İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜPERSİMETRİK KUANTUM ELEKTRODİNAMİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yakup EMÜL

Anabilim Dalı : FİZİK MÜHENDİSLİĞİ

Programı : FİZİK MÜHENDİSLİĞİ

ŞUBAT 2008

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SÜPERSİMETRİK KUANTUM ELEKTRODİNAMİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yakup EMÜL
(509041116)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 21 Aralık 2007
Tezin Savunulduğu Tarih : 06 Şubat 2008

Tez Danışmanı :	**Prof.Dr. Ömer Faruk DAYI (İ.T.Ü.)**
Diğer Jüri Üyeleri	**Prof.Dr. Osman Teoman TURGUT (B.Ü)**
	Doç.Dr. Ali YILDIZ (İ.T.Ü.)

ŞUBAT 2008

ÖNSÖZ

Lisans ve lisansüstü eğitim hayatımda ihtiyaç duyduğumda desteğini ve yardımlarını esirgemeyen akademik çalışmaları, insani vasıfları ve çalışma ahlakı açısından örnek gördüğüm ve bu tez dolayısıyla birlikte çalışma onurunu duyduğum çok değerli hocam Prof. Dr. Ömer Faruk DAYI'ya teşekkür ederim.

YEF 2007 dolayısı ile K. Ülker ve A. Özpineci'ye, ders veren diğer akademisyenlere ve Feza Gürsey Enstitüsü çalışanlarına sundukları imkânlardan dolayı teşekkür ederim.

İlkokul hocam Bekir Özgünay'dan lisansüstü eğitim hayatıma kadar üzerimde emekleri olan değerli hocalarıma teşekkür ederim.

Tez çalışmam esnasında desteklerinden ve esnek çalışma imkânları sağlayarak yardımcı olan Bahçeşehir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Dekanlığı'na, araştırma görevlisi arkadaşlarım N.Ceren Dağyar, Su Ece Ertürk, Ömer Polat ve Şaban Tırpancı'ya teşekkür ederim.

Ayrıca dostluklarını ve desteklerini her zaman hissettiğim değerli arkadaşlarım Serkan Karaçuha, Elif Yunt, Tolga Birkandan, Tarkan Aydın, Çağatay Erdem, ve isimlerini sayamadığım diğer arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Beni yetiştiren, en zorlu günlerde dahi fedakârane desteklerini esirgemeyen sevgili annem, babam ve kardeşlerime özverileri ve sevgilerinden dolayı teşekkür ederim.

Aralık 2007 Yakup EMÜL

Fizik Mühendisi

SÜPERSİMETRİK KUANTUM ELEKTRODİNAMİĞİ

ÖZET

Bu tezin amacı süpersimetrik kuantum elektrodinamiğinin, N=1 için olabildiğince açık bir şekilde incelenmesidir. Bu noktaya gelmeden önce bir takım temel terim ve yorumlara özet olarak değinilerek SQED ayar teorisi yaparken karşılaşılacak olan kavramlar önceden verilmektedir. Birinci bölümde, modern teorik fizikte simetri kavramı ve önemi üzerinde durulmuş, simetrinin doğayı anlama yolundaki hayati öneminden bahsederek simetri ve korunum yasaları arasındaki bağa özet olarak değinilmiştir. Daha sonra tek parçacık için klasik hareket denklemlerini veren Euler-Lagrange denkleminden başlayarak sırasıyla klasik alanlar ve kuantum alanların bazı temel örnekleri de verilmiştir. Spinörler ve uzay zaman simetrileri gibi temel kuantum alan teorisi kavramları üzerinde durulduktan sonra en basit süpersimetrik model olan Wess-Zumino modeline değinilmiştir. Süpersimetri cebri, süpersimetri üreteçleri ve süper simetrinin genellemeleri (extensions) gibi kavramlar verildikten sonra süpersimetri cebrinin altında yatan varsayımlar (Haag, Lopusanski ve Sohnius) ve sonuçlarından bahsederek süpersimetrinin uzay zaman simetrileri ile iç simetrileri nasıl birleştirdiği üzerinde durulmuştur. Daha sonra, süper uzay formalizmi ve süper uzayda tanımlı kiral (skaler) ve vektör alanlar ayrıntılı olarak gösterilmiştir.

İkinci bölümde ise, birinci bölümde elde edilen sonuçlarda kullanılarak kuantum elektrodinamiğinin süpersimetrik genellemesini veren eylem entegrali N=1 için U(1) ayar dönüşümleri de kullanılarak elde edilmiş, hesaplar ayrıntılı olarak gösterilmiştir. Daha sonra Fayet-Iliopoulos modelinde süpersimetri ve ayar kırılımı mekanizmaları gösterilmiştir.

SUPERSYMMETRIC QUANTUM ELECTRODYNAMICS

SUMMARY

The purpose of this thesis is to analyze supersymmetric quantum electrodynamics, for N=1. Before doing this, some necessary basic notions and comments are touched upon, while also presenting the required concepts of SQED gauge theory. Chapter 1 includes the concept and importance of symmetry in modern physics, the vital importance of symmetry in understanding nature, and the link between symmetry and conservation laws. Afterwards, starting with the Euler-Langrange equation which gives the equation of motion of single particle, some basic examples of classical fields and quantum fields, respectively, are given. After presenting some core quantum field theory concepts such as, spinors and space-time symmetry, the Wess-Zumino model – the simplest supersymmetric model – is briefly mentioned. Subsequent to presenting the supersymmetry algebra, supersymmetry generators, and extensions of supersymmetry, the assumptions underlying supersymmetry algebra (Haag, Lopunsanski, and Sohnius) and the later conclusions are discussed, while also explaining how supersymmetry unifies space-time symmetry and internal symmetry. Then, super space formalism and chiral and vector fields defined in super space are shown explicitly.

The conclusions that were drawn in chapter 1 and the action integral with constraints from U(1) gauge transformations are used to construct the supersymmetric generalization of quantum electrodynamics, for N=1, and calculational details are studied. Later on, supersymmetry and gauge breaking mechanisms in the Fayet-Iliopoulos model are presented.

İÇİNDEKİLER

	ÖNSÖZ	**ii**
	ÖZET	**iii**
	SUMMARY	**iv**
	İÇİNDEKİLER	**v**
	KISALTMALAR	**vi**
	ŞEKİL LİSTESİ	**vii**
	NOTASYON	**viii**
1.	**GİRİŞ; SÜPERSİMETRİYE GİRİŞ VE BAZI TEMEL KAVRAMLARA KISA BİR BAKIŞ**	**1**
1.1	Simetri Kavramı, Simetri Kırılımı; Genel bir Bakış	1
1.2	Kuantum Alanlar ve Ayar Grupları	2
1.2.1	Klasik Alanlar	2
1.2.2	Kanonik(ikinci) Kuantizasyon, Klein-Gordon Denklemi	3
1.2.3	Lorentz Dönüşümleri, Spinörler, Weyl Spinör Temsili	4
1.2.4	İç Simetriler ve Ayar Alanları	7
1.2.5	Wess-Zumino, En Basit Süpersimetrik Lagrange	8
1.2.6	Süpersimetri Üreteçleri, Süpersimetri Cebri, Genişletilmiş Süpersimetri	9
1.2.7	Coleman Mandula ve Haag-Lopusanski-Sohnius	11
1.2.8	Süperalanlar ve Süperuzay	12
1.2.9	Kiral (Skaler) Süperalanları	15
1.2.10	Vektör Süperalanları	21
2.	**SÜPERSİMETRİK KUANTUM ELEKTRODİNAMİĞİ**	**29**
2.1	N=1 Süpersimetrik Kuantum Elektrodinamiği (SQED), Fayet-Iliopoulos Model	29
	KAYNAKLAR	**38**
	EKLER	**39**

KISALTMALAR

SQED : Süpersimetrik Kuantum Elektrodinamiği
SP : Süper Potansiyel
FI : Fayet Iliopoulos
SM : Standart Model

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1:Süpersimetri kırılımı…….. 36
Şekil 1:Süpersimetri kırılımı…….. 37

NOTASYON

Metrik:

$\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$

σ Matrisleri:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^m \sigma_m = \begin{pmatrix} P_0 - P_3 & P_1 - iP_3 \\ P_0 - iP_3 & P_0 + P_3 \end{pmatrix}$$

Birimler:

$\hbar = c = 1$

Grassmann sayıları:

$\theta^2 = \theta^\alpha \theta_\alpha, \ \overline{\theta}^2 = \overline{\theta}_{\dot{\alpha}} \overline{\theta}^{\dot{\alpha}} \qquad \alpha = 1,2 \ \ \dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$

1. GİRİŞ; SÜPERSİMETRİYE GİRİŞ VE BAZI TEMEL KAVRAMLARA KISA BİR BAKIŞ

1.1 Simetri Kavramı, Simetri Kırılımı; Genel bir Bakış

Bugün modern fiziğin geldiği noktaya bakıldığında doğayı matematiksel olarak tasvir eden fiziksel modellerin merkezinde simetri kavramının olduğu görülür. Enerjinin korunumu, lineer momentumun korunumu ve açısal momentumun korunumu temel fizik eğitiminin özünü oluşturan kavramlardır. Noether teoreminden ([1], bölüm 4) biliyoruz ki, uzay-zaman ötelemeleri ve uzaysal dönmelerle ilgili simetrilerin her biri ayrı bir korunum yasasını yansıtır. Örneğin fizik yasaları zaman ötelemeleri altında değişmez kalır yani dün ne ise bugünde aynıdır ve gelecekte de aynı kalacaktır; Noether teoremi bu simetriyi enerjinin korunumu ile ilişkilendirir. Parçacık fiziğinin standart modeli, fizik yasalarını invaryant (yani değişmez) bırakan iç dönmelerin grubu ile tanımlanır ve bu dönmeler ayar (gauge) dönüşümleri olarak isimlendirilir. Ayar dönüşümleri fiziksel süreçleri anlamamızda hayati öneme sahiptirler. Burada süpersimetri ile yeni olarak sunulan şey; farklı istatistiksel dağılımlarda olan fermiyonlar ve bozonlar arasında ki dönmelerin uzay zaman simetrileriyle birleştirilmesidir. Daha sade bir ifade ile "süpersimetri, belirli Lagrange alan teorisi modellerinin bozonik ve fermiyonik alanları arasındaki simetridir"[2].

Süpersimetri her parçacığın ve onun süper eşinin aynı kütleye sahip olması gerektiğini öngörür. Şimdiye kadar süpersimetrik bir eş parçacığın gözlenememiş olmasını ise gözlemlediğimiz uzayda süpersimetrinin kırılmış olmasına bağlarız. Bununla ilgili olarak ayrıntılı bir gösterim bölüm 2 de Fayet-Ilıopoulus model de değinilecektir. Ayrıca bununla ilgili olarak ([3]' den 4,6 ve 7. Bölümlere bakılabilir)

1.2 Kuantum Alanlar ve Ayar Grupları

1.2.1 Klasik Alanlar

Kuantum alanlara geçmeden önce kısaca klasik alanlara bakabiliriz, böylece alan kavramı üzerinde de en temelden durmuş olabiliriz. Klasik mekanikten, tek bir parçacık için Lagrangian

$$L = T - V \tag{1.1}$$

olarak verilir. Burada T, kinetik enerji ve V de potansiyel enerjidir. Buna göre eylem integrali ve onu minimize eden Lagrangian veren Euler-Lagrange denklemi

$$S = \int dtL(q, \dot{q}), \quad \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \tag{1.2}$$

olarak verilir. Eğer sistem N parçacıktan oluşan bir parçacık sistemini temsil ediyorsa yukarıdaki ifade

$$S = \int dtL(q_\alpha, \dot{q}_\alpha), \qquad \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1,2, \dots, N \tag{1.3}$$

olur. N→∞ limiti için q_α genelleştirilmiş koordinatları (ayrık koordinatlar) yerine sistemin tamamını kaplayan $\phi(\vec{x})$ sürekli fonksiyonları, genelleştirilmiş koordinatlar olarak alınır (ayrıntılar için [4]). Bu da genelleştirilmiş koordinatlar olarak parçacık yörüngeleri (q_α) yerine, alan genlikleri (ϕ olarak yeniden isimlendirilecek olan) haline dönüşmesi demektir. Eylem integralini her bir $\vec{x}$ koordinatında tanımlanmış bir fonksiyonun terimleri türünden yeniden Lagrange yoğunluğu ile birlikte yazılırsa

$$S = \int dtL\left(\phi(\vec{x}), \dot{\phi}(\vec{x})\right) = \int \iiint_{\text{tümuzay}} \mathcal{L}\left(\phi(\vec{x}), \dot{\phi}(\vec{x})\right) d^3\vec{x}dt \tag{1.4}$$

olur. Bunu minimize eden ilgili Euler-Lagrange denklemi ise $\mathcal{L}$ lagrange yoğunluğu olmak üzere

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = 0 \tag{1.5}$$

dır. Hızlı ve bilindik bir örnek olması açısından (Jackson'ın Elektrodinamiği yada Landau'un Klasik alanlar kitabına bakılabilir) elektrodinamikteki Lagrangian

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{8}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^{\mu}A_{\mu}, \quad F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} \tag{1.6}$$

dır. Burada $A^{\mu} = \left(\phi, \vec{A}\right)$ dört-vektör potansiyeli ve $j^{\mu} = (\rho, \vec{j})$ akım yoğunluğu olmak üzere,

$$\partial_{\mu}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}) - 4\pi j^{\nu} = 0 \quad \textit{(Lorentz ayarı)} \quad \partial^2 A^{\nu} = 4\pi j^{\nu}$$

Böylece bu tanımlarıda kullanarak 1.5 denklemlerini uygulayarak 1.6 Lagrangian minimize eden Maxwell denklemleri yeniden elde edilebilir.

1.2.2 Kanonik(ikinci) Kuantizasyon, Klein-Gordon Denklemi

Buraya kadar alan kavramına bir giriş yapılmış oldu, buradan hareketle tek parçacık kuantum mekaniğinden yola çıkarak Lorentz invaryant bir alan formalizmi elde edilebilir, yapılan şey aslında klasik hareket denklemlerinin, fiziksel gözlemlenebilirler (operatörler) cinsinden elde edilmesidir. Normalde bir sistemi kuantize etmenin yolu fiziksel gözlemlenebilirlerin Hermityen operatörler olarak yeniden yazılmasıdır. Yukarda değinildiği üzere fiziksel gözlemlenebilirler artık alan genlikleridir. Kuantum mekaniğinden tüm parçacıklar bir dalga fonksiyonu ile tanımlanır. Aslında dalga fonksiyonu da bir çeşit alan genliğidir.

