İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİD UZAYLARININ SIFIRLI 2-TİPİNDEN YÜZEYLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat. Müh. Bilger KURTUL

Anabilim Dalı: MATEMATİK

Programı: MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

ŞUBAT 2006

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖKLİD UZAYLARININ SIFIRLI 2-TİPİNDEN YÜZEYLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Mat. Müh. Bilger KURTUL
(509021012)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 19 Aralık 2005
Tezin Savunulduğu Tarih: 01 Şubat 2006

Tez Danışmanı: **Doç. Dr. Uğur DURSUN**
Diğer Jüri Üyeleri: **Prof. Dr. Ayşe H. BİLGE (İTÜ)**
Prof. Dr. Aynur UYSAL (Bahçeşehir Ü.)

ŞUBAT 2006

ÖNSÖZ

Bu çalışmada bana yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Uğur Dursun'a ve her zaman desteğiyle yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Aralık, 2005 Bilger KURTUL

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ **iv**
ÖZET **v**
SUMMARY **vi**

1. GİRİŞ 1

2. ALT MANİFOLDLAR TEORİSİNE AİT BAZI TEMEL KAVRAMLAR 3

3. E^m ÖKLİD UZAYININ SONLU TİPTEN ALT MANİFOLDLARI 7

4. E^3 ÖKLİD UZAYININ SIFIRLI 2-TİPİNDEN YÜZEYLERİ 21

5. E^4 ÖKLİD UZAYININ SIFIRLI 2-TİPİNDEN YÜZEYLERİ 31

6. SONUÇ VE TARTIŞMALAR 46

KAYNAKLAR **47**
ÖZGEÇMİŞ **48**

SEMBOL LİSTESİ

$\bar{\nabla}$: Öklid Uzayının Konneksiyonu

∇ : Alt Manifoldun Riemann Konneksiyonu

ω_B^A : Konneksiyon Formları

h : İkinci Esas Form

A : Weingarten Tasviri

D : Normal Konneksiyon

Δ : Laplace Operatörü

λ : Özdeğer

Δ^D : Normal Konneksiyona Göre Laplace Operatörü

Γ : Christoffell Sembolü

H : Ortalama Eğrilik Vektörü

$a(H)$: Birleşik Ortalama Eğrilik Vektörü

TM : Teğet Vektör Demeti

$TM^{\perp}$: Normal Vektör Demeti

δ_{ij} : Kronecker Deltası

SIFIRLI 2-TİPİNDEN YÜZEYLER

ÖZET

Bu tez çalışmasında, E^m Öklid uzayının $(m = 3, 4)$ sıfırlı 2-tipinden yüzeyleri incelenmektedir. Sonlu tipten alt manifoldlar fikri, 1970 yıllarının sonlarına doğru B.Y. Chen tarafından ortaya atılmış ve alt manifoldlarla ilgili pek çok çalışmada kullanılabilir bir kavram olmuştur. Bu kavram minimal alt manifoldların doğal bir uzantısıdır. İyi biliniyor ki, E^m Öklid uzayının bir alt manifoldunun minimal olması için gerek ve yeter koşul E^m Öklid uzayının M alt manifolduna kısıtlanmış bütün koordinat fonksiyonlarının harmonik olmasıdır, yani minimal alt manifoldlar, M üzerinde tanımlı Δ Laplace operatörünün sıfır özdeğerine sahip özfonksiyonları tarafından oluşturulur.

Sıfırlı 2-tipinden alt manifoldlar ise Laplace operatörünün kesin olarak biri sıfır ve diğeri sıfırdan farklı olacak şekilde iki özdeğerine karşı gelen özfonksiyonları tarafından oluşturulur. E^3 Öklid uzayının sıfırlı 2-tipinden yüzeylerinin sınıflandırılması için şu sonuç ispatlanmıştır: E^3 Öklid uzayının sıfırlı 2-tipinden olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin bir çembersel silindirin açık bir parçası olmasıdır.

Bu çalışmada ayrıca, E^4 Öklid uzayının sıfırlı 2-tipinden yüzeyleri, ortalama eğrilik vektörünün paralel olup olmamasına göre incelenmektedir. E^4 Öklid uzayında bir M yüzeyinin, E^4 Öklid uzayının bir hiperdüzleminin içindeki bir çembersel silindirin açık bir parçası olması için gerek ve yeter koşulun M yüzeyinin sıfırlı 2-tipinden olması ve normalleştirilmiş ortalama eğrilik vektörünün paralel olması gerektiği gösterilmiştir. Ortalama eğrilik doğrultusunun paralel olmaması durumunda da E^4 Öklid uzayında bir M yüzeyinin bir helikal silindirin açık bir parçası olması için gerek ve yeter şartın M yüzeyinin sıfırlı 2-tipinden ve sabit ortalama eğriliğine sahip olması gerektiği ispatlanmıştır.

NULL 2-TYPE SURFACES

SUMMARY

In this thesis, we study the classification of null 2-type surfaces of Euclidean space E^3 and E^4. The notion of finite type submanifolds in Euclidean space E^m introduced by B.Y. Chen during late 1970's has become a usefull tool for investigation of submanifolds. The concept is the natural extension of minimal submanifolds. It is well-known that a submanifold M in E^m is minimal if and only if all coordinate functions of E^m restricted to M are harmonic functions, that is, minimal submanifolds constructed from eigenfunctions of the Laplacian Δ of M with one eigenvalue 0.

Null 2-type submanifolds of E^m are constructed by the eigenfunctions of the Laplacian induced on M with exactly two eigenvalues 0 and $\lambda\,(\neq 0)$. For the classification of null 2-type surface of E^3 it is proved that a surface M of E^3 is of null 2-type if and only if M is an open portion of a circular cylinder.

