İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ PARÇACIKLI KUANTUM DOLANIKLIĞIN SINIFLANDIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fiz. Müh. SEÇKİN SEFİ

Anabilim Dalı : **FİZİK MÜHENDİSLİĞİ**

Programı : **FİZİK MÜHENDİSLİĞİ**

HAZİRAN 2008

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇ PARÇACIKLI KUANTUM DOLANIKLIĞIN SINIFLANDIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fiz. Müh. SEÇKİN SEFİ

(509051108)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 5 Mayıs 2008

Tezin Savunulduğu Tarih : 10 Haziran 2008

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ali Yıldız

Diğer Jüri Üyeleri Prof. Dr. Metin Arık

Doç. Dr. Nazmi Postacıoglu

HAZİRAN 2008

ÖNSÖZ

Çalışmam sırasındaki yardımlarından ve sabrından dolayı hocam Doç. Dr. Ali Yıldız'a teşekkürü bir borç bilirim.

Yardımlarından dolayı Ozan S. Sarıyer'e ve Tolga Birkandan'a teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca bana hep destek olan anneme, kardeşime ve halama ayrıca teşekkür ederim.

Haziran 2008 SEÇKİN SEFİ

İÇİNDEKİLER

ÖZET iv
SUMMARY v

1. GİRİŞ 1
1.1. Dolanıklık 1
1.2. Kuantum ölçümleri ve operasyonları 5
1.3. Konveks kümeleri ayıran operatörler 9
1.4. Dolanıklık sınıfları 13
1.4.1. *LU denkliği* 14
1.4.2. *LOCC denkliği* 14
1.4.2.1. *SLOCC denkliği* 14
1.4.2.2. *aLOCC denkliği* 16
1.5. Dolanıklık ölçüleri 17

2. ÜÇ PARÇACIK DOLANIKLIĞI 18
2.1. Saf durumlar üç parçacık dolanıklık sınıfları 18
2.1.1. Üç kubit *LU sınıfı* 18
2.1.1.1. Kapalı hâlde LU dönüşümü 23
2.1.2. *SLOCC sınıfı* 25
2.1.2.1. Tamamiyle ayrılabilir durumlar 28
2.1.2.2. İkili dolanık durumlar 29
2.1.2.3. Üçlü dolanık durumlar 29
2.1.3. *aLOCC sınıfı* 32
2.2. Karma durumlar üç parçacık dolanıklık sınıfları 33
2.3. Üç parçacık dolanıklık ölçüleri 36
2.3.1. Üçlü dolanma 36
2.3.2. W dolanma 38

KAYNAKLAR 39

EKLER 41

A. Schmidt ayrıştırması 41

B. GHZ durumunun *lokal realist* modelleri ihlâli 43

ÖZGEÇMİŞ 45

ÜÇ PARÇACIKLI KUANTUM DOLANIKLIĞIN SINIFLANDIRILMASI

ÖZET

Kuantum dolanıklık, iki veya daha fazla sistem arasında yerel olarak yaratılamayan kuantum mekaniksel bir bağdır. Schrödinger'in deyimiyle kuantum mekaniğini klasik mekanikten ayıran en önemli olgudur. Einstein-Podolsky-Rosen'in ve daha sonra J. S. Bell'in yaptığı çalışmalarla kuantum mekaniğinin kavramsal olarak anlaşılmasına büyük katkı sağlayan kuantum dolanıklık, son yıllarda kuantum bilgi kuramı çerçevesinde kullanabilirliği açısından incelenmekte ve kuantum bilgi işlem süreçlerinde çok temel bir araç olarak görülmektedir.

Kuantum dolanıklığın teorisi ile yapılmaya çalışılan, hangi durumların kuantum dolanıklık içerdiğini, bu durumların hangi bilgi işlem süreçlerinde kullanılabileceğini incelemek, dolanık durumların niceliksel ve niteliksel değerlendirmesini yapmaktır. İki kubit (iki seviyeli kuantum sistemi) dolanıklığın teorisi gerek saf durumlar gerekse karma durumlar için iyi anlaşılmıştır. Üç kubit kuantum dolanıklığın teorisi ise iki kubit dolanıklığın basit bir genellemesi değildir ve henüz dolanıklık sınıfları başta olmak üzere eksiktir.

Bu çalışmada ilk önce kuantum dolanıklığın genel özelliklerinden bahsedilecek, üç kubit sistemlerde saf durumlar için sırasıyla lokal üniter dönüşümler altında denklik incelencek, lokal operasyonlar ve klasik iletişim altında denklik sınıfları belirtilecek, verilen bir kuantum durumunun hangi denklik sınıfında olduğunun tespiti için gerekli metotlar verilecek, asimptotik lokal operasyonlar altında sınıflar arası geçişin mümkün olup olmadığına değinilecektir. Ayrıca karma durumlar için denklik sınıflarından bahsedilecektir.

CLASSIFICATION OF THREE-PARTITE QUANTUM ENTANGLEMENT

SUMMARY

Quantum entanglement is a quantum mechanical correlation between two or more parties which can not be created locally. As indicated by Schrödinger it is the most distinctive phenomenon between classical and quantum physics. The works of Einstein-Podolsky-Rosen followed by J. S. Bell on quantum entanglement contributed so much on our understanding of the concepts of quantum mechanics. However quantum entanglement has been investigated for the last two decades for its availability in quantum information processes and is regarded as the basic resource.

The goal of the theory of quantum entanglement is to derive methods for the identification of quantum entangled states, to identify class of quantum entangled states for certain quantum information processes and to make quantification and qualification of entangled states. The theory of two qubit (two level quantum system) entanglement has been well understood for both pure states and mixed states. The theory of three qubit entanglement is not a straightforward generalization of two qubit entanglement theory and is still incomplete especially in the identification of the entanglement classes.

In this work, firstly general properties of quantum entanglement will be discussed. Then, for the three qubit states, in order, equivalence under local unitary operations will be investigated, the equivalence classes under local operations and classical operations will be identified and the methods for detection will be given, the interchangeability between different classes under asymptotic local operations will be analyzed. Also the equivalence classes of mixed states will be discussed.

1. GİRİŞ

1.1 Dolanıklık

Kuantum dolanıklık iki veya daha fazla *ayrık* (konum dalga fonksiyonları örtüşmeyen) sistem arasındaki kuantum mekaniksel bir bağdır. İki seviyeli (kubit), iki kuantum sisteminin durum vektörü şu kuantum durumuyla tarif edilebiliyor olsun;

$$|\phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle) \tag{1.1}$$

A sistemindeki gözlemci, elindeki parçacık üzerinde bir ölçüm yapsa ($|0\rangle\langle 0|$ ve $|1\rangle\langle 1|$ izdüşüm operatörleri ile tanımlanan) ve $|0\rangle$ sonucunu elde etse, durum vektörü şu duruma çökecektir; $|0_A 0_B\rangle$. A sisteminde ölçüm yapılmadan B sisteminde ölçüm yapılmış olsaydı %50 olasılıkla $|0\rangle$ sonucunu, %50 olasılıkla $|1\rangle$ sonucunu elde edecekti. A sisteminde ölçüm yapıldıktan sonra ise B sisteminde yapılan ölçüm kesin olasılıkla $|0\rangle$ sonucunu verecektir. Yani sistemlerinin birbirlerinden ne kadar ayrılmış olduğundan bağımsız olarak sistemlerden birisinde yapılmış bir ölçüm anlık olarak diğerini de etkileyecektir.

Görelilikteki anlamıyla ışıktan hızlı sinyal gönderme anlamında değil ama, *lokal realist* (bkz. Ek B) bir teoriyle açıklanamama anlamında lokal değildir. Böyle bir kuatum durumu lokal olarak yaratılamaz yalnızca bu iki sistemin etkileşmesi ile yaratılabilir. Kuantum dolanıklığı, lokal olarak ve klasik iletişim ile yaratılamayan kuantum durumları olarak tanımlayabiliriz. Teknik olarak, *saf durumlar* (*pure states*) için, bir AB sisteminin durum vektörlerinin ayırt edilebilir A ve B sistemlerinin durum vektörlerinin tensor çarpımı şeklinde faktorize olamaması şeklinde tanımlanır;

$$|\psi\rangle_{AB} \neq |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$$

Elimizde aynı durum vektörüne sahip parçacıklar değil de, farklı $|\phi_i\rangle$ durum vektörlerine sahip bir parçacık topluluğu (*ensemble*) var ise, sistem hakkında istatistiki bilgi sağlayacak, örneğin bir P ölçümünün ortalama değerini $\langle\psi|P|\psi\rangle$ şeklinde verecek bir $|\psi\rangle$ durum vektörü bulamayız. Bu durumda çözüm durum vektörü yerine *yoğunluk matrisi* kullanmaktır [1]. Diyelim ki ilgilendiğimiz toplulukta $|\phi\rangle$ durum vektörüne sahip parçacıkların oranı p_i olsun. Yapacağımız bir P ölçümünün ortalama değeri, olasık teorisi gereği şu şekilde verilecektir;

$$\begin{aligned}
[P] &= \sum_i p_i \langle\phi_i|P|\phi_i\rangle \\
&= \sum_{ikl} p_i \langle\phi_i|k\rangle \langle k|P|l\rangle \langle l|\phi_i\rangle, \quad \sum_k |k\rangle\langle k| = I, \quad \sum_l |l\rangle\langle l| = I \\
&= \sum_{ikl} p_i \langle l|\phi_i\rangle \langle\phi_i|k\rangle \langle k|P|l\rangle \\
&= \sum_{kl} \langle l|\rho|k\rangle \langle k|P|l\rangle = \sum_{kl} \langle l|\rho P|l\rangle \\
&= Tr(\rho P)
\end{aligned}$$

Burada ρ yoğunluk matrisi olarak adlandırılır. Şu şekilde tanımlanmıştır;

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$$

Burada $|\phi_i\rangle$ vektörleri orthogonal olmak zorunda değildir. $|\phi_i\rangle$ operatörlerini orthogonal bazlarda yazdığımızda; $|\phi_i\rangle = \sum_k \alpha_{ik}|k\rangle$

$$\rho = \sum_{ikl}^{dim(H_\rho)} p_i \alpha_{ik}\alpha_{il}^* |k\rangle\langle l| \tag{1.2}$$

Tanım gereği "p_i" 1'den küçük reel bir sayıdır ve $\sum_i p_i = 1$ dir. Aynı yoğunluk matrisini veren birden fazla ayrıştırma olabilir. Yoğunluk matrisleri (1.2)'den aşikar olduğu üzere hermitseldir ve istatistiki topluluk yorumu gereği pozitif operatörlerdir yani; $Tr(P\rho) \geq 0$ her P izdüşüm operatörü için.

Kompozit bir sistem için, sistemin dolanık olmaması için yeterli koşul;

$$\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B \quad , \quad \rho_A = Tr_B(\rho_{AB}) \quad , \quad \rho_B = Tr_A(\rho_{AB}) \tag{1.3}$$

olmasıdır. Burada $Tr_A(\rho_{AB})$ *kısmi iz* (*partial trace*) olarak adlandırılır ve şu şekilde tanımlanmıştır; $Tr_A(\rho_{AB}) = \sum_i \langle i_A|\rho_{AB}|i_A\rangle$. Burada $\{|i_A\rangle\}$ A uzayını tarayan orthonormal bir baz kümesidir.

(1.3)'nin sağlandığı durumlarda A ve B sistemlerindeki lokal ölçümler arasında korelasyon gözlenmez. Aksi durumda korelasyon görünür, bu durumda *klasik korelasyon* (klasik korelasyonu lokal olarak yaratılabilen korelasyon olarak tanımlıyoruz) ile *kuantum mekaniksel korelasyonu* (lokal olarak yaratılamayan korelasyon) ayırmak gerekir. Eğer elimizde faktorize olabilen ρ_{AB} yoğunluk matrisi ile tanımlanmış tek bir *topluluk* değil de bütün sistemdeki oranları p_i olan bir topluluklar topluluğu var ise, sistemden seçilen bir parçacık $\sum_i p_i\rho_i$ durumunda olacaktır. Bu durumda A ve B sistemlerinde eşzamanlı yapılan $P_A \otimes P'_B$ ölçümünün sonucu $Tr(\rho_A \otimes P_A)Tr((\rho_B \otimes P'_B))$ şeklinde faktorize olmaz, yani istatistiki olarak bağımsız değildir. Bununla birlikte seçtiğimiz parçacığın hangi topluluğa ait olduğu tamamıyle klasik belirsizlikten kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla yoğunluk matrisleri faktorize olabilen topluluklar topluluğu da *klasik korelasyon* içerir (yani lokal olarak yaratılabilir). Sonuç olarak tüm sistemin yoğunluk matrisi

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i \tag{1.4}$$

konveks toplamı şeklinde yazılabiliyor ise dolanık değildir [2].

Karma durumlar yalnızca istatistiki toplulukların sonucu değildir. İncelediğimiz sistem kapalı bir sistem değilse, çevreyle etkileşmişse, (yani başka bir sistem ile dolanıksa) daha açık bir şekilde, eğer bir AB sisteminin durum vektörü; $|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle\,|\psi_B\rangle$ şeklinde yazılamıyor ise, ilgilendiğimiz altsistem karma durumdadır ve tüm fiziksel özellikleri yoğunluk matrisi ile tarif edilir. Örneğin (1.1) kuantum durumunda A sistemi şu şekilde tanımlanacaktır;

$$\rho_A = Tr_B(\rho_{AB}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Parçacık başlangıçta durum vektörü iyi bilinen bir şekilde hazırlanmış olabilir ama çevreyle etkileşim sonucu (*decoherence*) eşfazlı (*coherent*) özelliğini kaybetmiştir.

Sistem dolanık hâle geldikten sonra sistemi kuantum durumlarının eşfazlı süperposizyonu ile ifade etmek mümkün olmaz.

Bir parçacık hakkındaki bilgimiz yoğunluk matrisi ile veriliyor ise matematiksel olarak bu kuantum durumunun açık bir sistemin sonucu mu, yoksa istatistiki bir topluluğun parçası mı olduğunu ayırt edemeyiz, çünkü;

1. $N \times N$'lik bir karma durumu spektral ayrıştırılmış formda yazalım;

$$\rho = \sum_i^N p_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right| \tag{1.5}$$

   Bu yoğunluk matrisini, şu saf durumda B üzerinden kısmi iz alarak elde edebiliriz;

$$\left|\psi\right\rangle_{AB} = \sum_i^N \sqrt{p_i} \left|\psi_i\right\rangle_A \left|i\right\rangle_B$$

   $\{\left|i\right\rangle_B\}$ B uzayını tarayan orthonormal bir baz kümesidir. Burada B sisteminin fiziksel bir anlamı yoktur sadece matematiksel bir araçtır. Vurgulamak istediğimiz, eğer bir sistemi yoğunluk matrisi ile tarif ediyorsak, matematiksel olarak her zaman için bu sistemi daha geniş, kapalı ve saf durum vektörü ile tarif edilen bir sistemin altsistemi olarak görebiliriz. Bu matematiksel prosedüre *saflaştırma* (*purification*) denilir [3].

