İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DENİZLERDE, RÜZGARLA, EĞİMLİ SAHİLDEN ÇEKİLEN SU KÜTLESİNİN RÜZGAR ANİDEN KESİLİNCE YARATTIĞI SALINIMLARIN RADYASYONLA SÖNÜMLENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Umut CANLI

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Fizik Mühendisliği Programı

OCAK 2013

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DENİZLERDE, RÜZGARLA, EĞİMLİ SAHİLDEN ÇEKİLEN SU KÜTLESİNİN RÜZGAR ANİDEN KESİLİNCE YARATTIĞI SALINIMLARIN RADYASYONLA SÖNÜMLENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Umut CANLI
(509101149)

Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı

Fizik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Nazmi POSTACIOĞLU

OCAK 2013

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509101149 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Umut CANLI**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"DENİZLERDE, RÜZGARLA, EĞİMLİ SAHİLDEN ÇEKİLEN SU KÜTLESİNİN RÜZGAR ANİDEN KESİLİNCE YARATTIĞI SALINIMLARIN RADYASYONLA SÖNÜMLENMESİ"** başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Prof. Dr. Nazmi POSTACIOĞLU** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
Jüri Üyeleri :	**Doç. Dr. Ali YILDIZ** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
	Prof. Dr. Ömer GÖREN İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
		.....

Teslim Tarihi : **17 Aralık 2012**
Savunma Tarihi : **25 Ocak 2013**

ÖNSÖZ

Bu çalışma boyunca tez danışmanı olarak bana her zaman her koşulda yardımcı olan Prof. Dr. Nazmi POSTACIOĞLU'na ve yine bu çalışmada beraber çalıştığımız Yard. Doç. Sinan ÖZEREN'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ocak 2013 Umut CANLI

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **v**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **ix**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xi**
ÖZET ..... **xiii**
SUMMARY ..... **xv**
1. GİRİŞ **1**
1.1 Süreklilik Denklemi 2
1.2 Momentum Denklemi 2
1.3 Hidrostatik Yaklaşım 3
1.4 Lineerize Edilmiş Sığ Su Denklemleri 4
2. SABİT EĞİMLİ BATİMETRİDE RÜZGAR ALTINDA DENGE DURUMU **7**
3. BATİMETRİK SÜREKSİZLİK İÇİN RÜZGARIN KESİLDİĞİ ANDA OLUŞAN SALINIMLAR **9**
3.1 Radyasyon Koşuluyla Yaklaşık ve Kesin çözüm 12
3.1.1 Katsayıların hesaplanması 15
3.1.2 Tamamen yansıyan durumun çözümü 18
4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA **21**
KAYNAKLAR **23**
EKLER **25**
EK A 27
ÖZGEÇMİŞ **37**

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1 : Batimetrik süreksizlik yokken problemin geometrisi..... 1
Şekil 3.1 : Batimetrik süreksizlik varken problemin geometrisi..... 9
Şekil A.1 : D=20 için Green yöntemi ile $\eta(\sigma = 0, \lambda)$. 27
Şekil A.2 : D=20 için Green yöntemi ile $\eta(\sigma = 0.5, \lambda)$. 28
Şekil A.3 : D=20 için Green yöntemi ile $\varphi(\sigma = 0, \lambda)$. 28
Şekil A.4 : D=20 için Green yöntemi ile $\varphi(\sigma = 0.5, \lambda)$. 29
Şekil A.5 : D=20 için Green yöntemi ile $\eta(x = 0.1, t)$..... 29
Şekil A.6 : D=20 için Green yöntemi ile $\eta(x = 0.5, t)$..... 30
Şekil A.7 : D=20 için Green yöntemi ile uzun süreli $\eta(x = 0.5, t)$. 30
Şekil A.8 : D=20 için Green yöntemi ile $\varphi(x = 0.1, t)$..... 31
Şekil A.9 : D=20 için Green yöntemi ile $\varphi(x = 0.5, t)$..... 31
Şekil A.10 : D=5 için Green yöntemi ile $\eta(\sigma = 0, \lambda)$. 32
Şekil A.11 : D=5 için Green yöntemi ile $\eta(\sigma = 0.5, \lambda)$. 32
Şekil A.12 : D=5 için Green yöntemi ile $\varphi(\sigma = 0, \lambda)$. 33
Şekil A.13 : D=5 için Green yöntemi ile $\varphi(\sigma = 0.5, \lambda)$. 33
Şekil A.14 : D=5 için Green yöntemi ile $\eta(x = 0.1, t)$..... 34
Şekil A.15 : D=5 için Green yöntemi ile $\eta(x = 0.5, t)$..... 34
Şekil A.16 : D=5 için Green yöntemi ile uzun süreli $\eta(x = 0.5, t)$. 35
Şekil A.17 : D=5 için Green yöntemi ile $\varphi(x = 0.1, t)$..... 35
Şekil A.18 : D=20 için Green ve yaklaşık çözümün kıyaslanması..... 36

DENİZLERDE, RÜZGARLA, EĞİMLİ SAHİLDEN ÇEKİLEN SU KÜTLESİNİN RÜZGAR ANİDEN KESİLİNCE YARATTIĞI SALINIMLARIN RADYASYONLA SÖNÜMLENMESİ

ÖZET

Bu çalışmada derinliğin sabit bir eğimle değiştiği bölgede denize rüzgarın uyguladığı kuvvetin ani bir şekilde durması halinde orata çıkan salınımların radyasyonla sönümlenmesini matematiksel olarak inceleniyor. Rüzgarın denizden karaya veya karadan deniz doğru estiği durumlarda farklılıklar içeren bu problem için iki farklı çözüm yöntemi önerildi. Bu yöntemlerden biri, kısa zaman önce yayınlanan bir yönteme radyasyon sönümlenmesi ekleyerek elde edilen çözüm, diğeri ise Green fonksiyonları yoluyla formüle edilen yeni bir yöntem. Burada Green fonksiyonu temelli yöntemin diğer yöntemin radyasyon sönümü eklenmiş versiyonuyla neredeyse birebir örtüşen bir sonuç verdiği gösteriliyor ve sönümün batimetrik süreksizliğin şiddetinin bir fonksiyonu olarak nasıl değiştiği inceleniyor.

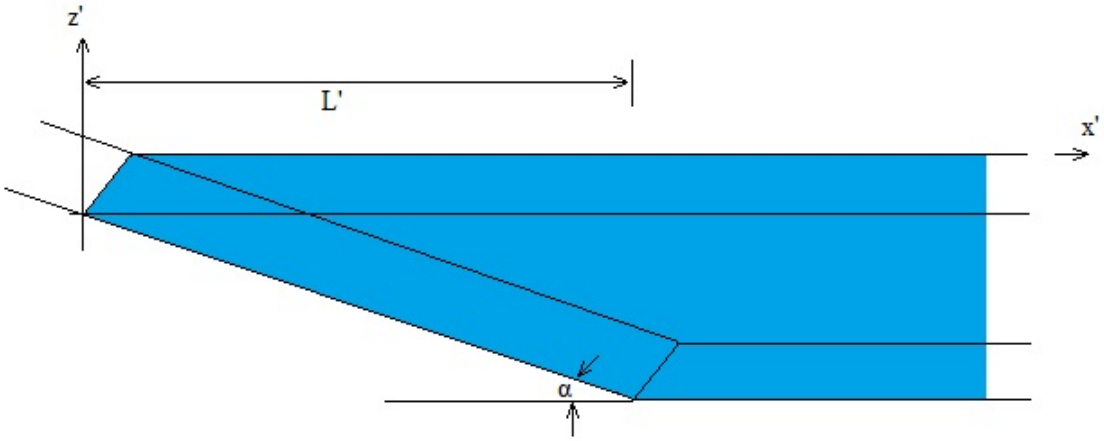
RADIATION DAMPING OF NEAR-SHORE OSCILLATIONS CREATED BY SUDDEN WIND SET-DOWN

SUMMARY

In this study we are developing an analytical approach to the radiation damping of the oscillations created due to sudden cessation of the wind blowing from the coast towards the open ocean . For the shoreline slope we follow Carrier-Greenspan approach to treat the non-linear problem. This approach is based on a particular hodograph transformation of the shallow water equations using two auxiliary variables, both function of time and space. This analysis is valid over a constant slope in one-dimensional propagation. In the far-field, the wave equation is linearized. A matching between the linear solution off-shore and the non-linear solution near the shore is performed at the point of bathymetric discontinuity where the constant-slope part of the bathymetry reaches its deepest point. Our aim is to quantify the radiation damping, namely the energy loss of the system due to the waves propagating towards open-ocean as a function of the magnitude of bathymetric discontinuity. We calculate the response to a wind forcing that is logarithmic in space and periodic in time using Green's functions. A sudden cessation of the forcing is a linear combination of these type of excitations. The radiation condition off-shore renders the natural frequencies of oscillations of the system complex. Accordingly, the integration over the continuous frequency spectrum becomes a series of complex residues. We calculate these residues numerically. Solutions indicate that the radiation damping can be significant if the bathymetric discontinuity is negligible. However when the non-dimensional discontinuity is 20 (all depths are normalized using the deepest point at the end of the constant-slope part) the amplitude of the oscillations is reduced about 20% over one period of oscillation.

1. GİRİŞ

Marmara Denizi gibi bazı iç denizlerde derinlik sahilden açığa doğru lineer artar ve daha sonra da aniden çok artar. Bu çalışmada, böyle bir geometri göz önüne alınıyor ve 1-boyutlu bir kanal için rüzgarın sahilden açığa doğru uyguladığı kuvvetin ani bir şekilde durması halinde ortaya çıkan salınımlar inceleniyor. Derinliğin sabit eğimle artıp süreksizliğin olmadığı problemin geometrisi notasyonla birlikte şekil (1.1)'de, aynı geometrinin süreksizlik olduğu durumdaki geometrisi şekil (3.1)'de görülmektedir.



Şekil 1.1: Batimetrik süreksizlik yokken problemin geometrisi.

Rüzgarın denizden karaya doğru ve karadan denize doğru estiği durumlarda ortaya çıkan statik denge durumları simetrik değildir. Rüzgar denizden karaya doğru estiği zaman, karaya tırmanan su tabakası belli bir kritik kalınlığın altında olduğunda ağırlığın bu tabakayı geri çekme kuvveti (tabaka kalınlığıyla doğru orantılı) ve rüzgarın uyguladığı sürtünme kuvveti (su tabakasının kalınlığından bağımsız) dengeye gelemez. Buna karşılık rüzgar ters istikamette estiğinde sahil şeridi geriye çekilir ve su seviyesinin alçaldığı oranda statik basınç artar. Derinlik sahilden uzaklaştıkça sürekli olarak arttığından dolayı belli bir aşamada rüzgarın uyguladığı kuvvet ile statik basınca bağlı kuvetler dengeye gelmek zorundadır. Rüzgar kesildiğinde, rüzgar çıkmadan

önceki sahil hattı etrafında bir salınım olur. Bu çalışmada bu tür salınımların çeşitli konfigürasyon için radyasyonla sönümlenmesi problemi incelenmiştir.

Problemin çözümüne geçmeden önce temel denklemler ve sığ su denklemleri sırasıyla verilmiştir.

1.1 Süreklilik Denklemi

Akışkanlar mekaniğinde, süreklilik denklemi kütle korunumunu ifade eder. Akışkan maddenin sisteme giren kütlesinin çıkan kütleye eşit olmasıdır. $i = 1,2,3$ toplamı altında şu şekildedir [1].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \tag{1.1}$$

Burada ρ akışkan yoğunluğu, t zaman, x_i koordinatındaki akışkan hızı ise u_i. Süreklilik denkleminin bir diğer ifade şekli de

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \tag{1.2}$$

olmak üzere şu şekildedir:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.3}$$

Gerçekte, okyanus kıyısında sıcaklık ve tuzluluk oranının birim zamanda değişimi nedeniyle su yoğunluğunun değişimi, hız gradyanına göre çok düşüktür. Bu kabul altında denklem (**1.3**) sıkıştırılamaz bir akışkan için yüksek bir yaklaşıklıkla şu şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.4}$$

1.2 Momentum Denklemi

Euler yaklaşımına göre, akışkanın momentum denklemi

$$\frac{d(\rho u_i)}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i \qquad i = 1,2,3 \tag{1.5}$$

olarak ifade edilir [1]. Burada K kinematik viskozite olmak üzere, τ_{ij} viskoziteden kaynaklı gerilmedir (stress tensörü).

$$\tau_{ij} = \rho K \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{1.6}$$

Denklemin sol tarafı birim hacim başına momentum değişimi, sağ tarafı ise akışkanın üzerine etkiyen kuvvetlerdir. Burada denklemin sağ tarafındaki ilk terim hidrostatik basıncın gradyanını, ikinci terim ise stress tensörünün değişimini ifade eder. ρb_i terimi ise dünyanın dönmesinden kaynaklı etkiyi ve yer çekimi etkisini içerir. Ayrıca denklemin sol tarafındaki tam türev ifadesi (**1.4**) denkleminden de faydalanılarak şu şekilde açılabilir:

$$\frac{d(\rho u_i)}{dt} = \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} \tag{1.7}$$

Dünyanın dönmesi ve yer çekimi etkisinden kaynaklı b_i teriminin açık ifadesi şu şekildedir:

$$b_i = 2\varepsilon_{ijk} u_j \Omega_k + g_i, \qquad g_i = -g\delta_{i3} \tag{1.8}$$

Ω_k dünyanın açısal hızıdır. (**1.7**) ve (**1.8**) denklemleri (**1.5**) denkleminde yerine konulursa hareket denklemleri aşağıdaki gibi türetilebilir [1].

