İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİNAMİK VİSKOELASTİSİTE PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN FARKLI BİR YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Cüneyt ÖZTÜRK

Anabilim Dalı: İnşaat Mühendisliği

Programı: Yapı Mühendisliği

MAYIS 2003

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİNAMİK VİSKOELASTİSİTE PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN FARKLI BİR YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Cüneyt ÖZTÜRK
(501991229)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 05 Mayıs 2003
Tezin Savunulduğu Tarih: 29 Mayıs 2003

Tez Danışmanı Doç. Dr. Necla KADIOĞLU
Diğer Jüri Üyeleri Prof. Dr. Reha ARTAN (İTÜ)
Prof. Dr. Faruk YÜKSELER (YTÜ)

MAYIS 2003

ÖNSÖZ

Tezimin her aşamasında bilgi ve tecrübesi ile yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç. Dr. Necla Kadıoğlu'na saygılarımla sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yardımlarını esirgemeyen Dr. Şenol Ataoğlu'na şükranlarımı sunarım. Son olarak hayatım boyunca desteklerini esirgemeyen ve eğitimimdeki katkılarından dolayı aileme de müteşekkirim.

Mayıs 2003 Cüneyt ÖZTÜRK

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ **iv**
SEMBOL LİSTESİ **v**
ÖZET **vii**
SUMMARY **viii**

1. TEMEL KAVRAMLAR **1**
1.1 Gerilme Şekil Değiştirme Bağıntılarının İntegral Formu Stieltjes Konvolüsyon Teoremi 1
1.2 Laplace Transformu 9

2. KULLANILAN VİSKOLEASTİK MALZEME **11**
2.1 Bu Çalışmada Kullanılan Viskoelastik Malzemenin Tanımı 11

3. İZOTERMAL SINIR DEĞER PROBLEMLERİ **15**
3.1 İzotermal (Sabit Sıcaklık Etkisi Altında) Sınır Değer Problemleri 15

4. ÖRNEK PROBLEM **40**

SONUÇLAR **55**

KAYNAKLAR **56**

ÖZGEÇMİŞ **58**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1.1 : Sabit ve deforme olmuş koordinatlar 1
Şekil 2.1 : Çekme deneyi 11
Şekil 3.1 : Düşey hat üzerinde integral alınan düzlem 26
Şekil 4.1 : Örnek problem 40
Şekil 4.2 : $\sqrt{\bar{s}} = x + iy$ düzleminde tanımlı bölge 50
Şekil 4.3 : Boyutsuz radyal yer değiştirme 52
Şekil 4.4 : Boyutsuz gerilmenin zamana göre değişimi 54

SEMBOL LİSTESİ

c_0	: Dalga Hızı
$\delta(t)$	: Dirac Delta
δ_{ij}	: Kronecker Deltası
e_0	: Ortalama Birim Şekil Değiştirme
E_0	: Elastisite Modülü
$\boldsymbol{e_k}$	: Kartezyen Koordinatlar Baz Vektörü
$\boldsymbol{\epsilon}$	: Birim Şekil Değiştirme tansörü
ε_{ijk}	: Permutasyon Sembolü
$\boldsymbol{f(x,t)}$	: Kütle Kuvveti
G, G_1, G_2	: Ortam Sabitleri
$H(t)$	: Birim Adım Fonksiyonu
$HDPE$	: High Density Polyethylene
$\mathcal{L}$	: Laplace Transformu
$\mathcal{L}^{-1}$	: İnvers Laplace Transformu
$\lambda(t)$, $\mu(t)$	: Zamana bağlı Lamé Katsayıları
$\boldsymbol{n}$	: Dış Normal
$\boldsymbol{\nabla}$	: Nabla Operatörü
ν	: Poisson Oranı
p_o	: Basınç
$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\boldsymbol{\psi_{ij}}}}$	: Lineer Tansör Değerli Fonksiyonel
$\boldsymbol{r}$	: İki Nokta Arasındaki Uzaklık
(R, θ, ϑ)	: Küresel Koordinatlar
$\boldsymbol{\rho}$	: Yoğunluk
S	: Yüzey
$\boldsymbol{S_{ij}}$	: Deviatorik Şekil Değiştirme Tansörü
$\boldsymbol{\sigma}$	: Gerilme Tansörü
σ_0	: Sabit Çekme Gerilmesi
$sup \mid \quad \mid$	: En Küçük üst Sınır
t	: Zaman
$\boldsymbol{T}$	: Yüzey Gerilme Vektörü

t_1	: Gevşeme Zamanı
$\boldsymbol{u}$	: Yer Değiştirme Vektörü
$\boldsymbol{X}$	: Bir noktanın sabit bir koordinat başlangıcına göre koordinatları
$\boldsymbol{x}$	: Deforme olmuş koordinatlar
(x_1, x_2, x_3)	: Kartezyen Koordinatlar

DİNAMİK VİSKOELASTİSİTE PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN FARKLI BİR YAKLAŞIM

ÖZET

Bu çalışmanın birinci bölümünde gerilme şekil değiştirme bağıntılarının integral formu incelenmiştir. İzotropik halde gerilme şekil değiştirme bağıntıları elde edilmiştir.

İkinci bölümde belli bir malzeme için deney sonuçlarından elde edilen gerilme şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak integral formundaki bünye denklemlerinde kullanılan zamana bağlı $\lambda(t)$, $\mu(t)$ Lamé katsayıları elde edilmiştir. Burada ν Poisson oranının zamanla değişmediği kabul edilmektedir.

Üçüncü bölümde izotermal sınır değer problemlerini çözmek için gerekli denklemler incelenmiştir. Bu denklemler kullanılarak sonsuz ortamda bir $\boldsymbol{y}$ noktasına etkiyen $\delta(t)$ şiddetinde ve $\boldsymbol{e}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ baz vektörü doğrultusunda etkiyen tekil bir kütle kuvvetinden dolayı oluşan yer değiştirme ve gerilme alanları hesaplanmaya çalışılmıştır. $\boldsymbol{e}_k$ kartezyen koordinatlardaki bir baz vektörünü göstermektedir. Bu problemin sonuçları kullanılarak yarıçapı sıfır olan bir küre yüzeyine her noktada $\boldsymbol{e}_R$ doğrultusunda etkiyen ve yine şiddeti $\delta(t)$ olan yayılı bir kütle kuvvetinden dolayı oluşan yer değiştirme ve gerilme alanları küresel koordinatlarda hesaplanmıştır. Hesaplarda kullanılan malzeme ikinci bölümde tanımlanan malzemedir. Ancak burada hesaplanan ifadeler gerçek ifadelerin zamana göre Laplace transformlarıdır. Son problem küresel simetrik sınır değer problemlerinin karşıtlık teoremi ile çözümünde temel çözüm olarak kullanılacaktır.

Dördüncü bölümde elde edilen temel çözüm ve karşıtlık teoremi kullanılarak örnek bir problem çözülmüştür. Seçilen örnek probleme ait bölge a yarıçaplı küresel bir boşluk içeren sonsuz bir ortamdır ve ortamın gerilme-şekil değiştirme bağıntıları, malzeme sabitleri temel çözümde kullanılanla aynıdır. $t = 0$ anında küresel boşluğun yüzeyine sabit p_o basıncı yüklenip kalmaktadır.

Bu problem için küresel boşluk sınırındaki radyal yer değiştirmenin zamanla değişimi ve yine sınırdaki bilinmeyen normal gerilme bileşeninin zamanla değişimi hesaplanmıştır. Sonuçlar artan zaman değerlerinde statik çözüme gitmektedir.

AN APPROXIMATION FOR THE SOLUTIONS OF VISCOELASTICITY PROBLEMS

SUMMARY

In this study, integral forms of the stress-strain relations have been investigated in the first section. And, stress-strain relations have been derived for isotropic case.

In the second section, time dependent Lamé coefficients, $\lambda(t)$, $\mu(t)$, used in the integral form of constitutive equations have been obtained by using stress-strain relations of a specific material from the experimental results. Here, it is considered that Poisson's ratio, ν, doesn't vary with time.

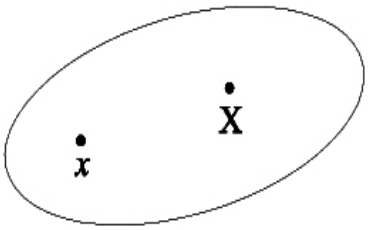
In the third section, the necessary equations for solving isothermal boundary value problems have been investigated. In an infinite medium, the stress tensor and the displacement vector due to a singular body force, having magnitude $\delta(t)$ in the direction of $\boldsymbol{e}_k$ ($k = 1, 2, 3$), applied to a point, $\boldsymbol{y}$, have been calculated by using these equations. $\boldsymbol{e}_k$ indicates a base vector in Cartesian coordinates. By using the results of this problem, the stress and the displacement fields due to a distributed body force having magnitude $\delta(t)$ in the direction of $\boldsymbol{e}_r$ at every point on a spherical surface with zero radius, have been calculated in the spherical coordinates. The material used in these calculations is the same with that defined in the second section. However, the calculated expressions here are Laplace transforms according to time of the real expressions. The last problem will be used as fundamental solution in the solution of spherically symmetrical boundary value problems by reciprocity theorem.

In the fourth section, a sample problem was solved by using the reciprocity theorem and the fundamental solution derived in the third section. The region of the selected problem is an infinite medium having a spherical cavity of radius a, and stress-strain relations of the medium and material constants are the same with those used in the fundamental solution. At $t = 0$, a constant pressure, p_o, is applied on the boundary of the cavity and kept.

Both the radial displacement and the unknown stress component on the boundary versus time have been calculated on the boundary of spherical cavity for this problem. The results approach to the static solution for the increasing values of times.

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Gerilme Şekil Değiştirme Bağıntılarının İntegral Formu Stieltjes Konvolüsyon Teoremi



Şekil 1.1 Sabit ve deforme olmuş koordinatlar

Deformasyonu zamanla değişen rijit bir cisimde $\boldsymbol{X}$ bir noktanın sabit bir koordinat başlangıcına göre koordinatları, t zamanı göstermek üzere $\boldsymbol{x}$ deforme olmuş koordinatları olsun. Hareketin tanımı;

$$x_i(\tau) = x_i(X_j, \tau) \qquad (i, j = 1, 2, 3) \qquad -\infty < \tau < t \tag{1.1}$$

şeklinde olacaktır. t belli bir zamanı gösterir. Yer değiştirme vektörü;

$$u_i(\tau) = x_i(\tau) - X_i \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanacaktır. Deformasyon ise;

$$\frac{\partial(u_i(\tau))}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i(\tau)}{\partial X_j} - \delta_{ij} \tag{1.3}$$

olarak tanımlanır. ϵ olarak

$$\bar{\epsilon} = sup_{\tau}|u_{i,j}(\tau)| \tag{1.4}$$

büyüklüğünü tanımlayalım. | | işareti, önünde supremum varsa en küçük üst sınırı gösterir. $\bar{\epsilon} \ll 1$ için deformasyonların, boyutların yanında küçük olduğu kabul edilir ve ϵ_{ij} birim şekil değiştirme tansörü;

$$\epsilon_{ij}(\tau) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \tag{1.5}$$

olarak tanımlanır. Gerilme şekil değiştirme bağıntıları ise $\boldsymbol{\sigma}$ gerilme tansörünü göstermek üzere;

$$\sigma_{ij}(t) = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\psi}}_{ij}(\epsilon_{kl}(t-s), \epsilon_{kl}(t)) \tag{1.6}$$

Burada $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\psi}}_{ij}$ lineer bir tansör değerli fonksiyoneldir. Bu $\epsilon_{ij}(t)$ şekil değiştirme geçmişini gerilme geçmişi $\sigma_{ij}(t)$ ye dönüştürür. Eğer $\epsilon_{ij}(t)$ sürekli ise

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^{\infty} \epsilon_{kl}(t-s) dG_{ijkl}(s) \tag{1.7}$$

şeklinde gerilme tansörü $\boldsymbol{\epsilon}$ ve $\boldsymbol{G}$ ye bağlı olarak bir Stieltjes konvolüsyonu ile ifade edilir. Burada $\boldsymbol{G}$ ortamın sabitlerini gösteren bir tansördür. Gerilme ve şekil değiştirme tansörünün simetrikliği

$$G_{ijkl} = G_{jikl} = G_{ijlk} \qquad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \tag{1.8}$$

bağıntılarını verecektir. Bu ise $\boldsymbol{G}$ nin 81 bileşeninin 36 ya inmesi demektir. $t < 0$ için, $\epsilon_{ij}(t)$ nin ve bütün türevlerinin sıfır olması ve $G_{ijkl}(t) \in {}^1C[0, \infty]$ kabulü ile $H(s)$ de birim adım fonksiyonu olmak üzere;

$$G_{ijkl}(s) = H(s)G_{ijkl}(s)$$

yazılırsa (1.7) denklemi

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^{\infty} \epsilon_{kl}(t-s)\frac{d}{ds}(H(s)G_{ijkl}(s))ds$$

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{\substack{0 \\ lim_{\epsilon\to 0}}}^{t-\epsilon} \epsilon_{kl}(t-s)\frac{d}{ds}(H(s)G_{ijkl}(s))ds + \int_{t-\epsilon}^{t+\epsilon} \epsilon_{kl}(t-s)[\frac{d}{ds}\delta(s)G_{ijkl}(s) + H(s)\frac{d}{ds}G_{ijkl}(s)]ds + \int_{t+\epsilon}^{\infty} \epsilon_{kl}(t-s)\frac{d}{ds}(H(s)G_{ijkl}(s))ds$$

Sonuncu integral $\epsilon_{kl}(s)$ $s \leq 0$ için sıfır olduğundan düşer.İkinci integraldeki ikinci terimde $\epsilon \to 0$ için düşer ve;

$$\sigma_{ij}(t) = \epsilon_{kl}(t)G_{ijkl}(0) + \int_0^t \epsilon_{kl}(t-s)\frac{d}{ds}(G_{ijkl}(s))ds \qquad (1.9)$$

denklemi elde edilir.

Diğer bir form: (1.7) denkleminde değişken dönüşümü yapılarak elde edilir.