2. (1.5) yoğunluk matrisi aynı zamanda yukarıda anlattığımız gibi topluluk içindeki oranları $\{p_i\}$ olan $\{\left|\psi_i\right\rangle\}$ durumlarının oluşturduğu istatistiki bir topluluk kullanılarak ta hazırlanabilir. Ayrıca bu hazırlama da eşsiz değildir [3]; U üniter bir dönüşüm olmak üzere yani; $UU\dagger = U\dagger U = I$, $\sqrt{p_i}\left|\psi_i\right\rangle = \sum_j U_{ij}\sqrt{p_j}\left|\phi_j\right\rangle$ dönüşümünü sağlayan her $\{\left|\phi_i\right\rangle\}$ durumları ile de aynı karma durumu yaratabiliriz;

$$\begin{aligned}
\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| &= \sum_i \left(\sum_j U_{ij} \sqrt{p_j} |\phi_j\rangle \right) \left(\sum_k U_{ik}^* \sqrt{p_k^*} \langle\phi_k| \right) \\
&= \sum_{jk} \sqrt{p_j p_k} \left(\sum_i U_{ij} U_{ik}^* \right) |\phi_j\rangle \langle\phi_k| \\
&= \sum_{jk} \sqrt{p_j p_k} \left(\sum_i U_{ki}^\dagger U_{ij} \right) |\phi_j\rangle \langle\phi_k|, \quad \sum_i U_{ki}^\dagger U_{ij} = \delta_{kj} \\
&= \sum_j p_j |\phi_j\rangle \langle\phi_j|
\end{aligned}$$

1.2 Kuantum ölçümleri ve operasyonları

Kuantum mekaniğinin ölçüm postülasına göre, en genelde, bir M kuantum ölçümü, aşağıda özelliklerini vereceğimiz $\{M_m\}$ operatörleri tanımlanır [3–5]. m indisi ölçümde elde edebileceğimiz sonuçlara tekâbül eder. Eğer ölçümden önce kuantum sistemi $|\psi\rangle$ durumunda ise m sonucunun elde edilme olasılığı şu şekilde verilir;

$$p(m) = \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle \tag{1.6}$$

ve ölçümden sonra sistemin durumu;

$$\frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}} \tag{1.7}$$

olacaktır. Olasılıkların toplamının 1 olması koşulu operatörlerin *tam* (*complete*) bir küme oluşturmasını gerektirir;

$$\sum_m p(m) = \sum_m \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle = 1, \quad \Rightarrow \quad \sum_m M_m^\dagger M_m = I$$

$M_m^\dagger M_m$ operatörü her zaman pozitif bir operatördür ve *POVM elemanları* olarak adlandırılır. $\{p_i\}$ olasılıkla $\{|\phi_i\rangle\}$ durumunda bulunan karma durumlar için ise olasılık değerleri yoğunluk matrisini tanımlarken gösterdiğimiz gibi;

$$\begin{aligned}
p(m) &= \sum_i p_i \langle\phi_i|M_m^\dagger M_m|\phi_i\rangle \\
&= Tr(\rho M_m^\dagger M_m)
\end{aligned}$$

olacaktır ve ölçüm sonrası durum ise, ayrıştırmadaki her bir vektörün $M_m|\phi_i\rangle$ şeklide evrilecek olmasından ve operatörlerin lineerliğinden dolayı şu şekilde yazılabilir;

$$\frac{M_m \rho M_m^\dagger}{p(m)} \tag{1.8}$$

İzdüşümsel ölçümde (*projective measurement*) genel ölçüm formalizminin özel bir hâlidir. İzdüşümsel ölçümde $M_m^\dagger M_m$ operatörleri, bir hermitsel M operatörünün spektral ayrıştırmasındaki izdüşüm operatörleridir;

$$M = \sum_m m\,|m\rangle\langle m|, \quad M_m^\dagger M_m \equiv |m\rangle\langle m|, \quad M_m = |m\rangle\langle m|$$

M ölçümünün olası sonuçları m özdeğerlerine tekabül eder. Hermitsel operatörlerin özvektörlerinin *dikliğinden* dolayı M_m operatörleri diklik koşulunu sağlar; $M_m M_n = \delta_{m,n} M_m$. İzdüşümsel ölçüm ve POVM elemanları ile ölçüm arasında kavramsal ilişki ve pratik farklılık açısından değinilmesi gereken iki nokta vardır;

1. A sisteminde $|\psi\rangle$ durum vektörü olan bir kuantum sistemimiz olsun. $|\psi\rangle$ durumuna uygulayacağımız, $\{M_m\}$ ölçüm operatörleri ile tanımlanan bir ölçüm, A sistemini bir altsistem olarak içeren daha geniş bir AB sisteminde uygulayacağımız üniter dönüşüm ve izdüşümsel ölçüme denktir [3–5]. Burada, *saflaştırmaya* değinirken olduğu B sisteminin fiziksel bir anlamı yoktur, *POVM* elemanları ile ölçüm yapmanın açık sistemlerde kaçınılmaz olduğunu vurgulumak için kullandığımız matematiksel bir araçtır. Ama bu, yalnızca açık sistemler için de geçerli değildir çünkü değindiğimiz gibi, bir karma durumun açık bir sistemin sonucu olarak mı yoksa istatistiki bir topluluk olarak mı oluşturulduğu matamatiksel olarak ayırt edilemez, dolayısıyla bir genellik kaybı yoktur.

   A sistemi ile $|0\rangle$ durumunda hazırlanmış bir B sistemi üzerine şu şekilde tanımlanmış bir üniter dönüşüm uygulayalım;

$$U|\phi_A\rangle|0_B\rangle \equiv \sum_m M_m|\phi_A\rangle|m_B\rangle \tag{1.9}$$

$\{m\}$; B sisteminde orthonormal bir baz kümesidir. Bu dönüşümün üniter olduğu kolayca gösterilebilir;

$$\begin{aligned}\langle 0_B|\langle\phi_A|U^\dagger U|\psi_A\rangle|0_B\rangle &= \sum_{m,n}\langle\phi|M_n^\dagger M_m|\psi\rangle\langle n|m\rangle \\ &= \sum_m \langle\phi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle \\ &= \langle\phi|\psi\rangle\end{aligned}$$

U operatörünü tüm AB uzayı üzerinden tanımlamaya devam edebiliriz ama bunun eşsiz bir yolu yoktur. U operatörünü üniter yapan ve (1.9) koşulunu sağlayan sonsuz U operatörü bulabiliriz.

Şimdi AB uzayında $P_m = I_A \otimes (|m\rangle\langle m|)_B$ izdüşüm operatörleri ile tanımlanmış izdüşümsel ölçüm yapalım. m sonucunu elde etme olasılığı;

$$\begin{aligned}p(m) &= \langle 0_B|\langle\psi_A|U^\dagger P_m U|\psi_A\rangle|0_B\rangle \\ &= \sum_{k,l}\langle k|\langle\psi|M_k^\dagger(I_A\otimes(|m\rangle\langle m|)_B)M_l|\psi\rangle|l\rangle \\ &= \langle\psi|M_m^\dagger M_m|\psi\rangle\end{aligned}$$

(1.6) eşitliğinde verildiği gibi. Ölçüm sonrası durumu ise (1.7) de verildiği gibi elde ederiz;

$$\frac{P_m U|\psi\rangle|0\rangle}{\sqrt{\langle\psi|U^\dagger P_m U|\psi\rangle}} = \frac{M_m|\psi\rangle|m\rangle}{\sqrt{p(m)}}$$

Açık bir sistem üzerine etki eden izdüşümsel ölçümün ilgilendiğimiz altsistemde en genelde *POVM* elemanları ile ölçüm yapmaya eşdeğer olduğu ile ilgili bir örnek bölüm 1.4.2.1 de verilmiştir.

2. *POVM* elemanları ile ölçümün bir avantajı şudur; orhogonal olmayan kuantum durumlarının ayırt edilmesini mümkün kılar. İzdüşümsel ölçüm ile hatasız bir şekilde bunu yapmak mümkün değildir. Örneğin bir sistem $|\psi_1\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ve $|\psi_2\rangle = \alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle$ normalize durumlarından birisinde hazırlanmış olsun ($\alpha^*\alpha' + \beta^*\beta' \neq 0$). Şu *POVM* elemanları kullanılarak bu sistemin bu iki durumdan hangisinde hazırlandığını anlayabiliriz;

$$
\begin{aligned}
E_1 &= (\beta^* |0\rangle - \alpha^* |1\rangle)(\beta \langle 0| - \alpha \langle 1|) \\
E_2 &= ((\beta^{'})^* |0\rangle - (\alpha^{'})^* |1\rangle)(\beta^{'} \langle 0| - \alpha^{'} \langle 1|) \\
E_3 E_3^\dagger &= I - E_1 E_1^\dagger - E_2 E_2^\dagger
\end{aligned}
$$

$\langle \psi_1 | E_1 E_1^\dagger | \psi_1 \rangle = 0$ ve $\langle \psi_2 | E_2 E_2^\dagger | \psi_2 \rangle = 0$ dır. Dolayısıyla ölçümde E_1 sonucunu elde edersek kuantum durumunun $|\psi_2\rangle$ olduğuna, E_2 sonucunu elde edersek te $|\psi_1\rangle$ olduğuna emin olabiliriz. Hata yapma ihtimalimiz yoktur ama $\langle \psi_1 | E_3 E_3^\dagger | \psi_1 \rangle \neq 0$ ve $\langle \psi_2 | E_3 E_3^\dagger | \psi_2 \rangle \neq 0$ dolayısıyla E_3 sonucunu elde ettiğimizde elimizdeki sistem hakkında birşey söyleyemeyiz. Ayrıca, izdüşümsel ölçümde, ölçüm sonrası aynı sistemde (sistemin evrilmesine izin vermeyecek kadar kısa bir süre sonra) aynı ölçümü tekrar ettiğimizde aynı sonucu elde ederiz. Ama POVM elemanları ile yapılan ölçümde operatörlerin orthogonal olmamasından dolayı bu mümkün değildir.

Eğer bir ölçüm yapıyorsak ve ölçüm sonucu hakkında bilgimiz yoksa, ölçüm sonucunda oluşacak kuantum durumunu, ölçümün tüm olası sonuçlarını bunlara tekâbül eden olasılık değerleri ile ağılıklanırıp toplayarak elde ederiz;

$$
\rho \quad \rightarrow \quad \sum_m p(m) \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{p(m)} = \sum_m M_m \rho M_m^\dagger
$$

Bu kuantum durumunu, yoğunluk matrisinin istatistiki yorumunda olduğu gibi elimizdeki sistemin $p(m)$ olasılıkla $M_m \rho M_m$ olduğu şeklinde yorumlayabiliriz. [5]

En genelde bir kuantum durumuna etki eden kuantum operasyonlarını tanımlamaya çalışalım [3–5]. Buradaki amacımız, bir fiziksel modele karşılık gelen kuantum durum evrimini, matematiksel olarak üniter dönüşümler ve izdüşümsel ölçümlerle tanımlamak. Açık sistemleri matematiksel olarak istatistiki topluluklardan ayırt etmek mümkün olmadığından, başlangıçta elimizde bulunana ve ρ yoğunluk matrisi ile tarif edilen bir kunatum sistemini bir açık sistem olarak kabul etmek genellik kaybı değildir.

Başlangıçta ρ_A ile tanımlanan bir A sistemi ile $|\phi_0\rangle \langle \phi_0|$ durumnda bulunan bir B sistemi kapalı bir sistem olştursun [1]. Bu kapalı sistem üzerine etki eden en genel

[1] *Saflaştırma* argümanı gereği B sistemini her zaman saf durumda seçebiliriz, bu bir genellik kaybı değildir.

operasyonlar üniter dönüşüm ve izdüşümsel ölçüm ile tanımlanır [2]. AB sistemine bir U üniter dönüşümü ve P_m izdüşüm operatörleri ile tanımlanmış bir M ölçüm operasyonu yapılmış olsun. m sonucu elde edildiğinde A sisteminin son durumu $Tr(P_m U(\rho_A \otimes |\phi_0\rangle_B \langle\phi_0|_B) U^\dagger P_m)$ olasılıkla;

$$\begin{aligned} \varepsilon(\rho) &= Tr_B(P_m U(\rho_A \otimes |\phi_0\rangle_B \langle\phi_0|_B) U^\dagger P_m) \\ &= \langle\phi_i| P_m U(\rho_A \otimes |\phi_0\rangle_B \langle\phi_0|_B) U^\dagger P_m |\phi_i\rangle \\ &= \sum_i E_i \rho E_i^\dagger \quad , \quad E_i \equiv \langle\phi_i| P_m U |\phi_0\rangle \end{aligned}$$

Burada ε eşleştirmesinin, P_m'nin birim operatör olmadığı durumda ρ'nun *izini* korumadığını gösterebiliriz. İzin korunmaması sistem hakkında ölçüm ile ekstra bilgi elde edildiğinde oluşur [3, 5].

Kompozit bir kuantum durumuna etki eden *lokal operasyonlar* ise şu şekilde yazılabilir;

$$\varepsilon(\rho_{AB}) = \sum_{ij} E_{i_A} \otimes E_{j_B} \rho E_{i_A}^\dagger \otimes E_{j_B}^\dagger$$

1.3 Konveks kümeleri ayıran operatörler

Yoğunluk matrislerinin sınıflandırımasında kullanılabilecek bir araç, konveks kümeleri ayıran operatörlerdir. Buradaki matemetiksel dayanağımız, herhangi bir yoğunluk matrisi sınıfı bir konveks küme oluşturuyorsa , *Hahn-Banach* teoreminin sonucu olarak, bu konveks kümenin dışındaki bir elemanı tesptit edecek bir operatörün bulunabilecek olması gerçeğidir [4, 6, 7].

Teknik olarak Hahn-Banach teoremi şunu söyler; W_1 ve W_2, Banach uzayında, kesişim kümeleri boş küme olan, konveks, kapalı birer küme ise (yani kümenin elemanlarının lineer pozitif katsayılı toplamı yine kümenin bir elemanı ise) ve bu kümelerden birisi *sınırlı* ise, öyle bir lineer sürekli f fonksiyoneli bulunabilir ki, $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere tüm $w_1 \in W_1$ ve $w_2 \in W_2$ için

[2] İzdüşümsel ölçüm yapmak bir genellik kaybı değildir çünkü, yukarıda da anlattığımız gibi POVM elemanları ile ölçüm her zaman daha geniş bir sisteme etki eden izdüşümsel ölçüme denktir.

$$f(w_1) < \alpha \leq f(w_2) \quad , \quad f; W_1, W_2 \to \mathbb{R}$$

Hilbert uzayında her lineer sürekli fonksiyonel f, A; hermitsel bir matris olmak üzere şu şekilde temsil edilebilir;

$$f(\rho) = Tr(\rho A)$$

A'yı yeniden tanımlarsak; $A \to A - I\alpha$ ve yoğunluk matrislerinin izi bir olduğundan; $\alpha \leq f(\rho) \to 0 \leq f(\rho)$.