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - g\rho\delta_{i3} + 2\rho\varepsilon_{ijk} u_j \Omega_k + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.9}$$

1.3 Hidrostatik Yaklaşım

Hareket denklemleri (**1.9**) üç koordinat için de genelleştirilmiş olarak türerilmiştir. Dikey koordinatta esas olarak yer çekimi kuvveti baskındır. Dikey koordinat için hareket denklemi tekrar yazılırsa

$$\frac{du_3}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx_3} + 2(u_1\Omega_2 - u_2\Omega_1) - g + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{3j}}{\partial x_j} \tag{1.10}$$

olduğu görülür. Bu denklemdeki fiziksel büyüklüklerin mertebeleri incelenirse, yerçekimi ivmesinin büyüklüğü yaklaşık $10\ ms^{-2}$, yerkürenin dönmesinden kaynaklı ivmenin mertebesi (Coriolis accelerations) $10^{-5} - 10^{-4}\ ms^{-2}$'dir. Stress gradyanının $10\ m$'lik bir su kolonunda maksimum değeri yaklaşık $0.1\ Pa$ ve $\rho^{-1}\partial\tau/\partial z$ teriminin mertebesi $10^{-5}\ ms^{-2}$ olur. Sığ sularda oluşan dikey ivmenin (du_3/dt) mertebesi ise $10^{-5}\ ms^{-2}$ veya daha düşüktür. Bu yaklaşıklıklar göz önüne alındığında yerçekimi ivmesi ve basınç gradyanı $\partial p/\partial x_3$ arasında yüksek yaklaşıklıkla

$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g \tag{1.11}$$

ilişkisi bulunabilir [1]. Denklem (**1.11**)'un, ilerleyen bir dalga için $x_3 = 0$ serbest su yüzeyinden, $\eta(x_1, x_2)$ noktasına kadar integrali alınırsa p_a atmosfer basıncı olmak

üzüre

$$p = p_a + \int_{x_3}^{\eta} \rho g \, dx_3 \tag{1.12}$$

denklemi bulunur. Yatay düzlemdeki hareket denklemleri denklem (**1.9**)'de $i = 1,\ 2$ yazlılarak bulunur. Denklem (**1.9**) içerisindeki basınç gradyanı $(\partial p/\partial x_i)$ ise denklem (**1.12**)'in türevi alınarak elde edilir.

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \rho_s g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \int_{x_3}^{\eta} g \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \, dx_3 \tag{1.13}$$

ρ_s yüzeydeki su yoğunluğudur. Denklem (**1.12**)'in türevi alınırken Leibniz integral kuralı uygulanmıştır. Burada atmosfer basıncının gradyanı ihmal edilebilir ve daha önce de belirtildiği üzere su yoğunluğunun sabit ve sıkıştırılamaz olduğu kabulü altında aşağıdaki bağıntı bulunur.

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \tag{1.14}$$

1.4 Lineerize Edilmiş Sığ Su Denklemleri

$(x,\ y,\ z)$ koordinat sisteminde, z-ekseni dikey eksen, hız bileşenleri de $(u,\ v,\ w)$ notasyonu altında lineerize edilmiş yatay hareket denklemleri şu şekildedir [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}(K \frac{\partial u}{\partial z}) \tag{1.15a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(K \frac{\partial v}{\partial z}) \tag{1.15b}$$

Burada K kinematik viskozite olmak üzere stress tensörü için

$$\tau_{i3} = \rho K \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \tag{1.16}$$

ifadesi kullanılmıştır. Süreklilik denklemi bağıntıları da şu şekilde olmaktadır.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.17a}$$

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (z = 0) \tag{1.17b}$$

$$-w = u \frac{dH}{dx} + v \frac{dH}{dy}, \quad (z = -H) \tag{1.17c}$$

$H(x,y)$ su kolonunun toplam yüksekliğidir. Serbest yüzeyde ve tabandaki sınır şartları da şunlardır.

$$F_x = K \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad F_y = K \frac{\partial v}{\partial z}; \qquad (z = 0) \tag{1.18a}$$

$$B_x = K\frac{\partial u}{\partial z}, \qquad B_y = K\frac{\partial v}{\partial z}; \qquad (z = -H) \tag{**1.18**b}$$

Yatay hızların derinlik üzerinden integralini alıp hareket denklemleri tekrar yazılırsa şu bağıntılar elde edilir.

$$U = \int_{-H}^{0} u\, dz, \qquad V = \int_{-H}^{0} v\, dz \tag{**1.19**}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - fV = -gH\frac{\partial \eta}{\partial x} + F_x - B_x \tag{**1.20**a}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + fU = -gH\frac{\partial \eta}{\partial y} + F_y - B_y \tag{**1.20**b}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \tag{**1.20**c}$$

2. SABİT EĞİMLİ BATİMETRİDE RÜZGAR ALTINDA DENGE DURUMU

Bir-boyutlu bir kanal için rüzgar x' doğrultusunda sahilden açığa doğru estiğinde sahil şeridi geriye çekilir ve sahil şeridinin alçaldığı oranda statik basınç meydana gelir. Derinlik sahilden uzaklaştıkça sürekli olarak arttığından dolayı belli bir aşamada rüzgarın uyguladığı kuvvet ile statik basınca bağlı kuvetler dengeye gelmek zorundadır. Denge durumu için denklem (**1.20**)'de $U' = 0$ ve $V' = 0$ yazılırsa denge durumunda aşağıdaki bağıntı elde edilir [2].

$$-g(\alpha x' + \eta')\frac{\partial}{\partial x'}\eta' + F_x/\rho = 0 \tag{2.1}$$

Bu büyüklükler η', α, x', u', F_x, ρ sırasıyla serbest yüzeyin denge konumuna göre dikey pozisyonu, derinliğin sabit eğimi, rüzgar ile bozulmamış sahil şeridinden yatay uzaklığı, yatay akışkan hızını, rüzgarın yüzeye uyguladığı birim alan başına yatay kuvvet ve sıvının yoğunluğunu gösteriyor. Bu haraket denkleminde yerkürenin dönmesinden kaynaklanan etkiler ve dipteki stress terimi ihmal edilmiştir. L' eğimli bölgenin x' doğrultusundaki uzunluğu olmak üzere, $x = x'/L'$ ve $\eta = \eta'/(\alpha L')$ dönüşümleri kullanılarak boyutsuzlaştırma yapılırsa boyutsuz denge denklemi

$$(x+\eta)\eta_x = \frac{F_x}{g\alpha^2 L\rho} \tag{2.2}$$

halinde olur. Boyutsuzlaştırmadan sonra sabit eğimli bölgenin uzunluğu 1 olmaktadır. Burada x, η cinsinden çözülürse ve diferansiyel denklemin boyutsuz sağ tarafı için

$$\gamma = \frac{Fx}{g\alpha^2 L\rho} \tag{2.3}$$

notasyonu kullanırsak $1 > \mathrm{x} > -\eta$ aralığı için

$$x = (\gamma+1)e^{\eta/\gamma} - \eta - \gamma \tag{2.4}$$

çözümü elde edilir. Eğer σ yardımcı değişkeni

$$\sigma^2 = x + \eta \tag{2.5}$$

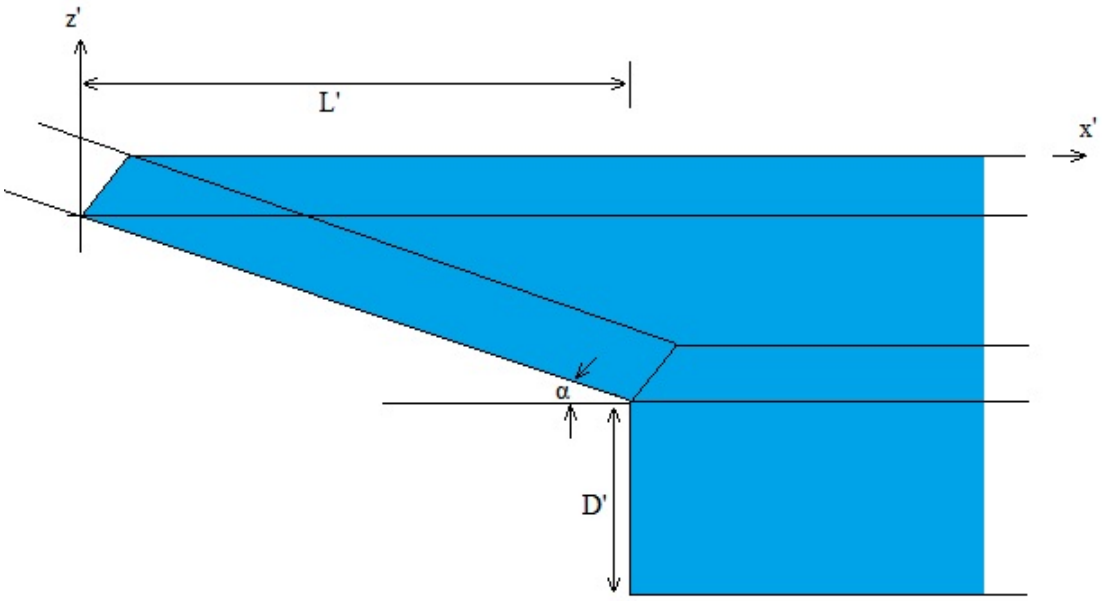
olarak tanımlanırsa, bu koordinatta yüzeyin şekil değişimi yaklaşık olarak

$$\eta = \gamma \ln\left(\frac{\sigma^2 + \gamma}{1 + \gamma}\right) \tag{2.6}$$

hesaplanılabilir [2, 3]. Bu çözüm başlangıç koşulu olarak zorlamayı temsil etmektedir.

3. BATİMETRİK SÜREKSİZLİK İÇİN RÜZGARIN KESİLDİĞİ ANDA OLUŞAN SALINIMLAR

Bu salınımlar tek boyutta doğrusal olmayan sığ su denklemleri kullanılarak incelenecektir. Göz önüne alınan batimetride derinlik sahilden uzaklaştıkça α sabit eğimiyle doğrusal olarak artmaktadır. Sahilden L' mesafesinden daha uzaktaki derinlik sabit $\alpha L' + D'$ değerine eşit alınmaktadır. Burada süreksizlik D' eğimli bölgenin en derin noktasından daha büyüktür. Problemin geometrisi şekil (3.1)'de gösterilmektedir.



Şekil 3.1: Batimetrik süreksizlik varken problemin geometrisi.

Tek boyuttaki sığ su denklemleri şu şekildedir [4, 5].

$$[u'(\alpha x' + \eta')]_{x'} + \eta'_{t'} = 0 \tag{3.1}$$

$$u'_{t'} + u'u'_{x'} + g\eta'_{x'} = 0 \tag{3.2}$$

Burada alt indisler kısmi türev anlamına gelmektedir. Boyutsuz zaman $t = \sqrt{\frac{\alpha g}{L}}t'$ şeklinde tanımlanır. Boyutsuz x ve η denklem (**2.1**)'i takip eden satırda tanımlanmıştır. Boyutsuz hız, eğimin en derin yerindeki dalga yayılım hızıyla normalize edilerek

bulunur ($u = u'/\sqrt{g\alpha L}$). Bu boyutsuzlaştırmadan sonra tek boyutta boyutsuz sığ su denklemleri şu şekilde olur.

$$[u(x+\eta)]_x + \eta_t = 0 \tag{3.3}$$

$$u_t + uu_x + \eta_x = 0 \tag{3.4}$$

Denklem takımını lineerize edebilmek için [4, 5] tarafından önerilen hodograf dönüşümü kullanılmaktadır. Bu dönüşüme göre çarpıtılmış zaman $\lambda = t - u$, çarpıtılmış konum ise $\sigma = \sqrt{x+\eta}$ olarak tanımlanmıştır. Yeni bir ara değişken $\varphi = \eta + u^2/2$ tanımlanırsa sığ su denklemleri bu değişkenler cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$(\sigma^2 u)_\sigma + 2\sigma\varphi_\lambda = 0 \tag{3.5}$$

$$u_\lambda + \frac{1}{2\sigma}\varphi_\sigma = 0 \tag{3.6}$$

Bu tanımlamalardan sonra denklem (**3.5**) ve denklem (**3.6**)'dan u'lar sağdeleştirilirse aşağıdaki potansiyel dalga denklemi elde edilir.

$$4\varphi_{\lambda\lambda} - \frac{1}{\sigma}(\sigma\varphi_\sigma)_\sigma = 0 \tag{3.7}$$

Boyutsuz büyüklükler η ve u, φ potansiyeli cinsinden aşağıdaki şekilde türetilebilir.

$$\eta = \varphi_\lambda - \frac{\varphi_\sigma^2}{8\sigma^2} \tag{3.8}$$

$$u = -\frac{\varphi_\sigma}{2\sigma} \tag{3.9}$$

Bu dönüşüme Carrier-Greenspan hodograf dönüşümü denir.