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^{\infty} \epsilon_{kl}(t-s)\frac{d}{ds}G_{ijkl}(s)ds$$

$$t - s = \tau \quad \Rightarrow \quad s = t - \tau \qquad ds = -d\tau$$

dönüşümü ile

$$\frac{d}{ds}F(t) = \frac{d}{d\tau}F(t-\tau)\frac{d\tau}{ds} = \frac{d}{d\tau}F(t-\tau)(-1)$$

sınırlar;

$$\tau_1 = t \qquad \tau_2 = -\infty$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(t) &= \int_t^{-\infty} \epsilon_{kl}(t)\frac{d}{d\tau}G_{ijkl}(t-\tau)(-1)(-d\tau) \\ &= -\int_{-\infty}^{t} \epsilon_{kl}(\tau)\frac{d}{d\tau}G_{ijkl}(t-\tau)d\tau \\ &= -\int_{0}^{t} \epsilon_{kl}(\tau)\frac{d}{d\tau}G_{ijkl}(t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

Kısmi integrasyonla;

$$\sigma_{ij}(t) = -\epsilon_{kl}(\tau)G_{ijkl}(t-\tau)|_0^t + \int_0^t \frac{d}{d\tau}\epsilon_{kl}(\tau)G_{ijkl}(t-\tau)d\tau$$

$$\sigma_{ij}(t) = \epsilon_{kl}(0)G_{ijkl}(t) + \int_0^t G_{ijkl}(t-\tau)\frac{d}{d\tau}\epsilon_{kl}(\tau)d\tau \tag{1.10}$$

İzotropik halde G_{ijkl} tansörünün bileşenleri iki sabite indirgenir ve herhangi biri Kronecker deltası ve $G_1(t)$, $G_2(t)$ sabitleri kullanılarak

$$G_{ijkl}(t) = \frac{1}{3}[G_2(t) - G_1(t)]\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}[G_1(t)][\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}] \tag{1.11}$$

şeklinde ifade edilebilir. Kronecker deltasının özellikleri kullanılarak (1.9) denklemindeki integral içindeki terim

$$\frac{d}{ds}G_{ijkl}(s)\epsilon_{kl}(t-s)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{3}[G_2(s) - G_1(s)]\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}G_1(s)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\right)\epsilon_{kl}(t-s) \\ &= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{3}[G_2(s) - G_1(s)]\right)\delta_{ij}\epsilon_{kk}(t-s) + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}G_1(s)[\epsilon_{ij}(t-s) + \epsilon_{ji}(t-s)] \\ &= \frac{1}{3}\frac{d}{ds}[G_2(s) - G_1(s)]\delta_{ij}\epsilon_{kk}(t-s) + \frac{d}{ds}G_1(s)\epsilon_{ij}(t-s)\end{aligned}$$

şekline indirgenebilir. Sonuçta izotropik halde (1.9) denklemi;

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(t) =& \frac{1}{3}[G_2(0) - G_1(0)]\delta_{ij}\epsilon_{kk}(t) + G_1(0)\epsilon_{ij}(t) \\ &+ \int_0^t \frac{1}{3}\frac{d}{ds}[G_2(s) - G_1(s)]\epsilon_{kk}(t-s)\delta_{ij} + \frac{d}{ds}G_1(s)\epsilon_{ij}(t-s)ds\end{aligned} \tag{1.12}$$

formunu alır. Klasik katsayılarla ilişkilendirirsek;

$$\lambda(t) = [G_2(t) - G_1(t)]\frac{1}{3} \qquad , \qquad 2\mu(t) = G_1(t) \tag{1.13}$$

notasyonu kullanılabilir.

Şimdi deviatorik gerilme ve şekil değiştirme bileşenlerini hesaplayalım; Bunlar aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii} \tag{1.14}$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk} \tag{1.15}$$

$$S_{ii} = \sigma_{ii} - \frac{1}{3}\delta_{ii}\sigma_{kk} = \sigma_{ii} - \sigma_{kk} = 0 \tag{1.16}$$

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \epsilon_{ii} \tag{1.17}$$

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\epsilon_{kk} \qquad\qquad e_{ii} = 0 \tag{1.18}$$

$$S_0 = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\frac{1}{3} \tag{1.19}$$

$$e_0 = (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})\frac{1}{3} \tag{1.20}$$

tanımları yapılırsa

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - S_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - S_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - S_0 \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

$$\boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} - e_0 & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} - e_0 & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} - e_0 \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

(1.12) denklemi kullanılarak S_0 hesaplanırsa;

$$\begin{aligned} S_0 =& \frac{1}{9}[G_2(0) - G_1(0)]\delta_{ii}\epsilon_{kk}(t) + G_1(0)\epsilon_{ii}(t)\frac{1}{3} \\ &+ \int_0^t (\frac{1}{9}\frac{d}{ds}[G_2(s) - G_1(s)]\epsilon_{kk}(t-s)\delta_{ii} + \frac{1}{3}\frac{d}{ds}G_1(s)\epsilon_{ii}(t-s))ds \end{aligned}$$

$\epsilon_{kk} = 3e_0$ ve $\delta_{ii} = 3$ olduğu anımsanırsa

$$\begin{aligned} S_0 =& [G_2(0) - G_1(0)]e_0(t) + G_1(0)e_0(t) \\ &+ \int_0^t [\frac{ddsG_2(s) - G_1(s)}{[}]e_0(t-s) + \frac{d}{ds}G_1(s)e_0(t-s)]ds \end{aligned}$$

$$S_0 = G_2(0)e_0(t) + \int_0^t [\frac{d}{ds}(G_2(s))e_0(t-s)]ds \tag{1.23}$$

bulunur. (1.15) ve (1.19) kullanılırsa

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} S_0 \tag{1.24}$$

elde edilir. Bu ifadede (1.12) kullanılarak;

$$\begin{aligned} S_{ij} =& \frac{1}{3}[G_2(0) - G_1(0)]\delta_{ij} 3e_0(t) + G_1(0)\epsilon_{ij}(t) - \delta_{ij} G_2(0) e_0(t) \\ &+ \int_0^t [\frac{d}{ds}[G_2(s) - G_1(s)]e_0(t-s)\delta_{ij} + \frac{d}{ds}(G_1(s))\epsilon_{ij}(t-s) \\ &- \frac{d}{ds} G_2(s) e_0(t-s)\delta_{ij}]ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{ij} =& \delta_{ij} e_0(t)[G_2(0) - G_1(0) - G_2(0)] + G_1(0)\epsilon_{ij}(t) \\ &+ \int_0^t [\delta_{ij} e_0(t-s)\frac{d}{ds}[G_2(s) - G_1(s) - G_2(s)] + \frac{d}{ds} G_1(s)\epsilon_{ij}(t-s)]ds \end{aligned}$$

Bu ifade düzenlenirse;

$$S_{ij} = G_1(0)[\epsilon_{ij}(t) - \delta_{ij} e_0(t)] + \int_0^t \frac{d}{ds} G_1(s)[\epsilon_{ij}(t-s) - \delta_{ij} e_0(t-s)]ds \tag{1.25}$$

ve (1.25) de,(1.18) ve (1.20) kullanılırsa

$$S_{ij} = G_1(0) e_{ij}(t) + \int_0^t \frac{d}{ds}(G_1(s)) e_{ij}(t-s)ds \tag{1.26}$$

ifadesi bulunur.

(1.7) denklemi;

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t \epsilon_{kl}(t-s)\, \frac{d}{ds}(G_{ijkl}(s))ds \tag{1.27}$$

formunda yazılıp izotrop halde (1.11) bağıntısı kullanılırsa

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t [\frac{1}{3}\frac{d}{ds}(G_2(s) - G_1(s))\delta_{ij}\epsilon_{kk}(t-s) + \frac{d}{ds}(G_1(s))\epsilon_{ij}(t-s)]ds \qquad (1.28)$$

(1.15) te (1.28), (1.18), (1.19) ve (1.20) denklemleri kullanılırsa

$$S_{ij} = \int_0^t \frac{d}{ds}(G_1(s))e_{ij}(t-s)ds \qquad (1.29)$$

bulunur. (1.29) denklemi kısmi integrasyonla aşağıdaki forma indirgenir.

$$S_{ij} = \int_0^t G_1(s)(-\frac{d}{ds})e_{ij}(t-s)ds \qquad (1.30)$$

$(t-s) = \tau$ dönüşümü yapılırsa bu ifade

$$S_{ij} = \int_{-\infty}^t G_1(t-\tau)\frac{d}{d\tau}e_{ij}(\tau)d\tau \qquad (1.31)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer formda gerilme şekil değiştirme bağıntıları izotrop halde gerilme şekil değiştirme bağıntıları

$$\sigma_{ij} = \int_{-\infty}^t [\lambda(t-\tau)\delta_{ij}\frac{d}{d\tau}(\epsilon_{kk}(\tau)) + 2\mu(t-\tau)\frac{d}{d\tau}(\epsilon_{ij}(\tau))]d\tau \qquad (1.32)$$

olarak elde edilebilir.

1.2 Laplace Transformu

$f(t)$ fonksiyonunun Laplace transformu $\bar{f}(s)$

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{1.33}$$

olarak tanımlanır. Şimdi aşağıdaki ifadenin Laplace transformu hesaplanacaktır.

$$S_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} G_1(t-\tau)\frac{d}{d\tau}(e_{ij}(\tau))d\tau \tag{1.34}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} G_1(t-\tau)\frac{d}{d\tau}(e_{ij}(\tau))d\tau + \int_0^t G_1(t-\tau)\frac{d}{d\tau}(e_{ij}(\tau))d\tau \tag{1.35}$$

(1.35) ifadesindeki ilk integral ani yüklemeler için sıfır olacaktır. Dolayısıyla

$$S_{ij}(t) = \int_0^t G_1(t-\tau)\frac{d}{d\tau}(e_{ij}(\tau))d\tau \tag{1.36}$$

bulunur. Laplace transformunun aşağıdaki özellikleri anımsanırsa

$$\mathcal{L}(f(t)) = \bar{f}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{1.37}$$

$$\mathcal{L}(\frac{d}{dt}f(t)) = s\bar{f}(s) - f(0) \tag{1.38}$$

$$\mathcal{L}(\frac{d^2}{dt^2}f(t)) = s^2\bar{f}(s) - sf(0) - f'(0) \tag{1.39}$$

$$\mathcal{L}(g(t)) = \bar{g}(s) \tag{1.40}$$

$$\mathcal{L}(\int_0^t g(t-\tau)f(\tau)d\tau) = \bar{g}(s)\bar{f}(s) \tag{1.41}$$

şeklinde fonksiyonun birinci türevinin, ikinci türevinin ve iki fonksiyonun konvolüsyonunun Laplace transformu hesaplanabilir. Gerilme şekil değiştirme bağıntıları (1.32) ile verilmişti. Bu bağıntıda (1.31) gibi ani yüklemeler için düzenlenirse

$$\sigma_{ij} = \int_0^t [\lambda(t-\tau)\delta_{ij}\frac{d}{ds}(\epsilon_{kk}(\tau)) + 2\mu(t-\tau)\frac{d}{ds}(\epsilon_{ij}(\tau))]d\tau \tag{1.42}$$

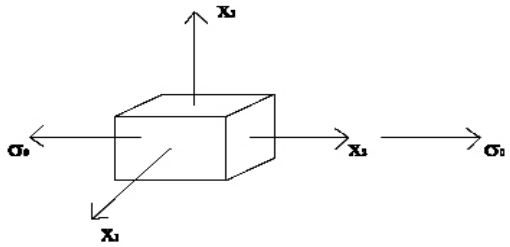
bulunur. (1.42) ve (1.36) ifadelerinin Laplace transformu alınırsa

$$\mathcal{L}(S_{ij}(t)) = \bar{S}_{ij}(s) = \bar{G}_1(s)s\bar{e}_{ij}(\bar{s}) \tag{1.43}$$

$$\mathcal{L}(\sigma_{ij}(t)) = \bar{\sigma}_{ij}(s) = \bar{\lambda}(s)\delta_{ij}s\bar{\epsilon}_{kk}(s) + 2\bar{\mu}(s)s\bar{\epsilon}_{ij}(s) \tag{1.44}$$

2. KULLANILAN VİSKOLEASTİK MALZEME

2.1 Bu Çalışmada Kullanılan Viskoelastik Malzemenin Tanımı



Şekil 2.1 Çekme deneyi

(Şekil 2.1) de gösterilen yükleme altında ϵ_{22} nin zamanla değişimi seçilen malzeme için

$$\epsilon_{22}(t) = \frac{\sigma_0}{E_0}(1 - e^{-\frac{t}{t_1}}) \tag{2.1}$$

şeklinde bir fonksiyon olarak bulunmuştur. Burada E_0 gerilme boyutunda bir sabiti göstermektedir. σ_0 ise çekme deneyi yapılan elemana yüklenen sabit çekme gerilmesidir. Bu malzeme tipi için Poisson oranı sabit kabul edilecektir ve Zamana bağlı Lamé katsayıları λ ve μ

$$\lambda(t) = \frac{E(t)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad ,\psi \qquad \mu(t) = \frac{E(t)}{2(1+\nu)} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanmıştır. $E(t)$ fonksiyonunu bulabilmek için (Şekil 2.1) deki problem için (1.32) denklemleri yazılırsa

$$\sigma_2 = \sigma_0 = \int_{-\infty}^{t} \lambda(t-\tau)\frac{d}{d\tau}(\epsilon_{11}(\tau) + \epsilon_{22}(\tau) + \epsilon_{33}(\tau)) + 2\mu(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}(\epsilon_{22}(\tau)) \tag{2.3}$$

$$\sigma_1 = 0 = \int_{-\infty}^{t} \lambda(t-\tau)\frac{d}{d\tau}(\epsilon_{11}(\tau)+\epsilon_{22}(\tau)+\epsilon_{33}(\tau)) + 2\mu(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}(\epsilon_{11}(\tau)) \qquad (2.4)$$

$$\sigma_3 = 0 = \int_{-\infty}^{t} \lambda(t-\tau)\frac{d}{d\tau}(\epsilon_{11}(\tau)+\epsilon_{22}(\tau)+\epsilon_{33}(\tau)) + 2\mu(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}(\epsilon_{33}(\tau)) \qquad (2.5)$$

(2.4) ve (2.5) denklemleri

$$\epsilon_{11}(t) = \epsilon_{33}(t) \qquad (2.6)$$

sonucunu verir. (2.2) denklemleri ve (2.6), (2.4) veya (2.5) te kullanılırsa

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{E(t-\tau)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\frac{d}{d\tau}(2\epsilon_{11}(\tau)+\epsilon_{22}(\tau)) + \frac{E(t-\tau)}{(1+\nu)}\frac{d}{d\tau}(\epsilon_{11}(\tau))d\tau = 0 \qquad (2.7)$$