Örneğin ayrılabilir durumlar ile dolanık durumları ayırt etmeye çalışalım. Tanım gereği, (1.4) ayrılabilir durumların konveks toplamı yine ayrılabilir bir durumdur, dolayısıyla konveks kapalı bir küme oluşturur. Hahn-Banach teoremini uygulayabilmemiz için dolanık durumların da konveks bir küme oluşturması gerekir ama iki dolanık durumun konveks toplamı dolanık bir durum değildir. Örneğin; $\rho(\phi^+) = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle)(\langle 00| + \langle 11|)$ ve $\rho(\phi^-) = \frac{1}{2}(|00\rangle - |111\rangle)(\langle 00| - \langle 11|)$ saf dolanık durumlardır ama konveks toplamları;

$$\rho = \frac{1}{2}\rho(\phi^+) + \frac{1}{2}\rho(\phi^-) = \frac{1}{2}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|11\rangle\langle 11|$$

tanım gereği dolanık değildir. Dolayısıyla tüm dolanık durumları tüm ayrılabilir durumlardan ayıran bir operatör bulmamız kesin değildir. Ama dolanık durumlar kümesinde tek bir ρ elemanı alırsak; tek elemanlı bir küme, konveks kapalı ve sınırlı bir küme olacağından her zaman öyle bir A operatörü bulunabilir ki tüm $\sigma \in$ *ayrılabilir durumlar kümesi* için;

$$Tr(\rho A) < 0 \leq Tr(\sigma A)$$

Örneğin $A = \frac{I}{2} - \rho(\phi^+)$ operatörünü [6], bir normalize $|\alpha, \beta\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle)$ ayılabilir saf durumun izdüşüm operatörü ile çarpıp, izini alırsak;

$$\begin{aligned} Tr(A|\alpha,\beta\rangle\langle\alpha,\beta|) &= \langle\alpha,\beta|A|\alpha,\beta\rangle \\ &= -|\alpha\alpha^{'}+\beta\beta^{'}|^2+\langle\beta,\alpha|\alpha,\beta\rangle \\ &= \geq 0 \end{aligned}$$

Her ayrılabilir durum saf durumların tensör çarpımının konveks toplamı şeklinde yazılabildiğinden ve A operatörünün lineerliğinden dolayı, her ayrılabilir durum için $Tr(A\sigma) \geq 0$ sonucunu verecektir. Dolanık $|\phi^+\rangle\langle\phi^+|$ durumu ise $Tr(A|\phi^+\rangle\langle\phi^+|) = -1$ sonucunu verir. Dolayısıyla A operatörü $|\phi^+\rangle\langle\phi^+|$ durumunu ayrılabilir durumlar kümesinden ayırıyor. A operatörü başka herhangi bir $\rho^{'}$ dolanık durumunu da ayırt edebilir, çünkü $Tr(A\rho^{'}) < 0$, Hahn-Banach teoremi gereği dolanıklık için yeterli koşuldur. Ama $Tr(A\rho^{'})$ sonucu $\rho^{'} \geq 0$'nün dolanık olmadığını göstermez.

Bir kuantum durumunun ayrılabilir olup olmadığına karar vermek için olası tüm ayrıştırmalarına bakmak pratik açıdan kullanışlı bir yöntem değildir. Dolanık durumları tespit etmek, dolanıklık teorisinin henüz cevaplanmamış [8] en önemli problemi olduğundan, konveks kümeleri ayıran operatörlerin bu problemin çözümüne nasıl katkı sağladığına biraz daha değinelim.

Yukarıdaki argümanı tekrar edersek, fonksiyonellerin (yani operatörlerin) lineerliğinden ve ayrılabilir durumların yoğunluk matrisinin, izdüşüm operatörlerinin (saf durumların) tensör çarpımının konveks toplamı olarak yazılabilmesinden dolayı, tüm P_A ve P_B izdüşüm operatörleri için

$$Tr(AP_A \otimes P_B) \geq 0 \tag{1.10}$$

koşulunu sağlayan tüm A operatörlerini bulmak, herhangi bir durumun dolanık olup olmadığını anlamamız için bize yeterli şartları verecektir. Çünkü Hahn-Banach teoremi gereği bir dolanık ρ durumu için, (1.10) koşulunu sağlayan A operatörleri kümesi içinde en az bir $A^{'}$ operatörü $Tr(A^{'}\rho) < 0$ sonucunu verecektir. Bununla birlikte (1.10) koşulunu sağlayan A operatörleri kümesini bulmak ve bunları her duruma uygulamak, bir yoğunluk matrisinin ayrılabilir durumların konveks toplamı şeklinde ayrıştırılabilir olup olmadığına bakmaktan daha kolay değildir.

Ama her operatör ile bir eşleştirme arasında bir izomorfizim bulunabilir ve gösterilebilir ki [4,7] (1.10) koşulunu sağlayan tüm operatörleri bulmak tüm pozitif $\mathscr{A}$ eşleştirmelerini bulmak ile eşdeğerdir, öyle ki;

$$\mathscr{A}_A \otimes I_B(\rho_{AB}) \geq 0 \quad , \quad \rho_{AB} \in \textit{ayrılabilir durumlar}$$

Burada $\mathscr{A}$ *tam pozitif* (*complete positive*) bir eşleştirme olmak zorunda değildir. Ayrılabilir yoğunluk matrislerine $\mathscr{A} \otimes I$ şeklinde bir eşleştirme yapıldığında her zaman pozitif bir matris elde ederiz; $\mathscr{A} \otimes I(P_A \otimes P_B) = \mathscr{A}(P_A) \otimes P_B \geq 0$ [3].

Dolanık durumlar için ise, Hahn-Banach teoremi gereği, her zaman, pozitif olan ama tam pozitif olmayan öyle bir $\mathscr{A}$ eşleştirmesi bulunabilir ki;

$$\mathscr{A} \otimes I(\rho_{AB}) \quad , \quad \rho_{AB} \in \mathscr{H}_1 \otimes \mathscr{H}_2$$

$\mathscr{A}$ eşleştirmesi tam pozitif olsaydı tanımı gereği dolanık durumları da pozitif durumlara eşleştirirdi, tam pozitif olmamak bu yüzden gereklidir.

Operatörler yerine pozitif olan ama tam pozitif olmayan eşleştirmeler kullanılması, $dim(\mathscr{H}_A) \times dim(\mathscr{H}_B) \leq 6$ koşulunu sağlayan kompozit sistemlerde, tüm (1.10) koşulunu sağlayan operatörleri bulmak yerine yalnızca *kısmi transpoz* eşleştirmesinin kullanılmasını yeterli kılar. Çünkü $dim(\mathscr{H}_A) \times dim(\mathscr{H}_B) \leq 6$ koşulunu sağlayan kompozit sistemlerde her pozitif olan ama tam pozitif olmayan ε eşleştirmesi şu şekilde ayrıştırılabilir [7];

$$\varepsilon = \mathscr{D} + \mathscr{G} \circ \mathscr{T} \tag{1.11}$$

Burada $\mathscr{D}$ ve $\mathscr{G}$ tam pozitif eşleştirmeler, $\mathscr{T}$ ise kısmi transpoz eşleştirmesidir. Kısmi transpoz eşleştirmesinin pozitif olan ama tam pozitif olmayan bir eşleştirme olduğu [9] de bir örnek ile gösterilmiştir. (1.11) eşleştirmesini bir ρ_{AB} yoğunluk matrisine uyguladığımızda;

[3] Yoğunluk matrisleri istatistiki topluluk yorumu gereği pozitiftir. Bir matrisin pozitif olması, her Q izdüşüm operatörü için $Tr(\rho Q) \geq 0$ olması demektir. Hermitsel matrisler için yeterli koşul özdeğerlerinin pozitif olmasıdır

$$\varepsilon(\rho) = \mathscr{D}_A \otimes I_B(\rho) + \mathscr{G}_A \otimes I_B(\mathscr{T}_{\mathscr{A}} \otimes I_B(\rho))$$

elde ederiz. $\mathscr{D}$ ve $\mathscr{G}$ tam pozitif eşleştirmeler olduğundan, negatif bir matris elde etmenin tek koşulu $\mathscr{T}_A \otimes I_B(\rho_{AB})$ eşleştirmesinin negatif bir matris vermesidir. Dolayısıyla 2×2 ve 2×3 boyutlu sistemlerde kısmi transpoz eşleştirmesi altında negatif bir matris elde etmemiz dolanıklık için yeterli ve gerekli bir koşuldur. Daha yüksek boyutlarda yeterli ve gerekli bir koşul henüz bulunamamıştır.

1.4 Dolanıklık sınıfları

Dolanılığın *niteliksel sınıflandırılması* ile cevap vermeye çalıştığımız soru şu; kompozit bir kuantum durumu hangi görevler için kullanılabilir? Dolayısıyla teknik olarak aradığımız sınıflandırma kriteri, aynı sınıfa ait durumların aynı *kuantum bilgi işlem* süreçleri için lokal operasyonlar ile birbirlerinin yerine kullanılabilir olması. Mesela dört *Bell durumu*;

$$\begin{aligned} \left|\psi^{\pm}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \\ \left|\phi^{\pm}\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \end{aligned} \tag{1.12}$$

tamamiyle aynı dolanıklığa sahiptir. Sınıflandırma en genelde şu şekilde yapılabilir;

1. Lokal *üniter dönüşümler* altında dönüşebilme (LU denkilik sınıfı)
2. Lokal operasyonlar ve klasik iletişim altında dönüşebilme ($LOCC$ denklik sınıfı)
   (a) Stokastik lokal operasyonlar ve klasik iletişim altında dönüşebilme ($SLOCC$ denklik sınıfı)
   (b) *Asimptotik* lokal operasyonlar ve klasik iletişim altında dönüşebilme ($aLOCC$ denklik sınıfı)

1.4.1 *LU denkliği*

En genelde iki parçacıklı bir saf kuantum durumu şu şekilde yazılır;

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} t_{ij} |ij\rangle \tag{1.13}$$

Herhangi iki durumun LU *denk* olup olmadığını (1.13) formundaki yazılışlarına bakarak anlamak kolay değildir. LU *denkliğini* görmeninin yolu, (1.13) durumunu *Schmidt ayrıştırılmış* (*Schmidt decomposition*) [3, 10, 11] formda yazmaktır. Ek A'da anlatıldığı gibi iki parçacıklı saf bir kuantum durumunu her zaman *Schmidt ayrıştırılmış* formda yazabiliriz.

$$|\psi\rangle = \sum_{i}^{l} \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle \quad , \quad l = min(dim(A), dim(B)) \quad , \quad \lambda_i > 0, \quad \sum_i \lambda_i^2 = 1 \tag{1.14}$$

Burada $\{|i_A\rangle\}$: A sistemi için bir orthonormal baz kümesi, $\{|i_B\rangle\}$: B sistemi için bir orthonormal baz kümesidir ve bu yüzden iki kuantum durumunu aynı bazlarda yazacak dönüşümü bulmak kolay olacaktır. Örneğin (1.12) de verilen dört Bell durumu orthogonal bazlarda yazılmıştır ve $|\psi^+\rangle$ durumunu $|00\rangle, |11\rangle$ bazlarında yazmak için B sisteminde σ_x dönüşümü yapmak yeterli olacaktır.

En genelde herhangi iki kuantum durumunun *Schmidt katsayıları* (λ_i) aynı ise birbirlerine LU dönüşümleri altında denktir. Bu durumda "$\{\lambda_i\}$"nin her değeri farklı bir dolanıklık *bazına* tekabül eder.

1.4.2 *LOCC denkliği*

Her türlü lokal operasyonlar (üniter dönüşümler, ölçüm), sisteme lokal olarak başka parçacıkların eklenmesi ile birbirlerine dönüşebilen durumlar bir $LOCC$ denklik sınıfı oluşturur. Bu sınıfta tersinemez dönüşümlere denk gelen durumlar arasında bir hiyearşi de tanımlanabilir.

1.4.2.1 *SLOCC denkliği*

Bir durum başka bir duruma tersinir biçimde $0 < p \leq 1$ olasılıkla dönüşebiliyor ise, yani;

$$\begin{aligned} \sigma = \varepsilon(\rho) \qquad &, \qquad 0 < Tr(\varepsilon(\rho)) \leq 1 \\ \rho = \varepsilon^{'}(\sigma) \qquad &, \qquad 0 < Tr(\varepsilon^{'}(\sigma)) \leq 1 \end{aligned} \tag{1.15}$$

ise bu iki durum *SLOCC denktir* [12]. Eğer dönüşüm tersinir değilse yani herhangi bir $\varepsilon^{'}(\sigma)$ eşleştirmesi mümkün değilse buna *SLOCC indirgenebilir* denir.

İki kubit sistemlerde tüm dolanık durumlar (1.1) durumundan tersinebilir lokal operasyonlar ile kesin olarak elde edilebilir. Bunu şöyle gösterebiliriz; *AB* sistemleri arasında paylaşılan bir *EPR* dolanık durumunda (1.1), *A* sistemindeki gözlemci, sisteme bir parçacık eklesin ve elindeki iki parçacık üzerine bir *kontrollü değilleme* üniter operasyonu gerçekleştirsin[4].

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle) \otimes |0_A\rangle \quad U_{kd} : \frac{1}{\sqrt{2}}(|00_A 0_B\rangle + |11_A 1_B\rangle)$$

Ardından elindeki parçacıklardan birisi üzerine, $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ve $\beta^*|0\rangle - \alpha^*|1\rangle$ özdurumlar ile tanımlanan izdüşümsel bir ölçüm gerçekleştiğinde ölçüm sonucuna göre şu iki durumdan birisini elde eder;

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad \rightarrow \quad \alpha^*|00\rangle + \beta^*|11\rangle \tag{1.16}$$

$$\beta^*|0\rangle - \alpha^*|1\rangle \quad \rightarrow \quad \beta|00\rangle - \alpha|11\rangle \tag{1.17}$$

İki parçacıklı saf durumlarda bölüm 1.4.1'de anlatıldığı gibi, Schmidt katsayıları aynı olan durumlar tamamıyla aynı dolanıklığa sahiptirler, (1.16) ve (1.17) durumlarının da Schmidt katsayıları ($|\alpha|$, $|\beta|$) aynıdır, dolayısıyla kesin olasılıkla istenilen dolanık durum (yani istenilen Schmidt katsayılı durum) yaratılabilir.

Yukarıda anlatılan prosedürün tersi bir prosedür için yani herhangi bir, iki kubit durumundan, *EPR* (1.1) durumunun yaratılması için şöyle bir protokol örnek olarak verilebilir [13]; *A* ve *B* sistemleri $|\psi_{AB}\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ şeklinde bir dolanık durumu paylaşıyor olsun. *A* sistemindeki gözlemci $|0\rangle$ durumunda ek bir parçacık hazırlar ve bu ek parçacık ile elindeki dolanık kubit üzerinde *kontrollü değilleme* üniter operasyonunu uygular ve şu durum elde edilir;

[4] $U_{CNOT}|i\rangle|j\rangle = |i\rangle|mod(i+j, dim(H))\rangle$

$$\alpha |00_A\rangle |0_B\rangle + \beta |11_A\rangle |1_B\rangle \tag{1.18}$$

A sistemindeki gözlemci ek parçacık üzerinde bir ölçüm yaparak (1.18) durumunu $\beta |0\rangle - \alpha |1\rangle$ veya $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ durumları üzerine projekte eder. $\beta |0\rangle - \alpha |1\rangle$ durumunu elde etme olasılığı $2|\alpha|^2|\beta|^2$ dir ve bu durumda oluşan durum *EPR* durumudur (1.1). Aksi durumda oluşan duruma aynı protokolün uygulanmasına devam edilir. Burada POVM elemanları ile ölçüm kavramı çerçevesinde değinmeye değer bir diğer nokta, bölüm 1.2'de anlatıldığı gibi sistemin Hilbert uzayını genişletip izdüşümsel ölçüm yapmanın aynı zamanda POVM elemanları ile ölçüm yapmaya eşdeğer olmasıdır. Yukarıdaki protokolü uygulamak ile A veya B sistemlerinden birindeki gözlemcinin şu POVM elemanları ile tanımlanan bir ölçüm yapması eşdeğerdir;

$$\begin{aligned} M_1 &= \beta |0\rangle \langle 0| + \alpha |1\rangle \langle 1| \\ M_2 &= \sqrt{1 - M_1^\dagger M_1} \end{aligned}$$

Âşikar ki bu ölçümün sonucunda $\langle \psi_{AB}|(M_1^\dagger \otimes I)(M_1 \otimes I)|\psi_{AB}\rangle = 2|\alpha|^2|\beta|^2$ olasılıkla *EPR* durumu elde edilir. Benzer POVM elemanları yukarıda anlattığımız *EPR* durumundan başka dolanık durumların elde edilmesi için de bulunabilir.