Rüzgar kalktığı anda η denge konumundan uzakta ve sıvının hızı u ise sıfır olur. u sıfır olduğunda çarpıtılmış zaman ve fiziksel zaman eş büyüklükler olacağından dolayı aniden rüzgarın kalkması (λ, σ) uzayında bir başlangıç değer problemine karşılık gelir. u'ların sıfır olması başlangıçta η'nın da zamana göre kısmi türevinin sıfır olmasını gerektirir. Bu tür başlangıç problemlerinde önerilen çözümün zaman bağımlılığı kosinüsler cinsinden, konum bağımlılığı ise $\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}(\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma})$ operatörünün özfonksiyonları cinsindendir. Çözüm olarak aşağıdaki denklem [3] tarafından önerilmiştir.

$$\varphi_\lambda = \sum_n a_n J_0(k_n\sigma)\cos(\frac{1}{2}k_n\lambda) \tag{3.10}$$

Buradaki J_0'lar sıfırıncı mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonları, k_n'ler de bu Bessel fonksiyonlarının kökleridir. Çünkü eğimli bir bölgenin ucunda Drichlet sınır şartı uygulanmıştır ($\eta(\sigma = 1,t) = 0$). Batimetrideki süreksizliğin çok büyük olduğu durumlarda Drichlet şartının geçerli olduğu bu bölümün sonunda gösterilecektir. Bu denklemdeki a_n katsayıları başlangıç koşullarını sağlayacak şekilde şeçilmektedir. Bu a_n katsayılarının hesaplanmasında Bessel fonksiyonlarının diklik koşulundan yararlanılır. Boyutsuzlaştırmadan sonra sabit eğimli bölgenin uzunluğu 1 olmaktadır. Yapay olarak eklenen $J_0(k_n,\sigma)|_{\sigma=1} = 0$ sınır koşulu dalgalar eğimli bölgenin açığa bakan ucundan tamamen geriye yansımasını sağlar. Boyutsuz süreksizlik D ile gösterilirse $(D'/(\alpha L'))$ ve $D >> 1$ olduğu durum ele alınırsa açığa doğru yayılan dalgalar büyük oranda süreksizlikten geri yansıdığından $J_0(k_n,\sigma)|_{\sigma=1} = 0$ sınır koşulunu kullanan çözüm dalgalar uyarıldıktan sonra belli bir süre geçerliliğini korur. İki bölge arasında sınır koşullarını sağlayan homojen dalga denkleminin bir çözümü önerilirse

$$\eta = \begin{cases} AJ_0(k_{in}\sigma)\exp(i\omega t) & 0 < \sigma < 1 \\ B\exp(-i|k_{out}|sign(\omega)x)\exp(i\omega t) & 1 < x < +\infty \end{cases} \tag{3.11}$$

Sabit derinlikli bölgede $(x > 1)$ faz hızı sahilden açığa doğru alınmıştır. Böylece dalga enerjisinin sahilden açığa doğru akması sağlanır (ışıma şartı). Her iki bölgede de dalga frekansları eşit olacağından

$$\omega = \frac{1}{2}k_{in} = \sqrt{(D+1)}k_{out} \tag{3.12}$$

bulunur. Akı korunumu yazılırsa

$$\sigma_x\eta_\sigma|_{\sigma=1^-} = (D+1)\eta_x|_{x=1^+} \tag{3.13}$$

eşitliği elde edilir. Frekansların eşit olmasından $k_{in} = 2\sqrt{(D+1)}k_{out}$ bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı denklem (**3.13**)'de yerine konulursa

$$B/A \propto 1/\sqrt{D+1} \tag{3.14}$$

olduğu görülür. Burada $D \to +\infty$ limitinde $B = 0$ olacağı aşikardır. Dolayısıyla iç çözümü $(AJ_0(k_{in}\sigma))$ sınırda sıfır almak yerinde olacaktır. Burada k_{in} Bessel fonksiyonunun köklerini göstermektedir. Sonlu D için sınır koşulları (akının ve dalga

yüksekliğinin sürekliliği)

$$\sigma_x \eta_\sigma|_{\sigma=1^-} = (D+1)\eta_x|_{x=1^+} \tag{3.15}$$

$$\eta|_{\sigma=1^-} = \eta|_{x=1^+} \tag{3.16}$$

olarak verilir. Sınır koşullarından A ve B katsayılarıyla ilgili 2 homojen denklem elde edilir. Bu denklemlerin aşikar çözüm dışında çözümü olabilmesi için dalga sayısı sistemin determinantını sıfır yapmalıdır. Işıma şartı altında determinantı sıfır yapan dalga sayılarının reel eksen boyunca olamayacağı görülebilir. Öncelikle eğimli bölgede aşağıdaki gibi bir çözüm göz önüne alınsın.

$$\eta = J_0(k_{in}\sigma)\exp(i\omega t) \tag{3.17}$$

Bu dalga formuna karşılık gelen Poynting vektörünün zaman ortalaması, k_{in} reel ise sıfırdır. Poynting vektörünün büyüklüğünden kanal boyunca akan gücün kanal genişliğine oranı kastedilmektedir. Sığ su denklemlerinde basıncın dalgadan dolayı tedirgemesi statik basıncın değişimi $g\rho\eta'$ eşit alınır. Bu basıncın bütün derinlik $(\alpha x')$ boyunca meydana getirdiği güç ise $\rho g\alpha x'\eta' u'$ tarafından verilir. Lineerize edilmiş haraket denklemine bakarak u'nun $i\eta_x/\omega$ ile orantılı olduğu görülür. Bu yüzden Poynting vektör ifadesinde bulunan u ile η arasında, k_{in} reel olduğunda, 90 derecelik bir faz farkı ortaya çıkar. k_{in} reel ise $J_0(k_{in}\sigma)$ duran dalga oluşturur. Duran dalganın Poynting vektörünün zaman ortalaması sıfırdır. Bu da net enerji iletimini önler. Halbuki açık denize doğru net enerji iletimi olmalı.

3.1 Radyasyon Koşuluyla Yaklaşık ve Kesin çözüm

Bir önceki bölümde ışıma koşulu altında neden dalga sayılarının kompleks olması gerektiği açıklandı. Kompleks dalga sayıları ile denklem (**3.10**) tekrar yazıldığında Bessel fonksiyonları için artık diklik koşulu geçerli değildir çünkü bu fonksiyonlar artık iki boyutta Laplacian $(\bigtriangledown^2)$ operatörünün kompleks özdeğerlerine karşılık gelen öz fonksiyonlardır. Kompleks özdeğerli operatör Hermit türü operatör olamayacağından özvektörlerinin dikliği söz konusu değildir. Fakat derinlikteki süreksizlik D çok büyük olduğu zaman determinantın dalga sayısına göre kökleri reel eksene çok yakın olmak zorundadır. İdeal durumda $(D \to +\infty)$ bu köklerin Bessel fonksiyonlarının reel köklerine dönüştüğü gösterilmişti. Bu yüzden derinlikteki

süreksizlik büyük olduğu zaman $J_0(k_{in}\sigma)$ kompleks sayısının büyüklüğü esas olarak $\Re(k_n)$'e bağlıdır. Bu durumda denklem (**3.7**) tekrar aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varphi \approx \sum_n a_n J_0(\Re(k_n)\sigma)\cos(\frac{1}{2}\Re(k_n)\lambda)\exp(\frac{-1}{2}|\Im(k_n)|\lambda) \qquad (\mathbf{3.18})$$

Bu ifadede kompleks frekansın işareti zaman sonsuza giderken dalga ıraksamayacak şekilde seçilir. Denklem (**3.18**)'da bulunan yaklaşık çözüm sabit derinlikli bölgede $(x > 1)$

$$\sum_n b_n \exp(-ik_{out,n}x)\exp(i\omega_n t) \qquad (\mathbf{3.19})$$

gibi davranmaktadır ve $k_{out,n}$ sanal kısmı yüzünden $x >> 1$ bölgesinde ıraksamaktadır. Denklem (**3.18**)'da a_n katsayıları, başlangıç koşullarını sabit eğimli kanal üzerinde yaklaşık olarak sağlanacak şekilde seçilmişlerdi. Denklem (**3.19**)'de görüldüğü üzere sabit derinlikli bölgede başlangıç koşulları yaklaşık olarak bile sağlanmamaktadır. Açık denizde, sahilden açık bölgede, üstel (exponential) ifade büyük x'lerde ıraksamaktadır. Fakat ışıma şartından dolayı dalgalar açığa doğru ilerlediklerinden, açıklardaki başlangıç koşullarını eğimli bölge hiçbir zaman görememektedir ve bu yüzden açıkta yanlış başlangıç koşulu ile başlamanın zararı yoktur.

Radyasyon koşuluyla başlangıç değer problemini çözmek zor olacağı için sistemin önce zamanda periyodik zorlamaya olan cevabı hesaplanmaktadır. Kalkmış deniz tabanı $\lambda = 0$ anında aniden geri dönerse denizin bu türlü zorlamaya vereceği cevap $\lambda = 0$ anında istenilen başlangıç koşullarını sağlayacaktır. Bu başlangıç koşulları hızların sıfır ve serbest yüzeyin dengeden uzak olmasıdır. Zamanda adım fonksiyonu, fourier dönüşümü kullanılarak zamanda periyodik fonksiyonların toplamı şeklinde ifade edilebilir.

Sistemin doğal salınım frekanslarının radyasyon koşulu altında kompleks olduğu gösterilmişti. Bundan dolayı sistem reel frekanslarda zorlanırsa sistemin tepkisi aynı frekansta ve sonlu genlikte bir salınım olacaktır. Eğer eğimli bölgenin tabanı

$$h = \theta(-\lambda)\gamma\ln(\frac{\sigma^2+\gamma}{1+\gamma}) \qquad (\mathbf{3.20})$$

olarak alınırsa ve "zaman" λ'da adım fonksiyonu gibi dikey bir hareket yaparsa denklem (**2.6**)'dan serbest yüzey için doğru başlangıç koşulu üretileceği görülür. Yeni bir ara değişken

$$\psi = \varphi_\lambda \qquad (\mathbf{3.21})$$

tanımlanırsa ve haraket denklemi deniz tabanının dikey haraket yaptığı durum için tekrar yazılırsa [6]

$$4\psi_{\lambda\lambda} - \frac{1}{\sigma}(\sigma\psi_{\sigma})_{\sigma} = 4Jh_{\lambda\lambda} \tag{3.22}$$

elde edilir. Burada J, Carrier-Greenspan dönüşümüne ait Jakobiendir. Negatif zamanlar için $(\lambda \leq 0)$, haraket olmadığından $J = 1$'dir. Pozitif zamanlarda ise $h_{\lambda\lambda} \equiv 0$'dır.

Öncelikle zamanda periyodik bir noktada yoğunlaşmış zorlamaya sistemin tepkisini bulunur

$$4\psi_{\lambda\lambda} - \frac{1}{\sigma}(\sigma\psi_{\sigma})_{\sigma} = \delta(\sigma - \sigma_0)\exp(i\omega\lambda) \tag{3.23}$$

Bu tür zorlamaya cevap olarak ara değişken ψ

$$\psi(\omega, \sigma, \lambda) = G(\omega, \sigma, \sigma_0)\exp(i\omega\lambda) \tag{3.24}$$

değerlerini alır. Burada G Green fonksiyonudur. Green fonksiyonu $\sigma = \sigma_0$ noktası haricinde homojen Helmoltz denklemini sağlar. Bu Green fonksiyonu, sabit derinlikli bölgede $(x > 1)$ ışıma şartını yerine getirmelidir. Green fonksiyonunun σ'ya göre ikinci türevi eksi Dirac fonksiyonunu $(-\delta(\sigma - \sigma_0))$ üretmelidir. Ayrıca Green fonksiyonu $\sigma = 0$ noktasında tanımlı olmalıdır. Bütün bu şartları aşağıda önerilen Green fonksiyonu sağlamaktadır.