Bu ifade düzenlenirse;

$$\int_{-\infty}^{t} [\frac{2\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{1}{(1+\nu)}]E(t-\tau)\frac{d}{d\tau}(\epsilon_{11}(\tau))d\tau$$
$$= -\int_{-\infty}^{t} \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}E(t-\tau)\frac{d}{d\tau}(\epsilon_{22}(\tau))d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{t} E(t-\tau)\frac{d}{d\tau}(\epsilon_{11}(\tau))d\tau = -\int_{-\infty}^{t} \nu E(t-\tau)\frac{d}{d\tau}(\epsilon_{22}(\tau))d\tau \qquad (2.8)$$

şeklini alır. (2.8), (2.3) te kullanılırsa ve (2.2) de göz önüne alınırsa

$$\sigma_0 = \int_{-\infty}^{t} \{E(t-\tau)\frac{d}{d\tau}[\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(1-2\nu)\epsilon_{22}(\tau)]$$
$$+E(t-\tau)\frac{d}{d\tau}(\frac{1}{(1+\nu)}\epsilon_{22}(\tau))\}d\tau$$

$$\sigma_0 = \int_{-\infty}^{t} E(t-\tau)\frac{d}{d\tau}\epsilon_{22}(\tau)d\tau \tag{2.9}$$

integral denklemi elde edilir. $\tau \leq 0$ için $\epsilon_{22}(\tau) = 0$ olduğundan bu integral denklem aşağıdaki şekli alır.

$$\sigma_0 = \int_{0}^{t} E(t-\tau)\frac{d}{d\tau}\epsilon_{22}(\tau)d\tau \tag{2.10}$$

(2.1) denklemi (2.10) da kullanılırsa sonuç denklem

$$E_0 = \int_{0}^{t} E(t-\tau)(\frac{1}{t_1}\, e^{-\frac{\tau}{t_1}})d\tau \tag{2.11}$$

şeklindedir. (2.11) denklemine Laplace transformu uygulanırsa

$$\frac{E_0}{s} = \overline{E}(s)(\frac{1}{t_1})\mathcal{L}(e^{-\frac{t}{t_1}}) \tag{2.12}$$

bulunur. Aşağıdaki tanımlar kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(E(t)) =& \overline{E}(s) \\
\mathcal{L}(e^{-\frac{t}{t_1}}) =& \int_0^{\infty} e^{-st}e^{-\frac{t}{t_1}}dt \\
=& \int_0^{\infty} e^{-t(s+\frac{1}{t_1})}dt \\
=& -\frac{1}{s+\frac{1}{t_1}}e^{-t(s+\frac{1}{t_1})}|_0^{\infty} \\
=& \frac{1}{s+\frac{1}{t_1}}
\end{aligned}$$

$$\frac{E_0}{s} = \overline{E}(s)\frac{1}{t_1}[\frac{1}{s+\frac{1}{t_1}}] \quad \Rightarrow \quad \overline{E}(s) = \frac{E_0(1+t_1 s)}{s} \tag{2.13}$$

şeklinde $E(t)$ nin Laplace transformu elde edilir. İnvers transform alınırsa

$$E(t) = E_0(1 + t_1\delta(t)) \tag{2.14}$$

şeklinde $E(t)$ fonksiyonu tayin edilmiş olur. Burada $\delta(t)$ Dirac deltasını göstermektedir. (2.14), (2.2) denklemlerinde kullanılarak zamana bağlı Lamé katsayıları

$$\lambda(t) = \frac{E_0\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(1 + t_1\delta(t)) \quad , \quad \mu(t) = \frac{E_0}{2(1+\nu)}(1 + t_1\delta(t)) \tag{2.15}$$

şeklinde elde edilir. Bazı kısaltmalar yapılarak $\lambda(t)$ ve $\mu(t)$ fonksiyonları aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

$$\lambda(t) = \lambda_0(1 + t_1\delta(t)) \quad , \quad \mu(t) = \mu_0(1 + t_1\delta(t)) \tag{2.16}$$

$$\lambda_0 = \frac{E_0\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu)} \tag{2.17}$$

3. İZOTERMAL SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

3.1 İzotermal (Sabit Sıcaklık Etkisi Altında) Sınır Değer Problemleri

Şekil değiştirme tansörü $\boldsymbol{\epsilon}$ ile yer değiştirme vektörü $\boldsymbol{u}$ arasındaki ilişki aşağıdaki şekildedir.

$$\epsilon_{ij}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}u_i(\boldsymbol{x},t) + \frac{\partial}{\partial x_i}u_j(\boldsymbol{x},t)\right) \tag{3.1}$$

Gerilme şekil değiştirme bağıntıları ise;

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij}\int_{-\infty}^{t}\lambda(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\epsilon_{kk}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau + 2\int_{-\infty}^{t}\mu(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\epsilon_{ij}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau\psi \tag{3.2}$$

bağıntısı ile verilecektir. Burada $\lambda(t)$ ve $\mu(t)$ relaksasyon fonksiyonlarıdır.

Quasi statik problemler için hareket denklemi:

$$\sigma_{ij,j} + f_i(\boldsymbol{x},t) = 0 \tag{3.3}$$

şeklinde alınmaktadır. Burada $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ kütle kuvvetini gösterir ve ivme ile ilgili terim ihmal edilmektedir. Denklemin gerçek formu ise aşağıdaki şekildedir.

$$\sigma_{ij,j} + f_i(\boldsymbol{x},t) = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_i \tag{3.4}$$

Sınır değer problemlerini çözmek için çoğunlukla hareket denklemi (3.4) sadece yer değiştirmeler cinsinden yazılır. Gerilme şekil değiştirme bağıntılarını aşağıdaki gibi kısaltalım.

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij}\lambda * \epsilon_{kk} + 2\mu * \epsilon_{ij} \tag{3.5}$$

$$a * b = \int_{-\infty}^{t} a(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}b(\tau)d\tau \tag{3.6}$$

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij}\lambda * u_{k,k} + 2\mu * \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}) \tag{3.7}$$

$$\sigma_{ij,j} = \delta_{ij}\lambda * \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} + \mu * (\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}) \tag{3.8}$$

δ_{ij} nin kaldırma özelliği kullanılarak

$$\sigma_{ij,j} = \lambda * \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} + \mu(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}) \tag{3.9}$$

bulunur.

$$(Grad\ div\ \boldsymbol{u})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}) = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} \tag{3.10}$$

eşitliği anımsanırsa ve ε_{ijk} permutasyon sembolünü göstermek üzere rotasyonelin tanımı yazılarak

$$
\begin{aligned}
rot(\boldsymbol{u})_i = (\nabla \times \boldsymbol{u})_i &= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \\
(\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u})_i &= \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\varepsilon_{klm}\frac{\partial u_m}{\partial x_l}) \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l} \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_l} \\
&= \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} &= -(\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u})_i + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} \\
&= -(\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u})_i + (Grad\ div\ \boldsymbol{u})_i
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

(3.11), (3.10) ve (3.9) denklemleri (3.8) de kullanılırsa

$$\sigma_{ij,j} = \lambda * (Grad\ div\ \boldsymbol{u})_i + \mu(-(\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u})_i + (Grad\ div\ \boldsymbol{u})_i + (Grad\ div\ \boldsymbol{u})_i)$$

$$\sigma_{ij,j} = (\lambda + 2\mu) * (\boldsymbol{\nabla\nabla}.\boldsymbol{u})_i - \mu * (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})_i \tag{3.12}$$

bulunur. (3.12), (3.4) hareket denklemine yerleştirilirse;

$$(\lambda + 2\mu) * (\boldsymbol{\nabla\nabla}.\boldsymbol{u})_i - \mu * (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u})_i + f_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{3.13}$$

bileşen formunda (3.13) yazılabilir. Vektör formunda ise;

$$(\lambda + 2\mu) * \boldsymbol{\nabla\nabla}.\boldsymbol{u} - \mu * (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{f} = \rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} \tag{3.14}$$

ifadesi bulunur. Şimdi $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ vektörüne Helmholtz ayrışımını uygulayıp uygulayamayacağımızı görelim.

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}\varphi + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\psi} \tag{3.15}$$

şeklinde yer değiştirme vektörü skaler bir φ fonksiyonun gradyanı ve bir $\boldsymbol{\psi}$ vektörünün rotasyonelinin toplamı olarak yazılabilir. Bu durumda

$$\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\nabla}\varphi) \tag{3.16}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\psi} \tag{3.17}$$

olacaktır. Burada gradyanın rotasyonelinin, rotasyonelin gradyanının ve rotasyonelin diverjansının sıfır olma özellikleri kullanılmıştır. (3.15),(3.16),(3.17) (3.14) denklemine yerleştirilirse:

$$(\lambda + 2\mu) * \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\nabla}\varphi) - \mu * (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\psi}) + \boldsymbol{f} = \rho(\boldsymbol{\nabla}\ddot{\varphi} + \boldsymbol{\nabla} \times \ddot{\boldsymbol{\psi}}) \tag{3.18}$$

bulunur.

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)$ V hacminde tanımlı bir vektör fonksiyonu ise

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t) = -\frac{1}{4\pi}\int_{V_\xi} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi},t)}{|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\,|} dV_\xi \tag{3.19}$$

şeklinde bir vektör fonksiyonu tanımlanabilir. Bu fonksiyon

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{W} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{W} - \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{W} \tag{3.20}$$

özelliğini sağlar. Şimdi sonsuz ortamın bir $\boldsymbol{y}$ noktasına

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)=\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})g(t)\boldsymbol{e}_k \tag{3.21}$$

kütle kuvvetini yükleyelim. $\boldsymbol{e}_k$ kartezyen koordinatlarda herhangi bir baz vektörünü, $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ ise Dirac deltasını göstermektedir. Bu kütle kuvvetinden dolayı gerilme ve şekil değiştirme alanlarını hesaplamaya çalışalım. (3.21), (3.19) da kullanılır ve Dirac deltasının özellikleri anımsanırsa;

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t)=-\frac{1}{4\pi}\int_{V_\xi}\frac{\delta(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{y})g(t)\boldsymbol{e}_k}{\mid \boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}\mid}dV_\xi=-\frac{1}{4\pi}g(t)\boldsymbol{e}_k\frac{1}{r} \tag{3.22}$$

$$r=\mid \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\mid=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2} \tag{3.23}$$

olarak bulunur. Bu durumda (3.20) den kütle kuvveti

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{\nabla\nabla}.(-\frac{1}{4\pi}g(t)\boldsymbol{e}_k\frac{1}{r})-\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times(-\frac{1}{4\pi}g(t)\boldsymbol{e}_k\frac{1}{r}) \tag{3.24}$$

şeklini alır. Bu ifade (3.18) e yerleştirilirse:

$$\begin{aligned}(\lambda+2\mu)*\boldsymbol{\nabla\nabla}.(\boldsymbol{\nabla}\varphi)+\boldsymbol{\nabla\nabla}.(-\frac{1}{4\pi}g(t)\boldsymbol{e}_k\frac{1}{r})-\mu*(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\psi})\\ +\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times(\frac{1}{4\pi}g(t)\boldsymbol{e}_k\frac{1}{r})=\rho(\boldsymbol{\nabla}\ddot{\varphi}+\boldsymbol{\nabla}\times\ddot{\boldsymbol{\psi}})\end{aligned} \tag{3.25}$$

olacaktır. $\lambda(t)$ ve $\mu(t)$ sadece zamanın fonksiyonları olduklarından (3.25);

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\nabla}[(\lambda+2\mu)*\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\nabla}\varphi+\boldsymbol{\nabla}(-\frac{1}{4\pi}g(t)\boldsymbol{e}_k\frac{1}{r})-\rho\ddot{\boldsymbol{\varphi}}]\\ &+\boldsymbol{\nabla}\times[-\mu*\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\psi}+\boldsymbol{\nabla}\times(\frac{1}{4\pi}g(t)\boldsymbol{e}_k\frac{1}{r})-\rho\ddot{\boldsymbol{\psi}}]=\boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{3.26}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu ifadenin bir rotasyoneli bir de diverjansı alınırsa rotasyonel ve gradyan elemanlarının ayrı ayrı sıfır olması gerektiği ortaya çıkar ve sonuçta;

$$\begin{aligned}(\lambda+2\mu)*\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\nabla}\varphi+\boldsymbol{\nabla}(-\frac{1}{4\pi}g(t)\boldsymbol{e}_k\frac{1}{r})-\rho\ddot{\varphi}=0\\ -\mu*(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\psi})+\boldsymbol{\nabla}\times(\frac{1}{4\pi}g(t)\boldsymbol{e}_k\frac{1}{r})-\rho\ddot{\boldsymbol{\psi}}=0\end{aligned} \tag{3.27}$$

denklemleri bulunur.

$$\varphi = Div\, F e_k$$

$$\boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\nabla}\times G\boldsymbol{e}_k \tag{3.28}$$

tanımları yapılırsa (3.27) denklemleri aşağıdaki formu alır.

$$(\lambda+2\mu)*\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}.(F\boldsymbol{e}_k)+\boldsymbol{\nabla}.(-\frac{1}{4\pi}g(t)\boldsymbol{e}_k\frac{1}{r})-\rho\boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{e}_k\ddot{F})=0$$

$$\mu*\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times(G\boldsymbol{e}_k)+\boldsymbol{\nabla}\times(\frac{1}{4\pi}g(t)\boldsymbol{e}_k\frac{1}{r})+\rho\boldsymbol{\nabla}\times(\ddot{G}\,\boldsymbol{e}_k)=0 \tag{3.29}$$