Kanonik ya da ikinci kuantizasyon, kısaca dalga fonksiyonun Hermityen bir operatör (yada fiziksel gözlemlenebilir) haline gelmesi demektir. Rölativisttik spin-0 parçacıklar

$$(\partial^2 + m^2)\hat{\phi} = 0 \tag{1.7a}$$

$$\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial t^2} + \left(\partial^2\hat{\phi} + m^2\right)\hat{\phi} = 0 \tag{1.7b}$$

$$\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial t^2} + \omega^2\hat{\phi} = 0, \ \omega = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \tag{1.7c}$$

Klein-Gordon denklemi (ayrıntılar için [4]) ile tanımlanır. Bu alan denklemini veren Lagrange yoğunluğu

$$\mathcal{L} = \partial^{\mu}\hat{\phi}^{\dagger}\partial_{\mu}\hat{\phi} - \hat{\phi}^{\dagger}m^{2}\hat{\phi} \qquad 1.8$$

olur. Burada $\hat{\phi}$, alan genliği operatörü olarak yorumlanır. Hemen hemen her kuantum alan teorisi kitabının(Mandal-Shaw, Peskin-Schroeder vs gibi) özellikle vurguladığı üzere ϕ, $\omega = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ frekanslı bir harmonik salınıcı şeklinde davranır. Buradan hareketle Fourier dönüşümlerini kullanarak sonunda x`e bağlı skaler alan operatörü

$$\hat{\phi}(x) = \int d^3\vec{p}\,\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\left(\hat{a}(\vec{p})e^{-ipx} + \hat{a}^{\dagger}(\vec{p})e^{ipx}\right) \qquad 1.9$$

olarak tanımlanır. Yaratma ve yoketme operatörleri bu salınıcının dinamik değişkenleridir ve bu uzaydaki parçacıkların durumlarını tanımlarlar. Bu operatörler (bozonik yaratma ve yoketme operatörleri) için komütasyon bağıntısı

$$[\hat{a}(\vec{p}), \hat{a}^{\dagger}(\vec{q})] = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p} - \vec{q}) \qquad 1.10$$

dir. Benzer şeyler fotonlar içinde yazılabilir fakat skalerden farklı olarak işin içine ϵ^{μ} kutuplanma parametresi de dahil olur:

$$A^{\mu}(\vec{x}) \sim \int d^3\vec{p}\left(\epsilon^{\mu}(\vec{p})\hat{a}(\vec{p})e^{-ipx} + \epsilon^{*\mu}(\vec{p})\hat{a}^{\dagger}(\vec{p})e^{ipx}\right) \qquad 1.11$$

1.2.3 Lorentz Dönüşümleri, Spinörler, Weyl Spinör Temsili

Buraya kadar bahsedilen alan formalizminden faydalanarak fermiyonların uzay zaman dönmeleri altında nasıl davrandıkları temel olarak görülebilir. Skaler alanlar isminden de anlaşılabileceği üzere Lorentz skalerleri olarak dönüşürler. Bu şekilde dönüşen bir ϕ alanı, sonsuz küçük koordinat dönüşümleri altında

$$\phi'(x') = \phi(x) \qquad 1.12$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\phi'(x') &= \phi(x') + \delta\phi(x') \\ &= \phi(x + \delta x) + \delta\phi(x + \delta x) \\ &= \phi(x) + \delta x^{\mu}\partial_{\mu}\phi(x) + \delta\left(\phi(x) + \delta x^{\mu}\partial_{\mu}\phi(x)\right)\end{aligned}$$

$$= \phi(x) + \delta\phi(x) + \delta x^{\mu}\partial_{\mu}\phi(x)$$

$$= \phi'(x) + \delta x^{\mu}\left(\partial_{\mu}\phi(x)\right)$$

$$\Longrightarrow \phi'(x) = \phi'(x') - \left(\partial_{\mu}\phi(x)\right)\delta x^{\mu}\ , \quad \text{1.12 şartından}$$

$$= \phi(x) - \left(\partial_{\mu}\phi\right)\delta x^{\mu} \ \text{ olur. Buna göre}$$

$$\phi(x') = \phi(x) + \partial_{\mu}\phi\delta x^{\mu} \quad \longrightarrow \quad \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$$

$$= \phi(x) - \partial_{\mu}\phi\delta x^{\mu} \qquad 1.13$$

olur [4]. Skalerlerden farklı olarak spinör yapılarından dolayı fermiyonlarda durum biraz daha karışık hale gelir. Rölativisttik olmayan $spin - \frac{1}{2}$ durumları için uzaysal dönmeler (kuantum mekaniğinden, Sakurai)

$$\psi \to e^{-i\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}}\psi \qquad 1.14$$

şeklindedir. Burada $\{\sigma_i\}$ ler SU(2) dönüşümlerinden sorumlu Pauli matrisleridir ([3] bölüm1). Uzay-zaman dönmelerin 4-boyuttaki genellemesi Lorentz grubunu verir. Bu uzayı üreten ve 4-vektöre etki eden üreteçler " $J_i, K_m;\ i,m = 1,2,3$ " $\left(M_{0i} = -K_i,\ J_k = \varepsilon_{kij}M_{ij}\right)$ olmak üzere aşağıdaki komütasyon bağıntılarını sağlarlar:

$$\left.\begin{array}{l} [J_i, J_k] = i\varepsilon_{ikl}J_l \\ [J_i, K_l] = i\varepsilon_{ilm}J_m \\ \left[K_i, K_j\right] = -i\varepsilon_{ijk}K_k \end{array}\right\} \qquad 1.15$$

Burada K_m Lorentz boost (zamansal-yada hız dönmeleri) ve J_i'lerse uzaysal dönmeler den sorumlu üreteçlerdir. Bu üreteçleri daha işimize gelecek şekilde yeniden tanımlamakta bir sakınca yoktur. Şöyle ki

$$S_i := \frac{1}{2}(J_i + i\,K_i) \qquad 1.16a$$

$$T_i := \frac{1}{2}(J_i - i\,K_i) \qquad 1.16b$$

Buna göre {J, K}→{S,T} dönüşümü yaptıktan sonra 1.15 komütasyon bağıntılarını yeniden yazarsak (1.5 den de faydalanarak)

$$\left.\begin{aligned}\left[S_i, S_j\right] &= i\varepsilon_{ijk}S_k \\ \left[T_i, T_j\right] &= i\varepsilon_{ijk}T_k \\ \left[T_i, S_j\right] &= 0\end{aligned}\right\} \qquad 1.17$$

şeklini alır. Grup teorisi, bu sonuca dayanarak SO(1,3)≅SU(2)×SU(2) şeklinde, Lorentz grubunun birbirinden bağımsız iki alt grubuna indirgenebileceğini söyler. Dolayısıyla durumlar, birbirinden bağımsız iki-bileşenli spinör temsili(Weyl spinörleri) olarak gösterilebilir(detaylar ve daha fazlası için [5], bölüm 1.1). Bu temsiller χ^{α} ve onun eşlenik temsili $\overline{\chi}_{\dot{\alpha}}$ spinörleri ile gösterilir. Burada $\alpha = 1,2\ ve,$ $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$ olmak üzere her iki parçacık birbirine zıt işaretli $\frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|}$ (helisite) ye sahiptirler ve, $\overline{\chi}_{\dot{\alpha}}$, $+1/2$ yada sağ elli helisiteye sahip ve aynı şekilde χ_{α} ,$-1/2$ yada sol elli helisiteye sahip denir. Bu temsilin en önemli özelliği diğer tüm temsillerin bu temsilin elemanları cinsinden yazılabilmesidir. 4-bileşenli Dirac spinörü bu ikisinin kombinasyonu olan

$$\psi_D = \begin{pmatrix}\chi^{\alpha} \\ \overline{\chi}_{\dot{\alpha}}\end{pmatrix} \qquad 1.18$$

ve Dirac denklemi

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi = 0 \qquad 1.19$$

olmak üzere

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu}\ ,$$

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix}0_{2\times2} & \sigma^{\mu} \\ \overline{\sigma}^{\mu} & 0_{2\times2}\end{pmatrix},\ \sigma^{\mu} = (1_{2\times2}, \vec{\sigma}) \text{ ve } \overline{\sigma}^{\mu} = (1_{2\times2}, -\vec{\sigma}) \qquad 1.20$$

ile tanımlanırlar. Bu denklemde σ^{μ} hem noktalı hemde noktasız indisler taşır bir nevi her iki temsil arasındaki geçişleri sağlar ([5],chapter1); $\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}}$ ve $\left(\overline{\sigma}^{\mu}\right)^{\alpha\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\mu}{}_{\beta\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$ ile tanımlanır. Burada $\varepsilon^{\alpha\beta}$ ve $\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$ spinör temsillerinin indis çıkarma ve indirme işlemini yapan Levi-Civita sembolleridir. Dirac alan denklemi $\overline{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^{0}$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_D = \overline{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi \qquad 1.21$$

ile tanımlanır. Burada $\overline{\psi}\psi$ Lorentz skaleri olarak dönüşür.

1.2.4 İç Simetriler ve Ayar Alanları

Bu kısımda vektör alanları (foton gibi), kütleli alanlar ve iç simetriler üzerinde durulmaya çalışılacak ve temel fikir olarak "ne tür dönüşümler yapılmalı ki biz yine aynı fiziği elde edelim" sorusu üzerinde durulacaktır. Aslına bakılırsa alan teorisi kitapları, genel (review) makale türü kaynaklara bakıldığında bu sorunun değişik şekillerdeki ifadelerine rastlanabilir. Bunlardan en belirgin olanları yukarıdakine ek olara temelde "belirli dönüşümler altında invaryant kalan Lagrangian (dolayısıyla fizik) nedir, yada belirli bir Lagrangian'ı invaryant bırakan dönüşümler nelerdir" sorusu üzerine odaklanmaktadır.

α sabit bir faz açısı olmak üzere $\psi_D \rightarrow e^{i\alpha}\psi_D$ dönüşümü altında 1.21 Lagrangianı invaryant kalır. Bu tür dönüşümlere global (uzayın her yerinde anlamında) dönüşümler denir. Fakat α uzay-zamanın bir fonksiyonu ise türev teriminden dolayı global dönüşümdeki gibi yapamayız. Bu durumda türev ve potansiyel terimlerde de bi takım modifikasyonlara gitmemiz gerekir (ayrıntılar için [1],[4] bakılabilir).

$$\partial_{\mu} \rightarrow D_{\mu} = \partial_{\mu} - igA_{\mu} \qquad 1.22a$$

ve

$$A_{\mu} \rightarrow A_{\mu} + \partial_{\mu}\alpha(x) \qquad 1.22b$$

olur. Burada D_{μ} kovaryant türev olarak isimlendirilir. Buna göre 1.22 altında 1.21 Lagrangian'ı nin invaryant kaldığı kolaylıkla gösterilebilir. Faz dönüşümleri grubu, U(1) olarak isimlendirilir ve abelyen üniter bir gruptur, aynı zamanda en basit ayar grubudur. A_{μ}, ayar alanları olarak isimlendirilir ve grubun üreteçlerinin sayısı aynı zamanda bu tür kaç tane alan olduğunuda söyler, buna göre U(1) grubunda bir tane foton vardır. En genel olarak bu alanlar

$$A_{\mu}^{a} \rightarrow A_{\mu}^{a} + \partial_{\mu}\alpha^{a} - if^{abc}\alpha^{b}A_{\mu}^{c} \qquad 1.23$$

olarak dönüşür. f^{abc} yapı sabiti olarak isimlendirilir.

1.2.5 Wess-Zumino, En Basit Süpersimetrik Lagrange

Bozonlar ve fermiyonlar arasındaki simetrinin nereden geldiğini görmek için en basit süpersimetrik Lagranian'a bakılabilir. Etkileşme terimsiz, bir ψ Weyl spinörü ve iki bileşenli bir skalerli Lagrangian

$$\mathcal{L}_{WZ} = i\overline{\psi}\,\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \partial^{\mu}A^{*}\partial_{\mu}A \qquad 1.24$$

olarak verilir ve Wess-Zumino Lagrangian'ı olarak bilinir([6], [5], [7], [2] chapter1, ayrıca [3],[8] den ilgili bölümlerin özeti niteliğinde). Bir bozonu infinitezimal olarak fermiyona(yada tam tersi) dönüştürmek istiyoruz, buna göre bu dönüşüm

$$\delta_{\varepsilon}\mathrm{A} = \sqrt{2}\varepsilon\psi \qquad 1.25a$$

ve

$$\delta_{\bar{\varepsilon}}\mathrm{A}^{*} = \sqrt{2}\bar{\varepsilon}\overline{\psi} \qquad 1.25b$$

Burada $\sqrt{2}$ sayısı seçilen konvensiyona bağlıdır (birçok yerde farklı geçer örneğin [2]) spin istatistiği ve kütle boyutuna bakıldığında $\varepsilon\psi = \varepsilon^{\alpha}\psi_{\alpha}$ bir skaler olarak dönüşür, dolayısıyla boyutunun da 1 olması gerekir. Buda ε un iki-bileşenli Grassmann sayısı olması gerektiğini dolayısıyla da (detaylar için EK1)

$$\{\varepsilon^{\alpha}, \varepsilon^{\beta}\} = 0;\ \alpha, \beta = 1{,}2 \text{ ve } [\varepsilon] = (\text{kütle})^{-1/2} \qquad 1.26$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde fermiyonlar için

$$\delta_{\varepsilon}\psi_{\alpha} = \mathrm{i}\sqrt{2}(\sigma^{\mu}\bar{\varepsilon})_{\alpha}\partial_{\mu}\mathrm{A} \qquad 1.27a$$

ve

$$\delta_{\varepsilon}\overline{\psi}_{\dot{\alpha}} = \mathrm{i}\sqrt{2}(\sigma^{\mu}\varepsilon)_{\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\mathrm{A}^{*} \qquad 1.27b$$

olmak üzere $\{\sigma^{\mu}, \sigma^{\nu}\} = 2\delta^{\mu\nu}$ yü de kullanarak yukardaki dönüşümler altında 1.24 Lagranyeni'in varyasyonu

$$\delta\mathcal{L}_{WZ} = -\sqrt{2}\partial_{\mu}\left(\varepsilon\sigma^{\nu}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\nu}\mathrm{A}^{*} + \varepsilon\psi\partial^{\mu}\mathrm{A} + \bar{\varepsilon}\overline{\psi}\partial^{\mu}\mathrm{A}\right) \qquad 1.28$$

şeklinde bir tam türev olarak elde edilir.

1.2.6 Süpersimetri Üreteçleri, Süpersimetri Cebri, Genişletilmiş Süpersimetri

Süpersimetri üreteçleri ("süperyükler") spinörlerdir ve anti komütasyon bağıntıları vardır. Dört boyutlu uzay zamanda N=1 süpersimetrisi için süpersimetri üreteçleri aşağıdaki (anti)komütasyon bağıntılarını sağlayan sol-elli Q_α, ve onun hermityen eşleniği sağ-elli $\overline{Q}_{\dot{\alpha}}$ Weyl spinörleridir:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \left\{\overline{Q}_{\dot{\alpha}}, \overline{Q}_{\dot{\beta}}\right\} = 0 \qquad 1.29a$$

$$\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}} P_m \qquad 1.29b$$

$$[Q_\alpha, P_m] = \left[\overline{Q}_{\dot{\alpha}}, P_m\right] = 0 \qquad 1.29c$$

$$[P_n, P_m] = 0 \qquad 1.29d$$

Süpersimetri cebrini daha büyük boyutlara genişletmek de mümkündür. Böylesi bir durumda 1.29 cebri

$$\left\{Q_\alpha{}^A, \overline{Q}_{\dot{\alpha}_B}\right\} = 2\delta^A{}_B \sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}} P_m \qquad 1.30a$$

$$\left\{Q_\alpha{}^A, Q_\beta{}^B\right\} = \left\{\overline{Q}_{\dot{\alpha}_A}, \overline{Q}_{\dot{\beta}_B}\right\} = 0 \; ; \quad \text{A,B=1,2,….N} \qquad 1.30b$$

$$\left[Q_\alpha{}^A, P_m\right] = \left[\overline{Q}_{\dot{\alpha}_A}, P_m\right] = 0 \qquad 1.30c$$

şeklini alır. Bu cebire genişletilmiş (extended) süpersimetri denir ve N ile gösterilir. $(\alpha, \beta, \ldots., \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \ldots)$ Yunan indisleri 1 ve 2 değerlerini alır. $(\mathrm{m}, \mathrm{n}, \ldots.)$ Latin indisleri ise 1, 2, 3, 4 değerlerini alır ve Lorentz 4-vektörlerini tanımlarlar. $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots.)$ büyük harf indisleri ise 1'den başlayıp $\mathrm{N} \geq 1$`e kadar olan tam sayılara tekabül eder ve bir iç simetri ile ilişkilidir. N=1 süpersimetri cebri, $\mathrm{N} > 1$ ise genişletilmiş süpersimetri cebri olarak isimlendirilir.