Dönüşüm oranında en yüksek üst sınır, asimptotik limitte (yani elimizde aynı kuantum durumundan çok sayıda olduğunda) elde edilir ve N adet $|\psi_{AB}\rangle$ durumu $N \cdot S(\rho_A)$ adet ***EPR*** durumuna dönüştürülebilir. Burada $S(\rho_A)$ ψ_{AB} durumunun *kısmi Von Neumann entropisidir* ve şu şekilde tanımlanır;

$$S(\rho_A) \equiv -Tr_A(\rho_A \log_2(\rho_A)) \tag{1.19}$$

İki kubit saf dolanık durumlarda tek bir LOCC dolanıklık sınıfı vardır, her dolanık durum istenilen başka bir duruma dönüştürülebilir.

1.4.2.2 *aLOCC denkliği*

Bir dolanık durumdan, elimizde tek bir kopya değil de birden çok kopya olduğunu düşünelim, bu durumda tek tek kopyalar üzerinde operasyonlar yapmak yerine

kolektif lokal operasyonlar ve klasik iletişim ile asimptotik limitte, n sayıdaki ρ durumu m sayıda σ durumuna dönüştürebiliyorsa, yani;

$$\begin{aligned} \forall_{\delta>0,\varepsilon>0} \quad \exists_{n,m,\varepsilon} \quad |n/m - x/y| &< \delta \\ F(\varepsilon(\rho^n), \sigma^m) &\geq 1-\varepsilon \end{aligned}$$

ise ρ durumu σ durumuna *aLOCC indirgenebilirdir* [12]. Burada x/y dönüşümün verimidir, F ise *doğruluğu*(*fidelity*) temsil etmektedir.[5] Benzer şekilde σ durumu da ρ durumuna indirgenebilir ise ρ ve σ *aLOCC denktir*. Yukarıda da anlatıldığı gibi iki parçacıklı saf durumlar için *EPR* durumu tüm dolanık durumlar için *aLOCC denklik* sınıfını oluşturur. *EPR* durumundan tüm iki parçacık dolanık durumları oluşturabilceğimiz ve tüm iki parçacık dolanık durumları da asimptotik olarak *EPR* durumuna dönüştürülebileceğimiz çeşitli şekillerde gösterilebilir [14, 15].

1.5 Dolanıklık ölçüleri

Dolanıklık ölçüsü bir dolanık durumu tarif eden skaler bir büyüklüktür. Bir dolanıklık ölçüsünden istediğimiz, bir kuantum durumunun belirli bir görevi hangi olasılıkla yerine getirebileceğine karar verebilmektir. Bir *ölçü* şu kriterleri sağlamalıdır;

- Ayrılabilir durumlar için sıfır olmalı
- LU dönüşümleri altında değişmemeli
- Ortalama değeri her türlü lokal operasyon altında artmamalı.

Bölüm 1.4.2.1 de değinildiği gibi asimptotik olarak dönüşebilirlik anlamında iki parçacıklı bir saf durumun dolanıklık miktarı kısmi entropisi kadardır (1.19) [15].

[5] Saf ve karma durumlar için *doğruluk* sırasıyla şu şekilde tanımlanır; $F(\psi,\phi) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2$, $F(\rho,\sigma) = (Tr(\sqrt{\sigma}\rho\sqrt{\sigma})^(1/2))^2$

2. ÜÇ PARÇACIK DOLANIKLIĞI

Bu bölümde ayrık (yani konum dalga fonksiyonları örtüşmeyen) üç parçacıklı kuantum durumlarının dolanıklık özellikleri incelenecektir. Saf ve karma durumlar için bu durumların olşturduğu sınıflar belirlenmeya çalışılacaktır.

Maksimum dolanık durumu lokal tersinir operasyonlar ile kesin olarak aynı denklik sınıfındaki durumlara dönüşebilirlik olarak tanımlarsak, ikili dolanık durumun aksine, ki bu durumda maksimum dolanık saf durum *EPR* (1.1) durumudur, üçlü dolanıklıkta maksimum dolanık diyebileceğimiz tek bir durum yoktur. *W* ve *GHZ* [1] durumları göstereceğimiz gibi tersinebilir lokal operasyonlar ile birbirlerine dönüşemeyen ve üç parçacık dolanıklığı gösteren durumlardır

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \tag{2.1}$$

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle) \tag{2.2}$$

Ek B de anlatıldığı gibi, kuantum mekaniğinin lokal realist bir teoriyle açıklanamaması anlamında önemli bir nokta, *GHZ durumunun lokal gizli değişkenler modellerini*, iki parçacıklı dolanıklıktaki istatistiki ihlâlin aksine, her ölçümde ihlâl etmesidir.

2.1 Saf durumlar üç parçacık dolanıklık sınıfları

2.1.1 Üç kubit *LU sınıfı*

Bir, üç kubit saf kuantum durum vektörünü en genelde şu şekilde yazabiliriz;

$$|\psi\rangle = \sum_{ijk} t_{ijk} |ijk\rangle \tag{2.3}$$

[1] Bu *durumu* ilk olarak inceleyenler Greenberger, Horne ve Zeilinger'dir.

Üç kubitte, iki kubit sistemler için elde ettiğimiz argümanı genelleyip (2.3)'i şu formda yazmak mümkün mü?

$$|\psi\rangle = \lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 |111\rangle \tag{2.4}$$

Ek A'da anlatıldığı gibi ikiden fazla parçacık için Schmidt ayrıştırması mümkün değildir, yani istisnâi durumlar hariç her durum (2.4) formunda yazılamaz. Bu durumda *LU sınıfları* aşikar değildir. Ama Schmidt ayrıştırması ile, minimum ayrıştırılabilir formda vektör içeren hâle getirme ve anlamında bir analoji kurup, (2.3) durumunu nasıl minimum terim içeren hâle getirebileceğimize inceleyerek LU denkliklerini belirleyebiliriz. Burada yapacağımız analiz [16, 17] de yapılan çalışmalar üzerine kurulmuştur.

Buradaki mantığımız parçacılardan birisini ayırıp *üniter dönüşümler* ile katsayı matrisini diyagonalleştirmek (en az sayıda terim içeren hale getirmek) üzerine kurulu.

(2.3) durumunu şu şekilde yazalım;

$$|\psi\rangle = \sum_{jk} T_{0,jk} |0\rangle |jk\rangle + T_{1,jk} |1\rangle |jk\rangle$$

Sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü parçacıklarda üniter dönüşümler yapacağız. Birinci sistemde yapacağımız bir U üniter dönüşümü $T_{0,jk}$ ve $T_{1,jk}$ katsayı matrislerini şu şekilde değiştirir;

$$\begin{aligned} T_0^{'} &= u_{00}^A T_0 + u_{01}^A T_1 \\ T_1^{'} &= u_{10}^A T_0 + u_{11}^A T_1 \quad , \quad u_{tz} = \langle t|U|z\rangle \end{aligned}$$

Bu dönüşümü $det(T_0^{'} = 0)$ şeklinde seçebiliriz. Daha sonra ikinci ve üçüncü sistemler üzerine yapacağımız dönüşümler ile T_0 matrisini diyagonalize etmeye çalışacağız. İkinci parçacık üzerine yapacağımız dönüşümler katsayı matrislerini bu üniter dönüşüm ile soldan çarpmaya, üçüncü parçacık üzerine yapacağımız dönüşüm katsayı matrisini bu dönüşümün transpozu ile sağdan çarpmaya eşdeğerdir. Tekil değer ayrıştırma teorisine göre (*singular value decomposition*)

her matrisi diyagonalize edecek uygun üniter dönüşümler bulabiliriz. Bu operasyonlar sonucunda en genelde şu matrisleri elde ederiz;

$$\begin{aligned} M_0 &= U^B T_0' U^C = \begin{pmatrix} \lambda_0 e^{i\psi_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ M_1 &= U^B T_1' U^C = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{i\psi_1} & \lambda_2 e^{i\psi_2} \\ \lambda_3 e^{i\psi_3} & \lambda_4 e^{i\psi_4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Burada bazlar yeniden tanımlanıp fazlardan kurtulabiliriz; $|0_i\rangle \to e^{\varphi_{i0}}|0_i\rangle$, $|1_i\rangle \to e^{\varphi_{i1}}|1_i\rangle$. $\forall_j\ \psi_j = 2\pi$ olacak şekilde bazları seçebilir miyiz?

$$\begin{array}{l} \varphi_{00}+\varphi_{10}+\varphi_{20} = 2\pi-\psi_0 \\ \varphi_{01}+\varphi_{10}+\varphi_{20} = 2\pi-\psi_1 \\ \varphi_{01}+\varphi_{10}+\varphi_{21} = 2\pi-\psi_2 \\ \varphi_{01}+\varphi_{11}+\varphi_{20} = 2\pi-\psi_3 \\ \varphi_{01}+\varphi_{11}+\varphi_{21} = 2\pi-\psi_4 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{00} \\ \varphi_{01} \\ \varphi_{10} \\ \varphi_{11} \\ \varphi_{20} \\ \varphi_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi-\psi_0 \\ 2\pi-\psi_1 \\ 2\pi-\psi_2 \\ 2\pi-\psi_3 \\ 2\pi-\psi_4 \end{pmatrix}$$

Bu denklem sisteminin çözülebilir olması için gerekli koşul, sonuç vektörünün, katsayı matrisinin *erimi* içinde olamsıdır. Kolaylıkla gösterilebilir ki katsayı matrisinin *eriminin* boyutu yani *rankı* dörttür. Dolayısıyla en genel durumda beş boyutta bir vektör katsayı matrisinin *erimine* dahil değildir. Bununla birlikte dört boyutta bir vektör bu katsayı matrisinin *erimine* dahildir. Yani yalnızca dört tane fazdan kurtulabiliriz. Kanonik formu $|100\rangle$'ın fazını bırakarak tanımlıyoruz;

$$|\psi\rangle = \lambda_0|000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi}|100\rangle + \lambda_2|101\rangle + \lambda_3|110\rangle + \lambda_4|111\rangle \quad \lambda_i \geq 0 \tag{2.5}$$

Bu ayrıştırmada A sistemindeki kubiti ayırıp katsayı matrislerini yukarıda tanımlanmış şekillere soktuk fakat başka bir kubiti ayırıp aynı procedürü gerçekleştirebilirdik.

Burada önemli bir soru şudur; bu ayrıştırma *eşsiz* midir? Yani herhangi bir *durum* yukarıda tanımlanmış ketlerin formunda yazılıp, bazlar da istenilen şekilde değiştirdiğinde farklı durumlar elde etme ihtimalimiz var mı? Evet var, çünkü $det(T_0' = 0)$ denkleminin iki çözümü vardır, hangisini seçeceğimiz bize kalmıştır ama faz φ'yi 0 ile π arasında sınırlandırarak bu yozluktan kurtuluruz.

Lokal üniter dönüşümler ile denk olan iki durumun dolanıklık özellikleri aynıdır. Yukarıdaki hesap normalize, saf durumlar için beş parametrenin LU denklik için yeterli olduğunu gösteriyor. Herhangi iki durum (2.5) formunda yazılarak denkliği incelenebilir. Örneğin şu iki durumun LU denk olup olmadığına bakalım;

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle) \tag{2.6}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|000\rangle + |001\rangle + |010\rangle - |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle) \tag{2.7}$$

Yukarıda tanımladığımız algoritmayı (2.6) durumuna uygulayalım ve bu durumu üniter dönüşümler ile kanonik formda yazmaya çalışalım. Katsayı matrislerimiz şu şekilde olacak;

$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Şimdi birinci parçacık üzerinde uygun ($det(T_0^{'} = 0)$) bir üniter dönüşüm yapacağız;

$$\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}_A \otimes I_B \otimes I_C |W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(k|001\rangle + m|101\rangle + k|010\rangle + m|110\rangle + l|000\rangle + n|100\rangle)$$

Katsayı matrislerimiz şu şekilde değişecektir;

$$T_0^{'} = \begin{pmatrix} l & k \\ k & 0 \end{pmatrix} \quad T_1^{'} = \begin{pmatrix} n & m \\ m & 0 \end{pmatrix}$$

$det(T_0^{'} = 0)$ koşulu; $k = 0$ olmasını gerektirir. Üniterlik koşulları ise uyguladığımız dönüşümün

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

olmasını gerektirir[2]. Yeni katsayı matrislerimiz ve (2.6) ise şu şekilde olacaktır;

[2] Burada üniter dönüşümün m ile tanımlanmış elemanını kompleks seçtik ama l'yi ya da her ikisini birden kompleks seçebilirdik bununla birlikte burada bir genellik kaybı yoktur çünkü kompleks katsayıları, en son adımda bazları yeniden tanımlayarak (yani yeni üniter dönüşümler yaparak) eleyeceğiz.

$$T_0^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_1^{'} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle + e^{i\phi}|101\rangle + e^{i\phi}|110\rangle)$$

İkinci ve üçümcü parçacıklar üzerinde üniter dönüşümler yapmaya gerek kalmadan $T_0^{'}$ katsayı matrisini diyagonel hâle getirdik. Son olarak bazları yeniden tanımlayarak ($|1\rangle_A \rightarrow e^{-i\phi}|1\rangle_A$ üniter dönüşümü bu durumda yeterli olacaktır) (2.6) durumunu kanonik formda yazabiliriz;

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle + |101\rangle + |110\rangle) \tag{2.8}$$

Şimdi (2.7) durumuna tanımladığımız algoritmayı uygulayalım. Katsayı matrislerimiz şu şekilde olacaktır;

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad T_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Birinci parçacık üzerine uygulanan bir üniter dönüşüm ile katsayı matrisleri şu hâle gelecektir;

$$U : \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_0^{'} = \begin{pmatrix} k-l & k+l \\ k+l & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1^{'} = \begin{pmatrix} m-n & m+n \\ m+n & 0 \end{pmatrix}$$

$det(T_0^{'}) = 0$ koşulu $k = -l$ olmasını, üniterlik koşulları da uyguladığımız dönüşümün ve elde ettiğimiz katsayı matrislerinin şu şekilde olmasını gerektirir;

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ e^{i\phi} & e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad T_0^{'} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_1^{'} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\phi} \\ \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

Yukarıda da tartıştığımız gibi bazı elemanların reel seçilmesi bir genellik kaybı değildir. Diğer örnekte olduğu gibi ikinci ve üçüncü parçacıklar üzerinde birer üniter dönüşüm yapmaya gerek kalmadan $T_0^{'}$ matrisini diyagonal hâle getirdik ve (2.7) durumu şu duruma dönüşmüş oldu;

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{-2}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\phi}|101\rangle + \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\phi}|110\rangle\right)$$

Gerekli bazları da yeniden tanımlayarak ($|0\rangle_A \to -|0\rangle_A \quad |1\rangle_A \to e^{-i\phi}|1\rangle_A$) (2.7) durumunu istediğimiz forma getirmiş olduk;

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle + |101\rangle + |110\rangle)$$

Dolayısıyla (2.6) ve (2.7) durumlarının LU denk olduğunu bulmuş olduk.