Sonuçta

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}.(F\boldsymbol{e}_k)&=\frac{\partial F}{\partial x_k}\\ (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}.(F\boldsymbol{e}_k))_i&=\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_k}\\ \boldsymbol{\nabla}.(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}.(F\boldsymbol{e}_k))&=\frac{\partial^3 F}{\partial x_i\partial x_i\partial x_k}\end{aligned}$$

olduğu anımsanırsa (3.29) denklemlerinin ilki

$$(\lambda + 2\mu) * \frac{\partial^3 F}{\partial x_i \partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}(-\frac{1}{4\pi} g(t) \frac{1}{r}) - \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \ddot{F} = 0 \qquad (3.30)$$

formunu alır. İkinci denklem için

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla} \times (G\boldsymbol{e}_k))_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial G}{\partial x_j} \\
(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times (G\boldsymbol{e}_k))_l &= \epsilon_{lmn} \frac{\partial}{\partial x_m} \epsilon_{njk} \frac{\partial G}{\partial x_j} \\
&= \epsilon_{nlm} \epsilon_{njk} \frac{\partial^2 G}{\partial x_m \partial x_j} \\
&= (\delta_{lj}\delta_{mk} - \delta_{lk}\delta_{mj}) \frac{\partial^2 G}{\partial x_m \partial x_j} \\
(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times G\boldsymbol{e}_k)_i &= \epsilon_{irl} \frac{\partial}{\partial x_r} (\delta_{lj}\delta_{mk} - \delta_{lk}\delta_{mj}) \frac{\partial^2 G}{\partial x_m \partial x_j} \\
&= \epsilon_{irl} \frac{\partial^3 G}{\partial x_k \partial x_l \partial x_r} - \epsilon_{irl} \frac{\partial^3 G}{\partial x_r \partial x_m \partial x_m} \delta_{lk} \\
&= \frac{\partial}{\partial x_k} [\epsilon_{irl} \frac{\partial^2 G}{\partial x_l \partial x_r}] - \epsilon_{irk} \frac{\partial^3 G}{\partial x_r \partial x_m \partial x_m}
\end{aligned}$$

İlk terim sıfır olur.

i=1 için

$$\epsilon_{irl} \frac{\partial^2 G}{\partial x_l \partial x_r} = \epsilon_{123} \frac{\partial^2 G}{\partial x_2 \partial x_3} + \epsilon_{132} \frac{\partial^2 G}{\partial x_3 \partial x_2} = 0$$

i=2 için

$$\epsilon_{irl} \frac{\partial^2 G}{\partial x_l \partial x_r} = \epsilon_{231} \frac{\partial^2 G}{\partial x_3 \partial x_1} + \epsilon_{213} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

i=3 için

$$\epsilon_{irl}\frac{\partial^2 G}{\partial x_l \partial x_r} = \epsilon_{312}\frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} + \epsilon_{321}\frac{\partial^2 G}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times G\boldsymbol{e}_k)_i = -\epsilon_{irk}\frac{\partial^3 G}{\partial x_r \partial x_m \partial x_m} = -(\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}^2 G\boldsymbol{e}_k))_i$$

Yukarıdaki eşitlik (3.29) denkleminin ikincisine yerleştirilirse

$$\mu * (-\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}^2(G\boldsymbol{e}_k)) + \boldsymbol{\nabla} \times (\frac{1}{4\pi}g(t)\boldsymbol{e}_k\frac{1}{r}) + \rho\boldsymbol{\nabla} \times (\ddot{G}\, e_k) = 0 \tag{3.31}$$

(3.30) ve (3.31) denklemleri diverjans ve rotasyonelin içindeki ifadeler sıfıra eşitlenerek aşağıdaki formda yazılabilirler.

$$\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho} * \boldsymbol{\nabla}^2 F - \ddot{F} = \frac{1}{4\pi}g(t)\frac{1}{r} \tag{3.32}$$

$$\frac{\mu}{\rho} * \boldsymbol{\nabla}^2 G - \ddot{G} = \frac{1}{4\pi}g(t)\frac{1}{r} \tag{3.33}$$

Burada

$$\lambda = \lambda(t) \qquad\qquad \mu = \mu(t) \tag{3.34}$$

formundadır. (3.32) ve (3.33) denklemlerinden birini çözmek yeterli olacaktır.

Nokta kaynaktan hareket ettiğimize göre F sadece r'nin fonksiyonu olacaktır. Dolayısıyla küresel koordinatları kullanabiliriz. Küresel koordinatlarda

$$\nabla^2 F = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial F}{\partial r}) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r}$$

olacaktır. Konvolüsyonlar da kullanılırsa (3.32) denklemi

$$\frac{1}{\rho}\int_{-\infty}^{t}[\lambda(t-\tau)+2\mu(t-\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}[\frac{\partial^2}{\partial r^2}F(\tau,r)+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}F(\tau,r)]d\tau - \ddot{F}(t) = \frac{1}{4\pi}g(t)\frac{1}{r} \tag{3.35}$$

formunu alır.

$$F(\tau,t) = \frac{\kappa(\tau,r)}{r} \tag{3.36}$$

yazılırsa

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial \kappa}{\partial r}\frac{1}{r} - \kappa\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \kappa}{\partial r^2}\frac{1}{r} - 2\frac{1}{r^2}\frac{\partial \kappa}{\partial r} + 2\frac{\kappa}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial^2 \kappa}{\partial r^2}\frac{1}{r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial \kappa}{\partial r} + \frac{\kappa}{r^3} + 2\frac{\partial \kappa}{\partial r}\frac{1}{r^2} - \kappa\frac{2}{r^3}$$

$$= \frac{\partial^2 \kappa}{\partial r^2}\frac{1}{r} \tag{3.37}$$

Sonuçta (3.35) denklemi

$$\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\rho}[\lambda(t-\tau)+2\mu(t-\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}[\frac{\partial^2 \kappa}{\partial r^2}\frac{1}{r}]d\tau - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\kappa(t,r)\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi}g(t)\frac{1}{r} \tag{3.38}$$

şeklini alır. Bu denklem de r ile çarpılırsa

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\rho}[\lambda(t-\tau)+2\mu(t-\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}[\frac{\partial^2\kappa}{\partial r^2}]d\tau - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\kappa(t,r) = \frac{1}{4\pi}g(t) \tag{3.39}$$

bulunur. Bu ifadeye Laplace transformu uygulayalım.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} e^{-st}dt \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\rho}[\lambda(t-\tau)+2\mu(t-\tau)]\frac{\partial}{\partial\tau}[\frac{\partial^2}{\partial r^2}\kappa(\tau)]d\tau \\ - \int_0^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\kappa(t,r)e^{-st}dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} g(t)e^{-st}dt\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\overline{g}(s) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st}dt \tag{3.41}$$

$$\int_0^{\infty} \kappa(t,r)e^{-st}dt = \overline{\kappa}(s,r) \tag{3.42}$$

$$\mathcal{L}(\lambda(t)) = \overline{\lambda} \tag{3.43}$$

$$\mathcal{L}(\mu(t)) = \overline{\mu} \tag{3.44}$$

tanımları yapılırsa ve (3.40) taki ilk terimin ikinci parçasının Laplace transformu

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\kappa(t)e^{-st}dt &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}(\kappa(t,r))e^{-st}dt \\ \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}(\kappa(t,r))e^{-st}dt &= (\kappa(t,r))e^{-st}|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}(\kappa(t,r))(-s)e^{-st}dt \\ &= -\kappa(0,r) + s\int_0^{\infty}\kappa(t,r)e^{-st}dt = s\overline{\kappa}(s,r) - \kappa(0,r)\end{aligned}$$

$\kappa(t,r)$ nin $t=0$ da sıfır olduğu kabulü ile

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}(\kappa(t,r))e^{-st}dt = s\frac{\partial^2}{\partial r^2}\bar{\kappa}(s,r) \tag{3.45}$$

olarak bulunur. (3.40) taki ikinci terim ise

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial t^2}\kappa(t,r)e^{-st}dt = e^{-st}\left.\frac{\partial}{\partial t}\kappa(t,r)\right|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\kappa(t,r)se^{-st}dt$$

t=0 için $\frac{\partial\kappa(t,r)}{\partial t}=0$ kabulü de yapılırsa

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial t^2}\kappa(t,r)e^{-st}dt = s^2\bar{\kappa}(s,r) \tag{3.46}$$

olacaktır. (3.40) taki ilk terim hesaplanırsa;

$$I = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\int_0^\infty e^{-st}dt\int_{-\infty}^t \frac{1}{\rho}\{\lambda(t-\tau)+2\mu(t-\tau)\}\frac{\partial}{\partial\tau}\kappa(\tau,r)d\tau \tag{3.47}$$

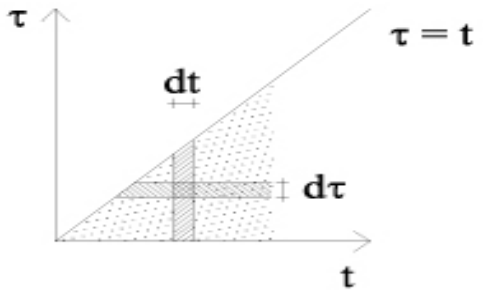
$t\le 0$ için $\frac{\partial}{\partial t}(\kappa(t,r))=0$ yazılırsa bu integral

$$I = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\int_0^\infty e^{-st}dt\int_0^t \frac{1}{\rho}\{\lambda(t-\tau)+2\mu(t-\tau)\}\frac{\partial}{\partial\tau}\kappa(\tau,r)d\tau \tag{3.48}$$

olarak yazılabilir. İntegralin içindeki ifade t,τ düzleminde (Şekil 3.1) de taralı alan üzerinde integre edilmektedir ve önce yine (Şekil 3.1) deki düşey hat üzerinde integral alınmaktadır.

Bunun yerine aynı alanda önce (Şekil 3.1) deki yatay hat üzerinde integral alınabilir.

$$I = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\int_0^\infty d\tau\int_\tau^\infty e^{-st}\frac{1}{\rho}\{\lambda(t-\tau)+2\mu(t-\tau)\}\frac{\partial}{\partial\tau}\kappa(\tau,r)dt$$



Şekil 3.1 Düşey hat üzerinde integral alınan düzlem

$$I = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\int_0^\infty d\tau \frac{\partial}{\partial \tau}\kappa(\tau, r)\int_\tau^\infty e^{-st}\frac{1}{\rho}\{\lambda(t-\tau)+2\mu(t-\tau)\}dt$$

t üzerinde alınan integralde

$\eta = t-\tau$ değişken dönüşümü yapılırsa bu integralin sınırları 0 ve ∞ olacaktır ve integral

$$I = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\int_0^\infty d\tau \frac{\partial}{\partial \tau}\kappa(\tau, r)\int_0^\infty e^{-s(\eta+\tau)}\frac{1}{\rho}\{\lambda(\eta)+2\mu(\eta)\}d\eta$$

$$I = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\int_0^\infty d\tau \frac{\partial}{\partial \tau}\kappa(\tau, r)e^{-s\tau}\int_0^\infty e^{-s\eta}\frac{1}{\rho}\{\lambda(\eta)+2\mu(\eta)\}d\eta\psi \qquad (3.49)$$

formunu alır. Laplace transformunun (1.33) teki tanımı anımsanırsa

$$I = \frac{\partial^2}{\partial r^2}[\mathcal{L}(\frac{\partial}{\partial \tau}\kappa(\tau, r))\frac{1}{\rho}\mathcal{L}(\bar{\lambda}(\tau)+2\bar{\mu}(\tau))] \qquad (3.50)$$

(3.45) kullanılarak (3.40) taki ilk terim

$$I = \frac{\partial^2}{\partial r^2}[\frac{1}{\rho}(\bar{\lambda}(s)+2\bar{\mu}(s))s\bar{\kappa}(s, r))]$$

$$I = \frac{s}{\rho}[\bar{\lambda}(s) + 2\bar{\mu}(s)]\frac{\partial^2 \bar{\kappa}}{\partial r^2} \tag{3.51}$$

olarak bulunur. (3.40) a (3.41), (3.46) ve (3.51) denklemleri yerleştirilirse;

$$\frac{\partial^2 \bar{\kappa}}{\partial r^2}[\frac{s}{\rho}(\bar{\lambda}(s) + 2\bar{\mu}(s))] - s^2\bar{\kappa}(s,r) = \frac{1}{4\pi}\bar{g}(s) \tag{3.52}$$

formu elde edilir. Bu ifade

$$\frac{\partial^2 \bar{\kappa}}{\partial r^2}A(s) - s^2\bar{\kappa} = \frac{1}{4\pi}\bar{g}(s) \tag{3.53}$$

$$A(s) = \frac{s}{\rho}(\bar{\lambda}(s) + 2\bar{\mu}(s)) \tag{3.54}$$

şeklinde sabit katsayılı, homojen olmayan bir ikinci mertebe adi diferansiyel denkleme indirgenmiş olur. Bu denklemin çözümü

$$\bar{\kappa} = \bar{\kappa}_h + \bar{\kappa}_p \tag{3.55}$$

şeklindedir. $\bar{\kappa}_p$ özel çözümü

$$\begin{aligned} \bar{\kappa}_p &= B \\ -s^2 B &= \frac{1}{4\pi}\bar{g}(s) \\ B &= -\frac{1}{4\pi}\bar{g}(s)\frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

$$\bar{\kappa}_p = -\frac{1}{4\pi}\frac{\bar{g}(s)}{s^2} \tag{3.56}$$

olarak bulunur. Laplace transformunun özellikleri kullanılarak

$$\mathcal{L}(\int_0^t f(t-u)g(u)du) = \mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(g(t)) \tag{3.57}$$

$$f(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad f(t) = t \tag{3.58}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{-\frac{1}{4\pi}\frac{\overline{g}(s)}{s^2}\} = -\int_0^t \frac{1}{4\pi}(t-\tau)g(\tau)d\tau \tag{3.59}$$

olarak elde edilir. $\overline{\kappa}_h$ ise

$$\frac{\partial^2\overline{\kappa}}{\partial r^2}A(s) - s^2\overline{\kappa} = 0 \tag{3.60}$$

denkleminin çözümüdür. Çözüm;

$$\overline{\kappa} = e^{\alpha r} \tag{3.61}$$

formundadır. Bu ifade (3.60) ta yerine konursa

$$\alpha^2 e^{\alpha r}A(s) - s^2 e^{\alpha r} = 0$$
$$e^{\alpha r}(\alpha^2 A(s) - s^2) = 0$$

$$\alpha = \frac{s}{\sqrt{A(s)}} \tag{3.62}$$

$$\bar{\kappa}_h = c_1(s)e^{-\alpha r} + c_2(s)e^{\alpha r} \tag{3.63}$$

şeklinde homojen denklemin çözümü bulunur. (3.63), (3.56) ve (3.55) denklemlerinden

$$\bar{\kappa} = c_1(s)e^{-\alpha r} + c_2(s)e^{\alpha r} - \frac{1}{4\pi}\bar{g}(s)\frac{1}{s^2} \tag{3.64}$$

elde edilir.