Furthermore, for surfaces of E^4, null 2-type surfaces are investigated according to the mean curvature vector is parallel or not. It is shown that a surface M in E^4 is an open portion of a circular cylinder in a hyperplane of E^4 if and only if M is a null 2-type surface with parallel normalized mean curvature vector. In the case, the mean curvature direction is not parallel. It is proved that a surface in E^4 is an open portion of a helical cylinder if and only if M is of null 2-type and M has constant mean curvature.

1. GİRİŞ

Sonlu tipten alt manifoldlar kavramı 1970'li yılların sonlarına doğru B.Y. Chen tarafından tanıtıldıktan sonra yoğun olarak geometri ile uğraşan pek çok kişi tarafından çalışılmış ve oldukça önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu kavram kullanılarak Öklid uzaylarının alt manifoldlarının bir çok karekterizasyonu verilmiş ve önemli sonuçlar bulunmuştur.

M, E^m Öklid uzayının n-boyutlu bir alt manifoldu olsun. M alt manifoldunun E^m Öklid uzayındaki x yer vektörü, $\Delta x_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, \ldots, k$ olmak üzere

$$x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k$$

şeklinde ayrıştırılabilirse M manifolduna sonlu tipten alt manifold denir, burada x_0 sabit bir vektör, $x_1, \ldots, x_k$ sabit olmayan tasvirler ve $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sıfır olmayan sabitlerdir. Eğer $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ özdeğerlerinin hepsi birbirinden farklı ise M manifolduna k-tipinden alt manifold denir. Eğer k sonsuz ise M sonsuz tipten alt manifold olur. Bununla beraber, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ özdeğerlerinden biri sıfır ise M manifolduna sıfırlı k-tipinden alt manifold denir. Örneğin, Öklid uzayının ve küresel uzayın minimal alt manifoldları 1-tipinden alt manifoldlardır.

Bu konudaki ilk sonuçlar, B.Y. Chen'in [1] kitabında toparlanmıştır. Yakın zamanda yapılmış olan daha geniş kapsamlı bir derleme yine B.Y. Chen'in [7] raporunda yayınlanmıştır. Bu konuda yapılmış olan çalışmalarla ilgili referansların büyük çoğunluğu [7] raporundan izlenebilir.

Bu tez çalışmasının amacı, sıfırlı 2-tipinden yüzeylerin sınıflandırılması ile ilgili B.Y. Chen'in [8] ve [9] makalelerini incelemektir. Sıfırlı 2-tipinden yüzeyler üzerine elde edilen bu sonuçlar, ilave bazı koşullar altında hiperyüzeylere [5] ve daha sonra alt manifoldlara genişletilmiştir [6].

Tezin ikinci bölümünde, daha sonra kullanılacak olan alt manifoldlar teorisine ait bazı temel tanım ve formüller verilmiştir.

Üçüncü bölümde, E^m Öklid uzayının sonlu tipten alt manifoldları tanıtılmış, bu alt manifoldların genel karekterizasyonunu veren temel teoremler ve bazı örnekler geniş bir şekilde incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, 3 boyutlu E^3 Öklid uzayının sıfırlı 2-tipinden yüzeyleri ele alınmıştır. Bu türden yüzeylerin sınıflandırılması şu şekilde ifade edilir: E^3 Öklid uzayında bir yüzeyin sıfırlı 2-tipinden olması için gerek ve yeter koşul bu yüzeyin bir çembersel silindirin açık bir parçasından ibaret olmasıdır.

Son bölümde, 4 boyutlu E^4 Öklid uzayının sıfırlı 2-tipinden yüzeyleri, ortalama eğrilik vektörünün paralel olup olmamasına göre incelenmiştir. Buna göre, E^4 Öklid uzayının sıfırlı 2-tipinden yüzeylerinin sınıflandırılması yapılmıştır. Bu sınıflandırma çerçevesinde, tamamen E^4 içinde kalan sıfırlı 2-tipinden yüzeyler için şu sonuç elde edilmiştir: E^4 Öklid uzayında bulunan bir yüzeyin sıfırlı 2-tipinden ve sabit ortalama eğriliğe sahip olması için gerek ve yeter koşul yüzeyin bir helikal silindirin bir açık parçası olmasıdır.

2. ALT MANİFOLDLAR TEORİSİNE AİT BAZI TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, Öklid uzayının alt manifoldlarına ait bazı temel tanım ve formüller verilmektedir. Bunlar, diğer bölümlerde sonlu tipten alt manifoldlar ile sıfırlı 2-tipinden alt manifoldların incelenmesinde kullanılacaktır.

M^n, m-boyutlu E^m Öklid uzayının n-boyutlu bir alt manifoldu olsun. M alt manifoldunun E^m içindeki teğet demeti ve normal demeti, sırasıyla, TM ve $TM^\perp$ ile gösterilsin. $X, Y \in TM$ ve $\xi \in TM^\perp$ olmak üzere M alt manifoldunun E^m Öklid uzayındaki Gauss ve Weingarten formülleri sırasıyla,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{2.1}$$

ve

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + D_X \xi \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır, burada h, A, D, ∇, ve $\bar{\nabla}$ büyüklükleri, sırasıyla, M alt manifoldunun ikinci esas formunu,Weingarten tasvirini, normal konneksiyonunu, Riemann konneksiyonunu ve E^{n+1} Öklid uzayının konneksiyonunu göstermektedir. Gauss ve Weingarten formülleri göz önüne alınırsa, $< \xi, Y >= 0$ ifadesinin X vektörüne göre türevinden, A Weingarten tasviri ile h ikinci esas formu arasındaki ilişkinin

$$< A_\xi(X), Y >=< h(X, Y), \xi > \tag{2.3}$$

olduğu görülür, burada $< , >$ ile M alt manifoldu üzerinde Öklid uzayının metriği tarafından indirgenmiş iç çarpımı gösterilmektedir.