$G(\omega, \sigma, \sigma_0) =$

$$\begin{cases} -\dfrac{Y_0(k_{in}(\omega)\sigma_0)J_0(k_{in}(\omega)\sigma)}{W\{Y_0(k_{in}(\omega)\sigma_0), J_0(k_{in}(\omega)\sigma_0)\}} - A(\omega)J_0(k_{in}(\omega)\sigma); & 0 \leq \sigma < \sigma_0 \\ -\dfrac{J_0(k_{in}(\omega)\sigma_0)Y_0(k_{in}(\omega)\sigma)}{W\{Y_0(k_{in}(\omega)\sigma_0), J_0(k_{in}(\omega)\sigma_0)\}} - A(\omega)J_0(k_{in}(\omega)\sigma); & \sigma_0 \leq \sigma < 1 \\ -B(\omega)\exp(-i|k_{out}(\omega)|sign(\omega)x); & x > 1 \end{cases} \tag{3.25}$$

Burada W, $Y_0(k_{in}\sigma_0)$ ve $J_0(k_{in}\sigma_0)$ fonksiyonlarının σ_0'a göre Wronksiyenidir. Wronksiyen

$$W = \frac{d}{d\sigma_0}\{Y_0(k_in(\omega)\sigma_0)\}J_0(k_in(\omega)\sigma_0) - Y_0(k_{in}(\omega)\sigma_0)\frac{d}{d\sigma_0}\{J_0(k_{in}(\omega)\sigma_0)\} \tag{3.26}$$

olarak tanımlanır ve $W = 2/(\pi\sigma_0)$ olduğu açıktır. Green fonksiyonu içindeki A ve B katsayıları $\sigma = 1$'deki süreklilik ve akı korunumundan yararlanılarak bulunabilir.

Adım fonksiyonu periyodik fonksiyonların toplamı şeklinde ifade edilsin.

$$\frac{1}{2}sign(\lambda) = \theta(\lambda) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi i}P\{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \frac{\exp(i\omega\lambda)}{\omega}\} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty} d\omega\ \frac{\sin(\omega\lambda)}{\omega} \quad \textbf{(3.27)}$$

Denklem (**3.27**)'de P kompleks integralin asal değerini göstermektedir. Bu ifadenin $\lambda = 0$ süreksizliği (sağdan ve soldan limitlerinin farkı) 1'e eşittir. Güdülen dalgaların denkleminde (**3.22**) sağ taraf $h_{\lambda\lambda}$ idi. Bu durumda denklem (**3.27**)'in iki defa λ'ya göre türevini alıp çıkan sonucu $G(\omega, \sigma_0, \sigma)h_{ilk}(\sigma_0)$ ile çarpıp $d\sigma_0$ üzerinden integrali alınırsa bu sonuç elde edilir. Burada $h_{ilk}(\sigma_0)$ rüzgar altında dengede olan yüzeyin şeklidir. Konvolüsyon sonucunda

$$\psi(\lambda, \sigma) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} d\omega\ \omega \int_{0}^{1} d\sigma_0\ G(\omega, \sigma_0, \sigma)h_{ilk}(\sigma_0)\sin(\omega\lambda) \quad \textbf{(3.28)}$$

elde edilir.

3.1.1 Katsayıların hesaplanması

Sınır koşulları yazılırsa

$$\eta|_{\sigma=1^-} = \eta|_{x=1^+} \quad \textbf{(3.29)}$$

$$\sigma_x\eta_\sigma|_{\sigma=1^-} = (D+1)\eta_x|_{x=1^+} \quad \textbf{(3.30)}$$

Denklem (**3.29**)'deki dalga yüksekliği sınır koşulu açık olarak yazılırsa

$$A(\omega)J_0(k_{in}) - B(\omega)\exp(-i|k_{out}|sign(\omega)) = -\frac{\pi\sigma_0}{2}J_0(k_{in}\sigma_0)Y_0(k_{in}) \quad \textbf{(3.31)}$$

ve ikinci sınır koşulu olan akı sınır koşulundan

$$\begin{aligned} &A(\omega)J_1(k_{in})k_{in} - B(\omega)2(D+1)i|k_{out}|sign(\omega)\exp(-i|k_{out}|sign(\omega)) \\ &= \frac{\pi\sigma_0}{2}J_0(k_{in}\sigma_0)Y_0'(k_{in})k_{in} \end{aligned} \quad \textbf{(3.32)}$$

eşitlikleri bulunur. İki eşitlik matris olarak gösterilirse

$$\begin{pmatrix} J_0(k_{in}) & -\exp(-i|k_{out}|sign(\omega)) \\ J_1(k_{in})k_{in} & -2(D+1)i|k_{out}|sign(\omega)\exp(i|k_{out}|sign(\omega)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(\omega) \\ B(\omega) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\pi\sigma_0}{2}J_0(k_{in}\sigma_0)Y_0(k_{in}) \\ \frac{\pi\sigma_0}{2}J_0(k_{in}\sigma_0)Y_0'(k_{in})k_{in} \end{pmatrix} \quad \textbf{(3.33)}$$

elde edilir. Cramer kuralına göre bu denklem setinde bilinmeyen $A(\omega)$ katsayısını bulabilmek için katsayılar matrisinin birinci kolonu bilinmeyenler ile değiştirilip determinantı alınır ve katsayılar matrisinin determinantına bölünür.

$$A(\omega) = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{\pi\sigma_0}{2} J_0(k_{in}\sigma_0) Y_0(k_{in}) & -\exp(-i|k_{out}|sign(\omega)) \\ \frac{\pi\sigma_0}{2} J_0(k_{in}) Y_0'(k_{in}) k_{in} & -2(D+1)i|k_{out}|sign(\omega)\exp(-i|k_{out}|sign(\omega)) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_0(k_{in}) & -\exp(-i|k_{out}|sign(\omega)) \\ J_1(k_{in})k_{in} & -2(D+1)i|k_{out}|sign(\omega)\exp(-i|k_{out}|sign(\omega)) \end{vmatrix}} \tag{3.34}$$

$$\omega = \frac{1}{2}k_{in} = \sqrt{D+1}k_{out} \Rightarrow |k_{out}| = \frac{|k_{in}|}{2\sqrt{D+1}} \tag{3.35}$$

Determinantlar açık şekilde yazılıp ve k_{out}, k_{in} cinsinden yazılırsa

$$A(\omega) = \frac{\frac{\pi\sigma_0}{2} J_0(k_{in}\sigma_0)\left[\sqrt{D+1}Y_0(k_{in})i|k_{in}|sign(\omega) + Y_0'(k_{in})k_{in}\right]}{-\sqrt{D+1}J_0(k_{in})i|k_{in}|sign(\omega) + J_1 k_{in}k_{in}} \tag{3.36}$$

ifadesi elde edilir. $sign(\omega) = sign(k_{in})$ ve dolayısıyla $|k_{in}|sign(\omega) = |k_{in}|sign(k_{in}) = k_{in}$ olur. Bu ifade de denklemde yerine konulursa en sonunda $A(\omega)$ katsayısı açık şekilde elde edilir.

$$A(\omega) = \frac{\frac{\pi\sigma_0}{2} J_0(k_{in}\sigma_0)\left[\sqrt{D+1}Y_0(k_{in})i + Y_0'(k_{in})\right]}{J_1(k_{in}) - \sqrt{D+1}J_0(k_{in})i} \tag{3.37}$$

$A(\omega)$ katsayıları da hesaplandıktan sonra denklem (**3.28**)'de $G(\omega,\sigma,\sigma_0)$ ve katsayılar yerine konulur.

$$\theta(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\exp(i\omega\lambda)}{i\omega} \tag{3.38}$$

$$h_{ilk} = \gamma \ln(\frac{\sigma_0^2+\gamma}{1+\gamma}) \tag{3.39}$$

$$\omega = \frac{1}{2}k_{in} \tag{3.40}$$

Öncelikle h_{ilk} yerine konulursa,

$$\psi(\lambda,\sigma) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \exp(i\omega\lambda) i\omega \int_0^1 d\sigma_0\ G(\omega,\sigma,\sigma_0)\gamma\ln(\frac{\sigma_0^2+\gamma}{1+\gamma}) \tag{3.41}$$

elde edilir. $d\omega$ üzerinden yazılan integral dk_{in} üzerinden yazılıp rezidüler üzerinden toplam haline getirilecektir. Zorlayıcı frekans sistemin doğal frekansına yaklaşırken $A(\omega)$ katsayısı ıraksayacaktır. Bundan dolayı rezidü hesabında Green fonksiyonunun

sadece $A(\omega)$ içeren kısmı göz önünde tutulacaktır. Bu kısım homojen sistemin çözümüne karşılık gelmektedir. Işıma şartı altında sistemin doğal frekansları kompleks olacaktır. Denklem (**3.41**) $\omega = k_{in}/2$ altında yeniden yazılırsa,

$$\psi(\lambda,\sigma) = \frac{-i\gamma}{2\pi}\int_0^1 d\sigma_0 \ln(\frac{\sigma_0^2+\gamma}{1+\gamma})\int_{-\infty}^{+\infty} dk_{in}\ \exp(ik_{in}\lambda/2)A(\omega)J_0(k_{in}\sigma)k_{in} \quad \textbf{(3.42)}$$

eşitliği elde edilir. İlk olarak dk_{in} üzerinden alınan integrali ele alınsın.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{in}\exp(ik_{in}\lambda/2)A(\omega)J_0(k_{in}\sigma)k_{in} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{in}\exp(ik_{in}\lambda/2)J_0(k_{in}\sigma)k_{in}\frac{\frac{\pi\sigma_0}{2}J_0(k_{in}\sigma_0)\left[\sqrt{D+1}Y_0(k_{in})i+Y_0'(k_{in})\right]}{J_1(k_{in})-\sqrt{D+1}J_0(k_{in})i} \end{aligned} \quad \textbf{(3.43)}$$

Paydadaki $J_1(k_{in})-\sqrt{D+1}J_0(k_{in})i = f(k_{in})$ fonksiyonunu sıfır yapacak $k_{in,n}$ değerleri civarında taylor serisine açılırsa ($k_{in,n}$ determinantın n'inci kökü)

$$f(k_{in}) = f(k_{in,n}) + (k_{in}-k_{in,n})f'(k_{in,n}) = (k_{in}-k_{in,n})\left[J_1'(k_{in,n})-\sqrt{D+1}J_0'(k_{in,n})i\right] \quad \textbf{(3.44)}$$

elde edilir. Bu ifade de I integralinde yerine konulursa

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi\sigma_0}{2}2\pi i\sum_n Res(k_{in}=k_{in,n}) \\ &= \frac{\pi\sigma_0}{2}2\pi i\sum_n \exp(ik_{in,n}\lambda/2)\frac{k_{in,n}J_0(k_{in,n}\sigma)J_0(k_{in,n}\sigma_0)\left[\sqrt{D+1}Y_0(k_{in,n})i+Y_0'(k_{in,n})\right]}{J_1'(k_{in,n})-\sqrt{D+1}J_0'(k_{in,n})i} \end{aligned} \quad \textbf{(3.45)}$$

I integrali $k_{in,n}$ üzerinden rezidülerin toplamı şeklinde bulunabilir. Bu $k_{in,n}$ üzerinden toplama dönüşen I ifadesi de denklem (**3.42**)'de yerine konulursa

$$\begin{aligned} \psi(\lambda,\sigma) &= \sum_n \frac{\gamma\pi}{2}\exp(ik_{in,n}\lambda/2)\frac{k_{in,n}J_0(k_{in,n}\sigma)\left[\sqrt{D+1}Y_0(k_{in,n})i+Y_0'(k_{in,n})\right]}{J_1'(k_{in,n})-\sqrt{D+1}J_0'(k_{in,n})i} \\ &\times\int_0^1 d\sigma_0\, J_0(k_{in,n}\sigma_0)\sigma_0\ln(\frac{\sigma_0^2+\gamma}{1+\gamma}) \end{aligned} \quad \textbf{(3.46)}$$

bulunur. $d\sigma_0$ integrali $k_{in,n}$ değerleri için nümerik olarak hesaplanabilir. Böylece $\psi(\lambda,\sigma)$ fonksiyonu herhangi bir λ ve σ değeri için üretilebilir.

3.1.2 Tamamen yansıyan durumun çözümü

Tamamen yansıyan çözüm [3] tarafından başlangıç değer problemi olarak ele alınıp çözülmüştü. Tamamen yansıyan durumdan Drichlet sınır şartı kastedilmektedir. Bu çalışmada ise bu durum zorlamaya cevap olarak çözümlenecek ve sonuçların [3] tarafından yapılan çözümle eş olduğu gösterilecektir.

