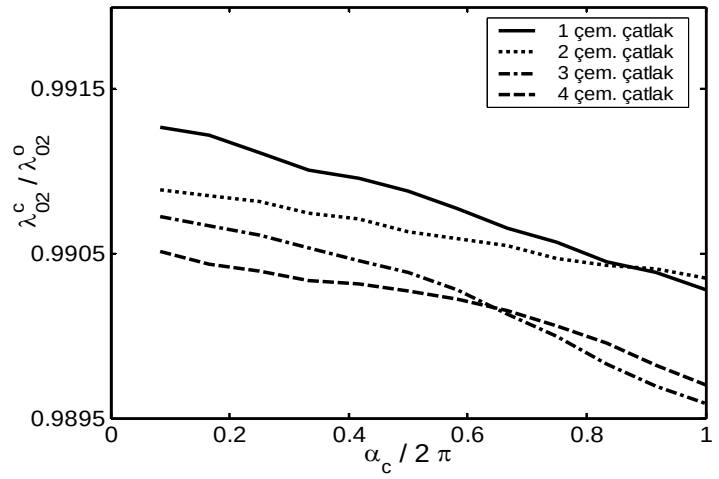
Şekil C.8: F-C Halka Plağın (2,0) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$



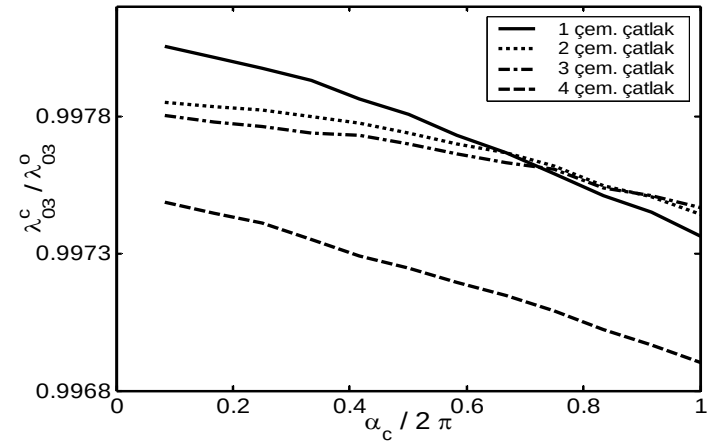
Şekil C.9: F-C Halka Plağın (3,0) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$



Şekil C.10: F-C Halka Plağın (0,1) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$



Şekil C.11: F-C Halka Plağın (0,2) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$



Şekil C.12: F-C Halka Plağın (0,3) Modu Frekansının Çatlak Açısı ve Sayısıyla Değişimi, $r_{iç} / r_{dış} = 0.8$