Bununla beraber, E^m Öklid uzayının M alt manifoldu için Codazzi denklemi

$$(\nabla_X A)(Y, \xi) = (\nabla_Y A)(X, \xi) \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır, burada

$$(\nabla_X A)(Y,\xi) = \nabla_X(A_\xi Y) - A_\xi(\nabla_X Y) - A_{D_X\xi}Y.$$

E^m Öklid uzayının M alt manifoldunun $T^\perp M$ normal uzayının

$$\left\{A_\xi = 0 \,|\, \xi \in T^\perp M\right\}$$

alt kümesinin $T^\perp M$ normal uzayı içindeki bütünleyenine, M alt manifoldunun birinci normal uzayı denir ve $N_1(M)$ ile gösterilir.

M alt manifoldu üzerinde tanımlı E^m Öklid uzayının hareketli bir yerel baz alanı $e_1, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_{n+k}$ ile gösterilsin, öyle ki e_i $(i = 1, 2, ..., n)$ vektörleri M alt manifolduna teğet ve e_β $(\beta = n+1, ..., m)$ vektörleri de M alt manifolduna normal olsunlar. Bundan sonraki hesaplamalarda kullanılacak indisler için değişim aralıkları $1 \le i, j, k \le n$, $n+1 \le \beta, \nu, \gamma \le m$ ve $1 \le A, B, C \le m$ şeklinde alınacaktır.

M alt manifoldunun E^m Öklid uzayı içindeki ortalama eğrilik vektörü

$$H = \frac{1}{n}\sum_{\beta=n+1}^{m} tr(A_{e_\beta})\, e_\beta \tag{2.5}$$

ile tanımlanır. Bununla beraber, M üzerinde ortalama eğriliğin sıfırdan farklı olduğu noktalarda birleşik ortalama eğrilik vektörü

$$a(H) = \sum_{\beta=n+2}^{m} tr(A_H A_\beta) e_\beta \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır, burada $A_\beta = A_{e_\beta}$'dır. Karşıt boyutun bir olduğu durumda veya ortalama eğriliğin sıfır olduğu noktalarda $a(H)$ sıfır vektör olarak tanımlanır.

M alt manifoldu üzerine indirgenmiş ∇ konneksiyonuna göre M alt manifoldunun Laplace operatörü

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i} e_i - e_i e_i) \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır. Laplace operatörünün yerel koordinatlardaki ifadesi

$$\Delta = -\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{x_k} \right) \tag{2.8}$$

olarak yazılır, burada g^{ij} ifadesi M alt manifoldu üzerindeki indirgenmiş g_{ij} metriğinin tersinin bileşenlerini ve Γ_{ij}^{k} büyüklükleri de Christoffell fonksiyonlarını göstermektedir ve

$$\Gamma_{ij}^{k}=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{2}g^{kr}\left(\frac{\partial g_{jr}}{\partial x_i}+\frac{\partial g_{ri}}{\partial x_j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}\right) \tag{2.9}$$

şeklinde tanımlanır.

Yukarıda seçilmiş olan $\{e_1,...,e_m\}$ ortonormal yerel baz alanının dual bazı $\{\omega^1,...,\omega^m\}$ ile gösterilsin. Ayrıca, $\{e_1,...,e_m\}$ bazına bağlı olan konneksiyon formları da (ω_B^A) ile gösterilsin. Dolayısıyla, $\{e_1,...,e_m\}$ bazına göre M alt manifoldunun indirgenmiş konneksiyonu ve normal konneksiyonu sırasıyla,

$$\nabla_{e_i}e_j=\sum_{k=1}^{n}\omega_j^k(e_i)e_k \tag{2.10}$$

ve

$$D_{e_i}e_\beta=\sum_{\gamma=n+1}^{m}\omega_\beta^\gamma(e_i)\,e_\gamma \tag{2.11}$$

şeklinde yazılabilir. Bununla beraber, $e_1,...,e_n$ vektörleri M alt manifolduna teğet olduğu için ω^β formlarının M üzerine kısıtlanmışı sıfırdır, yani, $\omega^\beta=0,\ \beta=n+1,...,m$. E^{n+k} Öklid uzayının yapı denklemlerinden ve Cartan'ın formlarla ilgili yardımcı teoreminden

$$\omega_i^\beta=\sum_{j=1}^{n}h_{ij}^\beta\,\omega^j,\quad h_{ij}^\beta=h_{ji}^\beta \tag{2.12}$$

yazılabilir, burada h_{ij}^β katsayıları e_β normal vektörü doğrultusundaki ikinci esas formun bileşenleridir. Ayrıca, M alt manifoldu üzerinde $\{e_1,...,e_m\}$ bazına göre yapı denklemleri

$$d\omega^i=\sum_{j=1}^{n}\omega^j\wedge\omega_j^i,\quad \omega_i^j=-\omega_j^i, \tag{2.13}$$

Gauss denklemi

$$d\omega_i^j=\sum_{k=1}^{n}\omega_i^k\wedge\omega_k^j+\sum_{\beta=n+1}^{m}\omega_i^\beta\wedge\omega_\beta^j, \tag{2.14}$$

Codazzi denklemi

$$d\omega_i^\beta=\sum_{k=1}^{n}\omega_i^k\wedge\omega_k^\beta+\sum_{\nu=n+1}^{m}\omega_i^\nu\wedge\omega_\nu^\beta \tag{2.15}$$

ve Ricci denklemi

$$d\omega_\nu^\beta = \sum_{i=1}^{n} \omega_\nu^i \wedge \omega_i^\beta + \sum_{\gamma=n+1}^{m} \omega_\nu^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{2.16}$$

şeklinde yazılır.