$r = \infty$ için

$$\kappa \Rightarrow 0 \qquad c_2(s) = 0 \tag{3.65}$$

$r = 0$ için $\kappa = 0$

$$0 = c_1(s) - \frac{1}{4\pi}\bar{g}(s)\frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{\bar{g}(s)}{4\pi}\frac{1}{s^2} \tag{3.66}$$

(3.65) ve (3.66) denklemlerini (3.64) te yerine yazarsak

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{4\pi}[\frac{\bar{g}(s)}{s^2}e^{-\alpha r} - \frac{\bar{g}(s)}{s^2}] \tag{3.67}$$

bulunur.

α yı belirlemek için seçilen malzemedeki $\lambda(t)$ ve $\mu(t)$ ifadeleri kullanılacaktır. (2.15) kullanılırsa;

$$\lambda(t) + 2\mu(t) = (1 + t_1\delta(t))\frac{E_0}{(1+\nu)(1-2\nu)}(1-\nu)$$

olacaktır. Bu ifadenin Laplace transformu alınırsa

$$\bar{\lambda}(s) + 2\bar{\mu}(s) = \frac{E_0(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\frac{1}{s} + t_1) \tag{3.68}$$

bulunur. (3.68) ve (3.54) kullanılırsa

$$A(s) = \frac{s}{\rho}\frac{E_0(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\frac{1}{s} + t_1)$$

$$= \frac{E_0}{\rho}\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}(1 + st_1) \tag{3.69}$$

elde edilir. (3.69), (3.62) de kullanılır ve

$${c_0}^2 = \frac{E_0}{\rho}\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{3.70}$$

kısaltması da yapılırsa

$$\alpha(s) = \frac{s}{c_0\sqrt{1+st_1}} \tag{3.71}$$

olarak bu malzeme için α bulunmuş olur. Sonuçta

$$\bar{\kappa}(s,r) = \frac{1}{4\pi}\frac{\bar{g}(s)}{s^2}[e^{-\frac{s}{c_0\sqrt{1+st_1}}r} - 1] \tag{3.72}$$

şeklinde $\kappa(t,r)$ nin Laplace transformu elde edilir. (3.36) denklemi anımsanırsa ve

$$\bar{F}(s,r) = \mathcal{L}(F(t,r)) = \mathcal{L}(\frac{\kappa(\tau,r)}{r}) \tag{3.73}$$

olduğu da düşünülürse

$$\bar{F}(s,r) = \frac{1}{4\pi}\frac{\bar{g}(s)}{s^2}[e^{-\frac{s}{c_0\sqrt{1+st_1}}} - 1]\frac{1}{r} \tag{3.74}$$

ve yine benzer şekilde

$$\bar{G}(s,r) = \mathcal{L}(G(t,r))$$

$$\bar{G}(s,r) = \frac{1}{4\pi}\frac{\bar{g}(s)}{s^2}[e^{-\frac{s}{c\sqrt{1+st_1}}} - 1]\frac{1}{r} \tag{3.75}$$

$$c^2 = \frac{E_0}{2(1+\nu)\rho} \tag{3.76}$$

olarak $G(t,r)$ ve $F(t,r)$ fonksiyonlarının Laplace transformları elde edilmiş olur. Şimdi bunları (3.28) denklemlerinde kullanarak φ ve ψ potansiyellerinin Laplace transformlarını ve buradan da (3.15) ve (3.7) yi kullanarak yer değiştirme vektörünün ve gerilme tansörünün bileşenlerini hesaplayabiliriz. Ancak burada farklı bir yol izlenecektir. Bu şekilde bulunan sonuçlarda elde edilen yer değiştirme ve gerilme alanları $\boldsymbol{u^k}$ ve $\boldsymbol{\sigma^k}$ olarak isimlendirilecektir. Şimdi küresel koordinatlarda (r,θ,ϑ) kartezyen koordinatlar (x_1, x_2, x_3) arasındaki ilişkiyi anımsayalım.

$$\begin{aligned} x_1 &= R\sin\theta\cos\vartheta \qquad 0 \le r < \infty \\ x_2 &= R\sin\theta\sin\vartheta \qquad 0 \le \theta < \pi \\ x_3 &= R\cos\theta \qquad\quad 0 \le \vartheta < 2\pi \end{aligned} \tag{3.77}$$

Küresel koordinatlarda bir $R_1, \theta_1, \vartheta_1$ noktasında $\boldsymbol{e_{R_1}}$ baz vektörü kartezyen koordinatlardaki $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ baz vektörlerine

$$\boldsymbol{e_{R_1}} = \sin\theta_1 \cos\vartheta_1 \boldsymbol{e_1} + \sin\theta_1 \sin\vartheta_1 \boldsymbol{e_2} + \cos\theta_1 \boldsymbol{e_3} \tag{3.78}$$

şeklinde bağlanan bir vektördür. (3.21) de tanımlanan kütle kuvvetinde $\boldsymbol{e_k}$ ($k = 1, 2, 3$) kartezyen baz vektörü yerine $\boldsymbol{e_{R_1}}$ baz vektörü konursa bu duruma ait F^{R_1} ve G^{R_1} fonksiyonları (3.73) ve (3.74) te bulunanların aynısı olacaktır. Ancak bu durumda kütle kuvvetinin şiddetini $\delta(t)$ yerine $\frac{\delta(t)}{2R_1}$ aldığımızı da belirtelim. Ayrıca yine bu duruma ait φ^{R_1} ve $\boldsymbol{\psi^{R_1}}$ potansiyelleri

$$\varphi^{R_1} = Div(F^{R_1}\boldsymbol{e_{R_1}})\frac{1}{2R_1} \tag{3.79}$$

$$\boldsymbol{\psi^{R_1}} = -\nabla \times (G^{R_1}\boldsymbol{e_{R_1}})\frac{1}{2R_1} \tag{3.80}$$

olarak küresel koordinatlarda hesaplanmalıdır.

$$\boldsymbol{B_1^{R_1}} = F^{R_1}\boldsymbol{e_{R_1}}\frac{1}{2R_1} \tag{3.81}$$

$$\boldsymbol{B_2^{R_1}} = G^{R_1}\boldsymbol{e_{R_1}}\frac{1}{2R_1} \tag{3.82}$$

şeklinde $\boldsymbol{B_1^{R_1}}$ ve $\boldsymbol{B_2^{R_1}}$ fonksiyonlarını tanımlarsak (3.79) ve (3.80) denklemleri

$$\varphi^{R_1} = Div(\boldsymbol{B_1^{R_1}}) \tag{3.83}$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{R_1}} = -\nabla \times \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{R_1}} \tag{3.84}$$

şeklinde olacaktır. Ancak bu yükleme için φ^{R_1} ve $\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{R_1}}$potansiyellerini hesaplamak yerine $\boldsymbol{y_1}(R_1, \theta_1, \vartheta_1)$ noktası dışında yine sonsuz ortamın bir $y_2(R_2, \theta_2, \vartheta_2) = \boldsymbol{y_2}(R_1, \pi - \theta_1, \vartheta_1 + \pi)$ noktasına $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{R_2}}$ doğrultusunda ve yine şiddeti $\frac{\delta(t)}{2R_1}$ olan bir kütle kuvvetini de yine $t = 0$ anında yüklersek bu iki kütle kuvvetinden dolayı meydana gelen $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{3}}(\boldsymbol{x}, t)$ vektör fonksiyonu ($\boldsymbol{x}(R, \theta, \vartheta)$)

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{3}} = \left(\frac{\kappa(t, r_1)}{r_1}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{R_1}} + \frac{\kappa(t, r_2)}{r_2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{R_2}}\right)\frac{1}{2R_1}$$

şeklinde oluşturulabilir. Burada

$$r_1 = \mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y_1} \mid = \sqrt{R_1^2 + R^2 - 2RR_1(\sin\theta_1 \sin\theta \cos(\vartheta - \vartheta_1) + \cos\theta \cos\theta_1)}$$

$$r_2 = \mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y_2} \mid = \sqrt{R_1^2 + R^2 + 2RR_1(\sin\theta_1 \sin\theta \cos(\vartheta - \vartheta_1) + \cos\theta \cos\theta_1)}$$

olarak hesaplanmaktadır. Şimdi yüklerin şiddetini $2\pi R_1^2$ ne bölüp bu yükleri R_1 yarıçaplı yarım küre yüzeyi üzerinde integre edersek R_1 yarıçaplı küre üzerinde her noktada $\boldsymbol{e_R}$ doğrultusunda etkiyen $\delta(t)\frac{1}{2R_1}$ şiddetindeki yayılı yükten oluşan toplam alan bulunmuş olur. Bu integrali almadan $R_1 \to 0$ için limit alırsak yayılı yükü orijine taşımış oluruz. Sonuçta meydana gelen toplam $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{S}}$

$$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{S}} = \lim_{R_1 \to 0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \int_0^{\pi} \left[\frac{\kappa(t, r_1)}{r_1}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{R_1}} + \frac{\kappa(t, r_2)}{r_2}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{R_2}}\right]\frac{1}{4\pi R_1} \sin\theta_1 d\vartheta_1 \tag{3.85}$$

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{R_2}} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{R_1}} \tag{3.86}$$

olarak hesaplanacaktır. Sonuçta

$$\boldsymbol{B_1^s} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \sin\theta_1 \int_0^{2\pi} [\frac{\partial}{\partial R}\kappa(t,R)\frac{1}{R} - \frac{\kappa(t,R)}{R^2}][-\sin\theta_1 \sin\theta \cos(\vartheta - \vartheta_1) + \cos\theta\cos\theta_1]d\vartheta_1 \tag{3.87}$$

bulunur. (3.87) de $\boldsymbol{e_{R_1}}$ baz vektörü (3.78) deki gibi kartezyen baz vektörleri $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ cinsinden yazılır ve sadece R nin fonksiyonu olan terimler integral dışına alınırsa

$$\boldsymbol{B_1^s} = -\frac{1}{2\pi}[\frac{\partial}{\partial R}\kappa(t,R)\frac{1}{R} - \frac{\kappa}{R^2}]\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta_1 \sin\theta_1 \int_0^{2\pi} [\sin\theta_1 \sin\theta\cos(\vartheta - \vartheta_1) + \cos\theta\cos\theta_1][\sin\theta_1\cos\vartheta_1\boldsymbol{e_1} + \sin\theta_1\sin\vartheta_1\boldsymbol{e_2} + \cos\theta_1\boldsymbol{e_3}]d\vartheta_1 \tag{3.88}$$

Gerekli integraller alınırsa

$$\boldsymbol{B_1^s} = -\frac{1}{3}[\frac{\partial}{\partial R}\kappa(t,R)\frac{1}{R} - \frac{1}{R^2}][\sin\theta\cos\vartheta\boldsymbol{e_1} + \sin\theta\sin\vartheta\boldsymbol{e_2} + \cos\theta\boldsymbol{e_3}] \tag{3.89}$$

ve (3.78) de kullanılırsa

$$\boldsymbol{B_1^s} = -\frac{1}{3}[\frac{\partial}{\partial R}\kappa(c_0,R,t)\frac{1}{R} - \frac{\kappa(c_0,R,t)}{R^2}]\boldsymbol{e_R} \tag{3.90}$$

sonucu elde edilir. κ fonksiyonu R, t ve c_0 ın fonksiyonudur. c_0 yerine c yazılarak

$$\boldsymbol{B_2^s} = -\frac{1}{3}[\frac{\partial}{\partial R}\kappa(c,R,t)\frac{1}{R} - \frac{\kappa(c,R,t)}{R^2}]\boldsymbol{e_R} \tag{3.91}$$

fonksiyonu da elde edilir. Şimdi bu duruma ait potansiyeller

$$\varphi^s = Div\boldsymbol{B_1^s} \tag{3.92}$$

$$\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{s}} = -\nabla \times \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{s}} \tag{3.93}$$

olarak küresel koordinatlarda elde edileceklerdir. Şimdi

$$\bar{\varphi}^{s}(s,R) = \mathcal{L}(\varphi^{s}(t,R)) \tag{3.94}$$

$$\bar{\boldsymbol{\psi}}^{\boldsymbol{s}}(s,R) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\psi}^{\boldsymbol{s}}(t,R)) \tag{3.95}$$

fonksiyonları tanımlanırsa

$$\bar{\varphi}^{s}(s,R) = Div\bar{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{s}}(s,R) \tag{3.96}$$

$$\bar{\boldsymbol{\psi}}^{\boldsymbol{s}}(s,R) = -\nabla \times \bar{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{s}}(s,R) \tag{3.97}$$

şeklinde bu potansiyellerin Laplace transformları elde edilir. $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{s}}$ ve $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{s}}$ fonksiyonlarının Laplace transformları (3.90), (3.91) ve (3.72) den yararlanarak

$$\bar{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{s}}(s,R) = -\frac{1}{3}\left[\frac{\partial}{\partial R}\bar{\kappa}(c_0,R,s)\frac{1}{R} - \frac{\bar{\kappa}(c_0,R,s)}{R^2}\right]\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{R}} \tag{3.98}$$

$$\bar{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{2}}^{\boldsymbol{s}}(s,R) = -\frac{1}{3}\left[\frac{\partial}{\partial R}\bar{\kappa}(c,R,s)\frac{1}{R} - \frac{\bar{\kappa}(c,R,s)}{R^2}\right]\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{R}} \tag{3.99}$$

olarak yazılabilir. Küresel koordinatlarda sadece R bileşeni olan bir $\boldsymbol{L} = l(R)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{R}}$ vektörünün diverjansı ve rotasyoneli

$$Div\boldsymbol{L} = \frac{\partial l(R)}{\partial R} + \frac{2}{R} l(R) \tag{3.100}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{0} \tag{3.101}$$