Kütleli parçacıklar:

Şimdi kütleli süpersimetri cebrinin temsiline bakılabilir. $P^m = (m, 0,0,0)$ gözlem çerçevesine geçilirse

$$\sigma^{\mathrm{m}}\mathrm{P_m} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \text{ yada } \sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}} P_m = \delta_{\alpha\dot{\alpha}} m \qquad 1.30c$$

olur. Buna göre 1.30a,b yi yeniden yazarsak

$$\left\{Q_\alpha{}^A, \overline{Q}_{\dot\alpha_B}\right\} = 2m\delta^A{}_B\delta_{\alpha\dot\alpha} \qquad 1.31a$$

$$\left\{Q_\alpha{}^A, Q_\beta{}^B\right\} = \left\{\overline{Q}_{\dot\alpha_A}, \overline{Q}_{\dot\beta_B}\right\} = 0\ ; \quad \text{A,B=1,2,….N} \qquad 1.31b$$

haline gelir. $(a_\alpha{}^A)^\dagger$ ve $a_\alpha{}^A$ sırasıyla fermiyonik yaratma ve yok etme operatörleri olmak üzere, bunlar arasındaki anti komütasyon bağıntıları ([7], bölüm 1):

$$\{a_\alpha{}^A, (a_\alpha{}^A)^\dagger\} = \delta^A{}_B\delta_\alpha{}^\beta \qquad 1.32a$$

$$\left\{a_\alpha{}^A, a_\beta{}^B\right\} = \left\{(a_\alpha{}^A)^\dagger, \left(a_\beta{}^B\right)^\dagger\right\} = 0\ ; \quad \text{A,B=1,2,….N} \qquad 1.32b$$

olarak verilir. 1.31 ve 1.32 karşılaştırılırsa

$$a_\alpha{}^A = \frac{1}{\sqrt{2m}}Q_\alpha{}^A \quad \text{ve} \quad (a_\alpha{}^A)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m}}\overline{Q}_{\dot\alpha_A} \qquad 1.33$$

olduğu görülebilir. $|\Omega\rangle$

$$a_\alpha{}^A|\Omega\rangle = 0 \qquad 1.34$$

şartı ile tanımlı Clifford vakumu olmak üzere; durumlar, yaratma operatörü $(a_\alpha{}^A)^\dagger$ nın $|\Omega\rangle$ ya uygulanmasıyla elde edilir:

$$\left|\Omega^{(\mathrm{n})\alpha_1\ldots\alpha_\mathrm{n}}_{\mathrm{A_1}\ldots\ldots\ldots\ldots\mathrm{A_n}}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{n!}}}\left(a_{\alpha_1}{}^{A_1}\right)^\dagger \ldots\ldots \left(a_{\alpha_n}{}^{A_n}\right)^\dagger|\Omega\rangle \qquad 1.35$$

$(a_\alpha{}^A)^\dagger$ antikomütatif olduğundan dolayı; $\Omega^{(\mathrm{n})}$, $\mathrm{A_i}, \alpha_\mathrm{i} \leftrightarrow \mathrm{A_j}, \alpha_\mathrm{j}$ indis çiftlerinin değişmesi altında anti simetriktir. Her bir indis çifti için 2N tane olası kombinasyon mümkündür, dolayısıyla verilen bir n değeri için, $\binom{2\mathrm{N}}{\mathrm{n}}$ olası durum vardır. Tüm olası n durumlarının sayısının toplamı, temsilin boyutunu verir:

$$d = \sum_{n=0}^{2N}\binom{2N}{n} = 2^{2N} \qquad 1.36$$

Eğer $|\Omega\rangle$ dejenere (yoz durumlar) değilse; 1.35, indirgenemez kütleli multiplet olarak isimlendirilir. 2^{2N-1} bozonik ve 2^{2N-1} tane fermiyonik olmak üzere 2^{2N} boyutludur. Temel multiplette en yüksek spin $\frac{1}{2}N$ dir ve sadece bir defa ortaya çıkar.

Kütlesiz parçacıklar:

Kütlesiz tek parçacık durumları $\vec{\mathrm{p}}$, 3 momentumları ve $\Lambda = \frac{\vec{\mathrm{s}}\cdot\vec{\mathrm{p}}}{|\vec{\mathrm{p}}|}$ helisiteleri ile karakterize edilir.

$P = (\mathrm{E}, 0, 0, \mathrm{E})$ olmak üzere ,genişletilmiş (N > 1) süpersimetri cebri 1.30a dan

$$\left\{Q_\alpha{}^A, \overline{Q}_{\dot\alpha_B}\right\} = 2E\delta^A{}_B(\sigma^0 + \sigma^3)_{\alpha\dot\alpha} \qquad 1.37$$

ve

$$\left\{{Q_1}^A, \overline{Q}_{\dot{1}_B}\right\} = 4E\delta^A{}_B \ , \quad \left\{{Q_1}^A, \overline{Q}_{\dot{2}_B}\right\} = \left\{{Q_2}^A, \overline{Q}_{\dot{1}_B}\right\} = \left\{{Q_2}^A, \overline{Q}_{\dot{2}_B}\right\} = 0$$

$$A, B = 1,2, \dots, N \qquad 1.38$$

Buna göre 1.32 den 1.33 göz önüne alınarak, $P = (\mathrm{E}, 0,0, \mathrm{E})$ momentumlu ve λ özdeğerli heliseteye sahip durumlar $|\Omega\rangle = |\mathrm{E},\ \lambda\rangle$,ve $a_\alpha{}^A|\Omega\rangle = 0$ olmak üzere süpermultiplet:

$$|\Omega\rangle = |\mathrm{E},\ \lambda\rangle$$

$$(a_\alpha{}^A)^\dagger|\Omega\rangle = \left|\mathrm{E}, \lambda + \tfrac{1}{2}; \alpha\right\rangle$$

$$(a_\alpha{}^A)^\dagger \left(a_\beta{}^A\right)^\dagger |\Omega\rangle = |\mathrm{E}, \lambda + 1; [\alpha, \beta]\rangle \qquad 1.39$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\left(a_{\alpha_1}{}^A\right)^\dagger \left(a_{\alpha_2}{}^A\right)^\dagger \dots\dots \left(a_{\alpha_N}{}^A\right)^\dagger |\Omega\rangle = \left|\mathrm{E}, \lambda + \tfrac{\mathrm{N}}{2}; [\alpha_1 \alpha_2 \dots . \alpha_\mathrm{N}]\right\rangle$$

Kare parantez içindeki ifade anti-komütasyon bağıntısından dolayı tamamen anti-simetriktir, bu nedenle bir durum üzerinde en çok N işlem olabilir. CP simetrisi gereği, $|\Omega\rangle = |\mathrm{E}, -\lambda\rangle$ ya da yukarıdaki şekilde etki eder ve aynı parçacık spektrumunu zıt helisteler için verir. N in maksimum değeri $|\lambda| \leq 1$ (süpersimetrik ayar teorisi- N Yang-Mills teorisi($\lambda = 1$))ye bağlıdır.. Yukardaki eşitliğin son satırındaki en genel ifadede $\lambda = -1$ için N=4 bulunur ve $\lambda = -2$ için N=8 (süpergravite) bulunur. Buradan $\frac{\mathrm{N}}{2} = 2\lambda$ olduğu görülür([2], II. The Supersymmetry Algebra). Sonuç olarak N=4 Yang-Mills ve N=8 Süpergravite maksimum açılımlardır.

1.2.7 Coleman Mandula ve Haag-Lopusanski-Sohnius

S-matrisi ve onun simetrileriyle ilgili olan en geçerli teori Coleman-Mandula teoremidir. Haag-Lopussanski ve Sohnius ise bu teoremin bir genişletilmişini, teorideki bir takım varsayımları esneterek elde etmiştir. Matematiksel bir takım detayları bir kenara bırakıp doğrudan dikkat çekici sonuçları şu şekilde özetlemek mümkündür (detaylar için:[9], [7]bölüm1, [5] bölüm 2,[10]):

- Coleman Mandula: S-matrisinin olası tüm simetrileri, Lorentz skalerleri olarak dönüşen Lie grupları ve Poincare grubundan oluşur. Uzay zaman simetrilerin ile iç simetriler ayrıktır.
- Süpersimetri bir takım antikomütatif üreteçleri kullanarak uzay zaman simetrilerini iç simetrilerle birleştirir.
- Haag-Lopusanski-Sohnius: Süpersimetri, uzay zaman simetrilerinin olası tek genişlemesidir (extension).

1.2.8 Süperalanlar ve Süperuzay

Eğer süpersimetri doğanın temel bir simetrisi ise, süpersimetri üreteçleri bir alan üzerine etki etmeli ve alandaki istatistiksel (bozon ↔ fermiyon) yapıyı bir durumdan diğerine çevirmelidir. Süper alanlar, süpersimetri temsillerinin açık bir gösterimidir. Minkowski uzayında momentum operatörü $-i\partial_m$ ötelemeleri olarak düşünülmesi gibi, süpersimetri üreteçleri de, süperuzay da $Q_{\alpha,}, \overline{Q}_{\dot{\alpha}}$ diferansiyel operatörleri ile temsil edilirler. x^m Minkowski koordinatlarına ek olarak, bu uzayda iki tane Grassmann değerli (anti-komütatif) $\theta^\alpha, \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}$ Weyl spinörleri (ters-komütatif) vardır. Bu uzayın noktaları $z^M = \left(x^m, \theta^\alpha, \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\right)$ dir ve süperuzay koordinatları olarak isimlendirilir. Buradan hareketle; $\Phi\left(x, \theta, \overline{\theta}\right)$ gibi, bileşenleri bozonlar ve onların fermiyonik eşleri olan bir alan bulunmalıdır. Bu alan süperalan olarak isimlendirilir ve bir skaler olarak davranır. Süpersimetri cebri, antikomütatif parametreli (eşitlik 1.30) bir Lie cebridir ve süpersimetri dönüşümleri grup seviyesinde

$$G\left(x, \theta, \overline{\theta}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\mathrm{x}^{\mathrm{m}}\mathrm{P}_{\mathrm{m}}+\theta\mathrm{Q}+\overline{\theta}\,\overline{\mathrm{Q}}\right)} \qquad 1.40$$

şeklinde olur [7]. Buna göre süperuzayda bir süperalana etki eden süpersimetri dönüşümü

$$\Phi\left(x, \theta, \overline{\theta}\right) = G\left(x, \theta, \overline{\theta}\right)\Phi(0,0,0)$$

$$\Phi\left(x, \theta, \overline{\theta}\right) \longrightarrow G\left(0, \xi, \overline{\xi}\right)G\left(x, \theta, \overline{\theta}\right)\Phi(0,0,0)$$

$$G\left(0, \xi, \overline{\xi}\right)G\left(x, \theta, \overline{\theta}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\xi\mathrm{Q}+\overline{\xi}\,\overline{\mathrm{Q}}\right)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\mathrm{x}^{\mathrm{m}}\mathrm{P}_{\mathrm{m}}+\theta\mathrm{Q}+\overline{\theta}\,\overline{\mathrm{Q}}\right)} \qquad 1.41$$

olur. Antikomütasyon bağıntıları ve Baker-Hausdorff formülü uygulanırsa (EK B)

$$G(0,\xi,\overline{\xi})G(x,\theta,\overline{\theta}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[-\left(\mathrm{x^m}+\mathrm{i}\theta\sigma^{\mathrm{m}}\overline{\xi}-\mathrm{i}\xi\sigma^{\mathrm{m}}\overline{\theta}\right)\mathrm{P_m}+(\theta+\xi)\mathrm{Q}+\left(\overline{\theta}+\overline{\xi}\right)\overline{\mathrm{Q}}\right]} \qquad 1.42$$

olur. Buradan, süpersimetri dönüşümleri süperuzay koordinatlarını

$$\left(\mathrm{x^m},\theta,\overline{\theta}\right) \longrightarrow \left(\mathrm{x^m}+\mathrm{i}\theta\sigma^{\mathrm{m}}\overline{\xi}-\mathrm{i}\xi\sigma^{\mathrm{m}}\overline{\theta},\theta+\xi,\overline{\theta}+\overline{\xi}\right) \qquad 1.43$$

olarak dönüştürür. Bu nedenle uzay zaman dönmesi

$$\delta\mathrm{x^m} = \mathrm{i}\theta\sigma^{\mathrm{m}}\mathrm{d}\overline{\theta} - \mathrm{i}\mathrm{d}\theta\sigma^{\mathrm{m}}\overline{\theta}\ ,\ \delta\theta = \delta\overline{\theta} = 0 \qquad 1.44$$

dır ve 1.43 de dθ infinitezimal elemanı ξ olarak alınmıştır. Buradan hareketle $Q, ve\ \overline{\mathrm{Q}}$ `ı süperuzayda diferansiyel operatörler olarak

$$Q_\alpha = \partial_\alpha - i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m \qquad 1.45a$$

$$\overline{Q}_{\dot{\alpha}} = -\overline{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m \qquad 1.45b$$

şeklinde tanımlamak mümkündür ([7], bölüm IV). Burada $\mathrm{P_m} = -i\partial_m$ dir ve 1.45 in 1.30 `u sağladığı kolaylıkla gösterilebilir.

Süpersimetrinin doğada nasıl işlediğini görmek için, önceki başlıklarda da değinildiği üzere süpersimetri eylemi invaryant bırakan dönüşümler üzerinde durulmalı, yani hareket denklemleri elde edilmelidir. Sadece hareket denklemlerinin elde edilmesi değil, aynı zamanda bu süreç boyunca izlenen yolda birçok adımda süpersimetrik bir evren hakkında birçok bilgi sunmaktadır. Şimdi süperuzayda en genel süpersimetri eylemine dönecek olursak entegral formda

$$\mathrm{S} = \int d^4x \int d^2\theta d^2\overline{\theta}F\left(\theta,\overline{\theta}\right) + \int d^4x \int d^2\theta\ \mathrm{I}(\theta) + \int d^4x \int d^2\overline{\theta}\ \overline{\mathrm{I}}\left(\overline{\theta}\right) \qquad 1.46$$

dır. Grassmann parametrelerine göre entegral ve diferansiyel alma işlemleri temel olarak:

$$\int d\theta = 0, \qquad \int d\theta\,\theta = 1 \qquad 1.47a$$

$$\int d^2\theta\,\theta^2 = \int d^2\overline{\theta}\ \overline{\theta}^2 = \int d^4\theta\,\theta^2\overline{\theta}^2 = 1 \qquad 1.47b$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\gamma}\left(\theta^\alpha\theta^\beta\right) = \delta^{\alpha\gamma}\theta^\beta - \theta^\alpha\delta^{\beta\gamma} \qquad 1.47c$$

şeklinde olur. (detaylar ve daha fazlası için:[5], bölüm 6.1,6.2)1.46 entegralinde F ve I fonksiyonları için sırasıyla sadece en büyük bileşenler olan $\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}$ lı ve $\theta\theta$ bileşenler integre edilir, kalan terimlerin entegrali sıfır olur. Bu parametreler, θ lar iki bileşenli olduğu için en büyük bileşenlerdir($\theta\theta\theta = 0$ olması nedeniyle). Süpersimetri dönüşümleri diferansiyel operatörler olarak davrandıkları için

Lagrangian'da kalan terimler bir tam diferansiyel olur. Bu da süperuzayda süperalanlardan kurulan her eylemin otomatik olarak süpersimetri dönüşümleri altında invaryant olması anlamına gelir.

Kovaryant türevlerse

$$D_\alpha = \partial_\alpha + i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m \qquad 1.48a$$

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}} = -\overline{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m \qquad 1.48b$$

olarak tanımlanır ve

$$\{D_{\alpha,}, \overline{D}_{\dot{\alpha}}\} = -2i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}P_m, \quad \{D_\alpha, D_\beta\} = \{\overline{D}_{\dot{\alpha}}, \overline{D}_{\dot{\beta}}\} = 0$$

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \overline{Q}_{\dot{\beta}}\} = \{\overline{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{\overline{D}_{\dot{\alpha}}, \overline{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \qquad 1.49$$

anti komütasyon bağıntılarını sağlarlar.