Burada verilen tanımlar, [1], [3] ve [4] kaynaklarından izlenebilir.

3. E^m ÖKLİD UZAYININ SONLU TİPTEN ALT MANİFOLDLARI

Bu bölümde, E^m Öklid uzayının sonlu tipten alt manifoldları tanıtılmıştır. Bu alt manifoldların genel karekterizasyonunu veren temel teoremler ve bazı örnekler geniş bir şekilde incelenmiştir.

M, E^m Öklid uzayının n-boyutlu bir alt manifoldu olsun. M alt manifoldunun E^m Öklid uzayındaki x yer vektörü, $\Delta x_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1, \ldots, k$ olmak üzere

$$x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k \tag{3.1}$$

şeklinde ayrıştırılabilirse M manifolduna sonlu tipten alt manifold denir, burada x_0 sabit bir vektör, $x_1, \ldots, x_k$ sabit olmayan tasvirler ve $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sıfır olmayan sabitlerdir. Eğer $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ özdeğerlerinin hepsi birbirinden farklı ise M manifolduna k-tipinden alt manifold denir. Bununla beraber, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ özdeğerlerinden biri sıfır ise M manifolduna sıfırlı k-tipinden alt manifold denir.

Teorem 3.1. [2] M, E^m Öklid uzayının daldırılmış bir alt manifoldu olsun. M manifoldunun sonlu tipten olabilmesi için gerek ve yeter koşul H ortalama eğrilik vektörünün

$$\Delta^k H + c_1 \Delta^{k-1} H + \cdots + c_{k-1} \Delta H + c_k H = 0$$

diferansiyel denklemini sağlamasıdır, burada $c_1, \cdots, c_k$ sabitler ve $k \geq 1$.

Teorem 3.2. [2] M, E^m Öklid uzayının daldırılmış bir alt manifoldu olsun. M manifoldunun k-tipinden $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$P(\Delta) H = 0$$

olacak şekilde k tane farklı pozitif köke sahip bir $P(t)$ polinomunun var olmasıdır.

Alt manifoldun x yer vektörü ve ortalama eğrilik vektörü H arasında iyi bilinen

$$\Delta x = -nH \tag{3.2}$$

bağıntısı vardır. M alt manifoldunun minimal ($H = 0$) olabilmesi için gerek ve yeter koşul E^m Öklid uzayının tüm koordinat fonksiyonlarının harmonik fonksiyon olmasıdır, yani $\Delta x = 0$.

Önerme 3.1. [2] M, bir kompak Riemann manifoldu olmak üzere $x\colon M \to E^m$ bir izometrik daldırma olsun. x yer vektörünün 1-tipinden olabilmesi için gerek ve yeter koşul M manifoldunun E^m Öklid uzayında yer alan bir hiperkürenin minimal alt manifoldu olmasıdır.

M, orjin merkezli bir $S_O^{m-1}(r)$ hiperkürenin kompak minimal alt manifoldu ise

$$\Delta x = \lambda_q x \tag{3.3}$$

sağlanır, burada λ_q sabitlerdir. (3.2) ve (3.3) denklemleri kullanılarak

$$\Delta H = \lambda_q H \tag{3.4}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.1. [9] M, E^m Öklid uzayının bir alt manifoldu olsun. $\Delta H = cH$ olacak şekilde bir $c \neq 0$ sabiti varsa, M alt manifoldu ya 1-tipindendir ya da sıfırlı 2-tipindendir.

İspat: $c \neq 0$ olmak üzere, $\Delta H = cH$ olduğu kabul edilsin. M bir küresel alt manifold ise küresel minimal olmak zorundadır dolayısıyla 1-tipindendir. Şimdi $x_q = \frac{1}{c}\Delta x$ ve $x_0 = x - x_q$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\Delta x_0 =& \Delta x - \Delta x_q \\
=& -nH - \frac{1}{c}\,\Delta(\Delta x) \\
=& -nH - \frac{1}{c}\,\Delta(-nH) \\
=& -nH + \frac{n}{c}\,\Delta H \\
=& -nH + \frac{n}{c}\,(cH) \\
=& 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} x_q =& \frac{1}{c}\,\Delta(x_0 + x_q) \\ =& \frac{1}{c}\,(\Delta x_0 + \Delta x_q) \\ =& \frac{1}{c}\,\Delta x_q \end{aligned}$$

eşitliğinden $\Delta x_q = c x_q$ olduğu bulunarak ispat tamamlanır. □

Örnek 3.1. E^4 Öklid uzayında $T^2 = S^1(a) \times S^1(b) \subset E^4$ torusunun yer vektörü

$$x = x(r,s) = (a\,\cos\frac{r}{a},\, a\,\sin\frac{r}{a},\, b\,\cos\frac{s}{b},\, b\,\sin\frac{s}{b})$$

şeklinde yazılabilir. T^2 torusunun E^4 içinde sonlu tipten ve hatta 2-tipinden olduğu gösterilebilir. T^2 torusunun koordinat vektörleri

$$x_r = (-\sin\frac{r}{a},\, \cos\frac{r}{a},\, 0,\, 0) \qquad x_s = (0,\, 0,\, -\sin\frac{s}{b},\, \cos\frac{s}{b})$$