Tamamen yansıyan çözüm için başlangıç koşulu (σ,λ) uzayında önerilen Green fonksiyonunun sınırda sıfır olma koşuludur. Denklem (**3.25**)'deki önerilen Green fonksiyonu için $G(\omega,\sigma,\sigma_0)|_{\sigma=1}=0$ sınır koşulu uygulanırsa $A(\omega)$ katsayısı

$$A(\omega)=\frac{-\pi\sigma_0}{2}\frac{J_0(k_{in}\sigma_0)Y_0(k_{in})}{J_0(k_{in})} \tag{3.47}$$

olarak bulunur.

$$\psi(\lambda,\sigma)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\ \exp(i\omega\lambda)i\omega\int_0^1 d\sigma_0\ G(\omega,\sigma,\sigma_0)\gamma\ln(\frac{\sigma_0^2+\gamma}{1+\gamma}) \tag{3.48}$$

olduğu türetilmişti. $\omega=k_{in}/2$ ve $G(\omega,\sigma,\sigma_0)$ fonksiyonu $A(\omega)$ katsayısı ile birlikte yerine konulursa

$$\begin{aligned}\psi(\lambda,\sigma)&=\frac{i\gamma}{4\pi}\int_0^1 d\sigma_0\ \sigma_0\ln(\frac{\sigma_0^2+\gamma}{1+\gamma})\\&\times\int_{-\infty}^{+\infty}dk_{in}\ \exp(ik_{in}\lambda/2)k_{in}\frac{J_0(k_{in}\sigma_0)Y_0(k_{in})J_0(k_{in}\sigma)}{J_0(k_{in})}\end{aligned} \tag{3.49}$$

elde edilir. Paydadaki $J_0(k_{in})$ ifadesi Bessel fonksiyonunun sıfırıncı kökleri cinsinden Taylor serisine açılırsa $J_0(k_{in})=J_0(j_{0n})+(k_{in}-j_{0n})J_0'(j_{0n})=(k_{in}-j_{0n})J_0'(j_{0n})$ yazılabilir. Bu ifade dk_{in} integrali içerisinde yerine konulursa, bu integral Bessel fonksiyonunun sıfırıncı kökleri üzerinden rezidülerin toplamına dönüşür.

$$\begin{aligned}I&=2\pi i\sum_n Res(k_{in}=j_{0n})\\&=2\pi i\sum_n\exp(ij_{0n}\lambda/2)j_{0n}\frac{J_0(j_{0n}\sigma_0)Y_0(j_{0n})J_0(j_{0n}\sigma)}{J_0'(j_{0n})}\end{aligned} \tag{3.50}$$

Wronskiyen

$$W=\frac{d}{dj_{0n}}\{Y_0(j_{0n})\}J_0(j_{0n})-Y_0(j_{0n})\frac{d}{dj_{0n}}\{J_0(j_{0n})\}=\frac{2}{\pi j_{0n}} \tag{3.51}$$

ifadesinden $Y_0(j_{0n})$ çekilirse, $J_0(j_{0n}) = 0$ olacağından

$$Y_0(j_{0n}) = \frac{-2}{\pi j_{0n} J_0'(j_{0n})} \tag{3.52}$$

olur. Bu ifade de yerine konulup gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\psi(\lambda,\sigma) = \sum_n \frac{2\gamma J_0(j_{0n}\sigma)}{\left[J_0'(j_{0n})\right]^2} \cos(\frac{j_{0n}\lambda}{2}) \int_0^1 d\sigma_0 \; \sigma_0 \ln(\frac{\sigma_0^2+\gamma}{1+\gamma}) J_0(j_{0n}\sigma_0) \tag{3.53}$$

olarak bulunabilir. Bu ifade [3] tarafından önerilen çözümün aynısıdır.

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Denklem (**3.46**) ile türetilen $\psi(\lambda,\sigma)$ fonksiyonu istenilen σ ve λ değerleri için bulunabilir. η değerlerinin fiziksel uzayda çözümlenmesi için ise sırasıyla şu yollar izlenmektedir. Sığ su denklemlerini lineerize edebilmek için yapılan dönüşümler tekrar hatırlanırsa

$$\eta = \varphi_\lambda - \frac{\varphi_\sigma^2}{8\sigma^2} \tag{4.1}$$

$$u = -\frac{\varphi_\sigma}{2\sigma} \tag{4.2}$$

$$\lambda = t - u = t + \frac{\varphi_\sigma}{2\sigma} \tag{4.3}$$

$$\sigma^2 = x + \eta = x + \varphi_\lambda - \frac{\varphi_\sigma^2}{8\sigma^2} \tag{4.4}$$

Öncelikle denklem (**4.3**) ve denklem (**4.4**)'e bakılırsa bu iki denklem takımında (x,t) ve (λ,σ) ikililerinin birbiri cinsinden ifadesi görülür. Denklem (**4.3**) ve denklem (**4.4**), $\lambda - t - \varphi_\sigma/2\sigma = 0$ ve $\sigma^2 - x - \varphi_\lambda + \varphi_\sigma^2/8\sigma^2 = 0$ şeklinde ifade edilsin. Bu iki denklem takımından istenilen (x,t) değerleri girilerek, nümerik iki fonksiyon için kök bulma yöntemleri kullanılarak, bu (x,t) ikilisine karşılık gelen (λ,σ) değerleri bulunabilir. Bu (λ,σ) değerlerine karşılık gelen η ve u da denklem (**4.1**) ve (**4.2**) kullanılarak elde edilir. Böylelikle fiziksel uzayda istenilen (x,t) değerlerine karşılık $\eta(x,t)$ ve $u(x,t)$ bulunabilir.

$D = 20$ süreksizliğinde yaklaşık çözümden ve Green fonksiyonu çözümünden $\sigma = 0.5$ için hesaplanan $\psi(\sigma,\lambda)$ fonksiyonunun karşılaştırılması şekil (A.18)'de görülmektedir. Hesaplamalarda $\gamma = 0.1$ alınmıştır. Ekler bölümünde $D = 20$ ve $D = 5$ için değişik parametrelerle η ve φ büyüklüklerinin grafikleri çizilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] **Csanady, G.T.**, 1982. Circulation in the Coastal Ocean, Holland / Boston, U.S.A. / London, England, D. Reidel Publishing Company.

[2] **Nof, D. ve Paldor, N.**, 1992. Are there oceanographic explanations for Israelites' crossing of the Red Sea? *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **73**, 305-314

[3] **Aydın, B. ve Kanoğlu, U.**, 2007. Wind set-down relaxation, *CMES-Computer Modelling in Engineering Science*, **21**, 149-155

[4] **Carrier, G.F. ve Greenspan, H.P.**, 1958, Water waves of finite amplitude on a sloping beach, *J. Fluid Mech*, **4**, 97-109

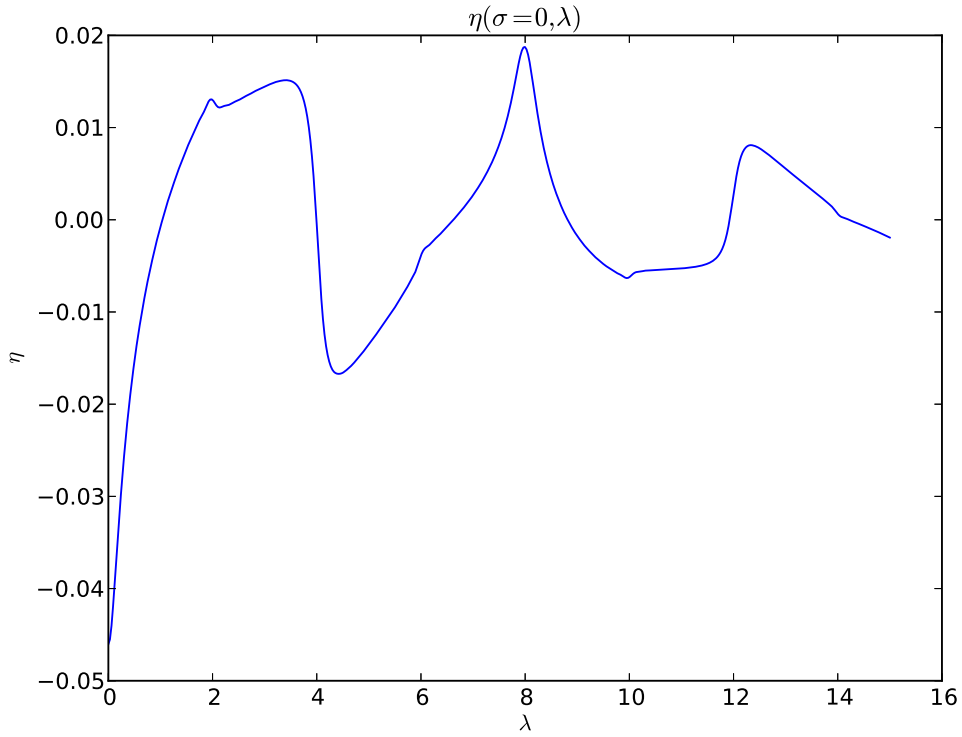
[5] **Carrier, G.F. Wu, T.T. ve Yeh, H.**, 2003. Run-up and draw-down on a plane beach, *J. Fluid Mech*, **475**, 79-99.

[6] **Özeren, M. S. ve Postacıoğlu, N.**, 2012. Nonlinear landslide tsunami run-up *J. Fluid Mech.*, **691**, 440-460