En genel süper alan açılımı (bileşenleri cinsinden), antikomütatif koordinatların açılımlarıyla tanımlanmış olan süperuzay koordinatlarının fonksiyonlarıdır. $\theta^3 = \overline{\theta}^3 = 0$ olması nedeniyle açılım da en yüksek mertebe $\theta^2\,\overline{\theta}^2$ li ifadedir, buna göre:

$$F(x,\theta,\overline{\theta}) = f(x) + \theta\phi(x) + \overline{\theta}\,\overline{\chi}(x) + \theta^2 m(x) + \overline{\theta}^2 n(x) + \theta\sigma^m\overline{\theta}\,v_m(x) + \theta^2\overline{\theta}\,\overline{\lambda} + \overline{\theta}^2\theta\psi + \theta^2\overline{\theta}^2 d(x) \qquad 1.50$$

$$F(x,\theta,\overline{\theta}) = b + \theta\chi + \overline{\theta}\,\overline{\phi} + \theta^2 m + \overline{\theta}^2 n + \theta\sigma^m\overline{\theta}\,a_m + \theta^2\overline{\theta}\,\overline{\psi} + \overline{\theta}^2\theta\lambda + \theta^2\overline{\theta}^2 d \qquad 1.50$$

olur. Burada *f, m, n, ve d* x in fonksiyonu olan skalerler, a_m bir vektör ve χ, λ, $\overline{\psi}$, $\overline{\phi}$ sol- ve sağ-elli spinörlerdir ve hepside x in fonksiyonudur. F de bileşen alanlar süpersimetri cebrinin bir temsilini oluşturur.

1.2.9 Kiral (Skaler) Süperalanları

İlk bahsedeceğimiz süpersimetrik alan, kütleli Yang-Mills teorileri kurmak için madde fermiyonlarının genellemesi olan kiral süperalanları olacak. Bu isim SM fermiyonlarının kiral olmasından yani sol- ve sağ-elli bileşenlerin SU(2)xU(1) altında farklı şekilde dönüşmesinden gelir. Bu nedenle iki tane fermiyonik serbestlik derecesine sahip (SM fermiyonunun bileşenlerini sol- ve sağ-elli bileşenler olarak tanımlayan) süperalanlara ihtiyaç duyulur. Bu alanlar SM fermiyonları ile birlikte bunların bozonik eşleri olan sfermiyonlarıda içermelidirler. Buna göre kütle alanları (indirgenemez) $\Phi\left(x,\theta,\overline{\theta}\right)$ sol-elli skaler multipletinin, yani kiral süperalanın bileşenleri ise,

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \qquad 1.51$$

şartını sağlamalıdır. Φ alanı tüm süperuzay üzerinde değil de, sol-elli, $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\overline{\theta}$, ile parametrize edilen alt uzay üzerinde tanımlıdır ve bu parametrizasyona göre $\overline{\theta}$ `a açık bir bağımlılığı yoktur. Bu nedenle $\Phi\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) = \Phi(y,\theta)$ olur ve anti-komütatif Grassmann değişkenleri cinsinden Taylor açılımı:

$$\Phi(y,\theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta^2 F(y) \qquad 1.52$$

şeklinde yazılabilir. Burada 1.48a,b için $\overline{D}_{\dot{\alpha}}\left(x^m + i\theta\sigma^m\overline{\theta}\right) = 0,\ ve\ \overline{D}_{\dot{\alpha}}\theta = 0$ olduğunu göstermek oldukça kolaydır (EK B2). Buna göre yukarda yeni olarak tanımlanan temsil için kovaryant türevler

$$D_\alpha \longrightarrow D_\alpha = \partial_\alpha + 2i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m \qquad 1.53a$$

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}} \longrightarrow \overline{D}_{\dot{\alpha}} = -\overline{\partial}_{\dot{\alpha}} \qquad 1.53b$$

haline gelir.(EK B3). Bu yeni bazda 1.51 şartını sağlayan skaler alan fonksiyonu 1.52 de verildiği üzere

$$\Phi = \mathrm{A(y)} + \sqrt{2}\theta\psi\mathrm{(y)} + \theta\theta\mathrm{F(y)}$$

dir. Herhangi bir f(y)=f(x+a) gibi bir fonksiyon için Taylor açılımı:

$$f(x+a) = f(x) + af\,'(x) + \tfrac{1}{2!}a^2 f\,''(x) + O(a^3)$$

dır. Buna göre

$$A(y^m) = A\left(x^m + i\theta\sigma^m\overline{\theta}\right)$$

$$= A(x^m) + \left(i\theta\sigma^m\overline{\theta}\right)\partial_m A(x^m) + \frac{i^2}{2}\left(\theta\sigma^m\overline{\theta}\right)\left(\theta\sigma^n\overline{\theta}\right)\partial_m\partial_n A(x^m)$$

$$= A(x^m) + \left(i\theta\sigma^m\overline{\theta}\right)\partial_m A(x^m) - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\eta^{mn}\partial_m\partial_n A(x^m)\right]$$

$$= A(x^m) + \left(i\theta\sigma^m\overline{\theta}\right)\partial_m A(x^m) + \frac{1}{4}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\square A(x^m)$$

olur. (EKB, B1 i de kullanarak) burada $\theta^3\left(=\overline{\theta}^3\right) = 0$ olması dolayısıyla açılımda üst mertebeden terimler sıfırlanır. Aynı şekilde

$$\sqrt{2}\theta\psi(\mathrm{y}) = \sqrt{2}\theta\psi\left(x^m + i\theta\sigma^m\overline{\theta}\right) = \sqrt{2}\theta\psi(x^m) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_m\psi(x)\sigma^m\overline{\theta}$$

olur, ve benzer şekilde $\theta\theta F(y^m) = \theta\theta F\left(x^m + i\theta\sigma^m\overline{\theta}\right) = \theta\theta\mathrm{F}(x^m)$ dir. Sonuç olarak 1.51 şartını sağlayan skaler fonksiyon

$$\Phi = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta^2 F(y)$$

$$= A(x) + i\theta\sigma^m\overline{\theta}\partial_m A(x)$$

$$+\frac{1}{4}\theta^2\overline{\theta}^2\square A(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^2\partial_m\psi(x)\sigma^m\overline{\theta} + \theta^2 F(x) \qquad 1.54$$

olarak bulunur. Bu çözüm 1.51 in en genel çözümüdür. Burada kütle boyutları θ için $-\frac{1}{2}$, Φ alanı için 1, ψ fermiyonik alanı için $\frac{3}{2}$ ve F skaler alanı için 2 olur.

Kiral alanların eşlenikleri anti-kiraldir. Yukarıdakine benzer şekilde anti-kiral alanlar, $y^{\dagger\,m} = x^m - i\theta\sigma^m\overline{\theta}$ eşlenik parametre ve $D_\alpha\overline{\Phi} = 0$ olmak üzere anti-kiral alan

$$\overline{\Phi} = \overline{A}(y^\dagger) + \sqrt{2}\,\overline{\theta}\,\overline{\psi}(y^\dagger) + \theta^2\overline{F}(y^\dagger)$$

$$= \overline{A}(x) - i\theta\sigma^m\overline{\theta}\,\partial_m\overline{A}(x) + \frac{1}{4}\theta^2\overline{\theta}^2\square\overline{A}(x) + \sqrt{2}\,\overline{\theta}\,\overline{\psi}(x)$$

$$+\frac{i}{\sqrt{2}}\overline{\theta}^2\theta\sigma^m\partial_m\overline{\psi}(x) + \overline{\theta}^2\overline{F}(x) \qquad 1.55$$

olur.

Bu bazda kovaryant türevler ise

$$D_\alpha \quad \longrightarrow D_\alpha = \partial_\alpha \qquad 1.56a$$

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}} \quad \longrightarrow \overline{D}_{\dot{\alpha}} = -\overline{\partial}_{\dot{\alpha}} + 2i\theta^{\alpha}\sigma^{m}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m \qquad 1.56b$$

olarak (EK-B, B3 e benzer şekilde) bulunur

Skaler süperalanların çarpımları yine skaler alanları verir. Bunu görmek için Φ_{i} ve Φ_{j} iki skaler alan olmak üzere

$$\Phi_{\mathrm{i}} = A_i(y) + \sqrt{2}\theta\psi_i(y) + \theta^2 F_i(y) \text{ ve}$$

$$\Phi_{\mathrm{j}} = A_j(y) + \sqrt{2}\theta\psi_j(y) + \theta^2 F_j(y)$$

ise , ($\theta^3 \left(= \overline{\theta}^3\right) = 0$) olmak üzere,

$$\Phi_{\mathrm{i}}\Phi_{\mathrm{j}} = \left(A_i(y) + \sqrt{2}\theta\psi_i(y) + \theta^2 F_i(y)\right)\left(A_j(y) + \sqrt{2}\theta\psi_j(y) + \theta^2 F_j(y)\right),$$

$$= A_i(y)A_j(y) + \sqrt{2}\theta A_i(y)\psi_j(y) + \theta^2 A_i(y)F_j(y) + \sqrt{2}\theta\psi_i(y)A_j(y)$$

$$+2\left(\theta\psi_i(y)\right)\left(\theta\psi_j(y)\right) + \theta^2 F_i(y)A_j(y)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_{\mathrm{i}}\Phi_{\mathrm{j}} = A_i(y)A_j(y) + \sqrt{2}\theta\left(A_i(y)\psi_j(y) + \psi_i(y)A_j(y)\right)$$

$$+\theta^2\left(A_i(y)F_j(y) + F_i(y)A_j(y) - \psi_i(y)\psi_j(y)\right) \qquad 1.57$$

1.57 den $\Phi_{\mathrm{i}}\Phi_{\mathrm{j}}$ skaler alanların çarpımlarını yine y, θ nın fonksiyonu olarak buluruz. Buradan $\overline{D}_{\dot{\alpha}}\left(\Phi_{\mathrm{i}}\Phi_{\mathrm{j}}\right) = 0$ olması dolayısı ile (1.53 gereği) bu çarpım sonucu da yine bir sol-elli skaler süper alandır. Benzer şekilde üç skaler alanın çarpımı da yine bir skaler alan $\left(\ \overline{D}_{\dot{\alpha}}\left(\Phi_{\mathrm{i}}\Phi_{\mathrm{j}}\Phi_{\mathrm{k}}\right) = 0 \ \text{olduğundan}\right)$ olur:

$$\Phi_{\mathrm{i}}\Phi_{\mathrm{j}}\Phi_{\mathrm{k}} = A_i(y)A_j(y)A_k(y)$$

$$+\sqrt{2}\theta\left(\psi_i A_j A_k + \psi_j A_k A_i + \psi_k A_i A_j\right)$$

$$+\theta^2\left(F_i A_j A_k + F_j A_k A_i + F_k A_i A_j - \psi_i\psi_j A_k - \psi_j\psi_k A_i - \psi_k\psi_i A_j\right) \qquad 1.58$$

Ancak, ${\Phi_{\mathrm{i}}}^{\dagger}\Phi_{\mathrm{j}} = \overline{\Phi}_{\mathrm{i}}\Phi_{\mathrm{j}}$ çarpımı skaler alan olmaz. İspatsız olarak vereceğimiz üzere 1.54 ve 1.55 in çarpımları:

$$\Rightarrow \quad \Phi_i{}^{\dagger}\Phi_j =$$

$$= A_i{}^{*}(x)A_j(x) + \sqrt{2}\theta\psi_j(x)A_i{}^{*}(x) + \sqrt{2}\,\overline{\theta}\,\overline{\psi}_i(x)A_j(x)$$

$$+\theta^2 A_i{}^{*}(x)F_j(x) + \overline{\theta}^2 F_i{}^{*}(x)A_j(x)$$

$$+\theta^{\alpha}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{m}\left(A_i{}^{*}\partial_m A_j - \partial_m A_i{}^{*}A_j\right) - 2\overline{\psi}_{i\dot{\alpha}}\psi_{j\alpha}\right)$$

$$+\theta^2\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{m}\left(A_i{}^{*}\partial_m\psi_j{}^{\alpha} - \partial_m A_i{}^{*}\psi_j{}^{\alpha}\right) - \sqrt{2}F_j\overline{\psi}_{i\dot{\alpha}}\right)$$

$$+\overline{\theta}^2\theta^{\alpha}\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}{}^{m}\left(\overline{\psi}_i{}^{\dot{\alpha}}\partial_m A_j - \partial_m\overline{\psi}_i{}^{\dot{\alpha}}A_j\right) + \sqrt{2}F_i{}^{*}\psi_{j\alpha}\right)$$

$$+\theta^2\overline{\theta}^2\left(F_i{}^{*}F_j + \frac{1}{4}A_i{}^{*}\Box A_j + \frac{1}{4}\Box A_i{}^{*}A_j - \frac{1}{2}\partial_m A_i{}^{*}\partial^m A_j\right.$$

$$\left. + \frac{i}{2}\partial_m\,\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^{m}\psi_j - \frac{i}{2}\,\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^{m}\partial_m\psi_j\right) \qquad 1.59$$

Şimdi, sadece skaler alanlardan oluşan en genel Lagrangian yazılırsa(1.46 ve 1.47 yi de kullanarak):

$$\mathcal{L} = \Phi_i{}^{\dagger}\Phi_i + \left(g_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right)$$

$$+\left(g_i{}^{*}\Phi_i{}^{\dagger} + \frac{1}{2}m_{ij}{}^{*}\Phi_i{}^{\dagger}\Phi_j{}^{\dagger} + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}{}^{*}\Phi_i{}^{\dagger}\Phi_j{}^{\dagger}\Phi_k{}^{\dagger}\right) \qquad 1.60$$

Buna göre eylem entegralini parçalara ayırabiliriz:

$$S_{\text{kinetik}} = \int d^4x \int d^4\theta\,\Phi_i{}^{\dagger}\Phi_i = \int d^4x\left(\Phi_i{}^{\dagger}\Phi_i\right)\Big|_{\theta\,\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}\text{ bileşeni}} \qquad 1.61$$

Aynı şekilde

$$S_{\text{kütle}} = \frac{1}{2}\int d^4x \int d^2\theta\, m_{ij}\Phi_i\Phi_j = \int d^4x\left(m_{ij}\Phi_i\Phi_j\right)\Big|_{\theta\,\theta\text{ bileşeni}} \qquad 1.62$$

ve

$$S_{\text{etkileşim}} = \frac{1}{3}\int d^4x \int d^2\theta\,\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k = \int d^4x\left(\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right)\Big|_{\theta\,\theta\text{ bileşeni}} \qquad 1.63$$

Eylem entegralinde sıfır olan terimleri çıkarıp Lagrange yoğunluğunu yeniden düzenlersek

$$\mathcal{L} = \Phi_i{}^{\dagger}\Phi_i\big|_{\theta\,\theta\,\bar{\theta}\,\bar{\theta}\ \text{bileşeni}} + \left[\left(g_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right)\Big|_{\theta\,\theta\ \text{bileşeni}} + \begin{pmatrix}\text{hermitik}\\ \text{eşlenik}\end{pmatrix}\Big|_{\bar{\theta}\,\bar{\theta}\ \text{bileşeni}}\right] \quad 1.64$$

olarak bulunur. m_{ij} ve λ_{ijk} çiftlenim katsayıları indislerine göre simetriktir ve y bazından x bazına geçmek $\mathcal{L}$ 'yi değiştirmez. $\mathcal{L}$ yi bileşen alanlar cinsinden yazarsak (1.57,58,59 u yukarıdaki 1.64 de yerine yazarak)

$$S_{kinetik} = \int d^4x \left(F_i{}^*F_i + \frac{1}{4}A_i{}^*\Box A_i + \frac{1}{4}\Box A_i{}^*A_i - \frac{1}{2}\partial_m A_i{}^*\partial^m A_i + \frac{i}{2}\partial_m\,\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^m\psi_i - \frac{i}{2}\,\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^m\partial_m\psi_i\right)$$

$$\mathcal{L}_{kinetik} = \left(F_i{}^*F_i + A_i{}^*\Box A_i + i\partial_m\,\overline{\psi}_i\overline{\sigma}^m\psi_i\right) \quad 1.65$$

ve

$$S_{Süper\ Potansiyel} = \int d^4x \left[\left(g_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right)\Big|_{\theta\,\theta\ \text{bileşeni}} + \begin{pmatrix}\text{hermitik}\\ \text{eşlenik}\end{pmatrix}\Big|_{\bar{\theta}\,\bar{\theta}\ \text{bileşeni}}\right]$$

1.54,57,58 i de kullanarak

$$\mathcal{L}_{SP} = \left\{\left[g_iF_i + \frac{1}{2}m_{ij}\left(A_iF_j + F_iA_j - \psi_i\psi_j\right) + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}\left(F_iA_jA_k + F_jA_kA_i + F_kA_iA_j - \psi_i\psi_jA_k - \psi_j\psi_kA_i - \psi_k\psi_iA_j\right)\right] + \begin{bmatrix}\text{hermitik}\\ \text{eşlenik}\end{bmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}_{SP} = \left\{\left[g_iF_i + m_{ij}\left(A_iF_j - \frac{1}{2}\psi_i\psi_j\right) + \lambda_{ijk}\left(F_iA_jA_k - \psi_i\psi_jA_k\right)\right] + \begin{bmatrix}\text{hermitik}\\ \text{eşlenik}\end{bmatrix}\right\} \quad 1.66$$

olarak elde edilir (Bu bölümle ilgili olarak [11], [7] den bölüm 4 ve 5, [5] bölüm 8 ve 10 , [3] den 3a ve 3b).