2.1.1.1 Kapalı hâlde LU dönüşümü

Bu bölümde herhangi bir üç kubit kuantum durumuna LU denklik sınıfı algoritması 2.1.1 uygulandığında elde edeceğimiz katsayılar için kapalı (*explicit*) ifadeler verilecektir.

En genel üç kubit kuantum durumunu ele alalım;

$$\psi_{000}|000\rangle + \psi_{001}|001\rangle + \psi_{010}|010\rangle + \psi_{011}|011\rangle +$$
$$\psi_{100}|100\rangle + \psi_{101}|101\rangle + \psi_{110}|110\rangle + \psi_{111}|111\rangle$$

Öncelikle katsayı matrislerimizi ve T_0 katsayı matrisinin determinantını sıfır yapmak için kullanacağımız üniter matrisi yazalım;

$$T_0 : \begin{pmatrix} \psi_{000} & \psi_{001} \\ \psi_{010} & \psi_{011} \end{pmatrix} \quad T_1 : \begin{pmatrix} \psi_{100} & \psi_{101} \\ \psi_{110} & \psi_{111} \end{pmatrix} \quad U : \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix}$$

Uygulayacağmız üniter dönüşüm sonunda elde edeceğimiz matrisler şöyle olacaktır;

$$T_0' : \begin{pmatrix} \alpha_{00}\psi_{000} + \alpha_{01}\psi_{100} & \alpha_{00}\psi_{001} + \alpha_{01}\psi_{101} \\ \alpha_{00}\psi_{011} + \alpha_{01}\psi_{110} & \alpha_{00}\psi_{011} + \alpha_{01}\psi_{111} \end{pmatrix}$$
$$T_1' : \begin{pmatrix} \alpha_{10}\psi_{000} + \alpha_{11}\psi_{100} & \alpha_{10}\psi_{001} + \alpha_{11}\psi_{101} \\ \alpha_{10}\psi_{011} + \alpha_{11}\psi_{110} & \alpha_{10}\psi_{011} + \alpha_{11}\psi_{111} \end{pmatrix}$$

$det(T_0) = 0$ koşulu şunu gerektirir;

$$\alpha_{00}^2(\psi_{000}\psi_{011} - \psi_{010}\psi_{001}) + \alpha_{00}\alpha_{01}(\psi_{000}\psi_{111} + \psi_{100}\psi_{011} - \psi_{010}\psi_{101} - \psi_{110}\psi_{001})$$
$$+\alpha_{01}^2(\psi_{100}\psi_{111} - \psi_{110}\psi_{001}) = 0$$

α_{00}^2'nin katsayısı için x, $\alpha_{00}\alpha_{01}$'in katsayısı için y, α_{01}^2'nin katsayısı için de z kısaltması yaparsak üniter dönüşümün elemanlarını şöyle buluruz;

$$x\alpha_{00}^2 + y\alpha_{00}\alpha_{01} + z\alpha_{01}^2 \quad , \quad \alpha_{00}'^2 \equiv (\sqrt{x}\alpha_{00} + \frac{y}{2\sqrt{x}}\alpha_{01}) \quad \alpha_{01}' \equiv \sqrt{\frac{y^2}{4x} - z}\alpha_{01}$$

$$\Rightarrow \alpha_{01}'^2 - \alpha_{01}'^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{00}' = \pm\alpha_{01} \Rightarrow \quad \left\{\alpha_{00} = (\sqrt{y^2 - 4zx} - y) \quad \alpha_{01} = 2x\right\}$$

$$U : \frac{1}{(|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ -\alpha_{01}^* & \alpha_{00}^* \end{pmatrix}$$

Gerekli üniter dönüşümü kapalı hâlde bulduk. [3] Elde edeceğimiz durum şöyle olacaktır;

$$\overbrace{\frac{(\alpha_{00}\psi_{000} + \alpha_{01}\psi_{100})}{(|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2)^{1/2}}}^{a}|000\rangle \quad + \quad \overbrace{\frac{(\alpha_{00}\psi_{001} + \alpha_{01}\psi_{101})}{(|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2)^{1/2}}}^{b}|001\rangle \quad +$$

$$\overbrace{\frac{(\alpha_{00}\psi_{010} + \alpha_{01}\psi_{101})}{(|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2)^{1/2}}}^{c}|010\rangle \quad + \quad \frac{(\alpha_{00}\psi_{011} + \alpha_{01}\psi_{111}}{(|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2)^{1/2}})|011\rangle \quad +$$

$$\overbrace{\frac{(-\alpha_{01}^*\psi_{000} + \alpha_{00}^*\psi_{100})}{(|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2)^{1/2}}}^{d}|100\rangle \quad + \quad \overbrace{\frac{(-\alpha_{01}^*\psi_{001} + \alpha_{00}^*\psi_{101})}{(|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2)^{1/2}}}^{e}|101\rangle \quad +$$

$$\overbrace{\frac{(-\alpha_{01}^*\psi_{010} + \alpha_{00}^*\psi_{110})}{(|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2)^{1/2}}}^{f}|110\rangle \quad + \quad \overbrace{\frac{(-\alpha_{01}^*\psi_{011} + \alpha_{00}^*\psi_{111})}{(|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2)^{1/2}}}^{g}|111\rangle$$

Notasyonu kolaylaştırmak amacıyla belirtilen kısaltmaları yaparsak T_0' ve T_1' matrislerimiz şöyle olacaktır;

$$T_0' \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{bc}{a} \end{pmatrix} \quad , \quad T_1' \equiv \begin{pmatrix} d & e \\ f & g \end{pmatrix}$$

T_0' katsayı matrisini diyagonalize edecek operatörleri şöyle bulabiliriz; [4] V matrisinin satırlarının $T_0'^{\dagger}T_0'$ matrisinin özvektörleri olduğu âşikardır, ($T_0'^{\dagger}T_0' = V^{\dagger}D^2V$) U'nun i. satırı ise $T_0'V^{\dagger}/s_i$ matrisinin i. satırı olacaktır, burada s_i i.

[3] Bu matris 2.1.1 bölümünde verilen örneklerde kullanılan üniter dönüşümler ile tutarlı değildir. Bunun sebebi ilgili örneklerde matrisi diyagonalize etmeye gerek bırakmayan üniter dönüşümü bulmanın pratik olarak kolay olmasıdır. Bulduğumuz kapalı formdaki üniter dönüşüm artı diyagonalize eden matrisler yukarıdaki örnekler ile aynı sonucu verecektir.

[4] Terminoloji hatırlatması: 2.1.1'de de anlattığımız gibi $T_0' = UDV$ şeklinde U ve V üniter matrisler, D diyagonel matris olmak üzere yazılabilir.

tekil değerdir. Ayrıca U matrisi $T_0' T_0'^{\dagger}$ matrisinin özvektörleri kullanılarak ta oluşturulabilir ama U matrisini böyle oluştururken V matrisi ile işaret uyumu konusunda dikkatli olmak gerekir, çünkü bir özvektörü eksi ile ya da kompleks $\pm i$ sayısı ile çarpmak özvektörü değiştirmez. Sonuç olarak $T_0^{'}$ matrisini sırasıyla soldan ve sağdan çarparak diyagonalize edecek matrisler söyledir;

$$U^{\dagger}: \begin{pmatrix} \frac{a^*|c|}{c^*(|a|^2+|c|^2)^{1/2}} & \frac{|c|}{(|a|^2+|c|^2)^{1/2}} \\ \frac{-c|a|}{a(|a|^2+|c|^2)^{1/2}} & \frac{a}{(|a|^2+|c|^2)^{1/2}} \end{pmatrix} \quad V^{\dagger}: \begin{pmatrix} \frac{a^*|b|}{b^*(|a|^2+|b|^2)^{1/2}} & \frac{-b|a|}{a(|a|^2+|b|^2)^{1/2}} \\ \frac{|b|}{(|a|^2+|b|^2)^{1/2}} & \frac{|a|}{(|a|^2+|b|^2)^{1/2}} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Kanonik formun elemanlarını $T_0^D = U^{\dagger} T_0^{'} V^{\dagger}$ ve $T_1^D = U^{\dagger} T_1^{'} V^{\dagger}$ matrislerinin elemanlarından oluşacaktır. "λ_0", T_0^D matrisinin birinci satır birinci sütündaki elemanının büyüklüğü olacak, "λ_1", "λ_2", "λ_3" ve "λ_4" ise T_1^D matrisinin ilgili elemanlarının büyüklüğü olacaktır. Kapalı bir formda şöyle yazılabilir;

$$\lambda_0 = \left| \frac{bc\left(\left(\mathrm{Abs}[a]^2+\mathrm{Abs}[b]^2\right)\left(\mathrm{Abs}[a]^2+\mathrm{Abs}[c]^2\right)\right)^{1/2}}{a\mathrm{Abs}[b]\mathrm{Abs}[c]} \right| \tag{2.10}$$

$$\lambda_1 = \left| \frac{\mathrm{Abs}[b]\mathrm{Abs}[c]\left(da^{*2}+gb^*c^*+a^*(eb^*+fc^*)\right)}{b^*c^*\left(\left(\mathrm{Abs}[a]^2+\mathrm{Abs}[b]^2\right)\left(\mathrm{Abs}[a]^2+\mathrm{Abs}[c]^2\right)\right)^{1/2}} \right| \tag{2.11}$$

$$\lambda_2 = \left| \frac{\mathrm{Abs}[a]\mathrm{Abs}[c]((-bd+ae)a^*+(-bf+ag)c^*)}{ac^*\left(\left(\mathrm{Abs}[a]^2+\mathrm{Abs}[b]^2\right)\left(\mathrm{Abs}[a]^2+\mathrm{Abs}[c]^2\right)\right)^{1/2}} \right| \tag{2.12}$$

$$\lambda_3 = \left| \frac{\mathrm{Abs}[a]\mathrm{Abs}[b]((-cd+af)a^*+(-ce+ag)b^*)}{ab^*\left(\left(\mathrm{Abs}[a]^2+\mathrm{Abs}[b]^2\right)\left(\mathrm{Abs}[a]^2+\mathrm{Abs}[c]^2\right)\right)^{1/2}} \right| \tag{2.13}$$

$$\lambda_4 = \left| \frac{\left(bcd-ace-abf+a^2g\right)a^*}{a\left(\left(\mathrm{Abs}[a]^2+\mathrm{Abs}[b]^2\right)\left(\mathrm{Abs}[a]^2+\mathrm{Abs}[c]^2\right)\right)^{1/2}} \right| \tag{2.14}$$

Burada önemli bir nokta şudur; kanonik form üniter dönüşümler altında eşsiz (*unique*) olduğundan bu katsayılar da eşsizdir, dolayısıyla bu katsayıların çarpımı da üniter dönüşümler altında değişmez. Yani üçlü dolanma (2.3.1) ve W dolanma (2.3.2) da üniter dönüşümler altında değişmez. [5]

2.1.2 *SLOCC sınıfı*

Bu bölümde üçparçacıklı sistemlerdeki SLOCC sınıflarını inceleyeceğiz. Burada yapacağımız analiz [18] de yapılan inceleme üzerine kurulmuştur.

[5] Pratikte dikkat edilmesi gereken bir başka nokta ise yukarıdaki eşitliklerin hesaplanmasında herhangi bir belirsizliğe yol açmamak için, sayısal değerlerin limit işlemi ile hesaplanması gerektiğidir.

Üç parçacıklı sistemlerde saf durumların *SLOCC* sınıfları altıya ayrılır. Bunu kanıtlamak için önce şunları göstermemiz gerekir;

i) N parçacıklı saf durumlarda parçacıklardan birisinin dalga vektörü, tüm sistemin dalga vektöründen ayrıştırılabiliyor ise yani;

$$|\psi\rangle_{ABC...N} = |\phi\rangle_A \otimes |\pi\rangle_{BC...N} \quad , \quad \rho_A = Tr_{BC...N} |\psi\rangle \langle\psi|$$

şeklinde yazılabiliyor ise $rank(\rho_A) = 1$ dir.

İspatı: Bunu N parçacıklı sistemin *Schmidt ayrıştırmasını* yazarak görebiliriz;

$$|\psi\rangle_{ABC...N} = \sum_{i=1}^{n_\psi} \sqrt{\lambda_i^\psi}\, |i\rangle_A |i\rangle_{BC...N} \tag{2.15}$$

$Rank(\rho_A) = 1$ olması yukarıdaki ayrıştırmanın tek bir terim içermesi demektir ve bu da tanım gereği dolanık değildir. Her dolanık olmayan sistemin *Schmidt ayrıştırması* da tek bir terim içerir, dolayısıyla altsistemin ***rank*** değeri birdir.

ii) *Tersinebilir lokal operasyonlar*, *lokal rankları* değiştirmezler.

İspatı: Dalga vektörünü *Schmidt ayrıştırılmış* hâlde yazalım (2.15) En genel kuantum operasyonu bölüm 1.2 de anlatılmıştır. Seçici bir operasyon yaptığımızı (örneğin bir ölçüm) yaptığımızı düşünelim; A sisteminde yapılmış bir Λ operasyonu dalga vektörünü şu şekilde değiştirecektir;

$$|\phi\rangle = \Lambda_A \otimes I_{BC...N} |\psi\rangle \quad , \quad \Lambda = \sum_{i=1}^{n} |\mu_i\rangle \langle i|$$

Λ'nın tersinir olması için $\{|\mu_i\rangle\}$ vektörleri *lineer bağımsız* olmalı. ρ_A^ψ ve ρ_A^ϕ'nin *erimlerine* (*range*) bakarsak;

$$\begin{aligned} \rho_A^\psi &= \sum_{i=1}^{n_\psi} |i\rangle \langle i| \\ \rho_A^\phi &= \Lambda \rho_A^\psi \Lambda^\dagger = \sum_{i=1}^{n_\psi} |\mu_i\rangle \langle \mu_i| \\ \Rightarrow \quad rank(\rho_A^\psi) &= rank(\rho_A^\phi) = n_\psi \end{aligned}$$

iii) *Tersinebilir lokal operasyonlar* ile birbirlerine dönüşebilen durumlar aynı *SLOCC* sınıfındadır.