şeklinde hesaplanır. (3.98), (3.99), (3.100) ve (3.101); (3.96) ve (3.97) de kullanılırsa

$$\bar{\varphi}^s(s,R) = -\frac{1}{3}\{\frac{\partial}{\partial R}[\frac{\partial}{\partial R}\bar{\kappa}(c_0,R,s)\frac{1}{R} - \frac{\bar{\kappa}(c_0,R,s)}{R^2}] + \frac{2}{R}[\frac{\partial}{\partial R}\bar{\kappa}(c_0,R,s)\frac{1}{R} - \frac{\bar{\kappa}(c_0,R,s)}{R^2}]\}$$

$$\bar{\varphi}^s(s,R) = -\frac{1}{3}[\frac{\partial^2}{\partial R^2}\bar{\kappa}(c_0,R,s)\frac{1}{R} - \frac{\partial}{\partial R}\bar{\kappa}(c_0,R,s)\frac{1}{R^2} - \frac{\partial}{\partial R}\bar{\kappa}(c_0,R,s)\frac{1}{R^2} + \frac{2\bar{\kappa}(c_0,R,s)}{R^3} + 2\frac{\partial}{\partial R}\bar{\kappa}(c_0,R,s)\frac{1}{R^2} - \frac{2\bar{\kappa}(c_0,R,s)}{R^3}]$$

$$\bar{\varphi}^s(s,R) = -\frac{1}{3}[\frac{\partial^2}{\partial R^2}(\bar{\kappa}(c_0,R,s))\frac{1}{R}] \tag{3.102}$$

$$\bar{\boldsymbol{\psi}}^{\boldsymbol{s}}(s,R) = \boldsymbol{0} \tag{3.103}$$

olarak küresel simetrik problemler için kullanılacak olan potansiyeller elde edilir. Şimdi bu potansiyellerden oluşacak yer değiştirme ve gerilme alanlarını bulalım. (3.15) ten

$$\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{s}}(t,R) = \boldsymbol{\nabla}\varphi^s(t,R) = \frac{\partial}{\partial R}(\varphi(t,R))\boldsymbol{e_R} \tag{3.104}$$

olarak hesaplanacaktır. (3.104) $\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{s}}(t,R)$ nin sadece R bileşeni olduğunu gösterir. Şimdilik $\varphi^s(t,R)$ nin açık ifadesi elimizde olmadığından

$$\overline{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{R}}(s,R) = \mathcal{L}(u^s_R(t,R)) \tag{3.105}$$

şeklinde $u_R(t,R)$ nin Laplace transformunu hesaplayalım. (3.105), (3.104) ve (3.102) kullanılarak

$$\overline{u}^s_R(s,R) = -\frac{1}{3}[\frac{\partial^3}{\partial R^3}\overline{\kappa}(c_0,R,s)\frac{1}{R} - \frac{\partial^2}{\partial R^2}\overline{\kappa}(c_0,R,s)\frac{1}{R^2}] \tag{3.106}$$

olarak $\overline{u}^s_R(s,R)$ nin Laplace transformu hesaplanmış olur. Eğer $u^s_R(t,R)$ bilinseydi buna bağlı olarak şekil değiştirme tansörünün sıfırdan farklı bileşenleri küresel koordinatlarda

$$\epsilon^s_{RR}(t,R) = \frac{\partial}{\partial R}u^s_R(t,R) \tag{3.107}$$

$$\epsilon^s_{\vartheta\vartheta}(t,R) = \epsilon^s_{\theta\theta}(t,R) = \frac{u^s_R(t,R)}{R} \tag{3.108}$$

şeklinde elde edilebilirlerdi. Ancak şimdi bunların Laplace transformlarını hesaplayabiliriz.

$$\overline{\epsilon}^s_{RR}(s,R) = \mathcal{L}(\epsilon^s_{RR}(t,R)) \tag{3.109}$$

$$\overline{\epsilon}^s_{\theta\theta}(s,R) = \overline{\epsilon}^s_{\vartheta\vartheta}(s,R) = \mathcal{L}(\epsilon^s_{\theta\theta}(t,R)) \tag{3.110}$$

gerilme tansörü $\boldsymbol{\sigma}^{\boldsymbol{s}}(t,R)$ nin sıfırdan farklı bileşenleri ise

$$\sigma^s_{RR}(t,R) = \lambda(t) * [\epsilon^s_{RR}(t,R) + \epsilon^s_{\theta\theta}(t,R) + \epsilon^s_{\vartheta\vartheta}(t,R)] + 2\mu(t) * [\epsilon^s_{RR}(t,R)] \tag{3.111}$$

$$\sigma^s_{\theta\theta}(t,R) = \sigma^s_{\vartheta\vartheta}(t,R) = \lambda(t) * [\epsilon^s_{RR}(t,R) + \epsilon^s_{\theta\theta}(t,R) + \epsilon^s_{\vartheta\vartheta}(t,R)] \\ +2\mu(t) * [\epsilon^s_{\theta\theta}(t,R)] \tag{3.112}$$

olarak hesaplanabilir. Ancak yine $\boldsymbol{\epsilon}^s(t,R)$ tansörünün açık ifadesi elimizde olmadığından gerilme tansörünün bileşenlerinin Laplace transformlarını hesap edebiliriz.

$$\bar{\sigma}^s_{RR}(s,R) = \mathcal{L}(\sigma^s_{RR}(t,R)) \tag{3.113}$$

$$\bar{\sigma}^s_{\theta\theta}(s,R) = \bar{\sigma}^s_{\vartheta\vartheta}(s,R) = \mathcal{L}(\sigma^s_{\theta\theta}(t,R)) \tag{3.114}$$

Konvolüsyonların Laplace transformları daha önce (3.48)-(3.50) arasında hesaplanmıştı. Aynı işlemler tekrarlanarak sıfırdan farklı gerilme bileşenlerinin Laplace transformları

$$\bar{\sigma}^s_{RR}(s,R) = \bar{\lambda}(s)s[\bar{\epsilon}^s_{RR}(s,R) + 2\bar{\epsilon}^s_{\theta\theta}(s,R)] + 2\bar{\mu}(s)s[\bar{\epsilon}^s_{RR}(s,R)] \tag{3.115}$$

$$\bar{\sigma}^s_{\theta\theta}(s,R) = \bar{\sigma}^s_{\vartheta\vartheta}(s,R) = \bar{\lambda}(s)s[\bar{\epsilon}^s_{RR}(s,R) + 2\bar{\epsilon}^s_{\theta\theta}(s,R)] + 2\bar{\mu}(s)s[\bar{\epsilon}^s_{\theta\theta}(s,R)] \tag{3.116}$$

şeklinde elde edilmiş olur. (3.72), (3.104), (3.105), (3.107), (3.108), (3.109), (3.110) ve (3.102) kullanılırsa $\bar{u}^s_R(s,R)$, $\bar{\epsilon}^s_{RR}(s,R)$, $\bar{\epsilon}^s_{\theta\theta}(s,R)$, $\bar{\sigma}^s_{RR}(s,R)$, $\bar{\sigma}^s_{\theta\theta}(s,R)$ ifadeleri aşağıdaki gibi hesaplanır. Ancak (3.72) ifadesinde r yerine R konması gerektiğini de tekrar belirtelim.

$$\bar{\kappa}(s,r) = \frac{1}{4\pi}\frac{\bar{g}(s)}{s^2}[e^{-\alpha r} - 1]$$
$$\alpha = \frac{s}{c_0\sqrt{1+st_1}}$$

şeklinde tekrar yazılarak

$$\frac{\partial}{\partial R}\bar{\kappa}(s,R) = \frac{\bar{g}(s)}{4\pi s^2}[-\alpha e^{-\alpha R}]$$
$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}\bar{\kappa}(s,R) = \frac{\bar{g}(s)}{4\pi s^2}[\alpha^2 e^{-\alpha R}]$$

$$\bar{\varphi}^s(s,R) = -\frac{1}{12\pi}[\frac{\bar{g}(s)}{s^2}][\alpha^2 e^{-\alpha R}\frac{1}{R}] \tag{3.117}$$

$$\bar{u}_R^s(s,R) = \frac{1}{12\pi}[\frac{\bar{g}(s)}{s^2}][\alpha^3 e^{-\alpha R}\frac{1}{R} + \alpha^2 e^{-\alpha R}\frac{1}{R^2}] \tag{3.118}$$

$$\bar{\epsilon}_{RR}^s(s,R) = \frac{1}{12\pi}[\frac{\bar{g}(s)}{s^2}][-\alpha^4 e^{-\alpha R}\frac{1}{R} - 2\alpha^3 e^{-\alpha R}\frac{1}{R^2} - 2\alpha^2 e^{-\alpha R}\frac{1}{R^3}] \tag{3.119}$$

$$\bar{\epsilon}_{\theta\theta}^s(s,R) = \bar{\epsilon}_{\vartheta\vartheta}^s(s,R) = \frac{1}{12\pi}[\frac{\bar{g}(s)}{s^2}][\alpha^3 e^{-\alpha R}\frac{1}{R^2} + \alpha^2 e^{-\alpha R}\frac{1}{R^3}] \tag{3.120}$$

$$\bar{\epsilon}_{RR}^s(s,R) + \bar{\epsilon}_{\theta\theta}^s(s,R) + \bar{\epsilon}_{\vartheta\vartheta}^s(s,R) = \frac{1}{12\pi}[\frac{\bar{g}(s)}{s^2}]e^{-\alpha R}[-\frac{\alpha^4}{R}] \tag{3.121}$$

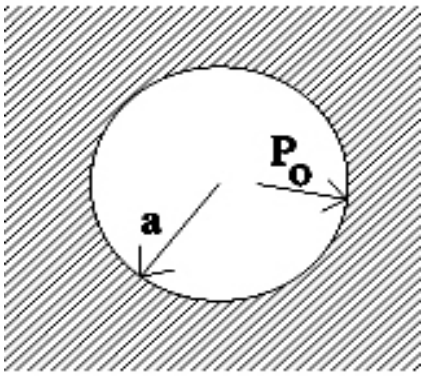
$$\bar{\sigma}_{RR}^s(s,R) = -\frac{1}{12\pi}e^{-\alpha R}\frac{\bar{g}(s)}{s}[\bar{\lambda}(s)\frac{\alpha^4}{R} + 2\bar{\mu}(s)(\frac{\alpha^4}{R} + \frac{2\alpha^3}{R^2} + \frac{2\alpha^2}{R^3})] \tag{3.122}$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta}^s(s,R) = \bar{\sigma}_{\vartheta\vartheta}^s(s,R) = \frac{1}{12\pi}e^{-\alpha R}\frac{\bar{g}(s)}{s}[-\bar{\lambda}(s)\frac{\alpha^4}{R} + 2\bar{\mu}(s)(\frac{\alpha^3}{R^2} + \frac{\alpha^2}{R^3})] \tag{3.123}$$

4. ÖRNEK PROBLEM

Bir önceki bölümde sonsuz ortamda, küresel koordinatlarda orijine etkiyen $\delta(t)$ şiddetinde ve $R_1 = 0$ yarıçaplı küre yüzeyi üzerinde her noktada $\boldsymbol{e_R}$ doğrultusundaki bir yayılı yükten dolayı herhangi bir noktada meydana gelen $\boldsymbol{u^s}(t, R)$ yer değiştirme vektörü ve $\boldsymbol{\sigma^s}(t, R)$ gerilme tansörü hesaplanmıştı. Ancak bunların açık ifadelerini elde etmek yerine Laplace transformları bulunmuştu. Şimdi çözülecek örnek problemi belirleyelim.

Sonsuz ortamda yarıçapı a olan küresel bir boşluğu göz önüne alalım ve bu boşluğun sınırına $t = 0$ anında ani olarak sınıra dik bir p_o basıncı etkisin. Bu basınçtan dolayı sınırdaki yer değiştirmenin zamanla değişimini ve sınırda meydana gelen teğetsel normal gerilmeyi hesaplamaya çalışalım. Bu problemde kütle kuvvetleri ihmal edilecektir. Problemdeki yer değiştirme alanı $\boldsymbol{u}$ ve gerilme alanı $\boldsymbol{\sigma}$ ile gösterilsin. Ortamın başlangıçta sukunette olduğu da kabul edilmektedir.



Şekil 4.1 Örnek problem

Problemin çözümü için küresel koordinatlar kullanılacaktır. Sınırın dış normali her noktada

$$\boldsymbol{n} = -e_R \tag{4.1}$$

olarak tanımlanır. Yer değiştirme vektörünün sadece u_R bileşeni vardır ve gerilme tansörü ise

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{RR} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

şeklindedir. Ayrıca bütün bilinmeyenler sadece R nin ve t nin fonksiyonudurlar.

Yüzey gerilme vektörü $\boldsymbol{T}$ ise

$$\boldsymbol{T} = p_o \boldsymbol{e_R} \tag{4.3}$$

olarak tanımlanacaktır.

Şimdi daha önce bulunan $\boldsymbol{u^s}(t, R)$ ve $\boldsymbol{\sigma^s}(t, R)$ problemini göz önüne alalım. $\boldsymbol{\sigma^s}(t, R)$ gerilme tansörü de

$$\boldsymbol{\sigma^s} = \begin{bmatrix} \sigma^s_{RR} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^s_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^s_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

olarak bulunmuştu. $R = a$ da yüzey gerilme vektörü

$$\boldsymbol{T^s} = \boldsymbol{\sigma^s}.\boldsymbol{n} = -\sigma^s_{RR}\boldsymbol{e_R} \tag{4.5}$$

olacaktır. Şimdi probleme ait bölgede bu iki problem arasında karşıtlık teoremini yazalım.

$$\int_S dS \int_0^t \boldsymbol{T^s}(t-\tau, a)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau = \int_S dS \int_0^t \boldsymbol{T}(\tau, a)\boldsymbol{u^s}(t-\tau)d\tau \tag{4.6}$$

$\boldsymbol{u^s}$, $\boldsymbol{\sigma^s}$ ile belirlenen problemde kütle kuvveti olmasına rağmen bölge sınırı içinde olmadığından göz önüne alınmayacaktır.

S yüzeyi a yarıçaplı küresel boşluğun yüzeyidir ve S yüzeyi üzerinde alınan integral diğer integrali etkilemez. Bu durumda (4.6) denklemi

$$\int_0^t \boldsymbol{T}^s(t-\tau,a)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau = \int_0^t \boldsymbol{T}(\tau,a)\boldsymbol{u}^s(t-\tau)d\tau \tag{4.7}$$

formunu alır. Daha önceden bulunan değerler yerine yazılarak

$$\int_0^t T_R^s(t-\tau,a)u_R(\tau,a)d\tau = \int_0^t u_R^s(t-\tau,a)p_0 d\tau \tag{4.8}$$

denklemi bulunur. (4.8) denkleminden $u_R(\tau,a)$ yı çözmek için (4.8) denklemine Laplace transformu uygularsak ve

$$\bar{u}_R(s,a) = \mathcal{L}(u_R(t,a)) \tag{4.9}$$

tanımını da yaparsak

$$\bar{T}_R^s(s,a)\bar{u}_R(s,a) = \frac{p_0}{s}\bar{u}_R^s(s,a)$$

$$-\bar{\sigma}_{RR}^s(s,a)\bar{u}_R(s,a) = \frac{p_0}{s}\bar{u}_R^s(s,a) \tag{4.10}$$

denklemi elde edilir.