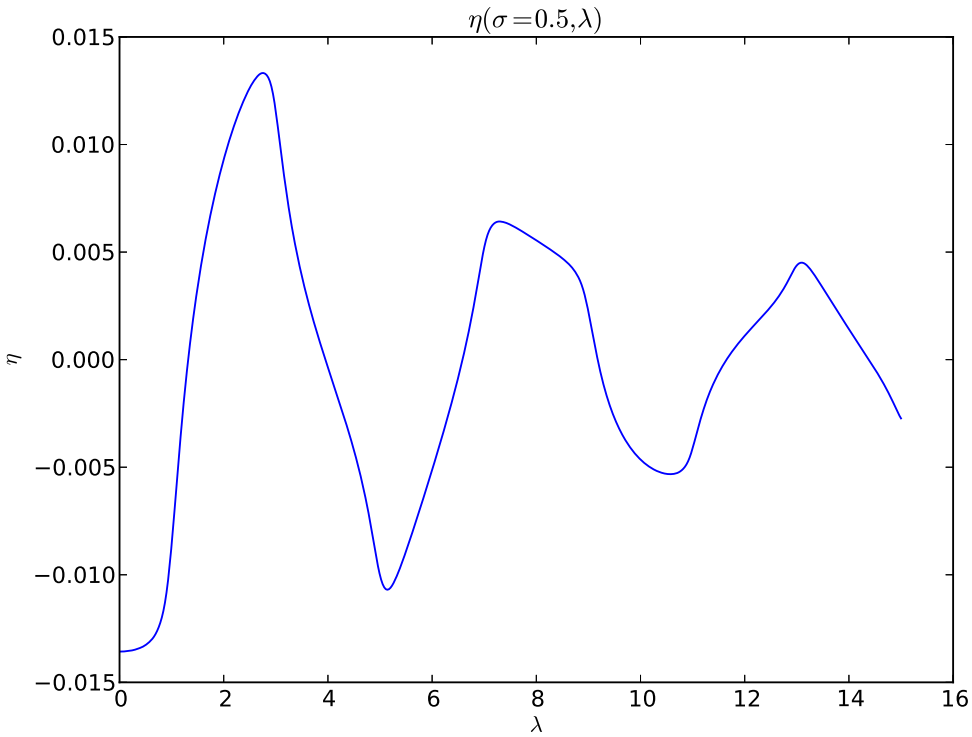
EKLER

EK A: Değişik Parametreler İçin η Ve φ Büyüklüklerinin İncelenmesi

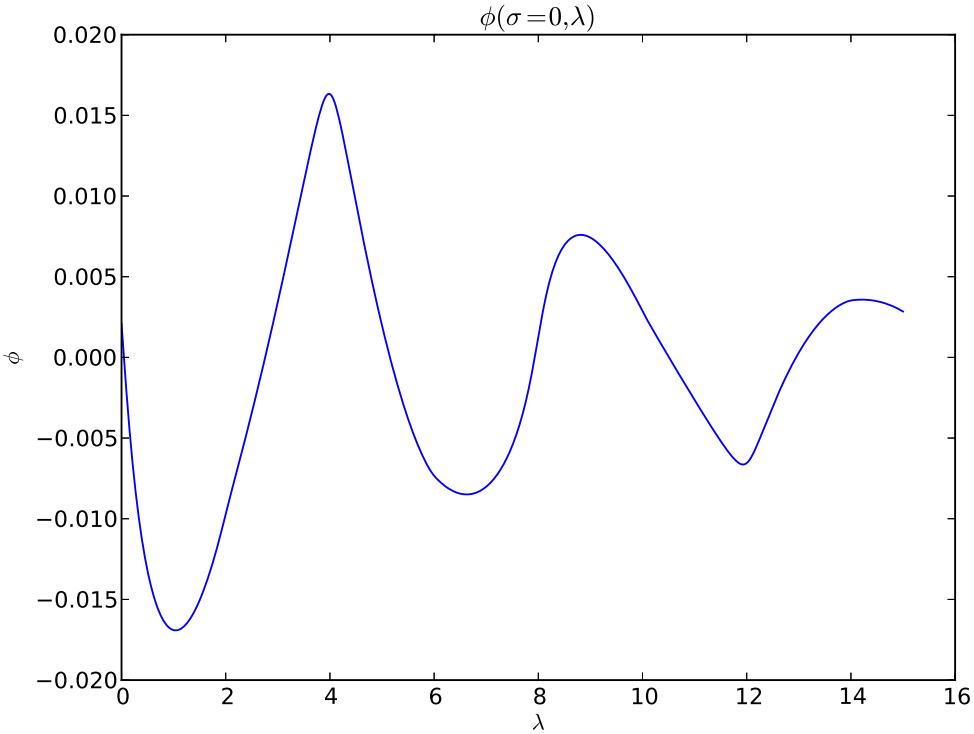
EK A



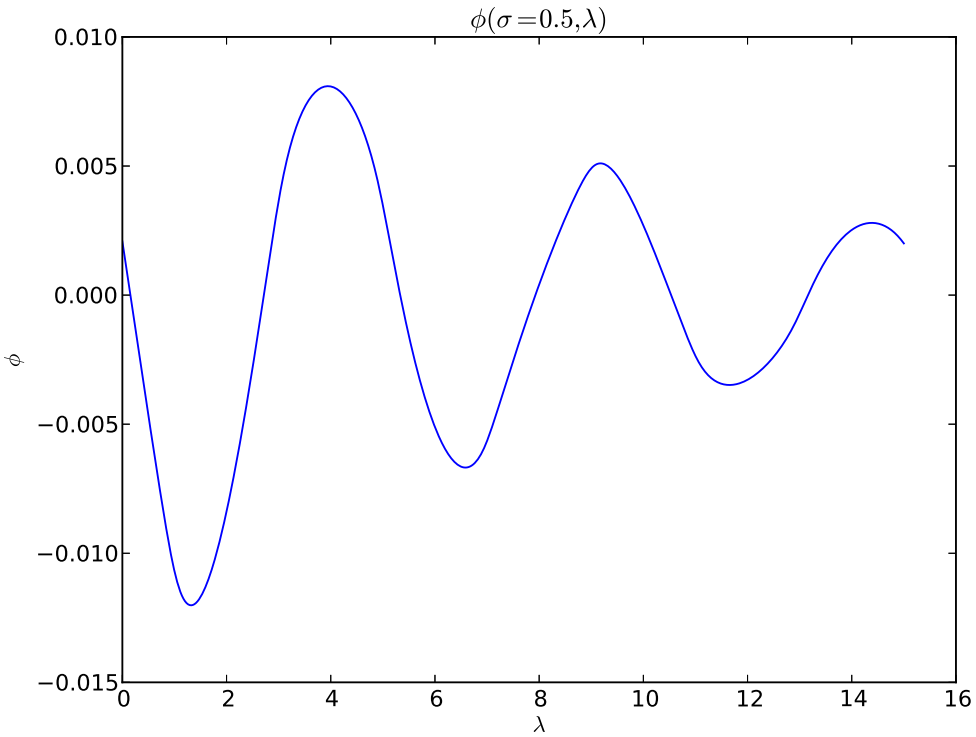
Şekil A.1: D=20 için Green yöntemi ile $\eta(\sigma=0,\lambda)$.



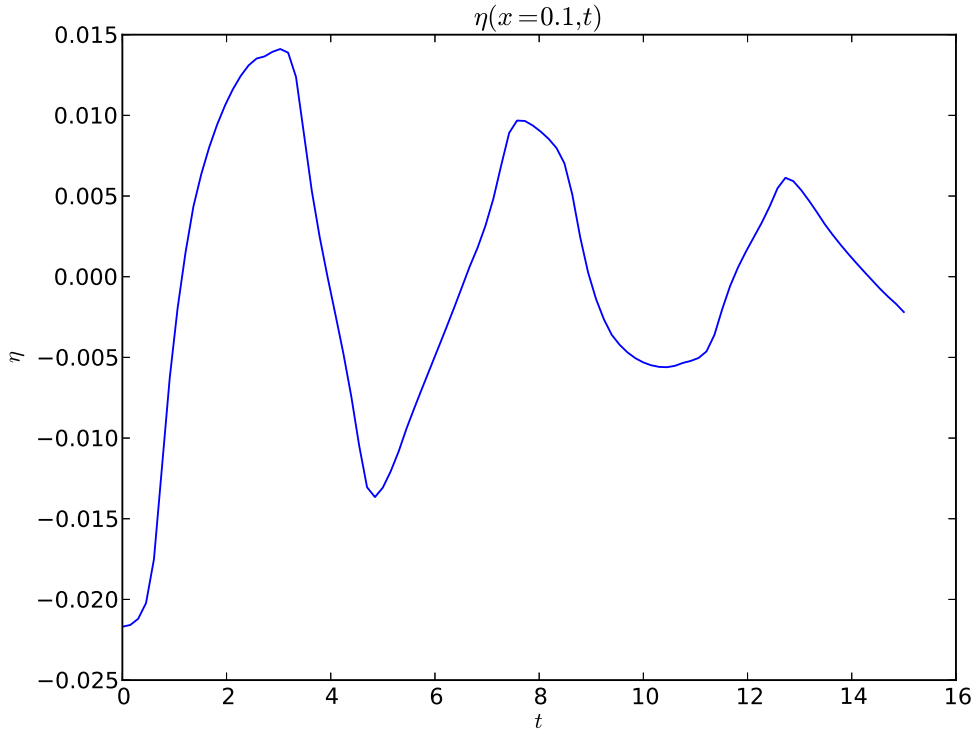
Şekil A.2: D=20 için Green yöntemi ile $\eta(\sigma = 0.5, \lambda)$.



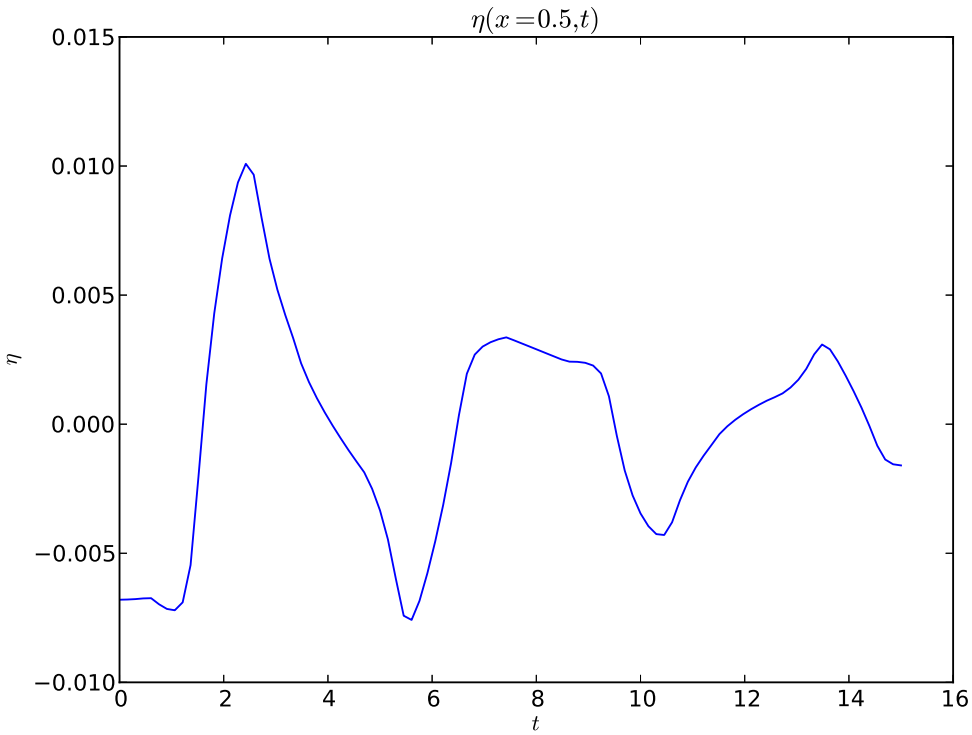
Şekil A.3: D=20 için Green yöntemi ile $\varphi(\sigma = 0, \lambda)$.



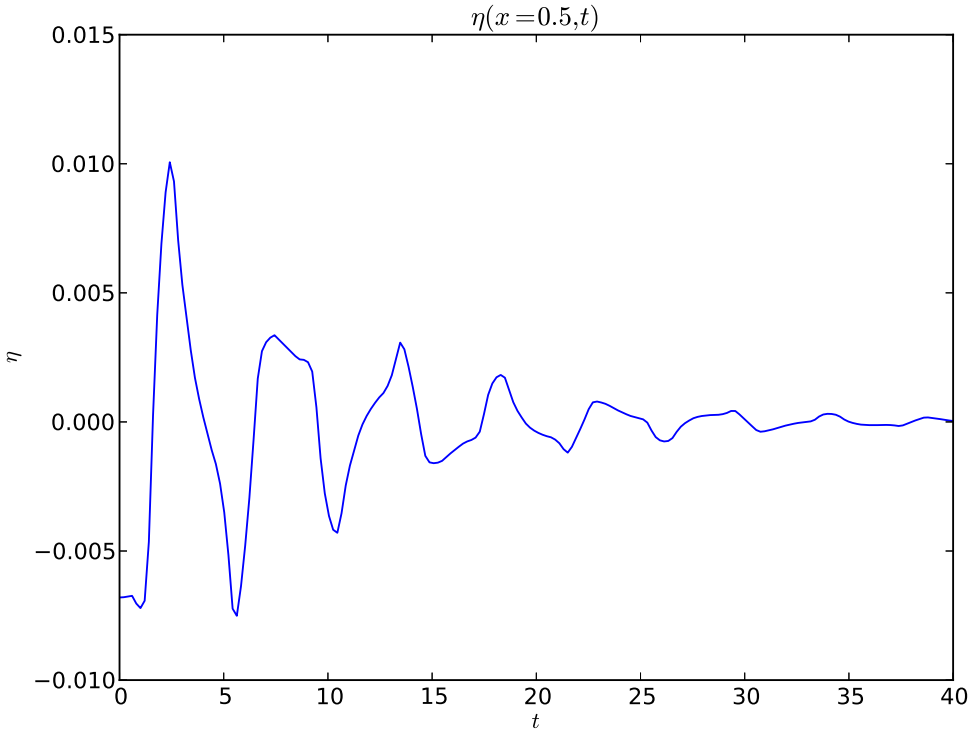
Şekil A.4: D=20 için Green yöntemi ile $\varphi(\sigma = 0.5, \lambda)$.



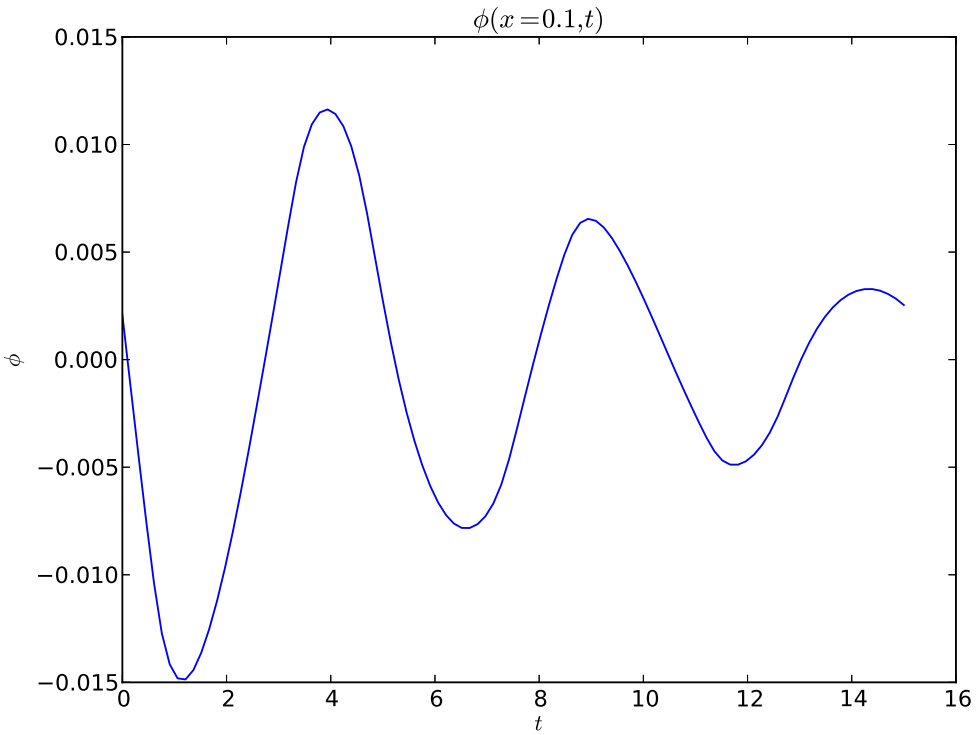
Şekil A.5: D=20 için Green yöntemi ile $\eta(x = 0.1, t)$.