şeklindedir. $e_1 = \frac{\partial}{\partial r}$ ve $e_2 = \frac{\partial}{\partial s}$ olsun. Açık olarak görülür ki, e_1, e_2 teğet uzay için ortonormal bir baz teşkil eder, yani $g_{ij} =< e_i, e_j >= \delta_{ij}$. Bununla beraber,

$$\eta_1 = (0,\, 0,\, \cos\frac{s}{b},\, \sin\frac{s}{b}),\;\; \eta_2 = (\cos\frac{r}{a},\, \sin\frac{r}{a},\, 0,\, 0)$$

vektörleri T^2 torus yüzeyinin normal uzayının ortonormal bir bazıdır, yani $< \eta_i, \eta_j >= \delta_{ij}$. (2.2) Weingarten Formülü kullanılarak

$$\bar{\nabla}_{e_1}\eta_1 = \frac{\partial \eta_1}{\partial r} = 0, \quad \bar{\nabla}_{e_2}\eta_1 = \frac{\partial \eta_1}{\partial s} = -\frac{1}{b}e_2$$

$$\bar{\nabla}_{e_2}\eta_2 = \frac{\partial \eta_2}{\partial s} = 0, \quad \bar{\nabla}_{e_1}\eta_2 = \frac{\partial \eta_2}{\partial r} = -\frac{1}{a}e_1$$

elde edilir, burada $\bar{\nabla}$, E^4 Öklid uzayının konneksiyonunu göstermektedir. Bulunan bu denklemlerden

$$A_{\eta_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

ve

$$A_{\eta_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde Weingarten tasvirleri belirlenir. Bununla beraber, hesaplanan bu konneksiyonlardan, T^2 torus yüzeyinin D normal konneksiyonunun sıfır olduğu anlaşılır. Ayrıca, $g_{ij} = \delta_{ij}$ olduğundan T^2 uzayının eğrilik tensörü sıfırdır. Böylece, T^2 torusu düz bir yüzeydir. Dolayısıyla, (2.5) formülünden T^2 torusunun ortalama eğrilik vektörü

$$\begin{aligned} H =& \frac{1}{2}\left[(trA_{\eta_1})\eta_1 + (trA_{\eta_2})\eta_2\right] \\ =& \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{b}\,(0,\,0,\,\cos\frac{s}{b},\,\sin\frac{s}{b}) - \frac{1}{a}\,(\cos\frac{r}{a},\,\sin\frac{r}{a},\,0,\,0)\right] \\ =& -\frac{1}{2}\,(\frac{1}{a}\,\cos\frac{r}{a},\,\frac{1}{a}\,\sin\frac{r}{a},\,\frac{1}{b}\,\cos\frac{s}{b},\frac{1}{b}\,\sin\frac{s}{b}) \end{aligned}$$

elde edilir. T^2 torusunun metriği $g_{ij} = \delta_{ij}$ olduğundan (2.9) Christoffell sembolleri $\Gamma_{ij}^k = 0$ olur. Böylece, (2.8) denklemi ile yerel koordinatlarda verilen Laplace operatörü

$$\Delta = -(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2})$$

şeklinde bulunur. Laplace operatörü, H ortalama eğrilik vektörüne uygulanırsa

$$\Delta H = \frac{1}{2}\,(-\frac{1}{a^3}\,\cos\frac{r}{a},\,-\frac{1}{a^3}\,\sin\frac{r}{a},\,-\frac{1}{b^3}\,\cos\frac{s}{b},-\frac{1}{b^3}\,\sin\frac{s}{b})$$

ve

$$\Delta^2 H = -\frac{1}{2}\,(\frac{1}{a^5}\,\cos\frac{r}{a},\,\frac{1}{a^5}\,\sin\frac{r}{a},\,\frac{1}{b^5}\,\cos\frac{s}{b},\frac{1}{b^5}\,\sin\frac{s}{b})$$

elde edilir. Teorem 3.1 göz önüne alınarak, H, ΔH ve $\Delta^2 H$ denklemlerinin

$$\Delta^2 H + c_1\,\Delta H + c_2\,H = 0 \tag{3.5}$$

bağıntısını sağladığı, yani c_1 ve c_2 gibi iki sabitin var olduğu gösterilebilir. Bulunan H, ΔH ve $\Delta^2 H$ vektörleri (3.5) denkleminde yerine koyulduğunda

$$c_2 + \frac{1}{a^2}\,c_1 + \frac{1}{a^4} = 0, \quad c_2 + \frac{1}{b^2}\,c_1 + \frac{1}{b^4} = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu iki denklemin çözümünden

$$c_1 = -(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}),\;\; c_2 = \frac{1}{a^2\,b^2}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\Delta^2 H - (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})\,\Delta H + \frac{1}{a^2\,b^2}\,H = 0 \tag{3.6}$$

elde edilir. Dolayısıyla, Teorem 3.1'e göre T^2 torusu sonlu tiptendir. Ayrıca, (3.6) denkleminden

$$P(t) = t^2 - (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2})t + \frac{1}{a^2\, b^2}$$

polinomu yazılabilir. $a \neq b$ olduğu taktirde $P(t)$ polinomunun $\frac{1}{a^2}$ ve $\frac{1}{b^2}$ gibi iki farklı kökü vardır. Sonuç olarak, Teorem 3.2'ye göre T^2 torusu 2-tipindendir. $a = b$ olması durumunda T^2 torusu S^3 küresi içinde minimal olur ve 1-tipindendir.

Örnek 3.2. E^3 Öklid uzayında çembersel silindirin sıfırlı 2-tipinden olduğunu gösteriniz.