(4.10) denkleminde (3.122) ve (3.118) kullanılırsa

$$\bar{u}_R(s,a) = \frac{p_o}{s^2}\frac{[\alpha+\frac{1}{a}]}{(\bar{\lambda}(s)+2\bar{\mu}(s))\alpha^2+2\bar{\mu}(s)[2\frac{\alpha}{a}+\frac{2}{a^2}]} \tag{4.11}$$

olarak $u_R(t,a)$ nın Laplace transformu elde edilir. (2.16) ifadelerinden

$$\bar{\lambda}(s) = \frac{E_0 \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\frac{1}{s} + t_1\right)$$

$$\bar{\mu}(s) = \frac{E_0}{2(1+\nu)}\left(\frac{1}{s} + t_1\right)$$

yazılır, (3.68) de kullanılır ve

$$U(t,a) = u_R(t,a)\frac{4\mu_0}{a p_o} \tag{4.12}$$

şeklinde boyutsuz bir büyüklük tanımlanırsa bu büyüklüğün Laplace transformu

$$\bar{U}(s,a) = \frac{(\alpha a + 1)}{s(1+st_1)[\gamma\alpha^2 a^2 + (\alpha a + 1)]} \tag{4.13}$$

$$\gamma = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{4\mu_0} = \frac{1}{4}\left\{\frac{\lambda_0}{\mu_0} + 2\right\} = \frac{1}{2}\frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)}$$

olarak bulunur.

Şimdi (3.71) deki α nın tanımı (4.13) de kullanılırsa

$$\bar{U}(s,a) = \frac{\frac{as}{c_0\sqrt{1+st_1}} + 1}{s(1+st_1)[\gamma\frac{s^2a^2}{c_0^2(1+st_1)} + (\frac{sa}{c_0\sqrt{1+st_1}} + 1)]}$$

$$\bar{U}(s,a) = \frac{as + c_0\sqrt{1+st_1}}{c_0 s[\frac{\gamma s^2 a^2}{c_0^2}(1+st_1)^{1/2} + \frac{sa(1+st_1)}{c_0} + (1+st_1)^{3/2}]}$$

t, t_1 ve s yerine

$$t^* = c_0 \frac{t}{a} \Rightarrow t = \frac{a}{c_0} t^*$$
$$t_1^* = c_0 \frac{t_1}{a} \Rightarrow t_1 = \frac{a}{c_0} t_1^*$$
$$s^* = s \frac{a}{c_0} \Rightarrow s = \frac{c_0}{a} s^*$$

yazılırsa ve fonksiyon $\frac{c_0}{a}$ ile çarpılırsa $U(t^*, a)$ nın Laplace transformu bulunur.

$$\bar{U}(s^*) = \frac{s^* + \sqrt{1 + s^* t_1^*}}{s^*[\gamma s^{*2}(1 + s^* t_1^*)^{1/2} + s^*(1 + s^* t_1^*) + (1 + s^* t_1^*)^{3/2}]} \tag{4.14}$$

$$\bar{U}(s^*) = \frac{s^* + \sqrt{1 + s^* t_1^*}}{s^* \sqrt{1 + s^* t_1^*}[\gamma s^{*2} + s^* \sqrt{1 + s^* t_1^*} + (1 + s^* t_1^*)]} \tag{4.15}$$

(4.15) de paydadaki parantez içindeki terim

$$\begin{aligned} I(s^*) &= \gamma s^{*2} + s^* \sqrt{1 + s^* t_1^*} + (1 + s^* t_1^*) \\ &= \gamma s^{*2} - \frac{1}{4} s^{*2} + \frac{1}{4} s^{*2} + s^* \sqrt{1 + s^* t_1^*} + (1 + s^* t_1^*) \end{aligned} \tag{4.16}$$

Şeklinde yazılıp

$$(\frac{A}{2})^2 = \gamma - \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\nu}} \tag{4.17}$$

kısaltması da yapılırsa

$$I(s^*) = \frac{A^2}{4} s^{*2} + (\frac{s^*}{2} + \sqrt{1 + s^* t_1^*}\ )^2$$

olarak basitleştirilebilir. Bu ifade çarpanlarına ayrılabilir.

$$I(s^*) = [\frac{A}{2}s^* - i(\frac{s^*}{2} + \sqrt{1 + s^*t_1^*}\,)][\frac{A}{2}s^* + i(\frac{s^*}{2} + \sqrt{1 + s^*t_1^*}\,)] \tag{4.18}$$

Şimdi

$$\bar{s} = 1 + s^*t_1^* \tag{4.19}$$

dönüşümü yapalım. Bu durumda $I(s^*)$ ın çarpanları

$$I_1(s^*) = [\frac{A}{2}\frac{1}{t_1^*}(\bar{s} - 1) - i(\frac{\bar{s} - 1}{2t_1^*} + \sqrt{\bar{s}}\,)] \tag{4.20}$$

$$I_2(s^*) = [\frac{A}{2}\frac{1}{t_1^*}(\bar{s} - 1) + i(\frac{\bar{s} - 1}{2t_1^*} + \sqrt{\bar{s}}\,)] \tag{4.21}$$

formunu alacaktır. (4.20) ve (4.21) denklemleri yeniden düzenlenirse;

$$I_1(s^*) = \frac{1}{2t_1^*}[A(\bar{s} - 1) - i((\bar{s} - 1) - i2t_1^*\sqrt{\bar{s}}\,)] \tag{4.22}$$

$$I_2(s^*) = \frac{1}{2t_1^*}[A(\bar{s} - 1) + i((\bar{s} - 1) + i2t_1^*\sqrt{\bar{s}}\,)] \tag{4.23}$$

şeklinde olacaktır. $\sqrt{\bar{s}} = x$ dönüşümünü yaparak (4.22) nin köklerini bulmaya çalışalım.

$$\frac{1}{2t_1}(A(x^2 - 1) - i(x^2 - 1) - i2t_1^*x) = 0 \tag{4.24}$$

$$\frac{A-i}{2t_1}(x^2-[t_1^*\frac{(A+i)i}{A^2+1}]2x-1)=0$$

Buradan

$$x_{1,2}=\frac{1}{A^2+1}[it_1^*(A+i)\mp\sqrt{-t_1^{*2}(A+i)^2+(A^2+1)^2}\ ] \tag{4.25}$$

olarak kökler bulunur. (4.23) denklemine de aynı işlemler uygulanarak $I_2(s^*)$ ın kökleri de

$$x_{3,4}=\frac{1}{A^2+1}[-t_1^*(Ai+1)\mp\sqrt{-t_1^{*2}(A-i)^2+(A^2+1)^2}\ ] \tag{4.26}$$

bulunur. (4.15), (4.16), (4.17), (4.18), (4.19), (4.25) ve (4.26) ifadeleri kullanılarak

$$\bar{U}(\bar{s})=\frac{\frac{(\bar{s}-1)}{t_1^*}+\sqrt{\bar{s}}}{\frac{\bar{s}-1}{t_1^*}\sqrt{\bar{s}}[\frac{A-i}{2t_1^*}(\sqrt{\bar{s}}-x_1)(\sqrt{\bar{s}}-x_2)\frac{A+i}{2t_1^*}(\sqrt{\bar{s}}-x_3)(\sqrt{\bar{s}}-x_4)]}$$

$$\bar{U}(\bar{s})=\frac{(\bar{s}-1)+t_1^*\sqrt{\bar{s}}}{(\bar{s}-1)\sqrt{\bar{s}}\frac{A^2+1}{4t_1^{*2}}(\sqrt{\bar{s}}-x_1)(\sqrt{\bar{s}}-x_2)(\sqrt{\bar{s}}-x_3)(\sqrt{\bar{s}}-x_4)} \tag{4.27}$$

elde edilir. Şimdi Laplace transformunun aşağıdaki özelliğini anımsayalım.

$$\mathcal{L}(F(t^*))=\int_0^\infty F(t^*)e^{-s^*t^*}dt^*=\bar{F}(s^*) \tag{4.28}$$

ise

$$\mathcal{L}(F(\frac{t^*}{t_1^*})e^{-\frac{t^*}{t_1^*}}) = \int_0^\infty F(\frac{t^*}{t_1^*})e^{-\frac{t^*}{t_1^*}}e^{-s^*t^*}dt^* \tag{4.29}$$

(4.29) da

$$\tau = \frac{t^*}{t_1^*}$$

dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(F(\frac{t^*}{t_1^*})e^{-\frac{t^*}{t_1^*}}) &= \int_0^\infty F(\tau)e^{-\tau}e^{-s^*(\tau t_1^*)}d\tau^* t_1^* \\ &= t_1^* \int_0^\infty (F(\tau))e^{-\tau(1+s^*t_1^*)}d\tau \\ &= t_1^* \int_0^\infty F(\tau)e^{-\tau\bar{s}}d\tau = t_1^*\bar{F}(\bar{s}) \\ \mathcal{L}^{-1}\bar{F}(\bar{s}) &= \frac{1}{t_1^*}F(\frac{t^*}{t_1^*})e^{-\frac{t^*}{t_1^*}} = \frac{1}{t_1^*}(\mathcal{L}^{-1}\bar{F}(\bar{s}))e^{-\frac{t^*}{t_1^*}}\end{aligned}$$

Bu durumda $\bar{U}(\bar{s})$ nin ters dönüşümünü aldıktan sonra argümanı $\frac{t^*}{t_1^*}$ e dönüştürüp $e^{-\frac{t^*}{t_1^*}}\frac{1}{t_1^*}$ ile çarpmak yeterli olacaktır. Yani,

$$U(t^*) = e^{-\frac{t^*}{t_1^*}}\frac{1}{t_1^*}\,\mathcal{L}^{-1}(\bar{U}(\bar{s}))\Big|_{t=\frac{t^*}{t_1^*}} \tag{4.30}$$

şeklinde $U(t^*)$ hesaplanır. Bu durumda sorun $(\bar{U}(\bar{s}))$ fonksiyonunun $\bar{s}$ argüman olarak kabul edilerek invers transformunun alınmasına indirgenmiş olmaktadır. Şimdi Laplace transformunun diğer bir özelliğini anımsayalım.

$$f(s) = \mathcal{L}(F(t))$$

ise

$$\frac{f(\sqrt{s})}{s} = \mathcal{L}(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{\frac{-u^2}{4t}} F(u)du)$$

olacaktır. (4.27) ifadesi

$$\begin{aligned}\bar{U}(\bar{s}) =& \frac{\sqrt{\bar{s}}}{\bar{s}\frac{A^2+1}{4t_1^{*2}}(\sqrt{\bar{s}}-x_1)(\sqrt{\bar{s}}-x_2)(\sqrt{\bar{s}}-x_3)(\sqrt{\bar{s}}-x_4)} \\ &+ \frac{t_1^*\bar{s}}{(\bar{s}-1)\bar{s}\frac{A^2+1}{4t_1^{*2}}(\sqrt{\bar{s}}-x_1)(\sqrt{\bar{s}}-x_2)(\sqrt{\bar{s}}-x_3)(\sqrt{\bar{s}}-x_4)}\end{aligned} \tag{4.31}$$

şeklinde yazılırsa invers transformu alınacak iki ayrı fonksiyon:

$$f_1(s) = \frac{s}{(s-x_1)(s-x_2)(s-x_3)(s-x_4)} \tag{4.32}$$

$$f_2(s) = \frac{t_1^* s^2}{(s^2-1)(s-x_1)(s-x_2)(s-x_3)(s-x_4)} \tag{4.33}$$

olarak elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned}F_1(t) =& \mathcal{L}^{-1}(f_1(s)) \\ F_2(t) =& \mathcal{L}^{-1}(f_2(s))\end{aligned} \tag{4.34}$$

fonksiyonları hesaplanabilirse $U(t^*)$ ifadesi önce $\bar{U}(t)$

$$\bar{U}(t) = \frac{1}{\frac{A^2+1}{4t_1^{*2}}\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4t}} F_1(\xi)d\xi + \frac{1}{\frac{A^2+1}{4t_1^{*2}}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4t}} F_2(\xi)d\xi \tag{4.35}$$

şeklinde hesaplanıp (4.30) da kullanılarak

$$U(t^*) = \frac{1}{t_1^*} e^{-\frac{t^*}{t_1^*}} \frac{1}{\frac{A^2+1}{4t_1^{*2}}\sqrt{\pi \frac{t^*}{t_1^*}}} [\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2 t_1^*}{4t^*}} F_1(\xi) d\xi + \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2 t_1^*}{4t^*}} F_2(\xi) d\xi] \tag{4.36}$$

olarak bulunacaktır. Dolayısı ile sorun $F_1(t)$ ve $F_2(t)$ fonksiyonlarının tayinine indirgenmiş olmaktadır. $F_1(t)$ ve $F_2(t)$ fonksiyonlarının invers transformlarını alabilmek için daha önce yaptığımız $Re\ \alpha \geq 0$ kabulünü de anımsamak gerekecektir. Kökler analitik olarak

$$\begin{aligned} u &= (A^2+1)^2 + t_1^2(1-A^2) \\ \mathrm{v} &= 2t_1^2 A \end{aligned}$$

olmak üzere

$$x_1 = \frac{1}{A^2+1}[-t_1 + \frac{u + \sqrt{u^2+\mathrm{v}^2}}{\sqrt{2}\sqrt{u+\sqrt{u^2+\mathrm{v}^2}}} + i(-t_1 A + \frac{\mathrm{v}}{\sqrt{2}\sqrt{u+\sqrt{u^2+\mathrm{v}^2}}})] \tag{4.37}$$

$$x_2 = \frac{1}{A^2+1}[-t_1 - \frac{u + \sqrt{u^2+\mathrm{v}^2}}{\sqrt{2}\sqrt{u+\sqrt{u^2+\mathrm{v}^2}}} + i(-t_1 A - \frac{\mathrm{v}}{\sqrt{2}\sqrt{u+\sqrt{u^2+\mathrm{v}^2}}})] \tag{4.38}$$

$$x_3 = \frac{1}{A^2+1}[-t_1 - \frac{u + \sqrt{u^2+\mathrm{v}^2}}{\sqrt{2}\sqrt{u+\sqrt{u^2+\mathrm{v}^2}}} + i(t_1 A + \frac{\mathrm{v}}{\sqrt{2}\sqrt{u+\sqrt{u^2+\mathrm{v}^2}}})] \tag{4.39}$$

$$x_4 = \frac{1}{A^2+1}[-t_1 + \frac{u + \sqrt{u^2+\mathrm{v}^2}}{\sqrt{2}\sqrt{u+\sqrt{u^2+\mathrm{v}^2}}} + i(t_1 A - \frac{\mathrm{v}}{\sqrt{2}\sqrt{u+\sqrt{u^2+\mathrm{v}^2}}})] \tag{4.40}$$

olarak bulunur.

$$\alpha = \frac{s^*}{\sqrt{1 + s^* t_1^*}}$$

ifadesinde s^* yerine $s^* = \frac{\bar{s}-1}{t_1}$ yazılırsa

$$\alpha = \frac{\bar{s} - 1}{t_1 \sqrt{\bar{s}}}$$

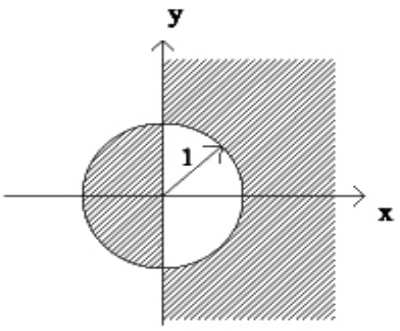
olacaktır. Buradan $\sqrt{\bar{s}} = z = x + iy$ dönüşümü de yapılırsa

$$\alpha = \frac{(x + iy)^2 - 1}{t_1(x + iy)} = \frac{1}{t_1}[\frac{x(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2} + i\frac{y(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2}]$$

bulunur. Bu durumda α nın reel kısmının pozitif olması için

$$x(x^2 + y^2 - 1) \geq 0$$

olması gerekir ki bu da x, y düzleminde (Şekil 4.2) deki taralı alana karşı gelir.