1.2.10 Vektör Süperalanları

Yukarda bahsedildiği üzere kiral süperalanlarıyla *spin-0* bozonları ve *spin-*$\frac{1}{2}$ fermiyonları tanımlanır, yani SM`deki Higgs bozonu, kuarklar ve leptonları. Bunlara ek olarak SM`in *spin-1* ayar bozonlarını da tanımlamamız gerekir [3]. Bunun için

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}^{\dagger} \tag{1.67}$$

reellik şartı ile tanımlı olan bir V vektör süper alanı da tanımlanmalıdır. Genel olarak θ ve $\overline{\theta}$ ın kuvvet serisi açılım olarak ([7] bölüm VI):

$$\begin{aligned}\mathrm{V}\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) &= \mathrm{C}(x) + i\theta\chi(x) - i\overline{\theta}\overline{\chi}(x) + \frac{i}{2}\theta\theta\left(M(x) + iN(x)\right) \\ &- \frac{i}{2}\overline{\theta}\,\overline{\theta}\left(M(x) - iN(x)\right) - \theta\sigma^{m}\overline{\theta}v_{m}(x) + i\theta\theta\overline{\theta}\left[\overline{\lambda}(x) + \frac{i}{2}\overline{\sigma}^{m}\partial_{m}\chi(x)\right] \\ &- i\overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\left[\lambda(x) + \frac{i}{2}\sigma^{m}\partial_{m}\overline{\chi}(x)\right] + \frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\left[D(x) + \frac{1}{2}\square C(x)\right]\end{aligned} \tag{1.68a}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\mathrm{V}^{\dagger}\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) &= \mathrm{C}^{*}(x) - i\overline{\theta}\overline{\chi}(x) + i\theta\chi(x) - \frac{i}{2}\overline{\theta}\,\overline{\theta}\left(M^{*}(x) - iN^{*}(x)\right) \\ &+ \frac{i}{2}\theta\theta\left(M^{*}(x) + iN^{*}(x)\right) - \left(\theta\sigma^{m}\overline{\theta}\right)^{\dagger}v_{m}{}^{*}(x) - i\overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\left[\lambda(x) - \frac{i}{2}\left(\overline{\sigma}^{m}\partial_{m}\chi(x)\right)^{\dagger}\right] \\ &+ i\theta\theta\overline{\theta}\left[\overline{\lambda}(x) - \frac{i}{2}\left(\sigma^{m}\partial_{m}\overline{\chi}(x)\right)^{\dagger}\right] + \frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\left[D^{*}(x) + \frac{1}{2}\square C^{*}(x)\right]\end{aligned} \tag{1.68b}$$

olur (B4 ü de kullanarak). Burada C, D, M, N, ve v_m bileşen alanları 1.67 koşulunu sağlaması için reel olmalıdır.

Vektör süper alanlara başka bir örnekse kiral ve anti-kiral (sağ ve sol elli kiral alanlar) alanların toplamıdır.($(\Phi + \Phi^{\dagger})^{\dagger} = \Phi^{\dagger} + \Phi$ olmasından dolayı 1.67 şartı sağlanır). Bu sebeple 1.54 ve 1.55 i de kullanarak

$$\begin{aligned}\Phi\left(\mathrm{x},\theta,\overline{\theta}\right) + \Phi^{\dagger}\left(\mathrm{x},\theta,\overline{\theta}\right) &= A + A^{*} + \sqrt{2}\left(\theta\psi + \overline{\theta}\,\overline{\psi}\right) + \theta^{2}F + \overline{\theta}^{2}F^{*} \\ &+ i\theta\sigma^{m}\overline{\theta}\partial_{m}(A - A^{*}) + \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^{2}\overline{\theta}\overline{\sigma}^{m}\partial_{m}\psi\end{aligned}$$

$$+\frac{i}{\sqrt{2}}\overline{\theta}^2\theta\sigma^m\partial_m\overline{\psi}+\frac{1}{4}\theta^2\overline{\theta}^2\Box(A+A^*) \qquad 1.69$$

olur. Genelleştirilmiş vektör süper alanı için 1.68a ve 1.69 u kullanarak

$$V\to V+\Phi+\Phi^\dagger \qquad 1.70$$

ayar dönüşümü yapılır ve biraz düzenlenirse([7], bölüm 6, [5] bölüm 7.2):

$$\begin{aligned}V+\Phi+\Phi^\dagger &= \mathrm{C}(x)+A(x)+A^*(x)\\ &+i\theta\{\chi(x)-i\sqrt{2}\psi(x)\}-i\overline{\theta}\{\overline{\chi}(x)+i\sqrt{2}\,\overline{\psi}(x)\}\\ &+\frac{i}{2}\theta\theta\{[M(x)+iN(x)]-2iF(x)\}-\frac{i}{2}\overline{\theta}\,\overline{\theta}\{[M(x)-iN(x)]+2iF^*(x)\}\\ &-\theta\sigma^m\overline{\theta}\{v_m(x)-i\partial_m(A(x)-A^*(x))\}\\ &+i\theta\theta\overline{\theta}\left\{\overline{\lambda}(x)+\frac{i}{2}\overline{\sigma}^m\partial_m[\chi(x)-i\sqrt{2}\psi(x)]\right\}\\ &-i\overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\left\{\lambda(x)+\frac{i}{2}\sigma^m\partial_m[\overline{\chi}(x)+i\sqrt{2}\,\overline{\psi}(x)]\right\}\\ &+\frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\left\{D(x)+\frac{1}{2}\Box[C(x)+(A(x)+A^*(x))]\right\}\end{aligned} \qquad 1.71$$

bu dönüşüm altında

$$\begin{gathered}\mathrm{C}(x)\longrightarrow\mathrm{C}(x)+A(x)+A^*(x)\\ \chi(x)\longrightarrow\chi(x)-i\sqrt{2}\psi(x)\\ M(x)+iN(x)\longrightarrow M(x)+iN(x)-2iF(x)\\ v_m(x)\longrightarrow v_m(x)-i\partial_m(A(x)-A^*(x))\\ \lambda(x)\longrightarrow\lambda(x)\\ D(x)\longrightarrow D(x)\end{gathered} \qquad 1.72$$

olarak elde edilir. Buradan, 1.68a vektör alanının λ ve D alanlarına göre ayar invaryant olduğu anlaşılır..

1.72 dönüşümlerinden $\mathrm{C}(x)=\chi(x)=M(x)=N(x)=0$ seçilerek Wess-Zumino ayarı olarak bilinen özel bir ayar tanımlanabilir. Bu ayara göre 1.68a vektör alanı

$$\mathrm{V_{WZ}}(x,\theta,\overline{\theta})=-\theta\sigma^m\overline{\theta}v_m(x)+i\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\lambda}(x)-i\overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\lambda(x)+\frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}D(x) \qquad 1.73a$$

olur. Buna göre V'nin kuvvetleri de ($\theta^3 = \overline{\theta}^3 = 0$ Grassmann özelliği ve B1 i de kullanarak) :

$$\mathrm{V}^2 = -\frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}v_m v^m \qquad 1.73b$$

$$\mathrm{V}^3 = 0 \qquad 1.73c$$

olarak bulunur. 1.69 da ki Wess-Zumino ayarında $v_m(x)$ reel vektör alanıdır ve 3 bozonik serbestlik derecesi vardır (abelyen teorilerde genellikle $v_0 = 0\ alınır$); $\lambda(x)$ kompleks(karmaşık) iki-spinör alandır ve 4 fermiyonik serbestlik derecesi vardır; $D(x)$ reel skaler alandır ve 1 bozonik serbestliği vardır. Hepsi birlikte 4 ü fermiyonik ve 4 ü de bozonik olmak üzere toplam 8-serbeslik derecesi olur.

Herhangi bir $\mathrm{V}\left(x, \theta, \overline{\theta}\right)$ vektör alanı için alan etkinliği (field strength)

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\left(\overline{D}\,\overline{D}\right)D_\alpha V \qquad 1.74a$$

$$\overline{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}(DD)\overline{D}_{\dot{\alpha}}V \qquad 1.74b$$

bileşenleri ile tanımlanır. $W_\alpha\ ve\ \overline{W}_{\dot{\alpha}}$ spinör süperalanlardır ve bu alanlar kiral alanlardır ($\overline{D}^3 = D^3 = 0$ olmasından dolayı $\overline{D}_{\dot{\alpha}}W_\alpha = 0, D_\alpha\overline{W}_{\dot{\alpha}} = 0$ kirallik şartı sağlanacağından) ve aynı zamanda da ayar invaryanttırlar. Bunu görmek için, $\overline{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = D_\alpha\Phi^\dagger = 0$ ı kullanır ve

$$W_\alpha \longrightarrow \boxed{W'_\alpha =} -\frac{1}{4}\left(\overline{D}\,\overline{D}\right)D_\alpha V'$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\overline{D}\,\overline{D}\right)D_\alpha(V + \Phi + \Phi^\dagger) = -\frac{1}{4}\left(\overline{D}\,\overline{D}\right)D_\alpha V - \frac{1}{4}\left(\overline{D}\,\overline{D}\right)D_\alpha\Phi - \frac{1}{4}\left(\overline{D}\,\overline{D}\right)D_\alpha\Phi^\dagger$$

$$= W_\alpha - \frac{1}{4}\left(\overline{D}_{\dot{\alpha}}\,\overline{D}^{\dot{\alpha}}\right)D_\alpha\Phi = W_\alpha - \frac{1}{4}\overline{D}_{\dot{\alpha}}\left(\left\{\overline{D}^{\dot{\alpha}}, D_\alpha\right\} - D_\alpha\overline{D}^{\dot{\alpha}}\right)\Phi$$

$$= W_\alpha - \frac{1}{4}\overline{D}_{\dot{\alpha}}\left\{\overline{D}^{\dot{\alpha}}, D_\alpha\right\}\Phi = \boxed{W_\alpha}$$

şeklinde gösterebiliriz.

Şimdi W_α yı bileşenleri cinsinden Wess-Zumino ayarında elde edelim. Bunun için önceki bölümde bahsettiğimiz ve $y^m = x^m + i\theta\sigma^m\overline{\theta}$ ($x^m = y^m - i\theta\sigma^m\overline{\theta}$ olmak üzere) ile tanımladığımız değişkenleri kullanacağız. Buna göre 1.73a Wess-Zumino vektör alanını yeniden yazarsak

$$\mathrm{V_{WZ}}(x,\theta,\overline{\theta}) = \mathrm{V_{WZ}}(y^m - i\theta\sigma^m\overline{\theta},\theta,\overline{\theta})$$

$$= -\theta\sigma^m\overline{\theta}v_m(y^m - i\theta\sigma^m\overline{\theta}) + i\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\lambda}(y^m - i\theta\sigma^m\overline{\theta}) - i\overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\lambda(y^m - i\theta\sigma^m\overline{\theta})$$

$$+\frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}D(y^m - i\theta\sigma^m\overline{\theta})$$

$$= -\theta\sigma^m\overline{\theta}v_m(y) + i(\theta\sigma^m\overline{\theta})(\theta\sigma^n\overline{\theta})\partial_n v_m(y) + i(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\lambda}(y)\right) - i(\overline{\theta}\,\overline{\theta})(\theta\lambda(y))$$

$$+\frac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})D(y)\text{ , (B1 i kullanarak)}$$

$$= -\theta\sigma^m\overline{\theta}v_m(y) + i(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\lambda}(y)\right) - i(\overline{\theta}\,\overline{\theta})(\theta\lambda(y))$$

$$+(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left[\frac{1}{2}D(y) - \frac{i}{2}\partial_m v^m(y)\right]$$

olarak buluruz. Şimdi yukarıdaki bulduğumuz ifadeyi de kullanarak $D_\alpha V$ yi bulalım. Vektör alanımızı yeni koordinatlarda yazdığımız için kovaryant türevler de artık 1.53 deki gibi olacaktır. Buna göre

$$D_\alpha \mathrm{V_{WZ}}(y,\theta,\overline{\theta}) = \left(\partial_\alpha + 2i\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_n\right)\mathrm{V_{WZ}}(y,\theta,\overline{\theta})$$

$$= \partial_\alpha\left\{-\theta\sigma^m\overline{\theta}v_m(y) + i(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\lambda}(y)\right) - i(\overline{\theta}\,\overline{\theta})(\theta\lambda(y))\right.$$

$$\left.+(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left[\frac{1}{2}D(y) - \frac{i}{2}\partial^m v_m(y)\right]\right\}$$

$$+2i\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_n\left\{-\theta\sigma^m\overline{\theta}v_m(y) + i(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\lambda}(y)\right) - i(\overline{\theta}\,\overline{\theta})(\theta\lambda(y))\right.$$

$$\left.+(\theta\theta)(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left[\frac{1}{2}D(y) - \frac{i}{2}\partial^m v_m(y)\right]\right\}$$

$$= -(\partial_\alpha\theta^\beta)\sigma^m{}_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}v_m(y) + i\partial_\alpha(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\lambda}(y)\right) - i(\overline{\theta}\,\overline{\theta})\left(\partial_\alpha\theta^\beta\lambda_\beta(y)\right)$$

$$+\partial_\alpha(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left[\frac{1}{2}D(y)-\frac{i}{2}\partial^m v_m(y)\right]$$

$$-2i\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta^\beta\sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_n v_m(y)-2\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\partial_n\overline{\lambda}(y)\right),$$