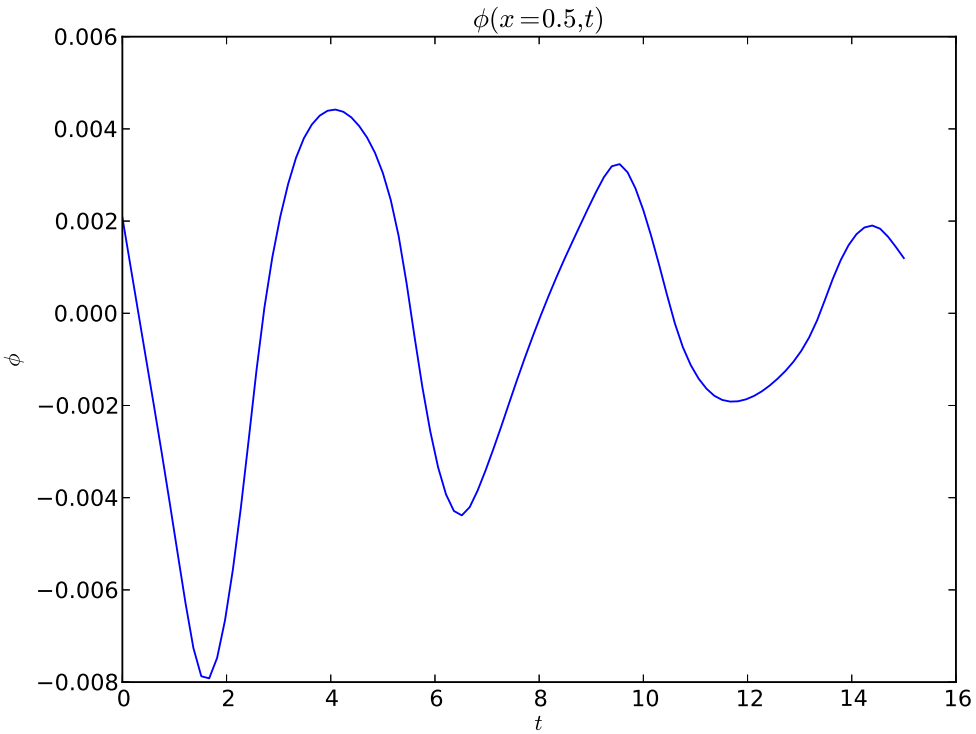
Şekil A.6: D=20 için Green yöntemi ile $\eta(x=0.5,t)$.



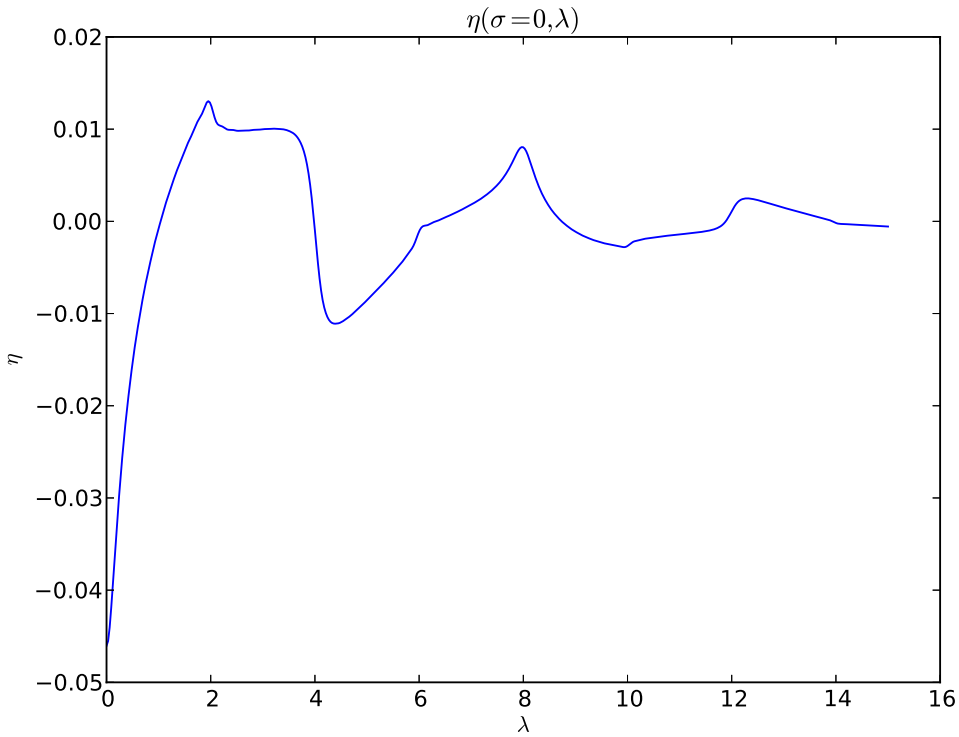
Şekil A.7: D=20 için Green yöntemi ile uzun süreli $\eta(x=0.5,t)$.



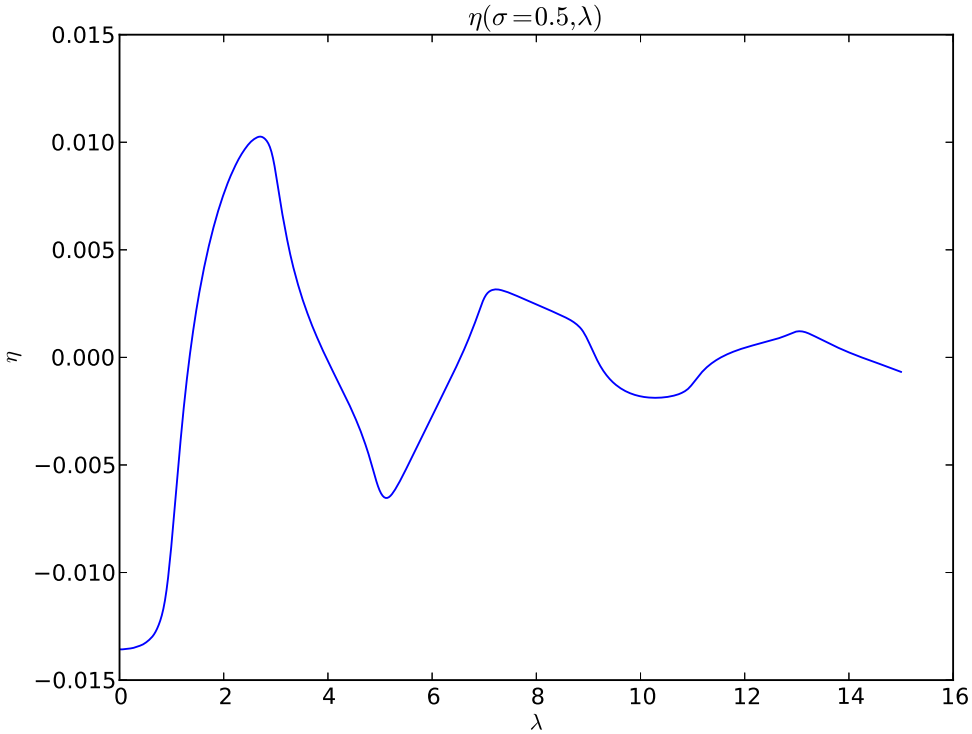
Şekil A.8: D=20 için Green yöntemi ile $\varphi(x=0.1,t)$.



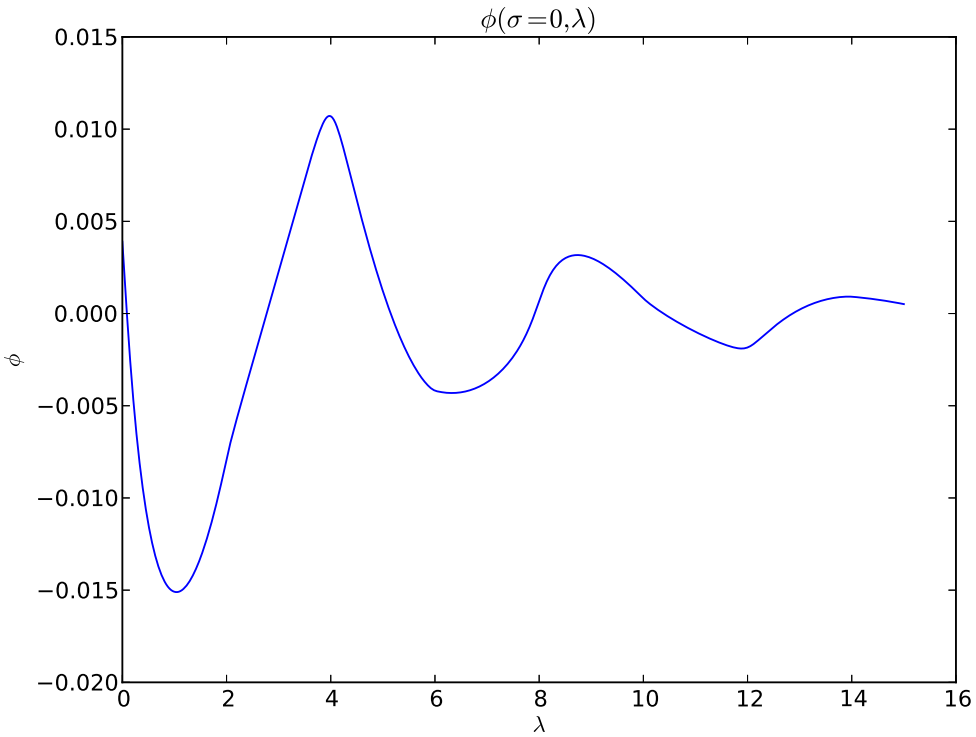
Şekil A.9: D=20 için Green yöntemi ile $\varphi(x=0.5,t)$.



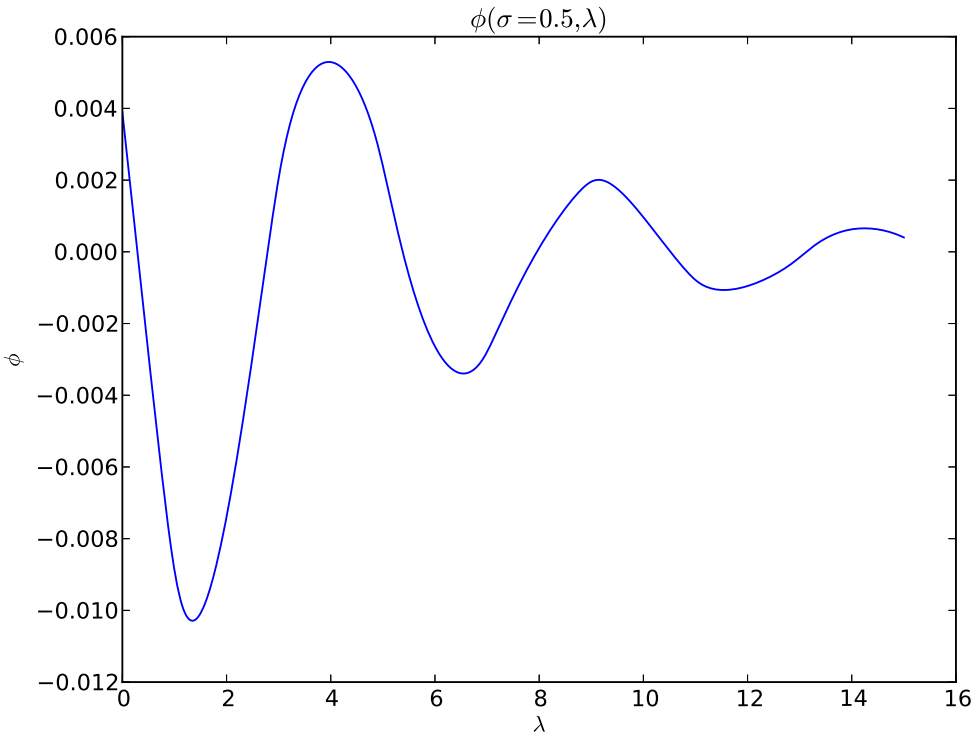
Şekil A.10: D=5 için Green yöntemi ile $\eta(\sigma=0,\lambda)$.