Şekil 4.2 $\sqrt{\bar{s}} = x + iy$ düzleminde tanımlı bölge

Bu bölgeye, bulunan x_1, x_2, x_3, x_4 köklerinin hangisinin girdiği ancak sayısal değerler kullanılarak bulunabilir.

Malzeme olarak (HDPE) seçilmiştir. Bu malzemede E_0, Poisson oranı ve yoğunluk

$E_0 = 2600\ MPa$

$\nu = 0,4$

$\rho = (0,955/981)\ gr/cm^3$

olarak verilmektedir. $t_1 = 462\ sn.$ olarak alınacaktır. Dalga hızı ise

$c_0 = 239230\ cm/sn$

olarak hesaplanmıştır ki bu değer deneysel sonuçlarla da uyuşmaktadır. Boşluk yarıçapı $a = 50\ cm.$ seçilmiştir. Bu durumda bulunan x_1, x_2, x_3, x_4 köklerinin hiçbiri tanımlanan bölge içine girmemektedir. $f_1(s)$ in invers Laplace transformu sıfır olur. $f_2(s)$ in invers transformu ise

$$F_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{t_1^* s}{(s^2-1)(s-x_1)(s-x_2)(s-x_3)(s-x_4)}\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{t_1^* s^2}{A_1(s-1)} + \frac{t_1^* s^2}{A_2(s+1)} + \frac{t_1^* s^2}{B_1(s-x_1)} + \frac{t_1^* s^2}{B_2(s-x_2)} + \frac{t_1^* s^2}{B_3(s-x_3)} + \frac{t_1^* s^2}{B_4(s-x_4)}\} \tag{4.41}$$

olarak yazılabilir. x_1, x_2, x_3, x_4 kökleri ile ilgili terimlerin invers transformları sıfır olur ve

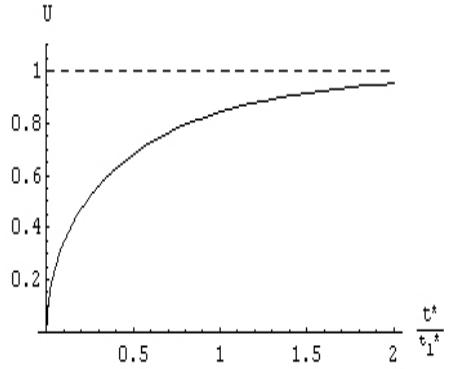
$$F_2(t) = \frac{t_1}{A_1}e^t + \frac{t_1}{A_2}e^{-t}$$

$$A_1 = \frac{8t_1^2}{A^2+1} \qquad A_2 = \frac{-8t_1^2}{A^2+1}$$

olarak hesaplanır. Bu ifade (4.36) ya yerleştirilirse

$$U(t^*) = e^{-\frac{t^*}{t_1^*}} \sqrt{\frac{t_1^*}{\pi t^*}} [\int_0^\infty e^{-\xi^2 \frac{t_1}{4t^*}} (\frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2})] d\xi \tag{4.42}$$

bulunur. Boyutsuz yer değiştirmenin zamana göre değişimi (Şekil 4.3) de verilmiştir.



Şekil 4.3 Boyutsuz radyal yer değiştirme

Sınırda bilinmeyen gerilme bileşenini hesaplayabilmek için aşağıdaki yol izlenecektir.

$$\begin{aligned} \sigma_{RR} = -p_o = \int_0^t \{\lambda_0(1 + t_1\delta(t-\tau))\frac{\partial}{\partial\tau}[\epsilon_{RR}(\tau) + \epsilon_{\theta\theta}(\tau) + \epsilon_{\vartheta\vartheta}(\tau)] \\ +2\mu_0 \int_0^t (1 + t_1\delta(t-\tau))\frac{\partial}{\partial\tau}[\epsilon_{RR}(\tau)]d\tau\} \end{aligned} \tag{4.43}$$

denklemi viskoelastik cismin bünye denklemi ve sınır koşullarından yararlanılarak yazılabilir. Diğer gerilmeler ise

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\vartheta\vartheta} = \int_0^t \{\lambda_0(1 + t_1\delta(t-\tau))\frac{\partial}{\partial\tau}[\epsilon_{RR}(\tau) + \epsilon_{\theta\theta}(\tau) + \epsilon_{\vartheta\vartheta}(\tau)] \\ +2\mu_0 \int_0^t (1 + t_1\delta(t-\tau))\frac{\partial}{\partial\tau}[\epsilon_{\theta\theta}(\tau)]\}d\tau \end{aligned} \tag{4.44}$$

şeklinde hesaplanır. (4.43) ifadesinden

$$\int_0^t (1+t_1\delta(t-\tau))\frac{\partial}{\partial\tau}[\epsilon_{RR}(\tau)] = \frac{-p_o}{\lambda_0+2\mu_0} - \int_0^t (1+t_1\delta(t-\tau))\frac{2\lambda_0}{\lambda_0+2\mu_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\epsilon_{\theta\theta}(\tau) \tag{4.45}$$

(4.45) ifadesi yazılırken

$$\epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{u}{a} \tag{4.46}$$

eşitliği de göz önüne alınmıştır. (4.45) ifadesi (4.44) te kullanılırsa

$$\sigma_{\theta\theta} = -p_o\frac{\lambda_0}{\lambda_0+2\mu_0} + \frac{2\mu_0(3\lambda_0+2\mu_0)}{\lambda_0+2\mu_0}\int_0^t (1+t_1\delta(t-\tau))\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{u(\tau)}{a}d\tau \tag{4.47}$$

bulunur. (4.12) tanımı kullanılırsa

$$\sigma_{\theta\theta} = -p_o\frac{\lambda_0}{\lambda_0+2\mu_0} + \frac{p_o(3\lambda_0+2\mu_0)}{2(\lambda_0+2\mu_0)}\int_0^t (1+t_1\delta(t-\tau))\frac{\partial}{\partial\tau}U(\tau)d\tau \tag{4.48}$$

$U = U(\frac{t}{t_1})$ olarak bulunmuştu.

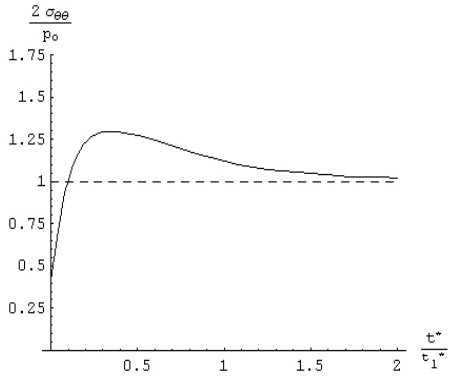
$$\sigma_{\theta\theta} = -p_o\frac{\lambda_0}{\lambda_0+2\mu_0} + \frac{p_o(3\lambda_0+2\mu_0)}{2(\lambda_0+2\mu_0)}[U(\frac{t}{t_1}) + \dot{U}(\frac{t}{t_1})]$$

$\frac{2\sigma_{\theta\theta}}{p_o}$ boyutsuz gerilmesi ise

$$\frac{2\sigma_{\theta\theta}}{p_o} = -\frac{2\nu}{1-\nu} + \frac{1+\nu}{1-\nu}[U(\frac{t}{t_1}) + \dot{U}(\frac{t}{t_1})] \tag{4.49}$$

olarak bulunur. Bir fonksiyon üzerindeki nokta işareti fonksiyonun argümanına göre türevini göstermektedir. Boyutsuz gerilmenin zamana göre değişimi (Şekil 4.4) te

verilmiştir.



Şekil 4.4 Boyutsuz gerilmenin zamana göre değişimi

SONUÇLAR

Mühendislik alanında kullanılan birçok malzemenin viskoelastik davranış gösterdiği bilinmektedir. Viskoelastik davranışı belirlemede karşılaşılan zorluklardan dolayı hesaplarda kolaylık sağlaması açısından denklemler quasi-statik hale getirilerek çözülmektedir. Bu hareket denkleminde ivme terimlerinin atılmasına karşı gelir. Bu çalışmada ivme terimleri de hesaba katılmıştır.

Burada özel bir malzeme için deney sonuçlarından elde edilen değerler integral formdaki gerilme şekil değiştirme bağıntılarında kullanılan zamana bağlı $\lambda(t)$, $\mu(t)$ katsayılarının ifadelerini elde etmek için kullanılmıştır. Başka bir malzeme için bu katsayıların farklı bir form alabileceğini de belirtmek gerekir.

Bu çalışmada, sonsuz ortamda, sabit bir noktaya ani olarak yüklenen tekil bir yükten dolayı oluşan gerilme ve şekil değiştirme alanları bulunmaya çalışılmıştır. Bu problem, karşıtlık teoremi kullanılarak sonlu veya sonsuz bölgelere ait elastodinamik problemlerin çözümünde temel çözümü oluşturacaktır. Ancak temel çözümü zamana bağlı olarak bulmak yerine yine zaman üzerinde alınan Laplace Transformu hesaplanmıştır. Karşıtlık teoremi ve temel çözüm kullanılarak örnek bir problem yine Laplace Transformu kullanılarak çözülmüştür.

Bulunan sonuçlar artan zaman değerlerinde statik çözüme gitmektedir.

KAYNAKLAR

[1] **Achenbach, J. D.**, 1973. Wave Propagation In Elastic Solids, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

[2] **Christensen, R. M.**, 1971. Theory of Viscoelasticity An Introduction, Academic Press, Inc., New York and London.

[3] **Flügge, W.**, 1967. Viscoelasticity, Blaisdell Publishing Company, Waltham.

[4] **Gradshteyn, I. S. and Ryzhik I. M.**, 1965. Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, Inc., New York and London.

[5] **Kolsky, H. and Prager, W.**, 1973. Stress Waves In Anelastic Solids, *Symposium Held At Brown University, Providence, R. I.* Berlin, April 3-5.

[6] **Lai, J.**, 1995. Non-Linear Time-Dependent Deformation Behaviour of High Density Polyethylene, *PhD. Thesis*, Delft University Press, Netherlands.

[7] **Lai, J. and Bakker, A.**, 1995 An Integral Constitutive Equation for Nonlinear Plasto-Viscoelastic Behavior of High-Density Polyethylene, *Polymer Engineering And Science*, Mid-September 1995, Vol. **35**, No. **17**.

[8] **Lee, E. H.**, 1955. Stress Analysis in Viscoelastic Bodies, *Q. appl. Math.*, Vol. **13**, 183-190.

[9] **Lee, S. S.**, 1995. Boundary Element Analysis of Viscoelastic Solids Under Transient Thermal State, *Engineering Analysis With Boundary Elements*, Vol. **16**, No. **1**, pp 35-39.

[10] **Lee, S. S., Sohn, Y.S. and Park, S. H.**,1994. On Fundamental Solutions in Time-Domain Boundary Element Analysis of Linear Viscoelasticity, *Engineering Analysis With Boundary Elements*, Vol. **13**, pp 211-217.

[11] **Lee, S. S. and Westmann, R. A.**, 1993. Application of Boundary Element Method to Viscoelastic Problems, *in Boundary Element XV, Proceedings of 15th International Conference on Boundary Element Methods*, Vol. **2**, pp 73-80, Worcester Polytechnic Institute, ed. Brebbia, C.A. & Rencis, J. J., Elsevier Applied Science Publishing Co., Inc., London.

[12] **Mesquita, A. D. and Coda, H. B.**, 2001. An Alternative Time Integration Procedure for Boltzmann Viscoelasticity: A BEM Approach, *Computers & Structures*, Vol. **79**, pp 1487-1496.

[13] **Mesquita, A. D., Coda, H. B. and Venturini, W. S.**, 2001. Alternative Time Marching Process For BEM And FEM Viscoelastic Analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engng 2001*, Vol. **51**, pp 1157-1173.

[14] **Sim, W. J. and Kwak, B. M.**, 1988. Linear Viscoelastic Analysis in Time Domain by Boundary Element Method, *Computers & Structures*, Vol. **29**, No 4, pp 531-539.

[15] **Spiegel, M. R.**, 1987. Schaum's Outline of Theory And Problems of Laplace Transforms, McGraw-Hill, Inc., New York.

ÖZGEÇMİŞ

Cüneyt Öztürk 17.06.1978 tarihinde Keşan ’da doğmuştur. İlk ve orta eğitimini Keşan ’da bitirdikten sonra, Kepirtepe Anadolu Öğretmen Lisesi ’nde başladığı lise eğitimini Keşan Lisesi ’nde tamamlamıştır. 1995 yılında girmiş olduğu İstanbul Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü ’nden 1999 yılında mezun olmuştur. 1999 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yapı Mühendisliği Programı Mekanik Kürsüsü ’nde yüksek lisans çalışmalarına başlamıştır.