($\overline{\theta}^3=0$ olması ve ilk terimde $\partial_\alpha\theta^\beta=\delta^\beta_\alpha$ özelliğini de kullanarak)

$$=-\delta^\beta_\alpha\sigma^m{}_{\beta\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}v_m(y)+2i\theta_\alpha\left(\overline{\theta}\,\overline{\lambda}(y)\right)-i\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\lambda_\alpha(y)$$

$$+2\theta_\alpha\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left[\frac{1}{2}D(y)-\frac{i}{2}\partial_m v^m(y)\right]$$

$$-2i\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta^\beta\sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_n v_m(y)-2\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}_{\dot{\gamma}}\,\partial_n\overline{\lambda}^{\dot{\gamma}}(y)\right), \qquad 1.75$$

son iki terim sırasıyla şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned}-2i\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta^\beta\sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_n v_m(y) &= +2i\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\theta^\beta\sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}}\partial_n v_m(y)\\ &= i\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}\,\overline{\theta}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\theta^\beta\sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}}\partial_n v_m(y)\\ &= i\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}\,\overline{\theta}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\beta\gamma}\sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}}\partial_n v_m(y)\theta_\gamma\\ &= -i\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}\,\overline{\theta}\varepsilon^{\gamma\beta}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}}\partial_n v_m(y)\theta_\gamma\\ &= -i\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\sigma}^{m\dot{\alpha}\gamma}\partial_n v_m(y)\theta_\gamma\\ &= -i\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(\sigma^n\overline{\sigma}^m\right)_\alpha{}^\gamma\partial_n v_m(y)\theta_\gamma\end{aligned}$$

ve 1.75 in son terimi ise (B6ve B7 yi kullanarak)

$$\begin{aligned}-2\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}(\theta\theta)\overline{\theta}_{\dot{\gamma}}\,\partial_n\overline{\lambda}^{\dot{\gamma}}(y) &= +2\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}(\theta\theta)\partial_n\overline{\lambda}_{\dot{\gamma}}(y)\\ &= \sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\theta\theta)\partial_n\overline{\lambda}_{\dot{\gamma}}(y)\\ &= (\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_n\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buna göre 1.75 eşitliği yeniden yazar ve birazda düzenlersek

$$D_\alpha \mathrm{V_{WZ}} = -\sigma^m{}_{\alpha\dot\gamma}\overline{\theta}^{\dot\gamma} v_m(y) + 2i\theta_\alpha \overline{\theta}\,\overline{\lambda}(y) - i\overline{\theta}\,\overline{\theta}\lambda_\alpha(y)$$

$$+2\theta_\alpha\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left[\tfrac{1}{2}D(y) - \tfrac{i}{2}\partial_m v^m(y)\right]$$

$$-i\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left(\sigma^n\overline{\sigma}^m\right)_\alpha{}^\gamma \partial_n v_m(y)\theta_\gamma + (\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\sigma^n_{\alpha\dot\alpha}\partial_n\overline{\lambda}^{\dot\alpha}$$

$$= -\sigma^m{}_{\alpha\dot\gamma}\overline{\theta}^{\dot\gamma} v_m(y) + 2i\theta_\alpha \overline{\theta}\,\overline{\lambda}(y) - i\overline{\theta}\,\overline{\theta}\lambda_\alpha(y)$$

$$+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left\{\delta^\beta_\alpha D(y) - i\left(\sigma^n\overline{\sigma}^m\right)_\alpha{}^\beta \partial_n v_m(y) - i\delta^\beta_\alpha \eta^{mn}\partial_m v_n(y)\right\}\theta_\beta$$

$$+(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\sigma^n_{\alpha\dot\alpha}\partial_n\overline{\lambda}^{\dot\alpha}$$

olarak elde ettikten sonra 1.74 tanımlarına yeniden dönersek

$$W_\alpha = -\tfrac{1}{4}\left(\overline{D}\,\overline{D}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{4}\left(\partial_{\dot\alpha}\,\partial^{\dot\alpha}\right) D_\alpha \mathrm{V_{WZ}}\left(y,\theta,\overline{\theta}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{4}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\partial^{\dot\beta}\,\partial^{\dot\alpha}\, D_\alpha \mathrm{V_{WZ}}\left(y,\theta,\overline{\theta}\right) = \tfrac{1}{4}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\partial^{\dot\alpha}\,\partial^{\dot\beta} D_\alpha \mathrm{V_{WZ}}\left(y,\theta,\overline{\theta}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\partial^{\dot\alpha}\,\partial^{\dot\beta}\left\{-\sigma^m{}_{\alpha\dot\gamma}\overline{\theta}^{\dot\gamma} v_m(y) + 2i\theta_\alpha \overline{\theta}\,\overline{\lambda}(y) - i\overline{\theta}\,\overline{\theta}\lambda_\alpha(y)\right.$$

$$\left.+\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\left\{\delta^\beta_\alpha D(y) - i\left(\sigma^n\overline{\sigma}^m\right)_\alpha{}^\beta \partial_n v_m(y) - i\delta^\beta_\alpha \eta^{mn}\partial_m v_n(y)\right\}\theta_\beta\right.$$

$$\left.+(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\sigma^n_{\alpha\dot\alpha}\partial_n\overline{\lambda}^{\dot\alpha}\right\}$$

$$= -i\lambda_\alpha(y) + \left[\delta^\beta_\alpha D(y) - i\left(\sigma^n\overline{\sigma}^m\right)_\alpha{}^\beta \partial_n v_m(y) - i\delta^\beta_\alpha \eta^{mn}\partial_m v_n(y)\right]\theta_\beta$$

$$+(\theta\theta)\sigma^n_{\alpha\dot\alpha}\partial_n\overline{\lambda}^{\dot\alpha}(y)$$

Sonuç olarak

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha(y) + \left[\delta^\beta_\alpha D(y) - i\left(\sigma^n\overline{\sigma}^m\right)_\alpha{}^\beta \partial_n v_m(y) - i\delta^\beta_\alpha \eta^{mn}\partial_m v_n(y)\right]\theta_\beta$$

$$+(\theta\theta)\sigma^n_{\alpha\dot\alpha}\partial_n\overline{\lambda}^{\dot\alpha}(y) \qquad 1.76$$

bulunur. Kare parantez içindeki son iki terim ise B8 i de kullanarak

$$-i\left(\sigma^n\overline{\sigma}^m\right)_\alpha{}^\beta\partial_n v_m(y) - i\delta_\alpha^\beta\eta^{mn}\partial_m v_n(y)$$

$$= -i\left(\sigma^n\overline{\sigma}^m\right)_\alpha{}^\beta\partial_n v_m(y) - \tfrac{i}{2}\left(\sigma^n\overline{\sigma}^m\right)_\alpha{}^\beta\partial_m v_n(y) - \tfrac{i}{2}\left(\sigma^m\overline{\sigma}^n\right)_\alpha{}^\beta\partial_m v_n(y)$$

Haline gelir. Burada 2. Terimde $n \leftrightarrow m$ indis değişikliği yapılır ve 1. Terimden çıkarılırsa sonuçta 1.76 ifadesi

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha(y) + \left[\delta_\alpha^\beta D(y) - \tfrac{i}{2}\left(\sigma^n\overline{\sigma}^m\right)_\alpha{}^\beta\left(\partial_n v_m(y) - \partial_m v_n(y)\right)\right]\theta_\beta$$

$$+(\theta\theta)\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_n\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}}(y) \qquad 1.77$$

Olarak bulunur.

Benzer şekilde $y^{\dagger\,m} = x^m - i\theta\sigma^m\overline{\theta}$ olmak üzere $x^m = y^{\dagger\,m} + i\theta\sigma^m\overline{\theta}$ koordinat sistemi ve 1.56 kovaryant türevlerini kullanarak

$$\overline{W}_{\dot{\alpha}} = i\overline{\lambda}_{\dot{\alpha}}(y^\dagger) + \left[\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}D(y^\dagger) - \tfrac{i}{2}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\left(\overline{\sigma}^m\sigma^n\right)^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\beta}}\left(\partial_m v_n(y^\dagger) - \partial_n v_m(y^\dagger)\right)\right]\overline{\theta}^{\dot{\beta}}$$

$$-\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\overline{\sigma}^{m\,\dot{\beta}\alpha}\partial_m\lambda_\alpha(y^\dagger) \qquad 1.78$$

olarak elde edilir. $W^\alpha, \overline{W}_{\dot{\alpha}}$ süper alanları sadece $D, \lambda_\alpha, ve\ v_{mn} = \partial_m v_n - \partial_n v_m$ ayar invaryant alanlardan oluşur. Buradan hareketle

$$W_\alpha W^\alpha|_{\theta\theta} = \varepsilon^{\alpha\gamma}W_\gamma W^\alpha\big|_{\theta\theta}$$

$$= -2i\lambda_\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}} - \tfrac{1}{2}v^{mn}v_{mn} + D^2 + \tfrac{i}{4}v^{mn}v^{lk}\varepsilon_{mnlk} \qquad 1.79a$$

ve aynı şekilde

$$\overline{W}_{\dot{\alpha}}\,\overline{W}^{\dot{\alpha}}\,\big|_{\theta\theta} = \overline{W}_{\dot{\alpha}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{W}_{\dot{\beta}}\,\big|_{\theta\theta} = -\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\overline{W}_{\dot{\alpha}}\overline{W}_{\dot{\beta}}\,\big|_{\theta\theta}$$

$$= +2i\partial_m\lambda_\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}} - \tfrac{1}{2}v^{mn}v_{mn} + D^2 - \tfrac{i}{4}v^{mn}v^{lk}\varepsilon_{mnlk} \qquad 1.79b$$

olarak bulunur. Bir serbest vektör alanı için Lagrangian'ın süpersimetrik ayar invaryant genellemesi

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\left(W^{\alpha}W_{\alpha}|_{\theta\theta} + \overline{W}_{\dot{\alpha}}\,\overline{W}^{\dot{\alpha}}\Big|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}\right) \tag{1.80}$$

dir. Buna göre 1.79b de ilk terimine kısmi entegrasyon uygulayarak eylem entegrali

$$S = \int d^4x \left(\frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}v^{mn}v_{mn} - i\lambda\sigma^m\partial_m\overline{\lambda}\right) \tag{1.81}$$

şeklinde elde edilir.

2. SÜPERSİMETRİK KUANTUM ELEKTRODİNAMİĞİ

2.1 N=1 Süpersimetrik Kuantum Elektrodinamiği (SQED), Fayet-Iliopoulos Model

Bu kısımda temel çabamız önceki bölümde de söylendiği üzere QED'yi (kuantum elektrodinamiği) süpersimetrik bir teoriye genişletmek olacaktır. Elektrodinamikte $\pm$e olarak iki tane yük vardır, dolayısı ile lokal U(1) faz dönüşümlerine göre

$$\Phi_1 \to \Phi'_1 = exp\{-iq_1\lambda\}\Phi_1 \qquad 2.1a$$

$$\Phi_2 \to \Phi'_2 = exp\{-iq_2\lambda\}\Phi_2 \qquad 2.1b$$

şeklinde dönüşen ik tane Φ_1 ve Φ_2 skaler süperalanı tanımlamalıdır. Burada $q_1 = +e$ ve $q_2 = -e$ dir. Buna göre λ =sabit (global dönüşümler için) Lagrange yoğunluğunda ([5] , ch10) kinetik terim

$$\mathcal{L}_{kin} = \int d^4\theta\overline{\Phi}\Phi \qquad 2.2$$

olarak tanımlanır [7].

$$\mathcal{L}_{kin} = \Phi_i{}^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{qV}}\Phi_i|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}} \qquad 2.3$$

olarak alır, ve $V = V\left(x,\theta,\overline{\theta}\right)$ olmak üzre süper simetrik dönüşümler altında

$$V'\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) = V\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) + i\left[\Lambda\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) + \Lambda^{\dagger}\left(x,\theta,\overline{\theta}\right)\right] \qquad 2.4$$

şeklinde dönüşen bir $V\left(x,\theta,\overline{\theta}\right)$ vektör süperalanı seçebiliriz. Burada $\Lambda\left(x,\theta,\overline{\theta}\right)$, $\overline{D}_{\alpha}\Lambda\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) = 0$ şartını sağlayan bir skaler alandır. Biraz daha derli toplu yazacak olursak

$$\Phi_i \to \Phi'_i = exp\left\{-iq_i\Lambda\left(x,\theta,\overline{\theta}\right)\right\}\Phi_i \qquad 2.5a$$

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}}\Lambda\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) = 0 \qquad 2.5b$$

$$\Phi_i{}^{\dagger} \to \Phi'_i{}^{\dagger} = exp\left\{+iq_i\Lambda^{\dagger}\left(x,\theta,\overline{\theta}\right)\right\}\Phi_i \qquad 2.5c$$

$$D_{\alpha}\Lambda^{\dagger}\left(x,\theta,\overline{\theta}\right) = 0 \qquad 2.5d$$

Sınırlandırmaları altında yeniden Lagrangian kinetik kısmını (2.3) U(1) dönüşümleri altında yeniden yazarsak:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{kin} &= {\Phi'_1}^{\dagger} e^{q_1 V'} \Phi'_1|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}} + {\Phi'_2}^{\dagger} e^{q_2 V'} \Phi'_2|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}} \\ &= \left({\Phi_1}^{\dagger} e^{iq_1\Lambda^{\dagger}} e^{q_1(V+i\Lambda-i\Lambda^{\dagger})} e^{-iq_1\Lambda} \Phi'_1\right)\Big|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}} \\ &\quad + \left({\Phi_2}^{\dagger} e^{iq_2\Lambda^{\dagger}} e^{q_2(V+i\Lambda-i\Lambda^{\dagger})} e^{-iq_2\Lambda} \Phi_2\right)\Big|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}} \\ &= {\Phi_1}^{\dagger} e^{q_1 V} \Phi_1|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}} + {\Phi_2}^{\dagger} e^{q_2 V} \Phi_2|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}} \\ &= \mathcal{L}_{kin}\end{aligned} \qquad 2.6$$

Benzer şekilde Lagrangian'ın potansiyel kısmının da U(1) dönüşümleri altında invaryant kalması gerekir, buna göre:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{SP} &= \left[\frac{1}{2} m_{ij}\Phi_i\Phi_i + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k + g_i\Phi_i\right]\Big|_{\theta\theta} \\ &\quad + \left[\frac{1}{2} m_{ij}\Phi_i\Phi_i + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k + g_i\Phi_i\right]^{\dagger}\Big|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}} \\ &= \left[\frac{1}{2} m_{11}\Phi_1\Phi_1 + \frac{1}{2} m_{12}\Phi_1\Phi_2 + \frac{1}{2} m_{21}\Phi_2\Phi_1 + \frac{1}{2} m_{22}\Phi_2\Phi_2 + \frac{1}{3}\lambda_{111}\Phi_1\Phi_1\Phi_1\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3}\lambda_{112}\Phi_1\Phi_1\Phi_2 + \frac{1}{3}\lambda_{121}\Phi_1\Phi_2\Phi_1 + \cdots + \frac{1}{3}\lambda_{222}\Phi_2\Phi_2\Phi_2 + g_1\Phi_1 + g_2\Phi_2\right]\Big|_{\theta\theta} \\ &\quad + \begin{bmatrix} hermitik \\ eşlenik \end{bmatrix}\Big|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}\end{aligned} \qquad 2.7$$