E^3 Öklid uzayında bir M çembersel silindirinin yer vektörü yerel koordinatlarda

$$x(u, v) = (a\cos u, a\sin u, v)$$

şeklinde yazılabilir. Silindir yüzeyinin teğet vektörleri

$$x_u = (-a\sin u, a\cos u, 0) \quad x_v = (0, 0, 1)$$

bulunur. Çembersel silindirin, ortalama ve Gauss eğriliğinin sabit olduğu bilinmektedir. Silindirin sıfırlı 2-tipinden olduğu gösterilsin.

$$g_{11} =< x_u, x_u >,\ g_{22} =< x_v, x_v >,\ g_{12} =< x_u, x_v >$$

iç çarpımları alınırsa

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bulunur. Buna göre,

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. (2.8) denkleminden Laplace operatörü

$$\begin{aligned} \Delta &= -\,[g^{11}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + g^{22}\frac{\partial^2}{\partial v^2}] \\ &= -\,\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2}{\partial v^2} \end{aligned}$$

olarak yazılır. Şimdi,

$$x_0 = (0, 0, v), \;\; x_q = (a\cos u, a\sin u, 0)$$

olsun. Δ Laplace operatörü x_0 ve x_q vektörlerine uygulanırsa

$$\Delta x_0 = (-\tfrac{1}{a^2}\,\tfrac{\partial^2}{\partial u^2} - \tfrac{\partial^2}{\partial v^2})\,(0, 0, v) = (0, 0, 0)$$

$$\Delta x_q = (-\tfrac{1}{a^2}\,\tfrac{\partial^2}{\partial u^2} - \tfrac{\partial^2}{\partial v^2})\,(a\cos u, a\sin u, 0) = \tfrac{1}{a^2}(a\cos u, a\sin u, 0) = \tfrac{1}{a^2}x_q$$

olduğu görülür. Böylece,

$$x = x_0 + x_q, \;\; \Delta x_0 = 0, \;\; \Delta x_q = \frac{1}{a^2}x_q$$

şeklinde yazılabildiğinden, M çembersel silindiri sıfırlı 2-tipinden bir yüzeydir.

M, E^m Öklid uzayının n-boyutlu bir alt manifoldu olsun. h, A, H, ∇ ve D sırasıyla M alt manifoldunun ikinci esas formu, Weingarten tasviri, ortalama eğrilik vektörü, Riemann konneksiyonu ve normal konneksiyonunu göstersin. Eğer $DH = 0$ ise M alt manifoldu paralel ortalama eğrilik vektörüne sahiptir. Δ^D ile M alt manifoldunun D normal konneksiyonuna göre Laplace operatörü gösterilsin, yani

$$\Delta^D H = \sum_{i=1}^{n}(\, D_{\nabla_{e_i} e_i} H - D_{e_i} D_{e_i} H). \tag{3.7}$$

M alt manifoldu üzerinde tanımlı (1,2)-tipinden ∇A_H ve A_{DH} tensörleri göz önüne alınsın ve

$$\bar{\nabla} A_H = \nabla A_H + A_{DH} \tag{3.8}$$

eşitliğine göre

$$\begin{aligned} tr\,(\bar{\nabla} A_H) =& tr\,\nabla A_H + tr\,A_{DH} \\ =& \sum_{i=1}^{n}[(\nabla_{e_i} A_H)e_i + A_{D_{e_i}H} e_i] \end{aligned} \tag{3.9}$$

şeklindedir.

Yardımcı Teorem 3.2. [2] M, E^m Öklid uzayının n-boyutlu bir alt manifoldu olsun. M alt manifoldunun ortalama eğrilik vektörünün Laplace operatörü

$$\Delta H = \Delta^D H + ||A_{n+1}||^2\, H + a(H) + tr\,(\bar{\nabla} A_H) \tag{3.10}$$

şeklinde belirlenir.

İspat: X ve Y, M manifoldunun teğet vektör alanları ve c, E^m Öklid uzayında sabit bir vektör olsun. $< H, c >$ iç çarpımı M manifoldu üzerinde diferansiyellenebilir bir fonksiyondur. (2.2) Weingarten formülüne göre

$$\begin{aligned} X < H, c > &= < \bar{\nabla}_X H, c > \\ &= - < A_H X, c > + < D_X H, c > \end{aligned} \tag{3.11}$$

bulunur.

$$YX < H, c > = Y < \bar{\nabla}_X H, c >$$

ifadesi (2.1) Gauss ve (2.2) Weingarten formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned} YX < H, c > = & - < \nabla_Y (A_H X), c > - < h(Y, A_H X), c > \\ & - < A_{D_X H} Y, c > + < D_Y D_X H, c > \end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklinde elde edilir. Laplace operatörünün (2.7) tanımına göre

$$\begin{aligned} \Delta < H, c > &= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} < H, c > - \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} < H, c > \\ &= \sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i} e_i \ < H, c > - \sum_{i=1}^{n} e_i (e_i < H, c >) \end{aligned} \tag{3.13}$$

bulunur. (3.11) ve (3.12) denklemleri e_i vektörleri için kullanılarak (3.13) denklemi

$$\begin{aligned} \Delta < H, c > = & < \Delta^D H, c > - < A_H (\nabla_{e_i} e_i), c > + < \nabla_{e_i} (A_H e_i), c > \\ & + < h(e_i, A_H e_i), c > + < A_{D_{e_i} H} e_i, c > \end{aligned} \tag{3.14}$$