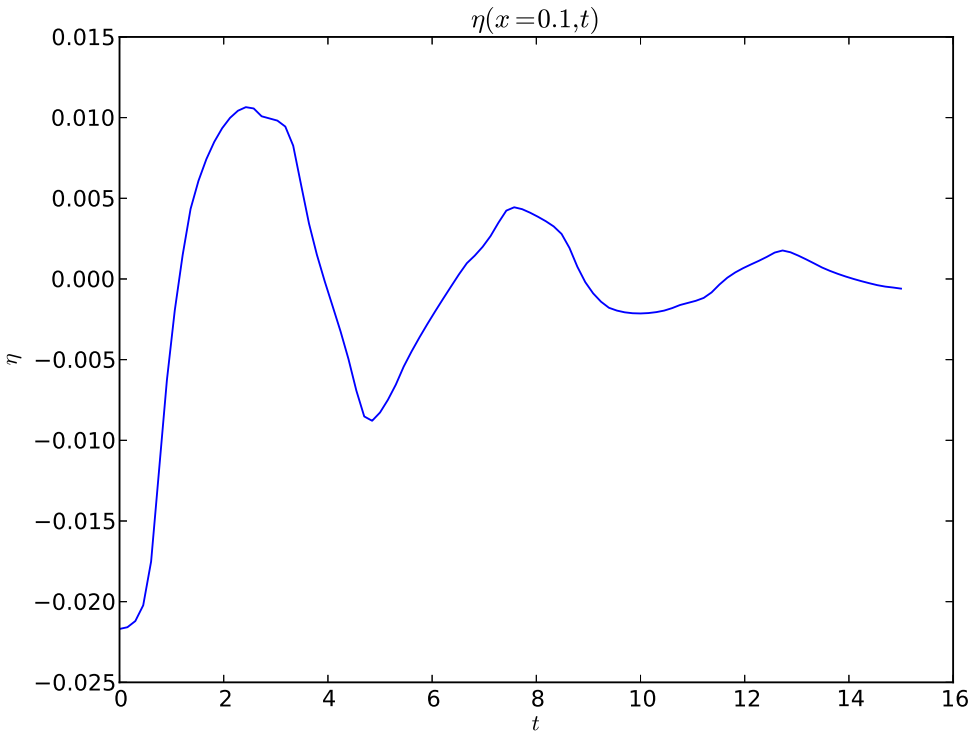
Şekil A.11: D=5 için Green yöntemi ile $\eta(\sigma=0.5,\lambda)$.



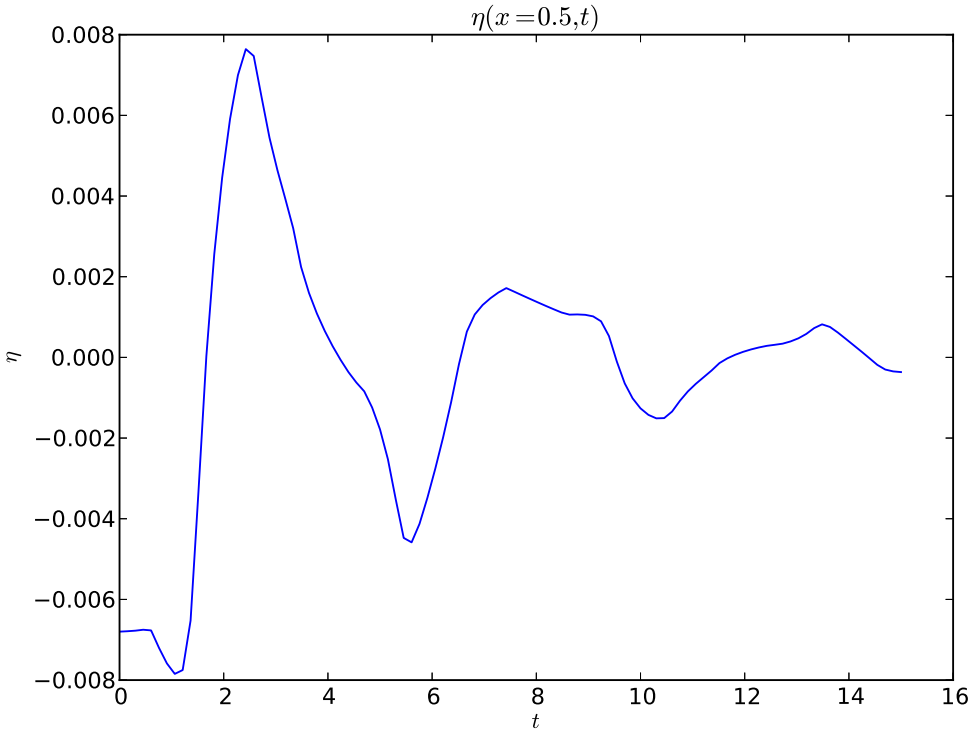
Şekil A.12: D=5 için Green yöntemi ile $\varphi(\sigma = 0, \lambda)$.



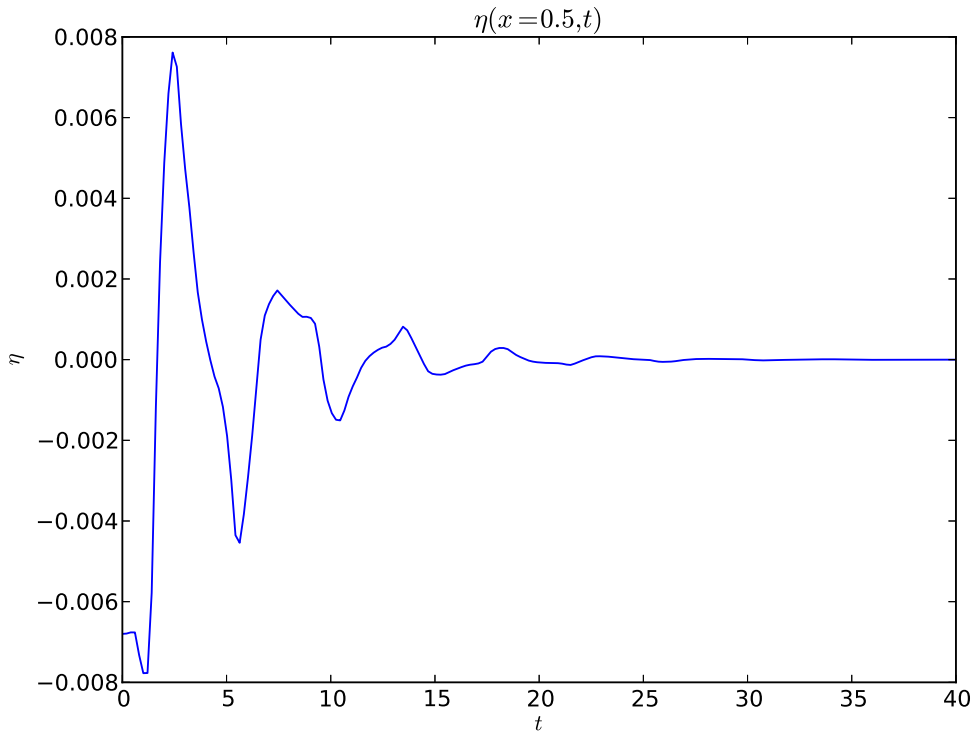
Şekil A.13: D=5 için Green yöntemi ile $\varphi(\sigma = 0.5, \lambda)$.



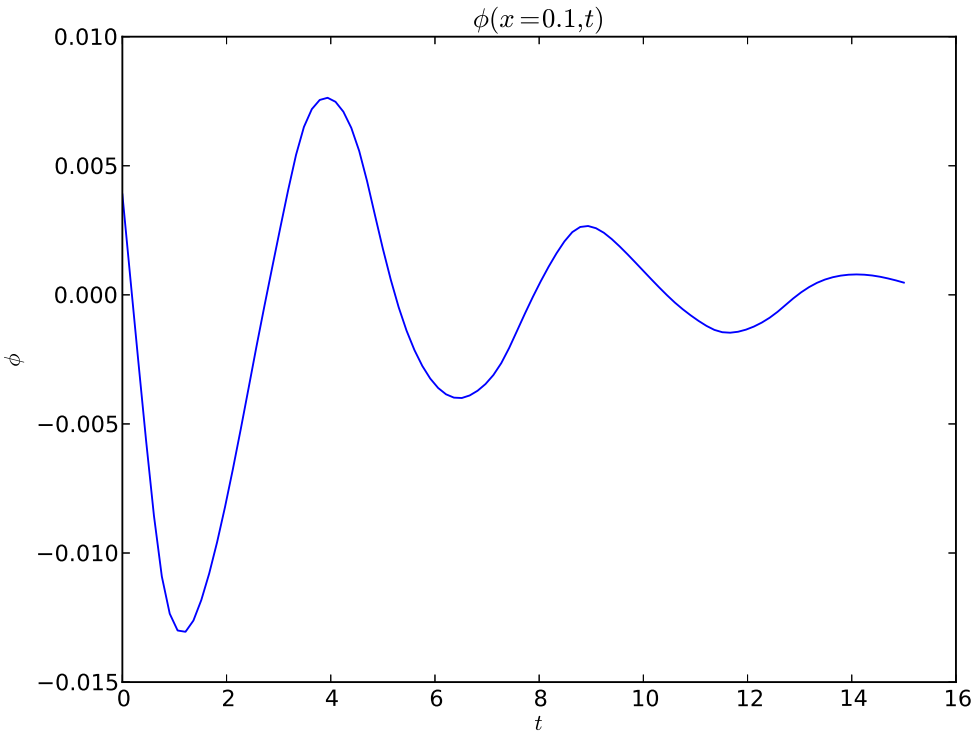
Şekil A.14: D=5 için Green yöntemi ile $\eta(x=0.1,t)$.



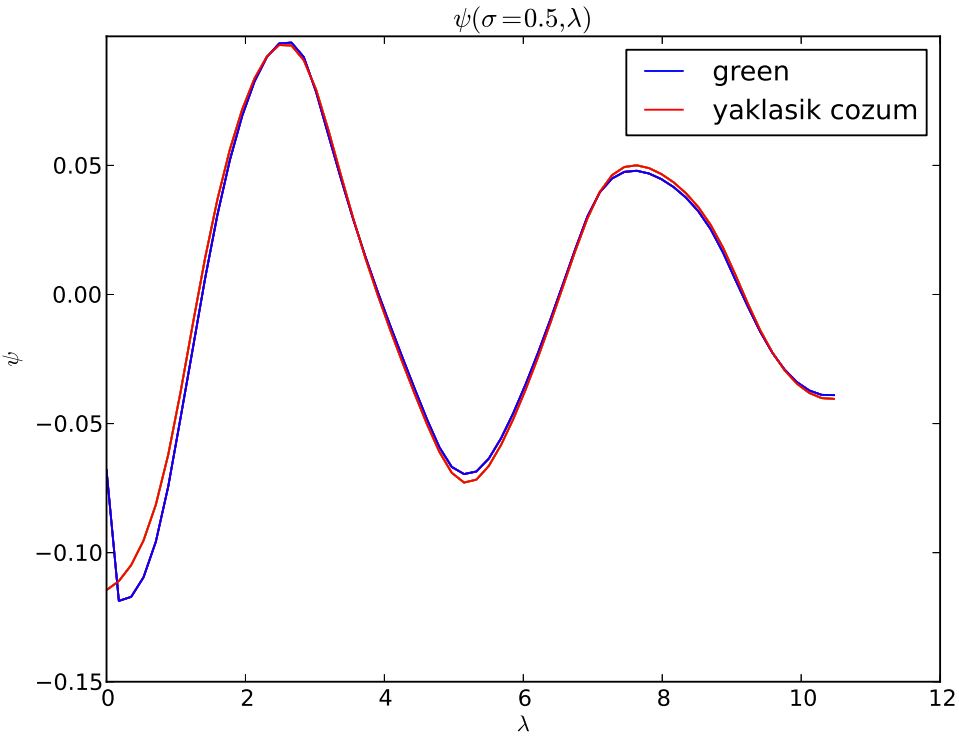
Şekil A.15: D=5 için Green yöntemi ile $\eta(x=0.5,t)$.



Şekil A.16: D=5 için Green yöntemi ile uzun süreli $\eta(x=0.5,t)$.



Şekil A.17: D=5 için Green yöntemi ile $\varphi(x=0.1,t)$.



Şekil A.18: D=20 için Green ve yaklaşık çözümün kıyaslanması.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Umut Canlı

E-Posta: u.canli@gmail.com

Lisans: İstanbul Teknik Üniversitesi, Fizik Mühendisliği, Şubat 2011

Y. Lisans: İstanbul Teknik Üniversitesi, Fizik Mühendisliği