İspatı: $|\phi\rangle = \Lambda \otimes B \otimes C... \otimes N|\psi\rangle$ şeklinde tersinir $(\Lambda, B, C, ..., N)$ operatörlerinden oluşan bir dönüşümü sağlayacak lokal bir protokol şu şekilde düşünülebilir; A daki *gözlemci* $\sqrt{p_\Lambda}\Lambda$ ve $\sqrt{I_A - p_\Lambda^\dagger \Lambda}$ $(p_\Lambda \leq 1)$ operatörleri ile tarif edilen bir *POVM* uygular ve p_Λ olasılığı ile $|\psi\rangle \rightarrow \Lambda_A \otimes I_{BC...N}|\psi\rangle$ elde eder. Benzer şekilde diğer *gözlemciler de* p_B, p_C olasılığı ile, istenilen operasyonu uygular ve $p_\Lambda p_B p_C ... p_N$ olasılığı ile $|\psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle$ dönüşümü gerçekleşir. Operatörler tersinir olduğundan $|\psi\rangle = \Lambda^{-1} \otimes B^{-1} \otimes C^{-1} ... \otimes N|\phi\rangle$ şeklinde bir dönüşümü sağlayacak bir lokal protokol de benzer şekilde bulunabilir.

Bunun tersini, yani aralarında *SLOCC* denkliği olan iki durum arasındaki dönüşümün tersinir olabileceğini şöyle gösterebiliriz; bir $|\pi\rangle$ vektörü tanımlayalım;

$$|\pi\rangle = \Lambda_A \otimes I_{BC...N}|\psi\rangle \tag{2.16}$$

Burada Λ_A operatörü yalnızca A sisteminin Hilbert uzayına etkiyor ve diğer sistemleri olduğu gibi bırakıyor, en genelde diğer uzaylara da birer operasyon etkiyecektir, ama argümanımızı diğer uzaylar için de tekrar etmek mümkündür, dolayısıyla (2.16) durumu bir genellik kaybı yaratmaz.

Her iki vektörü iki Hilbert uzayına $(H_A \otimes H_{B...N})$ ayırıp *Schmidt bazında* yazarsak;

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{ABC...N} &= \sum_{i=1}^{n_\psi} \sqrt{\lambda_i^\psi}\,|i\rangle_A\,|i\rangle_{BC...N} \\ |\pi\rangle_{ABC...N} &= \sum_{i=1}^{n_\pi} \sqrt{\lambda_i^\pi}(U_A|i\rangle_A)\,|i\rangle_{BC...N} \end{aligned}$$

U_A lokal Schmidt bazları arasındaki üniter dönüşümdür. $|\psi\rangle$ ve $|\pi\rangle$ arasındaki *SLOCC* denklikten, ***ii***'nin sonucu olarak; $n_\pi = n_\psi$. Bu durumda Λ_A operatörü şöyle olmalı;

$$\begin{aligned} A &= U_A(A_1 + A_2), \\ A_1 &\equiv \sum_{i=1}^{n_\psi} \sqrt{\frac{\lambda_i^\pi}{\lambda_i^\psi}} |i\rangle \langle i| \\ A_2 &\equiv \sum_{i=n_\psi+1}^{n} |\mu_i\rangle \langle i| \end{aligned} \tag{2.17}$$

Burada $\{|\mu_i\rangle\}$ herhangi normalize olmamış vektörler ve operasyonda hiçbir etkisi yok çünkü; $A_2 \otimes I_{B\ldots N} |\psi\rangle = 0$. Dolayısıyla A_2 yi tekrar tanımlayabiliriz;

$$A_2 \equiv \sum_{n_\psi+1}^{n} |i\rangle \langle i| \tag{2.18}$$

Bu durumda A tersinebilir bir operatördür.

Bunları kullanarak üç parçacık *SLOCC* sınıflarını belirleyebiliriz;

1. *Tamamiyle ayrılabilir durumlar*
2. *İkili dolanık durumlar* (kendi içinde üç'e ayrılır)
3. *Üçlü dolanık durumlar durumlar* (kendi içinde ikiye ayrılır)

2.1.2.1 Tamamiyle ayrılabilir durumlar

$$|\psi\rangle_{ABC} = |\phi\rangle_A \otimes |\theta\rangle_B \otimes |\pi\rangle_C \tag{2.19}$$

bir *SLOCC* sınıfı oluşturur, çünkü; $rank(\rho_A) = rank(\rho_B) = rank(\rho_C) = 1$ "***iii***"'ün sonucu olarak aynı *SLOCC* sınıfında olan durumlar birbirlerine tersinebilir lokal operasyonlarla dönüşürler ve "***ii***"'nin sonucu olarak bunlar lokal rankları arttıramaz. Dolayısıyla *ikili dolanık durumlar* ve *üçlü dolanık durumlar* yaratılamaz.

2.1.2.2 İkili dolanık durumlar

İkili dolanık durumlar; (*bi-partite entangled*) *A-BC* (*BC* sistemleri dolanık, *A*'nın dalga vektörü faktorize olabiliyor), benzer şekilde *AB-C*, *AC-B* durumlarıdır. 2.1.2.1 de kullanılan argümanlar ile bu sınıflarında tersinir biçimde birbirlerine, tamamıyla ayrılabilir durumlara ve üçlü dolanık durumlara dönüşemeyeceğini söyleyebiliriz. Her ikili dolanık durumda tek bir *SLOCC* sınıfı oluşturduğundan 1.4.2.1 ve lokal kuantum operasyonları (tersinebilir ya da değil) ile lokal ranklar arttırılamayacağından ayrıca her biri kendi içinde *SLOCC* sınıflarına ayrılmazlar.

2.1.2.3 Üçlü dolanık durumlar

Üçlü dolanık durumlar ($rank(\rho_A) = rank(\rho_B) = rank(\rho_C) = 2$) kendi içinde iki *SLOCC* sınıfına ayrılırlar. Bunlar *GHZ* ve *W* sınıflarıdır. Bunu kanıtlamak için 1)*GHZ* (2.1) ve *W* (2.2) durumlarının aynı tersinir *SLOCC* sınıfında olmadığını ve 2)Her üçlü dolanık durumun ya *GHZ* ya da *W*, *SLOCC* sınıfında olduğunu göstermemiz gerekir.

1. Herhangi bir kuantum durumunu yazmak için gerekli olan *minimum ayrılabilir tensor çarpımı formundaki* terim sayısı *SLOCC* dönüşümleri altında değişmez [18]. Dolayısıyla *W* durumunu iki adet terim ile yazamadığımızı göstermek *GHZ* ile *W*'nin aynı *SLOCC* sınıfında olmadığını göstermek için yeterli olacaktır.

   Bir üçparçacık kuantum durumu şu şekilde yazılabiliyor olsun;

   $$|\psi\rangle = |a_1\rangle_A |\phi_1\rangle_{BC} + |a_2\rangle_A |\phi_2\rangle_{BC}$$

   $Erim(\rho_{BC})$; $|\phi_1\rangle_{BC}$ ve $|\phi_2\rangle_{BC}$ tarafından *taranır* ve bir ya da iki çarpım formunda terim içerebilir [19]. Her ikisinin de ayrılabilir formda olduğu durumu, bir *SLOCC* bazı olarak kabul edeceğimiz *GHZ* durumunda tersinebilir lokal operasyonlar ile elde ederiz.

   $Erim(\rho_{AB})$ tek bir ayrılabilir vektör içeriyorsa;

   $$|\psi\rangle = |a_1\rangle_A |b_1\rangle_B |c_1\rangle_C + |a_2\rangle_A |\phi\rangle_{BC} \quad , \quad \langle b_1|_B \langle c_1|_C |\phi\rangle_{BC} = 0 \tag{2.20}$$

   $|a_1\rangle_A |b_1\rangle_B |c_1\rangle_C \mapsto |0\rangle_A |0\rangle_B |0\rangle_C$ dönüşümünü gerçekleştiren lokal üniter dönüşümler ile (2.20) durumunu şu şekilde yazabiliriz.

$$\sqrt{a}\,|000\rangle + |1\rangle\,(\sqrt{b}\,|0\rangle + \sqrt{c}\,|1\rangle)(\sqrt{d}\,|0\rangle + |1\rangle) \tag{2.21}$$

$|\phi\rangle_{BC}$ $|b_1\rangle_B\,|c_1\rangle_C$'e dik olarak seçildiğinden ve her iki vektörün toplamını bir ayrıştırabilir vekktör olmaması gerektiğinden (varsayımımız gereği) $|\phi\rangle_{BC} = \sqrt{d}\,|0\rangle + |1\rangle$. $Erim(\rho_{AB})$ tek bir ayrıştırabilir vektör içerir. Bu durumda, (2.20) kuantum durumunu iki ayrıştırabilir formda terimin toplamı olarak yazmanın mümkün olmadığı görülüyor ve üç terimli ayrıştırma gerekiyor.

$$|\psi\rangle = \sqrt{a}\,|000\rangle + \sqrt{bd}\,|001\rangle + \sqrt{b}\,|010\rangle + \sqrt{cd}\,|101\rangle + \sqrt{c}\,|110\rangle \tag{2.22}$$

Bu durum W (2.2) durumundan şu tersinebilir lokal operasyonlar ile elde edilebilir;

$$\begin{pmatrix} \sqrt{b} & \sqrt{a} \\ \sqrt{c} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3d} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

Dolayısıyla (2.22) durumundan, yukarıda verilmiş olan operasyonların tersi ile W durumu elde edilebilir;

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{c}} \\ \frac{1}{\sqrt{c}} & -\sqrt{\frac{b}{ac}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3d}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

2. Ayrıca her üçlü dolanık durumun da GHZ ya da W durumundan tersinebilir lokal operasyonlar ile elde edilebileceğini kanıtlamamız gerekiyor. Bunun için mümkün olan bütün üçlü dolanık LU denklik sınıflarının tersinebilir lokal operasyonlar ile GHZ veya W durumlarından nasıl elde edilebileceğini göstereceğiz.

   Üçlü dolanık kuantum durumlarının, LU denklik sınıflarının tanımı gereği şu üçlü dolanık durumlardan ($rank(\rho_A) = rank(\rho_B) = rank(\rho_C) = 2$) birisinde yazılabileceği âşikardır;

$$\lambda_0 |000\rangle + \lambda_4 |111\rangle \tag{2.25a}$$

$$\lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |100\rangle + \lambda_4 |111\rangle \tag{2.25b}$$

$$\lambda_0 |000\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_3 |110\rangle \tag{2.25c}$$

$$\lambda_0 |000\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_4 |111\rangle \tag{2.25d}$$

$$\lambda_0 |000\rangle + \lambda_3 |110\rangle + \lambda_4 |111\rangle \tag{2.25e}$$

$$\lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |100\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_3 |110\rangle \tag{2.25f}$$

$$\lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |100\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_4 |111\rangle \tag{2.25g}$$

$$\lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |100\rangle + \lambda_3 |110\rangle + \lambda_4 |111\rangle \tag{2.25h}$$

$$\lambda_0 |000\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_3 |110\rangle + \lambda_4 |111\rangle \tag{2.25i}$$

$$\lambda_0 |000\rangle + \lambda_1 e^{i\varphi} |100\rangle + \lambda_2 |101\rangle + \lambda_3 |110\rangle + \lambda_4 |111\rangle \tag{2.25j}$$

Şimdi göstermemiz gereken tüm bu durumların tersinebilir lokal operasyonlar ile GHZ ya da W durumundan elde edilebilecek olduğu. Kolaylıkla gösterilebilir ki (2.26) operasyonları ile sırasıyla (2.25)'de verilen durumları elde edebiliriz. Bu da şunu kanıtlar ki her üçlü dolanık durum tersinebilir lokal operasyonlar ile GHZ ya da W durumundan elde edilebilir.

Maksimum dolanık durumu lokal tersinir operasyonlar ile kesin olarak aynı *SLOCC* denklik sınıfındaki durumlara dönüşebilirlik olarak tanımlarsak, ikili dolanık durumun aksine, ki bu durumda maksimum dolanık saf durum *EPR* durumudur (1.1), üçlü dolanıklıkta maksimum dolanık diyebileceğimiz tek bir durum yoktur.

$$\sqrt{2}\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \otimes I \otimes I \quad |GHZ\rangle \tag{2.26a}$$

$$\sqrt{2}\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ \lambda_1 e^{i\varphi} & \lambda_4 \end{pmatrix} \otimes I \otimes I \quad |GHZ\rangle \tag{2.26b}$$

$$\sqrt{3}\begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad |W\rangle \tag{2.26c}$$

$$\sqrt{2}\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda_4/\lambda_2 \end{pmatrix} \otimes I \quad |GHZ\rangle \tag{2.26d}$$

$$\sqrt{2}\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \otimes I \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda_4/\lambda_3 \end{pmatrix} \quad |GHZ\rangle \tag{2.26e}$$

$$\sqrt{3}\begin{pmatrix} 0 & \lambda_0 \\ \lambda_3 & \lambda_1 e^{i\varphi} \end{pmatrix} \otimes I \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2/\lambda_3 \end{pmatrix} \quad |W\rangle \tag{2.26f}$$

$$\sqrt{2}\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ \lambda_1 e^{i\varphi} & \lambda_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_4/\lambda_2 \end{pmatrix} \otimes I \quad |GHZ\rangle \tag{2.26g}$$

$$\sqrt{2}\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ \lambda_1 e^{i\varphi} & \lambda_3 \end{pmatrix} \otimes I \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_4/\lambda_3 \end{pmatrix} \quad |GHZ\rangle \tag{2.26h}$$

$$\sqrt{2}\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ -\lambda_2\lambda_3/\lambda_4 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \lambda_2/\lambda_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \quad |GHZ\rangle \tag{2.26i}$$

$$\sqrt{2}\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ \lambda_1 e^{i\varphi} - \lambda_2\lambda_3/\lambda_4 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \lambda_2/\lambda_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \quad |GHZ\rangle \tag{2.26j}$$

Cevap vermemiz gereken bir diğer soru da verilen bir üç parçacık kuantum durumunun bu sınıflardan hangisine ait olduğunun nasıl belirleneceği; belirttiğimiz gibi lokal ranklar ayrılabilir durumlar, ikili dolanık durumlar ve üçlü dolanık durumları ayırt etmemizi sağlar, GHZ ve W durumlarını ayırt etmenin yöntemi ise bir üç parçacık dolanıklık ölçüsü olan *üçlü dolanmadır* (bkz. bölüm 2.3.1). GHZ sınıfına ait bir durumunun üçlü dolanma değeri "0" dan büyüktür, W sınıfına ait bir durumun ise "0" dır.

2.1.3 *aLOCC sınıfı*

Yukarıda, bir üçlü dolanık durumdan (GHZ ya da W) elimizde tek bir kopya olduğunda, lokal operasyonlar ve klasik iletişim ile GHZ durumundan W durumuna ve W durumundan GHZ durumuna geçişin mümkün olmadığını gösterdik. Burada cevap vermeye çalışacağımız soru şudur; elimizde birden fazla dolanık durum varsa bunları kullanarak bu iki durum arasında geçiş yapabilir miyiz? Bunun mümkün olduğunu bir birer örnek ile göstereceğiz.