2.5 altında 2.7

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{SP} &= \left[\frac{1}{2} m_{11}\Phi'_1\Phi'_1 + \frac{1}{2} m_{12}\Phi'_1\Phi'_2 + \frac{1}{2} m_{21}\Phi'_2\Phi'_1 + \frac{1}{2} m_{22}\Phi'_2\Phi'_2\right. \\ &\quad + \frac{1}{3}\lambda_{111}\Phi'_1\Phi'_1\Phi'_1 + \frac{1}{3}\lambda_{112}\Phi'_1\Phi'_1\Phi'_2 + \frac{1}{3}\lambda_{121}\Phi'_1\Phi'_2\Phi'_1 \\ &\quad \left. + (122 + 211 + 212 + 221 \text{ komb.})' + \frac{1}{3}\lambda_{222}\Phi'_2\Phi_{,2}\Phi'_2 + g_1\Phi'_1 + g_2\Phi'_2\right]\Big|_{\theta\theta} \\ &\quad + \begin{bmatrix} hermitik \\ eşlenik \end{bmatrix}\Big|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}} \\ &= \left[\frac{1}{2} m_{11} e^{-iq_1\Lambda}\Phi_1 e^{-iq_1\Lambda}\Phi_1 + \frac{1}{2} m_{12} e^{-iq_1\Lambda}\Phi_1 e^{-iq_2\Lambda}\Phi_2 + \frac{1}{2} m_{21} e^{-iq_2\Lambda}\Phi_2 e^{-iq_1\Lambda}\Phi_1\right. \\ &\quad + \frac{1}{2} m_{22} e^{-iq_2\Lambda}\Phi_2 e^{-iq_2\Lambda}\Phi_2 + \frac{1}{3}\lambda_{111} e^{-iq_1\Lambda}\Phi_1 e^{-iq_1\Lambda}\Phi_1 e^{-iq_1\Lambda}\Phi_1 \\ &\quad + \frac{1}{3}\lambda_{112} e^{-iq_1\Lambda}\Phi_1 e^{-iq_1\Lambda}\Phi_1 e^{-iq_2\Lambda}\Phi_2 + \frac{1}{3}\lambda_{121} e^{-iq_1\Lambda}\Phi_1 e^{-iq_2\Lambda}\Phi_2 e^{-iq_1\Lambda}\Phi_1 \\ &\quad \left. + (122 + 211 + 212 + 221 \text{ kombinasyonları})\right.\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{3}\lambda_{222}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2\Lambda}\Phi_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2\Lambda}\Phi_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2\Lambda}\Phi_2+g_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1\Lambda}\Phi_1+g_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2\Lambda}\Phi_2\Big]\Big|_{\theta\theta}$$
$$+\left[\begin{matrix}hermitik\\ eşlenik\end{matrix}\right]\Big|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}$$

⇨

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{SP}=&\Big[\tfrac{1}{2}m_{11}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}q_1\Lambda}\Phi_1\Phi_1+\tfrac{1}{2}m_{12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q_1+q_2)\Lambda}\Phi_1\Phi_2+\tfrac{1}{2}m_{21}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(q_1+q_2)\Lambda}\Phi_2\Phi_1\\&+\tfrac{1}{2}m_{22}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}q_2\Lambda}\Phi_2\Phi_2+\tfrac{1}{3}\lambda_{111}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3q_1\Lambda}\Phi_1\Phi_1\Phi_1\\&+\tfrac{1}{3}\lambda_{112}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2q_1+q_2)\Lambda}\Phi_1\Phi_1\Phi_2+\tfrac{1}{3}\lambda_{121}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2q_1+q_2)\Lambda}\Phi_1\Phi_2\Phi_1\\&+(122+211+212+221\ \text{kombinasyonları})\\&+\tfrac{1}{3}\lambda_{222}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3q_2\Lambda}\Phi_2\Phi_2\Phi_2+g_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_1\Lambda}\Phi_1+g_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_2\Lambda}\Phi_2\Big]\Big|_{\theta\theta}\\&+\left[\begin{matrix}hermitik\\ eşlenik\end{matrix}\right]\Big|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}\end{aligned}\qquad 2.8$$

olarak bulunur. 2.7 ve 2.8 birbiriyle karşılaştırılırsa: kare parantez içinde

- son iki terimden:

$q_1=e\neq 0\ ve\ q_2=-\mathrm{e}\neq 0$ olmak üzere $\boxed{\mathrm{g}_1=\mathrm{g}_2=0}$

- ilk dört terimden

$2\mathrm{q}_1=-2\mathrm{q}_2=2\mathrm{e}\neq 0$ olduğundan $\boxed{\mathrm{m}_{11}=\mathrm{m}_{22}=0}$

- kalan terimlerden

$2q_1+q_2\neq 0,\ \ 3q_1\neq 0,\ \ 2q_2+q_1\neq 0,\ \ 3q_2\neq 0\ \ \rightarrow\ \boxed{\lambda_{ijk}=0}$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Hepsini toparlarsak yukarıdaki koşulları altında 2.7 Lagrangian'ı

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{kin}&=\left[\frac{1}{2}m\Phi_1\Phi_2+\frac{1}{2}m\Phi_2\Phi_1\right]\Big|_{\theta\theta}+\left[\frac{1}{2}m{\Phi_1}^\dagger{\Phi_2}^\dagger+\frac{1}{2}m{\Phi_2}^\dagger{\Phi_1}^\dagger\right]\Big|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}\\&=m\Phi_1\Phi_2|_{\theta\theta}+m{\Phi_1}^\dagger{\Phi_2}^\dagger|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}\end{aligned}\qquad 2.10$$

bulunur. 1.80, 2.6 ve 2.10 u da kullanarak Lagrangian'ı

$$\mathcal{L}_{SQED} = \frac{1}{4}\left(W^{\alpha}W_{\alpha}|_{\theta\theta} + \overline{W}_{\dot{\alpha}}\,\overline{W}^{\dot{\alpha}}\Big|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}\right) + {\Phi_1}^{\dagger}\mathrm{e}^{q_1 V}\Phi_1|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}} + {\Phi_2}^{\dagger}\mathrm{e}^{q_2 V}\Phi_2|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}}$$
$$+m\left(\Phi_1\Phi_2|_{\theta\theta} + {\Phi_1}^{\dagger}{\Phi_2}^{\dagger}|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}\right) \qquad 2.11$$

2.11 i Terim terime açık olarak yazmak için;

${\Phi_1}^{\dagger}\mathrm{e}^{q_1 V}\Phi_1|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}} = \left\{{\Phi_1}^{\dagger}\left(1 + qV + \frac{1}{2}q^2V^2\right)\right\}\Big|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}}$, $burada\ V^3 = 0$ olmak üzere,

${\Phi_1}^{\dagger}\mathrm{e}^{eV}\Phi_1|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}} + {\Phi_2}^{\dagger}\mathrm{e}^{-eV}\Phi_2|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}} =$

$$= \left\{{\Phi_1}^{\dagger}\left(1 + e\left(-\theta\sigma^m\overline{\theta}v_m + i\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\lambda} - i\overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}D\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}e^2\left(-\frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}v_m v^m\right)\right)\Phi_1\right\}\Big|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}}$$
$$+\{\Phi_1 \to \Phi_2; +e \to -e\}|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}}$$

$$= {\Phi_1}^{\dagger}\Phi_1|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}}$$
$$+\left\{{\Phi_1}^{\dagger}e\left(-\theta\sigma^m\overline{\theta}v_m + i\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\lambda} - i\overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}D - \frac{e}{4}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}v_m v^m\right)\Phi_1\right\}\Big|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}}$$
$$+\{\Phi_1 \to \Phi_2; +e \to -e\}|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}}$$
$$= {\Phi_1}^{\dagger}\Phi_1\big|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}} - e\left(\theta\sigma^m\overline{\theta}v_m{\Phi_1}^{\dagger}\Phi_1\right)\big|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}} + ie\left(\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\lambda}{\Phi_1}^{\dagger}\Phi_1\right)\big|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}}$$
$$-ie\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\lambda{\Phi_1}^{\dagger}\Phi_1\right)\big|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}} + \frac{e}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\left(D + \frac{e}{2}v_m v^m\right)\Big|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}}$$
$$+\{\Phi_1 \to \Phi_2; +e \to -e\}|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}}$$
$$= {F_1}^{*}F_1 + {A_1}^{*}\Box A_1 + i\partial_m\,\overline{\psi}_1\overline{\sigma}^m\psi_1 + {F_2}^{*}F_2 + {A_2}^{*}\Box A_2 + i\partial_m\,\overline{\psi}_2\overline{\sigma}^m\psi_2$$
$$+ev_m\left[\frac{1}{2}\,\overline{\psi}_1\overline{\sigma}^m\psi_1 - \frac{1}{2}\,\overline{\psi}_2\overline{\sigma}^m\psi_2 + \frac{i}{2}{A_1}^{*}\partial_m A_1 - \frac{i}{2}\partial_m{A_1}^{*}A_1\right.$$
$$\left. - \frac{i}{2}{A_2}^{*}\partial_m A_2 + \frac{i}{2}\partial_m{A_2}^{*}A_2\right]$$
$$-\frac{ie}{\sqrt{2}}\left(A_1\,\overline{\psi}_1\overline{\lambda} - {A_1}^{*}\psi_1\lambda - A_2\,\overline{\psi}_2\overline{\lambda} + {A_2}^{*}\psi_2\lambda\right)$$
$$+\frac{e}{2}D[{A_1}^{*}A_1 - {A_2}^{*}A_2] - \frac{1}{4}e^2v_m v^m({A_1}^{*}A_1 + {A_2}^{*}A_2) \qquad 2.12$$

olarak bulunur. Şimdi 2.10 a dönecek olursak, 1.57 yi kullanarak

$$m\left(\Phi_1\Phi_2|_{\theta\theta}+{\Phi_1}^{\dagger}{\Phi_2}^{\dagger}|_{\overline{\theta}\,\overline{\theta}}\right)$$

$$=m\left[A_1F_2+A_2F_1-\psi_1\psi_2-\overline{\psi}_1\overline{\psi}_2+{A_1}^*{F_2}^*+{A_2}^*{F_1}^*\right] \qquad 2.13$$

bulunur. Buna göre, 2.11 i 1.71 ve yukarda ki açılımları da kullanarak yazarsak

$$\mathcal{L}_{SQED}=\frac{1}{2}D^2-\frac{1}{4}v^{mn}v_{mn}-i\lambda\sigma^m\partial_m\overline{\lambda}$$
$$+{F_1}^*F_1+{A_1}^*\square A_1+i\partial_m\,\overline{\psi}_1\overline{\sigma}^m\psi_1+{F_2}^*F_2+{A_2}^*\square A_2+i\partial_m\,\overline{\psi}_2\overline{\sigma}^m\psi_2$$
$$+ev_m\left[\frac{1}{2}\,\overline{\psi}_1\overline{\sigma}^m\psi_1-\frac{1}{2}\,\overline{\psi}_2\overline{\sigma}^m\psi_2+\frac{i}{2}{A_1}^*\partial_mA_1-\frac{i}{2}\partial_m{A_1}^*A_1\right.$$
$$\left.-\frac{i}{2}{A_2}^*\partial_mA_2+\frac{i}{2}\partial_m{A_2}^*A_2\right]$$
$$-\frac{ie}{\sqrt{2}}\left(A_1\,\overline{\psi}_1\overline{\lambda}-{A_1}^*\psi_1\lambda-A_2\,\overline{\psi}_2\overline{\lambda}+{A_2}^*\psi_2\lambda\right)$$
$$+\frac{e}{2}D[{A_1}^*A_1-{A_2}^*A_2]-\frac{1}{4}e^2v_mv^m({A_1}^*A_1+{A_2}^*A_2)$$
$$+m\left[A_1F_2+A_2F_1-\psi_1\psi_2-\overline{\psi}_1\overline{\psi}_2+{A_1}^*{F_2}^*+{A_2}^*{F_1}^*\right] \qquad 2.14$$

elde edilir. Bu Lagrangian da madde alanları için kinetik terimler , ayar alanları olarak da süper-potansiyel var. Bundan başka ne eklenebilir sorusuna abelyen teorilere has olarak fazladan bir terim daha eklenebilir (Fayet-Iliopoulos (FI)terimi olarak isimlendirilen):

$$\mathcal{L}_{FI}=2\kappa V|_{\theta\theta\,\overline{\theta}\,\overline{\theta}}=2\kappa\frac{D}{2}=\kappa D$$

Buna göre 2.14 Lagrangianı, ve birazda düzenleyerek

$$\mathcal{L}_{SQED}=\frac{1}{2}D^2-\frac{1}{4}v^{mn}v_{mn}-i\lambda\sigma^m\partial_m\overline{\lambda}$$
$$+{F_1}^*F_1+{A_1}^*\square A_1+i\partial_m\,\overline{\psi}_1\overline{\sigma}^m\psi_1+{F_2}^*F_2+{A_2}^*\square A_2+i\partial_m\,\overline{\psi}_2\overline{\sigma}^m\psi_2$$
$$+ev_m\left[\frac{1}{2}\,\overline{\psi}_1\overline{\sigma}^m\psi_1-\frac{1}{2}\,\overline{\psi}_2\overline{\sigma}^m\psi_2+\frac{i}{2}{A_1}^*\partial_mA_1-\frac{i}{2}\partial_m{A_1}^*A_1\right.$$
$$\left.-\frac{i}{2}{A_2}^*\partial_mA_2+\frac{i}{2}\partial_m{A_2}^*A_2\right]$$
$$-\frac{ie}{\sqrt{2}}\left(A_1\,\overline{\psi}_1\overline{\lambda}-{A_1}^*\psi_1\lambda-A_2\,\overline{\psi}_2\overline{\lambda}+{A_2}^*\psi_2\lambda\right)$$
$$+\frac{e}{2}D[{A_1}^*A_1-{A_2}^*A_2]-\frac{1}{4}e^2v_mv^m({A_1}^*A_1+{A_2}^*A_2)$$
$$+m\left[A_1F_2+A_2F_1-\psi_1\psi_2-\overline{\psi}_1\overline{\psi}_2+{A_1}^*{F_2}^*+{A_2}^*{F_1}^*\right]+\kappa D \qquad 2.15$$

olur. Şimdi $F_1(x)$, $F_2(x)$ ve $D(x)$ yardımcı alanlarını (auxiliary) hareket denklemlerinden çıkarabiliriz.

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{SQED}}{\partial {F_1}^*(x)} = F_1(x) + m{A_2}^*(x) = 0$$

$$\Rightarrow \; F_1(x) = -m{A_2}^*(x),$$
$$\Rightarrow \; {F_1}^*(x) = -mA_2(x) \qquad 2.16a$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{SQED}}{\partial {F_2}^*(x)} = F_2(x) + m{A_1}^*(x) = 0$$

$$\Rightarrow \; F_1(x) = -m{A_2}^*(x)$$
$$\Rightarrow \; {F_1}^*(x) = -mA_2(x) \qquad 2.16b$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{SQED}}{\partial D(x)} = \mathrm{D} + \frac{e}{2}[{A_1}^*A_1 - {A_2}^*A_2] + \kappa = 0$$
$$D(x) = -\frac{e}{2}[{A_1}^*A_1 - {A_2}^*A_2] - \kappa \qquad 2.16c$$

Bu modelde 2.15 Lagrangian'ına tekrar geri dönersek potansiyel

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \frac{1}{2}D^2 + {F_1}^*F_1 + {F_2}^*F_2 \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{e}{2}[{A_1}^*A_1 - {A_2}^*A_2] - \kappa\right)^2 + m^2({A_2}^*A_2 + {A_1}^*A_1) \\ &= \frac{e^2}{8}([{A_1}^*A_1 - {A_2}^*A_2] - \kappa)^2 + m^2({A_2}^*A_2 + {A_1}^*A_1) \qquad 2.17a\end{aligned}$$

⇨

$$\mathcal{V}(A_1, A_2) = \frac{1}{2}\kappa^2 + \left(m^2 + \frac{1}{2}e\kappa\right){A_1}^*A_1 + \left(m^2 - \frac{1}{2}e\kappa\right){A_2}^*A_2 + \frac{1}{8}e^2({A_1}^*A_1 - {A_2}^*A_2)^2 \qquad 2.17b$$

şeklinde elde edilir ve skaler ve potansiyel olarak isimlendirilir. Burada 2.17a ya bakarak potansiyeli

$$\mathcal{V}_F(A_1, A_2) = m^2({A_2}^*A_2 + {A_1}^*A_1)$$
$$\mathcal{V}_D(A_1, A_2) = \frac{e^2}{8}([{A_1}^*A_1 - {A_2}^*A_2] - \kappa)^2 \qquad 2.17c$$

olmak üzere, $\mathcal{V}(A_1, A_2) = \mathcal{V}_F(A_1, A_2) + \mathcal{V}_D(A_1, A_2)$ şeklinde tanımlı iki parça halinde yazabiliriz.