yazılır, burada (3.7) ile belirtilen $\Delta^D H$ ifadesi, H ortalama eğrilik vektörünün D normal konneksiyonuna göre Laplace operatörünü göstermektedir. (3.14) denklemi her c sabit vektörü için doğru olduğundan

$$\begin{aligned} \Delta H &= \Delta^D H + \sum_{i=1}^{n} [h(e_i, A_H e_i) + A_{D_{e_i} H} e_i + \nabla_{e_i} (A_H e_i) - A_H (\nabla_{e_i} e_i)] \\ &= \Delta^D H + \sum_{i=1}^{n} [h(e_i, A_H e_i) + A_{D_{e_i} H} e_i + (\nabla_{e_i} A_H) e_i] \end{aligned} \tag{3.15}$$

elde edilir. $e_{n+1}, ..., e_m$ vektörleri M alt manifoldunun normal uzayının bir ortonormal bazı ve e_{n+1} vektörü H ortalama eğrilik vektörüne paralel olsun. Dolayısıyla,

$$\sum_{i=1}^{n} h(e_i, A_H e_i) = ||A_{n+1}||^2 H + a(H) \tag{3.16}$$

elde edilir. (3.9) ve (3.16) denklemleri, (3.15) denkleminde yerine koyulursa (3.10) eşitliği bulunur. □

Yardımcı Teorem 3.3. M, E^m Öklid uzayının n-boyutlu bir alt manifoldu olsun. Dolayısıyla,

$$tr(\bar{\nabla} A_H) = \frac{n}{2} \nabla\alpha^2 + 2trA_{DH}, \tag{3.17}$$

burada $\alpha^2 =< H, H >$ ve $\nabla\alpha^2$, α^2'nin gradiyentini göstermektedir.

İspat: Daha önce kabul edildiği gibi $e_1, ..., e_n$ ortonormal vektörleri, $(\xi = e_{n+1})$ A_ξ Weingarten tasvirinin özvektörleri ve $H = \alpha\xi$ olsun. Buna göre, (2.5) ortalama eğrilik vektör tanımındaki $tr(A_{e_\beta})$ ifadeleri $\beta = n+2, ..., m$ için sıfırdır, yani $tr(A_{e_\beta}) = tr(h_{ij}^{\beta}) = 0$. Ayrıca $e_1, ..., e_n$ vektörlerinin seçiminden dolayı

$$A_\xi(e_i) = \kappa_i e_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{3.18}$$

Bununla beraber, $A_H(e_i) = \alpha\kappa_i e_i$ olur. Bu ifade ile (2.10) kullanılarak

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_i} A_H)e_i =& \nabla_{e_i}(A_H e_i) - A_H(\nabla_{e_i} e_i) - A_{D_{e_i}H} e_i \\ =& e_i(\alpha)\kappa_i e_i + \alpha e_i(\kappa_i) e_i + \alpha \sum_{k=1}^{n} (\kappa_i - \kappa_k)\omega_i^k(e_i) e_k \end{aligned} \tag{3.19}$$

elde edilir. Bir hiperyüzeyde birim normal vektör için $D_X\xi = 0$ olur. (2.4) ile belirlenen Codazzi denklemi e_i, e_j ve ξ ortalama eğrilik doğrultusu için düzenlenirse, $i \neq j$ için

$$\begin{aligned} A_{D_{e_i}\xi} e_j - A_{D_{e_j}\xi} e_i =& e_i(\kappa_j) e_j - e_j(\kappa_i) e_i \\ &+ \sum_{k=1}^{n} [(\kappa_j - \kappa_k)\omega_j^k(e_i) + (\kappa_k - \kappa_i)\omega_i^k(e_j)] e_k \end{aligned} \tag{3.20}$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının e_i vektörü ile iç çarpımı alınırsa

$$(\kappa_i - \kappa_j)\omega_i^j(e_i) = e_j(\kappa_i) + < A_{D_{e_i}\xi} e_j, e_i > - < A_{D_{e_j}\xi} e_i, e_i > \tag{3.21}$$

bulunur. Şimdi, (3.21) denklemi, (3.19) denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}A_H)e_i = \sum_{i=1}^{n} e_i(\alpha)\kappa_i e_i + \sum_{i=1}^{n}\alpha e_i(\kappa_i)e_i + \sum_{i\neq k,\, i,k=1}^{n}\alpha e_i(\kappa_k)e_i \qquad (3.22)$$
$$+\alpha\sum_{i,k=1}^{n} < A_{D_{e_k}\xi}e_i, e_k > e_i - \alpha\sum_{i,k=1}^{n} < A_{D_{e_i}\xi}e_k, e_k > e_i$$

bulunur. $< A_\xi X, Y >=< X, A_\xi Y >$ eşitliği kullanılırsa (3.22) denklemindeki dördüncü terimin

$$\sum_{i,k=1}^{n} < A_{D_{e_k}\xi}e_i, e_k > e_i = \sum_{k=1}^{n} A_{D_{e_k}\xi}e_k$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, (3.22) denklemindeki birinci ve dördüncü terimin toplamı $tr(A_{DH})$ ifadesine eşit olur. Ayrıca, ikinci ve üçüncü terimlerin toplamı da $\alpha n\nabla\alpha$ ifadesini verir. Bunlar göz önüne alındığında (3.22) denklemi

$$\sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}A_H)e_i = tr(A_{DH}) + n\alpha\nabla\alpha - \sum_{i,k=1}^{n}\alpha < A_{D_{e_i}\xi}e_k, e_k > e_i \qquad (3.23)$$