ABC sistemlerindeki gözlemcilerin iki adet W durumunu paylaştığını varsayalım. *B* sistemindeki gözlemci elindeki dolanık parçacıklardan birisi üzerine σ_x ölçümü gerçekleştiriyor ve bu ölçümün sonucunda *AB* sistemleri arasında iki kubit dolanık durum elde ediliyor. Bu dolanık parçacık çifti maksimum dolanık durumda (1.1) olamayacak ama bölüm 1.4.2.1 de anlattığımız gibi lokal operasyonlarla "0" dan büyük bir olasılıkla (1.1) durumuna dönüştürülebilir. *C* sistemindeki gözlemci de diğer W kopyasında, kendi sahip olduğu parçacık üzerine σ_x ölçümü gerçekleştiriyor. Bu ölçümlerin ve dolanık durumları maksimum dolanık duruma çevirmek için yapılan lokal operasyonların sonucunda iki adet maksimum dolanık çifti elde edeceğiz;

$$|\psi\rangle_{ABC} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A 0_C\rangle + |1_A 1_C\rangle) \tag{2.27}$$

(2.27) durumunda *A* sistemindeki gözlemci elindeki iki parçacık üzerinde *kontrollü değilleme* üniter operasyonu gerçekleştiriyor;

$$U_{kd}\,|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|00_A 0_B 0_C\rangle + |01_A 0_B 1_C\rangle + |11_A 1_B 0_C\rangle + |10_A 1_B 1_C\rangle) \tag{2.28}$$

A sistemindeki gözlemci hedef kubit üzerinde σ_z ölçümü gerçekleştirdiğinde kesin olasılıkla GHZ durumu elde edeceğiz. Dolayısıyla birden fazla W durumundan daha az sayıda GHZ durumu elde etmek mümkün.

2.2 Karma durumlar üç parçacık dolanıklık sınıfları

En genelde bir kuantum durumunun yoğunluk matrisi ile tarif edildiğinden bahsetmiştik bu bölümde üçparçacık karma durumların dolanıklık sınıflarından bahsedeceğiz. Yapacağımız analiz [20] de anlatılan teknikler üzerine kurulu.

Karma durumların yoğunluk matrislerini sınıflandırılması yaparken kullanacağımız araçlar konveks kümeleri ayıran operatörler olacak. Bölüm 1.3 de anlatıldığı gibi Hahn-Banach teoremi gereği, hilbert-schmidt uzayında bir *D* konveks kümesi dışındaki bir ρ noktasını ayıran bir *A* operatörü her zaman bulunabilir, öyle ki;

$$\begin{aligned} Tr(A\rho) &< 0 \\ Tr(A\sigma) &\geq 0 \quad \forall \quad \sigma \in D \end{aligned}$$

Dolayısıyla önce üçparçacık durumlarındaki konveks kümeleri tespit etmeliyiz. Bunun için bölüm 2.3.1 de anlatacağımız üçlü dolanma kıriterini kullanacağız.

Dolanık olmayan durumların, ikili dolanık durumların, W sınıfına ait durumların üçlü dolanması sıfırdır. Öyleyse karma durumlar için üçlü dolanmanın tanımı gereği, saydığımız bu durumların birbirleri veya kendileri ile konveks toplamı sonucu oluşan durumların üçlü dolanması sıfırdır, yani oluşan yeni durum, dolanık olmayabilir, ikili dolanık olabilir veya W sınıfına ait olabilir ama GHZ sınıfına ait olamaz. Dolayısıyla dolanık durumlar + ikili dolanık durumlar + W sınıfı bir konveks küme oluşturur. Bu küme üçlü dolanması sıfır olan durumlar kümesidir ve bu kümeyi T ile göstereceğiz. Hahn-Banach teoremi gereği T'nin dışındaki herhangi bir GHZ durumunu tespit edecek bir operatörü her zaman bulabiliriz.

Bunun için kullanacağımız operatörlerin genel yapısı şu şekilde olacak;

$$A = \mu I - |\psi\rangle\langle\psi| \quad |\psi\rangle \notin T \tag{2.29}$$

$$\mu = \max |\langle\psi|\phi\rangle|^2 \quad |\phi\rangle \in T \tag{2.30}$$

Operatörleri böyle seçmemizin nedeni, μ'nun tanımı gereği T sınıfına ait bir durumun kesinlikle $Tr(A\rho_T) \geq 0$ sonucunu, GHZ sınıfına ait $|\psi\rangle\langle\psi|$ durumu için ise $Tr(A|\psi\rangle\langle\psi|) < 0$ verecek olması gerçeğidir. Burada önemli bir nokta şudur; A operatörü, her $\rho \notin T$ için sıfırdan küçük bir değer vermeyebilir, dolayısıyla bir ρ karma durumun T sınıfına ait olmaması için $Tr(A\rho) < 0$ yeterli koşuldur fakat gerekli koşul değildir yani $Tr(A\rho) \geq 0$ koşulunun sağlanması ρ'nun kesinlikle T kümesine ait olduğunu göstermez.

(2.29) operatöründe $|\psi\rangle$ vektörü olarak GHZ durumunu seçelim, şimdi bu durum ile T sınıfına ait bir durumu için iç çarpımın maksimum büyüklüğünü hesaplamamız gerekiyor (2.30). Bunun için şu W durumunu kullanacağız; $|\psi_W\rangle = k_0|000\rangle + k_1(|100\rangle + |010\rangle + |001\rangle)$. Parçacık yer değiştirmesi altında simetriyi

koruyarak en genel üniter dönüşümleri ile elde edeceğimiz durum ve dolayısıyla iç çarpımın maksimum büyüklüğü şöyle olacaktır;

$$U : \begin{pmatrix} \alpha e^{i\phi_a} & \beta^* e^{-i\phi_b} \\ \beta e^{i\phi_b} & -\alpha^* e^{i_{\phi a}} \end{pmatrix} \quad |\psi_W\rangle \rightarrow U \otimes U \otimes U \, |\psi_W\rangle$$

$$\max |\langle GHZ|\psi_W\rangle|^2 = \max \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (k_0 a^3 e^{i\phi_a} + 3k_1 a^2 b e^{2i\phi_a - i\phi_b} + k_0 b^3 e^{i\phi_b} - 3k_1 a b^2 e^{-i\phi_a + 2i\phi_b}) \right|^2$$

Burada α ve β reel sayıdır ve üniterlik koşulundan; $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ dir.

Sayısal olarak gösterilebilir ki bağ koşulları altında ($\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $k_0^2 + 3k_1^2 = 1$), μ için optimum değer $3/4$ tür. Dolayısıyla aşağıdaki operatörü GHZ durumlarını tespit etmek için kullanabiliriz.

$$\frac{3}{4} I - |GHZ\rangle \langle GHZ| \tag{2.31}$$

(2.31) operatörünü "$p|GHZ\rangle\langle GHZ| + ((1-p)/8)I$" karma durumunun hangi koşulda GHZ sınıfına ait olduğunu anlamak için kullanalım;

$$Tr\left(\frac{3}{4} I - |GHZ\rangle \langle GHZ| \, (p\,|GHZ\rangle \langle GHZ| + \frac{1-p}{8} I) \right) = \frac{5-7p}{8} \tag{2.32}$$

Bu değerin "0" dan küçük olması koşulu ise $p > 5/7$ dir. $5/7$'nin üstündeki değerlerde bu durum GHZ sınıfına aittir, altındaki değerler için ise birşey söyleyemeyiz.

Benzer şekilde bu durumun hangi şartlarda üçparçacık dolanıklığı içerip içermediğini *kısmi transpoz* (bkz. bölüm 1.3) eşleştirmesi ile sınayabiliriz. Yapacağımız, ABC sistemini A ve BC alt sistemlerinden oluşan bir sistem olarak düşünüp p'nin hangi değeri için bu iki sistemin dolanık olduğuna bakmak. İlgilendiğimiz durum parçacıkların yer değiştirmesi altında simetrik olduğundan bu koşul aynı zamanda B'nin AC ile ve C'nin AB ile dolanık olma koşulu yani durumun üçlü dolanık olma koşuludur.

Kısmi transpoz eşleştirmesini "$p|GHZ\rangle\langle GHZ| + ((1-p)/8)I$" durumuna uyguladığımızda;

$$\mathscr{T}_{\mathscr{A}} \otimes I_{BC} \left(p \left| GHZ \right\rangle \left\langle GHZ \right| + \frac{1}{8} I \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{8}+0.5p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0.5p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5p & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8}+0.5p \end{pmatrix}$$

matrisini elde ederiz. Bu matrisin pozitif olmama koşulu (özdeğerlerinin birisinin negatif olması yeterli koşuldur) $p > 0.25$ olmasıdır.

2.3 Üç parçacık dolanıklık ölçüleri

Üç parçacıklı sistemlerde kullanışlı bir dolanıklık ölçüsü *üçlü dolanmadır* (*tritangle*) [21]. Bu dolanıklık ölçüsü GHZ ve W durumlarını ayırt etmemizi sağlar.

2.3.1 Üçlü dolanma

Üçlü dolanma (τ) şu şekilde tanımlanır;

$$\tau = C^2_{A,BC} - C^2_{A,B} - C^2_{A,C} \tag{2.33}$$

A, B, C sistemlerinden oluşan üçlü dolanık bir kuantum durumu, A sistemi ile BC ortak sistemi arasındaki bir ikili dolanık durum olarak yorumlanabilir. $C^2_{A,BC}$, A sistemi ile BC sisteminden oluşan bir ikili dolanık durumun *concurrence* [22] değerinin karesidir. $C^2_{A,B}$ ise C sistemi üzerinden *iz alındığında*[6] oluşan iki parçacıklı sistem için *concurrence* değerinin karesi. $C^2_{A,B}$ de benzer şekilde tanımlanıyor.

(2.33) eşitliği A sisteminin bütün bir BC sistemi ile sahip olduğu dolanıklığın B ve C sistemleri ile nasıl paylaşıldığı hakkında bir fikir verir. Böyle düşünmemize iten sebep şudur. *GHZ* (2.1) durumunda parçacıklardan birisi üzerinden *iz alındığında* oluşan durum tamamiyle ayrılabilirdir. Yani hiçbir ddolanıklık içermez ve

[6] Yani C hakkındaki tüm bilgimiz yok olduğunda (örneğin spin değerinin tanımı ile ilgili referansımız olmadığı zaman) veya C sistemi bir kuantum bilgi işlem görevi için A ve B sistemleri ile ortak çalışmıyorsa

$\tau(GHZ) = 1$ dir. (daha genel olarak *GHZ SLOCC* sınıfında olan her durum için τ sıfırdan büyüktür) *W SLOCC* sınıfındaki her durum içinse τ sıfırdır.

(2.33) eşitliğinini daha açık cebirsel bir ifadesi şudur;

$$\begin{aligned}
\tau(\psi) &= 4|d_1 - 2d_2 + 4d_3| \\
d_1 &= \psi_{000}^2\psi_{111}^2 + \psi_{001}^2\psi_{110}^2 + \psi_{010}^2\psi_{101}^2 + \psi_{100}^2\psi_{011}^2 \\
d_2 &= \psi_{000}\psi_{111}\psi_{011}\psi_{100} + \psi_{000}\psi_{111}\psi_{101}\psi_{010} + \psi_{000}\psi_{111}\psi_{110}\psi_{001} \\
&+ \psi_{011}\psi_{100}\psi_{101}\psi_{010} + \psi_{011}\psi_{100}\psi_{110}\psi_{001} + \psi_{101}\psi_{010}\psi_{110}\psi_{001} \\
d_3 &= \psi_{000}\psi_{110}\psi_{101}\psi_{011} + \psi_{111}\psi_{001}\psi_{010}\psi_{100}
\end{aligned}$$

Burada $\psi_{ijk} \equiv \langle \psi_{ijk} | \psi \rangle$ dir.

Tüm GHZ sınıfına ait durumların üçlü dolanma değerinin "0" dan büyük olduğunu, W sınıfına ait durumların ise "0" olduğunu (2.25) deki durumlar için üçlü dolanma değerlerini hesaplayarak kanıtlayabiliriz. Aşağıda sırasıyla (2.25) de verilen durumlar için üçlü dolanma değerleri bulunmaktadır, bunlardan hangilerinin GHZ hangilerinin W durumu olduklarını (2.26) deki denklemlerden bulmuştuk.

$$GHZ \rightarrow 4(\lambda_0\lambda_4)^2 \quad (2.35a)$$

$$GHZ \rightarrow 4(\lambda_0\lambda_4)^2 \quad (2.35b)$$

$$W \rightarrow 0 \quad (2.35c)$$

$$GHZ \rightarrow 4(\lambda_0\lambda_4)^2 \quad (2.35d)$$

$$GHZ \rightarrow 4(\lambda_0\lambda_4)^2 \quad (2.35e)$$

$$W \rightarrow 0 \quad (2.35f)$$

$$GHZ \rightarrow 4(\lambda_0\lambda_4)^2 \quad (2.35g)$$

$$GHZ \rightarrow 4(\lambda_0\lambda_4)^2 \quad (2.35h)$$

$$GHZ \rightarrow 4(\lambda_0\lambda_4)^2 \quad (2.35i)$$

$$GHZ \rightarrow 4(\lambda_0\lambda_4)^2 \quad (2.35j)$$

2.3.2 W dolanma

W durumu ile ikili dolanık ya da ayrılabilir durumları ayırt etmenin lokal ranklara ve üçlü dolanmaya bakmak dışında bir yolu olarak şu önerilebilir;

- (2.25) ve (2.26) eşitliklerinde bulduğumuz gibi tüm W sınıfına ait durumlar için $\lambda_0 \times \lambda_2 \times \lambda_3 > 0$ & $\lambda_4 = 0$.

- Dolayısıyla

$$\text{wdolanma} = \begin{cases} 9\lambda_0^2\lambda_2{\lambda_3}^7 & \text{if } \lambda_4 = 0 \\ 0 & \text{if } \lambda_4 \neq 0 \end{cases}$$

2.1.1.1'de bulduğumuz ifadeleri yerlerine koyarsak şu ifadeyi elde ederiz;

$$9\frac{\text{Abs}[((-bd+ae)a^* + (-bf+ag)c^*)]\text{Abs}[((-cd+af)a^* + (-ce+ag)b^*)]}{\text{Abs}[a]^2} \quad (2.36)$$

Kanonik formun katsayıları üniter dönüşümler altında değişmez olduğundan bu kriter de üniter dönüşümler altında değişmez.

KAYNAKLAR

[1] **Sakurai, J.J.**, 1994. Modern quantum mechanics, Addison-Wesley.

[2] **Werner, R.F.**, 1989. Quantum states with Einstein-Rosen-Podolsky correlations admitting a hidden-variable model, *Phys.Rev.A*, **40**, 4277–4281.

[3] **Nielsen, M.A. ve Chuang, I.L.**, 2000. Qauntum computation and quantum information, Cambridge University Press.

[4] **Kuah, A.M.**, 2007. Quantum states, maps, measurements and entanglement, Ph.D. thesis, The University of Texas at Austin.

[5] **Preskill, J.**, 1998, Foundations of quantum theory II: measurement and evolution, `http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/notes/chap3.ps`.

[6] **Cirac, J.I.**, 2002. Quantum information: entanglement, purification, error correction, quantum optical implementations, **D. Heiss**, editor, Fundamentals of quantum information, Springer.

[7] **Horodecki, M.**, **Horodecki, P. ve Horodecki, R.**, 1996. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions, *Phys.Lett.A*, **223**, 1–8, `arXiv:quant-ph/9605038`.