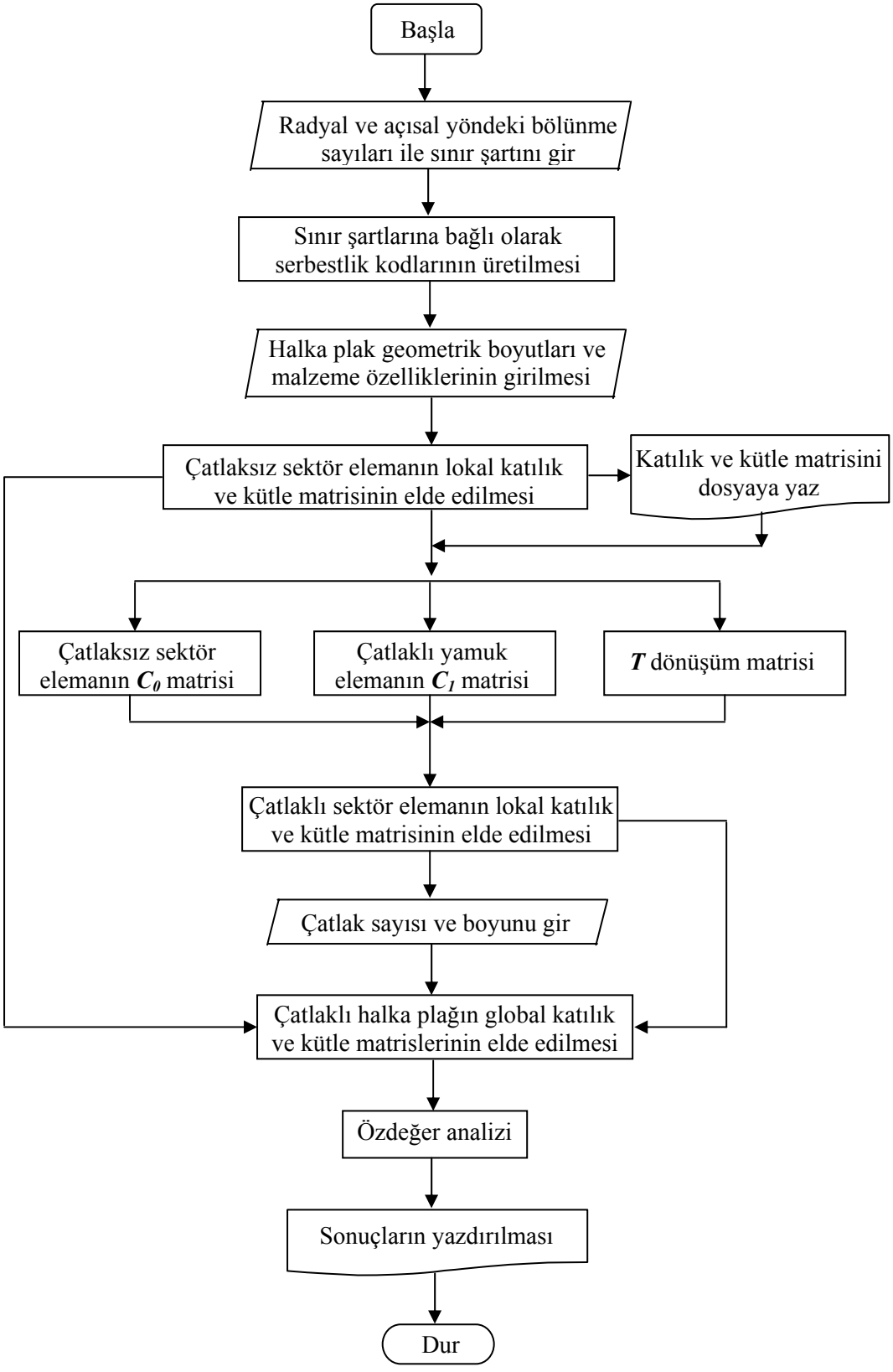
EK D

BİLGİSAYAR PROGRAMI

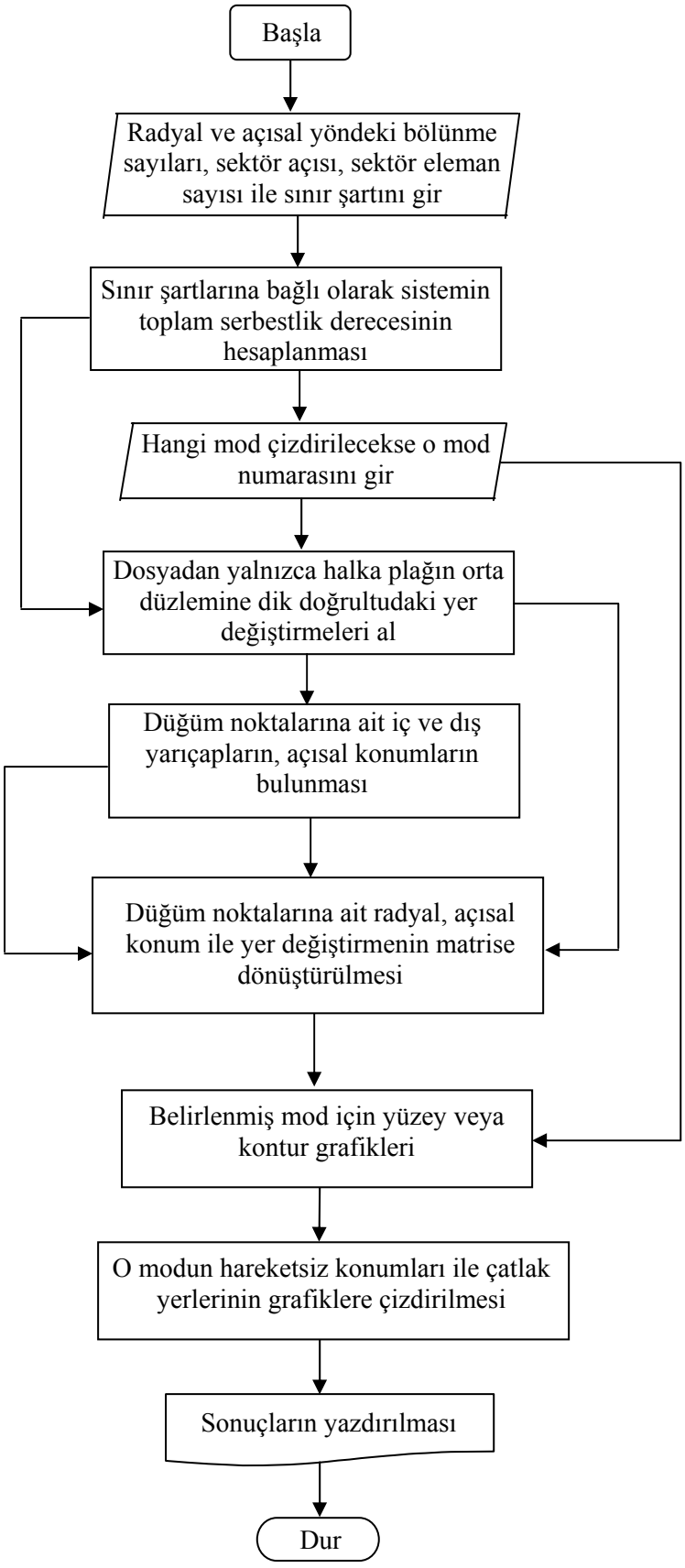
Bölüm 4 ve 5'te tanımlanan radyal ve çembersel çatlaklı sektör elemanlar ile elde edilen sayısal değerlerin bulunmasında kullanılan program kodları MATLAB 6.5'te yazılmıştır. Bu programlar 2 ana programdan oluşmaktadır.