Yukardaki skaler potansiyele bakarak vakum hakkında analiz yapabiliriz. 2.17a dan görebileceğimiz üzere potansiyel negatif olamaz. Bu şu anlama gelir, $\mathcal{V} = 0$ durumunu veren alan konfigürasyonları vakum olur, ancak süpersimetrik vakumun varlığı κ ve m parametrelerine bağlıdır. Şöyleki:

$\kappa = m = 0$ Durumu: 2.17 potansiyeli

$$\mathcal{V}(A_1, A_2) = \frac{1}{8} e^2 ({A_1}^* A_1 - {A_2}^* A_2)^2 \qquad 2.18a$$

şekline gelir, ve herhangi bir $A_1 = A_2$ konfigürasyonu için potansiyel sıfır olur. Birbirine eşit olan her iki alanda herhangi bir kompleks değer alabilir. Bu durumda tüm vakum değeri sıfırlanan bir potansiyele sahiptir, bu nedenle süpersimetri kırılmaz, fakat $\langle A_1 \rangle \neq 0$ yada $\langle A_2 \rangle \neq 0$ için, ayar simetrisi birlikte (spontaneously) kırılır. $\langle A_1 \rangle = 0$ ve $\langle A_2 \rangle = 0$ özel durumları içinse ayar simetrisi kırılmaz.

$m = 0, \kappa \neq 0$ Durumu: Bu durumda 2.17 potansiyeli

$$\mathcal{V}(A_1, A_2) = \mathcal{V}_D(A_1, A_2) = \frac{e^2}{8} ([{A_1}^* A_1 - {A_2}^* A_2] - \kappa)^2 \qquad 2.18b$$

olur. Eğer potansiyeli minimize edersek

$$ {A_1}^* A_1 - {A_2}^* A_2 = \kappa $$

bulunur. Bu durumda süpersimetri korunduğu halde ayar simetrisi kırılır.

$m \neq 0, \kappa = 0$ Durumu: Bu durumda potansiyel sadece $A_1 = A_2 = 0$ noktasında minimuma sahip olduğu için ne ayar simetrisi ne de süpersimetri kırılır.

$m \neq 0, \kappa \neq 0$ Durumu: Potansiyelin tamamını göz önüne aldığımıza göre, $\mathcal{V} > 0, \mathcal{V}_F$ orjinde sıfır ve $\mathcal{V}_D$ orjinde sıfırdan farklı olduğundan burada süpersimetrik vakum yoktur, bu nedenle süpersimetri kırılır. Şimdi potansiyeli minimize eden kritik noktalarına bakalım;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial {A_1}^*} &= \left[\left(m^2 + \frac{1}{2} e\kappa\right) + \frac{e^2}{4} ({A_1}^* A_1 - {A_2}^* A_2)\right] A_1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial {A_2}^*} &= \left[\left(m^2 - \frac{1}{2} e\kappa\right) - \frac{e^2}{4} ({A_1}^* A_1 - {A_2}^* A_2)\right] A_2 = 0 \end{aligned} \qquad 2.18c$$

Buna göre dört tane olası durum söz konusudur:

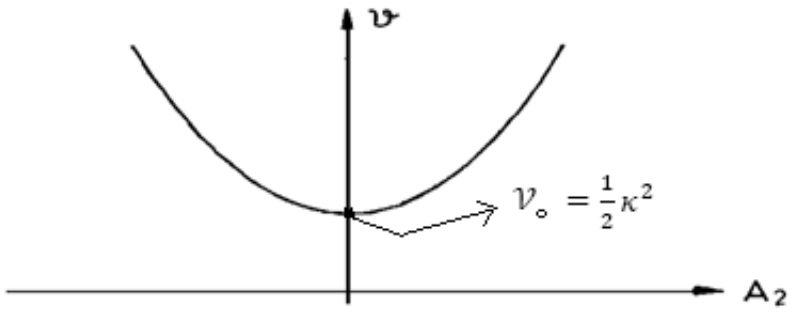
(i) $A_1 = A_2 = 0$: Bu durumda $\mathcal{V}(A_1, A_2) = \frac{1}{2}\kappa^2$ olur. Bu nokta bir kritik noktadır ve maksimum ya da minimum olması $\kappa \; ve \; m$'nin değerine bağlıdır. Potansiyelin minimum olduğu nokta Şekil 1 de gösterilmiştir.

(ii) $A_1 = 0,\ A_2 \neq 0$: Bu durumda $\left(m^2 - \frac{1}{2}e\kappa + \frac{e^2}{4}{A_2}^* A_2\right) = 0$ olur, buda ancak $m^2 < \frac{1}{2}e\kappa$ ile mümkün olur(Şekil 2).

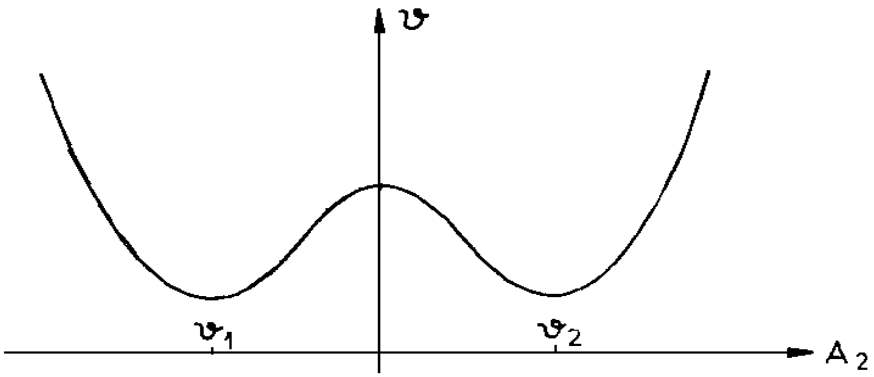
(iii) $A_1 \neq 0,\ A_2 = 0$: Bu durumda $\left(m^2 + \frac{1}{2}e\kappa + \frac{e^2}{4}{A_1}^* A_1\right) = 0$ olur, bunun da mümkün olması için $m^2 > -\frac{1}{2}e\kappa$ olmalıdır(Şekil 2).

(iv) $A_1 \neq 0,\ A_2 \neq 0$: Bu durumda, maksimum ya da minimum noktasından bahsedemeyiz ancak $m^2 = 0$ durumu için yukarda bahsettiğimiz üzere ayar simetrisi kırıldığı halde süpersimetri kırılmaz.

Şimdi Fayet-Iliopoulos terimli SQED için skaler potansiyeli çizelim([11] ve [7, bölüm 8]. Eğer $m^2 > \frac{1}{2}e\kappa$ ise, potansiyelin minimumu orijin civarındadır, bu nedenle ayar simetrisi kırılmaz (Şekil 1, (i) durumu). Eğer $m^2 < \frac{1}{2}e\kappa$ ise, potansiyelintek bir minimum noktası yoktur ve bazı alanlar için sıfırdan farklı değerler alır, yani süpersimetri kırılır((ii) ve (iii) durumları). Her zaman $\mathcal{V} > 0$ olduğundan sıfırdan farklı κ ve m değerleri için süpersimetri daima kırılır.



Şekil 1: $m^2 > \frac{1}{2}e\kappa$ olduğunda, süpersimetri kırılır, tek bir minimumda.



Şekil 2: $m^2 < \frac{1}{2} e\kappa$ **A**yar simetrisi ve süpersimetri birlikte kırılır.

KAYNAKLAR

[1] **Griffiths, D.J., 1987,** Introduction to elementary particles" ,Wiley.

[2] **NIEUWENHUIZEN, P.van,** Supergravity, PHYSICS REPORTS 68, No.4 (1981)

[3] **Martin, S.,** 1997, A Supersymmetry Primer, hep-ph/97035.

[4] **Aitchison, Hey,** Gauge theories in particle physics vol 1.

[5] **H.Müller-Kirsten, A. Wiedeman,** Supersymmetry: An Introduction with Conceptual and Calculational Details.

[6] **Tata, X.,** 1997, What is Supersymmetry And How Do We Find It?, hep-ph/9706307.

[7] **Wess, J., Bagger, J.,** 1992, Supersymmetry and Supergravity, Princton Univ. Press, N.J., 2ed.

[8] **Bagger, J.,** 1996. Weak-Scale Supersymmetry: Theory and Practice, hep-ph/9604232.

[9] **Lykken, J.,** , 1996. Introduction to Supersymmetry, hep-th/9612114.

[10] **Bilal, A.,** , 2001, Introduction to supersymmetry, hep-ph/0101055.

[11] **Lüdeling, C.,** 2004 From Super-Yang-Mils to QCD, hep-th/0412178v1.

EKLER

A. Kütle Boyutları

$\hbar = c = 1 \quad \Rightarrow \quad [\hbar] = [c] = 0$

- $\mathrm{E} = \mathrm{mc}^2 = \mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad [\mathrm{E}] = [\mathrm{m}] = 1$
- $c = 1 \quad \longrightarrow \quad \left[{}^{L}/_{T}\right] = 0 \quad \longrightarrow \quad [L] - [T] = 0 \quad \Rightarrow \quad [L] = [T]$
- $\hbar = 1 \quad \longrightarrow \quad [E.T\,] = 0 \quad \longrightarrow \quad [E] + [T] = 1 + \,[T] = 0 \quad \Rightarrow \quad [T] = -1$
- $[T] = -1 \quad \Rightarrow [T] = [L] = -1$
- $[E] = [P] = 1$
- $\left[\left\{Q_{\alpha,}{}^{A}, \overline{Q}_{\dot{\alpha}_B}\right\}\right] = [2\delta^{A}{}_{B}\sigma^{m}_{\alpha\dot{\alpha}}P_m] \quad \Rightarrow \quad [QQ] = [P] \longrightarrow$

$$2[Q] = 1 \;\Rightarrow\; [Q] = {}^{1}/_{2}$$

B. Konvansiyonlar ve Bazı Yararlı Eşitlikler

- B1 (Bölüm 1.2.9)

$$\left(\theta\sigma^m\overline{\theta}\right)\left(\theta\sigma^n\overline{\theta}\right) = -\frac{1}{2}(\theta\theta)\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)\eta^{mn}$$

- B2 (Bölüm1.2.9)

$$\begin{aligned}\overline{D}_{\dot{\alpha}}\left(x^m + i\theta\sigma^m\overline{\theta}\right) &= \left(-\overline{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_n\right)\left[x^m + i\theta^\beta\sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\right] \\ &= -i\overline{\partial}_{\dot{\alpha}}\left(\theta^\beta\sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\right) - i\theta^\alpha\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_n x^m \\ &= +i\theta^\beta\sigma^m{}_{\beta\dot{\beta}}\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma^n_{\alpha\dot{\alpha}}\delta^m_n \\ &= i\theta^\beta\sigma^m{}_{\beta\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}} \\ = 0\,, \quad &\text{burada } \overline{D}_{\dot{\alpha}}\theta = 0 \text{ olmak üzere.}\end{aligned}$$

- B3 (Bölüm1.2.9)

$x^m \to y^m = x^m + i\theta\sigma^m\overline{\theta}$, $\theta'_\alpha \to \theta_\alpha$, $\overline{\theta}'_{\dot{\alpha}} \to \overline{\theta}_{\dot{\alpha}}$ olmak üzere (1.48a,b)

$D_\alpha = \partial_\alpha + i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_m$ ve $\overline{D}_{\dot{\alpha}} = -\overline{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m$ kovaryant türevleri, yeni değişkenler cinsinden yazacak olursak:

$$\frac{\partial}{\partial x^m} \to \frac{\partial y^n}{\partial x^m}\frac{\partial}{\partial y^n} = \delta^{\mathrm{n}}_{\mathrm{m}}\frac{\partial}{\partial y^n} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial x^m} \to \frac{\partial}{\partial y^m}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \to \frac{\partial\theta'^\beta}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta'^\beta} + \frac{\partial y^m}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial y^m} = \delta^\beta_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\beta} + i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^m}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \to \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^m}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} \to \frac{\partial\overline{\theta}'^{\dot{\beta}}}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}'^{\dot{\beta}}} + \frac{\partial y^m}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial y^m} = \delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\beta}}} - i\theta^\alpha\sigma^m_{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^m}$$

$$=> \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} \to \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^{\alpha}\sigma^{m}_{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^{m}}}$$

değişken dönüşümlerini kovaryant türevlerde yerine yazarak:

$$D_{\alpha} = \partial_{\alpha} + i\sigma^{m}_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{m} = \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} + i\sigma^{m}_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^{m}} + i\sigma^{m}_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^{m}}$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} + 2i\sigma^{m}_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^{m}} \quad \text{yada} \quad \boxed{D_{\alpha} = \partial_{\alpha} + 2i\sigma^{m}_{\alpha\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_{m}}$$

ve

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}} = -\overline{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^{\alpha}\sigma^{m}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{m} = -\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^{\alpha}\sigma^{m}_{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^{m}}\right) - i\theta^{\alpha}\sigma^{m}_{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^{m}} = -\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}}$$

yada $$\boxed{\overline{D}_{\dot{\alpha}} = -\overline{\partial}_{\dot{\alpha}}}$$

olarak bulunur.

- B4 (Bölüm1.2.10)

$$\left(\theta\sigma^{\mathrm{m}}\overline{\theta}\right)^{\dagger} = \left(\overline{\theta}^{\dagger}\sigma^{\mathrm{m}\dagger}\theta^{\dagger}\right) = \left(\overline{\theta}^{\dagger\,\alpha}\left(\sigma^{\mathrm{m}\dagger}\right)_{\alpha\dot{\beta}}\theta^{\dagger\,\dot{\beta}}\right) = \left(\theta^{\alpha}\,\sigma^{\mathrm{m}}{}_{\alpha\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\,\dot{\beta}}\right) = \left(\theta\sigma^{\mathrm{m}}\overline{\theta}\right)$$

- B5 (Bölüm1.2.10)

$$exp\{V\} = 1 + V + \frac{1}{2}V^{2}$$

$$= 1 - \theta\sigma^{m}\overline{\theta}v_{m}(x) + i\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\lambda}(x) - i\overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}D(x)$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}v_{m}v^{m}\right)$$

$$= 1 - \theta\sigma^{m}\overline{\theta}v_{m}(x) + i\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\lambda}(x) - i\overline{\theta}\,\overline{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\,\overline{\theta}\left(D(x) - \frac{1}{2}v_{m}v^{m}\right)$$

- B6 (Bölüm 1.2.10)

$$\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\overline{\lambda}_{\dot{\gamma}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\overline{\lambda}_{\dot{\gamma}} = -\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\overline{\lambda}_{\dot{\gamma}} = -\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\gamma}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}}\overline{\lambda}_{\dot{\gamma}} = -\overline{\theta}^{\dot{\gamma}}\overline{\lambda}_{\dot{\gamma}}$$

$$= -\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\overline{\lambda}_{\dot{\alpha}}$$

- B7 (Bölüm 1.2.10)

$$\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}\overline{\theta}^{\dot{\beta}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left(\overline{\theta}\,\overline{\theta}\right)$$

- B8 (Bölüm 1.2.10)

$$\left(\sigma^{m}\overline{\sigma}^{n} + \sigma^{n}\overline{\sigma}^{m}\right)_{\alpha}^{\ \beta} = -2\eta^{mn}\delta_{\alpha}^{\beta}$$

ÖZGEÇMİŞ

Yakup Emül 1978 yılında Sivas'ta doğdu. 1996 yılında Sivas Kongre Lisesi'nden mezun olduktan sonra, lisans derecesini 2004 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fizik Mühendisliği Bölümü'nden aldı. Halen, İstanbul Teknik Üniversitesi Fizik Mühendisliği Bölümü'nde doktora eğitimine devam etmektedir ayrıca 2006 yılından beri Bahçeşehir Üniversitesi'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.