[8] **Krueger, O. ve Werner, R.F.**, 2005. Some Open Problems in Quantum Information Theory, `arXiv:quant-ph/0504166`.

[9] **Peres, A.**, 1996. Separability criterion for density matrices, *Phys.Rev.Lett.*, **77**, 1413–1415.

[10] **Peres, A.**, 1993. Quantum theory: concepts and methods, Kluwer.

[11] **Peres, A.**, 1995. Higher order Schmidt decompositions, *Phys.Lett.A*, **202**, 16–17, `arXiv:quant-ph/9504006`.

[12] **Bennett, C.H.**, **Popescu, S.**, **Rohrlich, D.**, **Smolin, J.A. ve Thapliyal, A.V.**, 2000. Exact and asymptotic measures of multipartite pure state entanglement, `arXiv:quant-ph/9908073`.

[13] **Wu, S.**, 2003. Quantum entanglement and it's applications, Ph.D. thesis, University of South Carolina.

[14] **Nielsen, M.A.**, 1999. Conditions for a class of entanglement transformations, *Phys.Rev.Lett.*, **83**, 436–439.

[15] **Bennett, C.H.**, **Bernstein, H.J.**, **Popescu, S. ve Schumacher, B.**, 1996. Concentrating partial entanglement by local operations, *Phys.Rev.A*, **53**, 2046–2052, `arXiv:quant-ph/9511030`.

[16] **Acin, A.**, **Andrianov, A.**, **Costa, L.**, **Jane, E. ve Latorre, J.I.**, 2000. Generalized Schmidt decomposition and classification of three-quantum bit states, *Phys.Rev.Lett*, **85**, 1560–1563.

[17] **Acin, A.**, **Andrianov, A.**, **Jane, E. ve Tarrach, R.**, 2000. Three-qubit pure state canonical forms, `arXiv:quant-ph/0009107`.

[18] **Dur, W.**, **Vidal, G. ve Cirac, J.I.**, 2000. Three qubits can be entangled in two inequivalent ways, *Phys.Rev.A*, **62**, 62–71.

[19] **Sanpera, A.**, **Tarrach, R. ve Vidal, G.**, 1998. Local description of quantum inseperability, *Phys.Rev.A*, **58**, 826–830.

[20] **Acin, A.**, **Bruß, D.**, **Lewenstein, M. ve Sanpera, A.**, 2001. Classification of mixed three-qubit states, *Phys.Rev.Lett.*, **87**, 87–90, `arXiv:quant-ph/0103025`.

[21] **Coffman, V.**, **Kundu, J. ve Wooters, W.K.**, 2000. Distributed entanglement, *Phys.Rev.A*, **61**, 052306.

[22] **Wootters, W.K.**, 1998. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits, *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 2245–2248.

[23] **Einstein, A.**, **Podolsky, B. ve Rosen, N.**, 1935. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?, *Phys.Rev.*, **47**, 777 – 780.

[24] **Mermin, N.D.**, 1990. Quantum mysteries revisited, *Am. J. Phys.*, **58**, 731–734.

[25] **Briegel, H.J.**, **van Enk, S.J.**, **Cirac, J.I. ve Zoller, P.**, 2001. Quantum networks I: entangling particles at seperate locations, **D. Bouwmeester**, **A. Ekert and A. Zeilinger**, editors, The physics of quantum information, Springer.

A. Schmidt ayrıştırması

İki parçacıklı bir kompozit saf durum;

$$|\psi\rangle = \sum_{jk} S_{jk} |j_A\rangle |k_B\rangle \tag{A.1}$$

üniter operasyonlarla şu şekilde yazılabilir [3];

$$|\psi\rangle = \sum_{i}^{l} \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle \quad , \quad l = min(dim(A), dim(B)) \quad , \quad \lambda_i > 0, \quad \sum_i |\lambda_i|^2 = 1 \tag{A.2}$$

Burada $\{|i_A\rangle\}$: A sistemi için bir orthonormal baz kümesi, $\{|i_B\rangle\}$: B sistemi için bir orthonormal baz kümesidir.

İspatı: (A.1) durumunda S_{jk} katsayıları bir S matrisinin elemanları olarak değerlendirilebilir. ($S_{jk} = \langle j|S|k\rangle$) S matrisinin üniter operasyonlar ile diyagonal hale getirilebileceğini göstermemiz gerekiyor.

A sistemi üzerine bir üniter dönüşüm yapmak S matrisini, soldan, bu üniter dönüşüme tekabül eden üniter operatörle çarpmaya eşdeğerdir. B sistemi üzerine yapacağımız üniter dönüşüm ise S matrisini sağdan bu üniter dönüşüme tekabül eden üniter operatörün transpozu (ki bu da bir üniter dönüşümdür) ile çarpmaya eşdeğerdir. *Tekil değer ayrıştırma* (*singular value decomposition*) teorisine göre her matris şu şekilde ayrıştırılabilir; $S = MDN$, M,N:*üniter operatör*, $dim(S) = m \times n$, $dim(M) = m \times m$, $dim(D) = m \times n$, $dim(N) = n \times n$, D:*diyagonal matris* ($D_{ij} = 0 \quad i \neq j$) Dolayısıyla $M^{\dagger} S N^{\dagger} = D$ şeklinde S'yi diyagonalleştirecek $M^{'}$ ve $N^{'}$ üniter dönüşümleri her zaman bulunabilir. Bazlarımızda; $|i_A\rangle \equiv \sum_j M_{ji} |j\rangle$ $|i_B\rangle \equiv \sum_k N_{ik} |k\rangle$ olur ve ortonormal oldukları âşikardır. Bu durumda $\{\lambda_i\}$ değerleri S matrisinin *tekil değerleri*, aynı zamanda $S\dagger S$ ve $SS\dagger$ matrislerinin özdeğerleridir ve $|i_A\rangle |i_B\rangle$ vektörleri de sırasıyla $SS\dagger$, $S\dagger S$ matrislerinin özvektörleridir. (aynı zamanda M operatörünün sutunları ve N operatörünün satırlarıdır)

Schmidt ayrıştırması yaptığımızda indirgenmiş yoğunluk matrislerinin her iki sistem içinde aynı olduğunu buluruz. (Daha doğru bir deyişle aynı pozitif spekturuma sahiptirler);

$$\rho_A = Tr_B(\rho_{AB}) = \sum_i \langle i_B|\rho_{AB}|i_B\rangle = \sum_i |c_i|^2 |i\rangle \langle i| \tag{A.3}$$

$$\rho_B = Tr_B(\rho_{AB}) = \sum_j |c_j^{'}|^2 |j\rangle \langle j| \tag{A.4}$$

Bu durumu sistemlerden birisi hakkında bilgimizin diğeri kadar olduğu şeklinde yorumlayabiliriz.

Önemli bir nokta da, iki parçacıklı saf kuantum durumları için, *Schmidt ayrıştırmasının* aynı zamanda kuantum durumlarının dolanık olup olmadığını anlamamıza yetecek olmasıdır. Eğer, bir kuantum durumunun *Schmidt ayrıştırılmış* hâli birden fazla ayrılabilir formda vektör içeriyorsa (yani sıfır olmayan birden fazla *Schmidt katsayısı* varsa) bu kuantum durumu dolanıktır.

A.1. Üçparçacık için Schmidt Ayrıştırması

En genelde *Schmidt ayrıştırması*'nın üç parçacığa genellemesi mümkün değildir. Belirli koşullar sağlandığında *üçparçacık Schmidt ayrıştırması* yapılabilir [11].

İspatı: En genelde

$$|\psi\rangle = \sum_{xyz} S_{xyz} |x_A\rangle |y_B\rangle |z_C\rangle \tag{A.5}$$

şeklinde yazılan üçparçacık kuantum durumunu A ve BC sistemlerinden oluşan kompozit iki parçacıklı bir sistem olarak düşünelim ve Schmidt ayrıştırması yapalım;

$$|\psi\rangle = \sum_{i} \lambda_i |i_A\rangle |i_{BC}\rangle \tag{A.6}$$

Bu durumu şu şekle getirebilip getiremeyeceğimiz ile ilgileniyoruz;

$$|\psi\rangle = \sum_{i} \lambda_i^{'} |i_A\rangle |i_B\rangle |i_C\rangle \tag{A.7}$$

Burada $\{|i_A\rangle\}$, $\{|i_B\rangle\}$, $\{|i_C\rangle\}$: A, B, C sistemleri için birer orthonormal baz kümesi. Öyleyse;

$$|i_{BC}\rangle = \sum_{yz} (\Omega_i)_{yz} |y\rangle |z\rangle = |i_B\rangle |i_C\rangle \quad , \quad (\Omega_i)_{yz} = \langle y|\Omega_i|z\rangle \tag{A.8}$$

dönüşümünü sağlayan Ω_i matrislerinin şu koşulları sağlaması gerektiği aşikar; 1-) $rank(\Omega_i) = 1$ [1] ve 2-) $\Omega_i\Omega_i\dagger = 0$, $\Omega_i\Omega_i\dagger = 0$. İlk koşul matris diyagonalleştirildiğinde tek bir elemanı kalması için gerekli[2], ikinci koşul ise özvektörlerin dik olması için.

[1] Eşdeğer olarak $det(\Omega_i) = 0$

[2] Aynı zamanda $|i_{BC}\rangle$ bazlarının faktorize olması yani dolanık olmaması için gerekli koşul

B. GHZ durumunun *lokal realist* modelleri ihlâli

GHZ durumu *lokal realist* modelleri kesin olarak ihlâl eder. *Lokal realizm* şu şekilde tanımlanır;

- *Realizim*: Bir sistemin sahip olduğu bütün ölçülebilir fiziksel değerlerin ölçümden bağımsız olarak kesin değerleri vardır. Einstein'ın tanımıyla bunlar *gerçeklik elemanlarıdır.*
- *Lokalite*: Uzaysal olarak ayrılmış (*spacelike separated*) sistemlerin birbirleri üzerine *doğrudan* etkisi olmaz.

EPR argümanı [23] şunu söyler; eğer kuantum mekaniğinin öngörüleri doğruysa ve doğanın lokal bir modeli mümkünse, kuantum mekaniği eksik bir teoridir, doğanın realist bir modeli bulunabilir. Şimdi *GHZ* durumunu kullanarak, [24, 25] 'de yapılan analiz temel alarak lokal realist bir modelin olamayacağını göstereceğiz.

Argümanımız *GHZ* durumunda $\sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x$ ölçümünde deneylerle (ve tabii ki kuantum mekaniği ile) uyumlu gizli değişkenlerin $\sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x$ ölçümünde kuantum mekaniği ile (ve tabii ki deneylerle) kesin olarak (yani her ölçümde) çeliştiği temeline kurulmuştur.

GHZ durumunu tekrar yazalım;

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \tag{B.1}$$

Burada $|0\rangle$, σ_z operatörünün $+1$ özdeğerine tekâbül eden özvektörü, $|1\rangle$, -1 özdeğerine tekabül eden özvektörüdür. $\sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x$ ölçümünde kuantum mekaniğinin ne sonuç öngördüğünü daha kolay görmek için ilk iki kubiti σ_y operatörünün özvektörleri bazında,[1] üçüncü kubiti de σ_x operatörünün özvektörleri bazında yazalım;

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{2}(|R\rangle|L\rangle|+\rangle \quad + \quad |L\rangle|R\rangle|+\rangle \quad + \quad |R\rangle|R\rangle|-\rangle \quad + \quad |L\rangle|L\rangle|-\rangle) \tag{B.2}$$

$\sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x$ ölçümü yaptığımızda elde ettiğimiz sonuçların çarpımının herzaman -1 olacağı kolaylıla görülüyor. Örneğin 1. parçacık ve 2. parçacık üzerine yapılan ölçümler $+1$ sonucunu veriyorsa üçüncü parçacık kesinlikle -1 sonucunu verecektir. *GHZ* durumu parçacıkların yer değiştirmesi altında simetrik olduğundan, iki

[1] σ_x operatörünün +1 özdeğerine tekâbül eden özvektörü $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, -1 özdeğerine tekabül eden özvektörü $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$. $\sigma_y|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$, -1 özdeğerine tekabül eden özvektörü $|L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$

parçacığın σ_y yönünde diğerinin σ_x yönünde ölçüldüğü her kombinasyonda ölçüm sonuçlarının çarpımı -1 verecektir.

Yukarıda tanımlanmış lokal realist argümanlar çerçevesinde bu ölçümü inceleyelim. Her parçacık birbirleriyle bağlantılı *gerçeklik elemanları* taşıyor (*realizm*) ve diğer parçacıklar üzerine yapılan ölçümlerden haberdar değiller (*lokalite*). Dolayısıyla *gerçeklik elemanları* parçacıklar üzerine öyle yerleştirilmiş ki, herhangi bir parçacığın σ_x ölçümünün sonucu $+1$ ise diğer iki parçacığın σ_y ölçümleri tam olarak zıt sonuç verecek ve herhangi bir parçacığın σ_x ölçümünün sonucu -1 ise diğer iki parçacığın σ_y ölçümleri aynı sonucu verecek.

Peki lokal realist model herhangi $\sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x$ ölçümü ile tutarlı olacak biçimde $\sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x$ ölçümü için ne öngörür.

Farz edelim 2. ve 3. parçacıkların σ_x ölçümü -1 sonucunu verdi. 3. parçacık -1 sonucunu verdiğinden 1. ve 2. nin σ_y ölçümü tamamiyle aynı sonucu vermeli ayrıca 2. parçacığın σ_x ölçümü -1 verdiğinden 1. ve 3. parçacıkların σ_y ölçümü sonucu tamamiyle aynı olmalı. Öyleyse tüm parçacıkların σ_y gizli değişkenler değeri aynı olmalı ve 2. ile 3. parçacığın σ_y değeri aynı olduğundan 1. parçacığın σ_x ölçümü için olan *gizli değişken* değeri de -1 olmalı. Yani $\sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x$ ölçümü için olası *gerçeklik elemanlarından* birisi (-1)(-1)(-1) dir. Aynı mantığı kullanarak tüm olası durumları listelemek zor olmayacaktır; (-1)(-1)(-1), $(+1)(+1)$(-1), $(+1)$(-1)$(+1)$ ve (-1)$(+1)(+1)$. Yani ölçüm sonuçlarının çarpımı her zaman -1 vermeli.

GHZ durumunu uygun bazda yazarak kuantum mekaniğinin ne öngördüğüne bakalım;

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{2}(|+\rangle|+\rangle|+\rangle \quad + \quad |+\rangle|-\rangle|-\rangle \quad + \quad |-\rangle|+\rangle|-\rangle \quad + \quad |-\rangle|-\rangle|+\rangle) \tag{B.3}$$

Kuantum mekaniği $\sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x$ ölçüm sonucu için "$+1$" öngörür. Dolayısıyla kuantum mekaniğinin *GHZ* durumndaki korelasyonlar için öngörüsünün lokal realist bir modeli yapılamaz.

ÖZGEÇMİŞ

Seçkin Sefi 1980 yılında İstanbul'da doğdu. 2005 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Mühendisliği Bölümü'nden mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans eğitimine başladı. Hâlen İstanbul Teknik Üniversitesi Fizik Mühendisliği Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.