Özdeğer analizi ile çatlaklı halka plağın doğal frekanslarını bulan programın akış şeması Şekil D.1'de gösterilmektedir. Bu programda ilk olarak halka plağın radyal ve açısal yönlerdeki bölünme sayıları ve sınır şartları girilerek serbestlik kodları üretilir. Plağın geometrik boyutları ve malzeme özelliklerinin girilmesiyle çatlaksız sektör elemanın katılık ve kütle matrisleri elde edilir. Bu matrisler yardımıyla sektör elemanın $\boldsymbol{C_0}$ esneklik matrisi, yamuk elemanın $\boldsymbol{C_1}$ ek esneklik matrisi ve $\boldsymbol{T}$ dönüşüm matrisi bulunur. Çatlaklı sektör elemanın katılık ve kütle matrisleri elde edilerek çatlaklı halka plağın global matrisleri bulunmakta ve özdeğer analizi ile sonuçlar alınmaktadır. Çatlak tipinin radyal veya çembersel olması durumuna göre, çatlağın konumu, sayısı ve çatlaklı sektör elemanların sıraları değişir. Programda bu durum göz önüne alınmalıdır.

Şekil D.2, özvektör analizi ile elde edilen yer değiştirmeleri, yüzey veya kontur grafiklerine dönüştüren programın akış şemasını göstermektedir. Bu programda öncelikle halka plağın boyutları, sektör açısı, sınır şartı, eleman düğüm noktası sayısı girilerek sistemin toplam serbestlik derecesi elde edilir. Sisteme ait özdeğerler ve özvektörler, özdeğer analizi ile elde edilen dosyadan alınmaktadır. Mod numarası girilerek dosyadan yalnızca plağın orta düzlemine dik yöndeki yer değiştirmeleri alınır ve o elemanın düğüm noktalarına ait olan iç ve dış yarıçapları belirlenir. Düğüm noktalarının açısal koordinatları da bulunduktan sonra, plağın o moddaki hareketsiz konumları ile çatlak konumları da eklenir. Son olarak o mod için yüzey veya kontur grafikleri Matlab kodları ile çizdirilir.



Şekil D.1: Radyal veya Çembersel Çatlaklı Halka Plakta Doğal Frekansların Elde Edildiği Programın Akış Şeması



Şekil D.2: Radyal veya Çembersel Çatlaklı Halka Plakta Mod Şekillerinin Elde Edildiği Programın Akış Şeması

ÖZGEÇMİŞ

Aydın DEMİR, 1970 yılında Sivas'ta doğdu. Lisans öğrenimini 1991 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Makina Mühendisliği Bölümü'nde tamamladı. 1994 Temmuz ayında Cumhuriyet Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Makina Mühendisliği Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 1997 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans öğrenimini tamamladıktan sonra Eylül 1998'de İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Makina Mühendisliği Anabilim Dalı, Konstrüksiyon ve İmalat Programı'nda doktora öğrenimine başladı. 1999 yılında 2547 sayılı kanunun 35. maddesi uyarınca İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde araştırma görevlisi olarak görevlendirildi. Halen İ.T.Ü. Makina Fakültesi, Makina Teorisi Sistem Dinamiği ve Kontrol Anabilim Dalı'nda araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.