şeklinde bulunur. (2.11) ifadesi kullanılarak ξ vektörünün normal konneksiyona göre türevi, normal uzayın baz vektörleri cinsinden yazılırsa

$$D_{e_i}\xi = \sum_{\beta=n+1}^{m} \omega_{n+1}^{\beta}(e_i)\, e_\beta.$$

olur. Bu ifade göz önüne alındığında, $\sum_{k=1}^{n} < A_{e_\beta}e_k, e_k >= trA_{e_\beta} = 0$ olduğundan (3.23) denklemindeki son terim sıfır olur. Sonuç olarak, $\sum_{i=1}^{n} A_{D_{e_i}H}e_i = tr(A_{DH})$ ve (3.23) denklemleri (3.9) ifadesinde yerine koyulur ve (3.17) denklemi elde edilir, bu şekilde ispat tamamlanır. □

Yardımcı Teorem 3.1 ve Yardımcı Teorem 3.3 kullanılarak aşağıdaki Yardımcı Teorem ifade edilir.

Yardımcı Teorem 3.4. [9] M, E^m Öklid uzayının n-boyutlu 1-tipinden olmayan bir alt manifoldu olsun. M alt manifoldunun sıfırlı 2-tipinden olması için gerek ve yeter koşul

$$tr(\bar{\nabla}A_H) = 0 \qquad (3.24)$$

ve

$$\Delta^D H + ||A_{n+1}||^2 H + a(H) = cH, \;\; c \neq 0 \tag{3.25}$$

olmasıdır.

$e_1, ..., e_n$ vektörleri M alt manifoldunun ortonormal teğet vektör alanları, $e_{n+1}, ..., e_m$ normal vektör alanları olsun, öyle ki $e_{n+1} = \frac{H}{\alpha}$.

Yardımcı Teorem 3.5. [9] M, E^m Öklid uzayının n-boyutlu bir alt manifoldu olsun. Ortalama eğrilik vektörünün D normal konneksiyonuna göre Laplace operatörü

$$\begin{aligned} \Delta^D H =& [\Delta\alpha + \alpha < De_{n+1}, De_{n+1} >] e_{n+1} \\ &+ \sum_{r=n+2}^{m} [\alpha < De_{n+1}, De_r > -2\omega_{n+1}^r (\nabla\alpha) - \alpha\, tr(\nabla\omega_{n+1}^r)] e_r \end{aligned} \tag{3.26}$$

şeklindedir.

İspat: Bunun için (3.7) denklemi ile tanımlı $\Delta^D H$ ifadesinin terimleri hesaplanır. $H = \alpha e_{n+1}$ olmak üzere, (2.11) denklemi kullanılarak (3.7) denkleminin ilk terimi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} D_{\nabla_{e_i} e_i} H =& D_{\nabla_{e_i} e_i}(\alpha e_{n+1}) \\ =& \nabla_{e_i} e_i(\alpha)\, e_{n+1} + \alpha\, D_{\nabla_{e_i} e_i} e_{n+1} \\ =& (\nabla_{e_i} e_i)(\alpha)\, e_{n+1} + \alpha \sum_{r=n+2}^{m} \omega_{n+1}^r (\nabla_{e_i} e_i) e_r \end{aligned} \tag{3.27}$$

eşitliği bulunur. $D_{e_i} H = e_i(\alpha)\, e_{n+1} + \alpha D_{e_i} e_{n+1}$ ifadesi kullanılarak (3.7) denkleminin ikinci terimi hesaplanırsa

$$\begin{aligned} D_{e_i}(D_{e_i} H) =& e_i e_i(\alpha) e_{n+1} + e_i(\alpha)\, D_{e_i} e_{n+1} \\ &+ e_i(\alpha)\, D_{e_i} e_{n+1} + \alpha\, D_{e_i}(D_{e_i} e_{n+1}) \end{aligned} \tag{3.28}$$

elde edilir. $\beta = n+1$ için (2.11) denklemine D_{e_i} uygulandığında

$$\begin{aligned} D_{e_i}(D_{e_i}e_{n+1}) =& D_{e_i}(\sum_{r=n+1}^{m} \omega_{n+1}^{r}(e_i)\, e_r) \\ &= \sum_{r=n+1}^{m} [e_i(\omega_{n+1}^{r}(e_i))e_r + \omega_{n+1}^{r}(e_i) D_{e_i}e_r] \\ &= \sum_{r=n+1}^{m} e_i(\omega_{n+1}^{r}(e_i))e_r + \sum_{\gamma,\, r=n+1}^{m} \omega_{n+1}^{r}(e_i)\, \omega_{r}^{\gamma}(e_i)e_\gamma \end{aligned} \tag{3.29}$$

bulunur. (3.27), (3.28) ve (3.29) denklemleri kullanılarak (3.7) denklemi

$$\begin{aligned} \Delta^D H =& \sum_{i=1}^{n} (D_{\nabla_{e_i}e_i}H - D_{e_i}D_{e_i}H) \\ =& \sum_{i=1}^{n} [(\nabla_{e_i}e_i)(\alpha)\, e_{n+1} + \alpha \sum_{r=n+2}^{m} \omega_{n+1}^{r}(\nabla_{e_i}e_i)e_r \\ &- e_ie_i(\alpha)\, e_{n+1} - 2e_i(\alpha) \sum_{r=n+2}^{m} \omega_{n+1}^{r}(e_i)\, e_r \\ &- \alpha \sum_{r=n+2}^{m} e_i(\omega_{n+1}^{r}(e_i))\, e_r - \alpha \sum_{\gamma,r=n+1}^{m} \omega_{n+1}^{r}(e_i)\, \omega_{r}^{\gamma}(e_i)\, e_\gamma] \end{aligned} \tag{3.30}$$

şekline dönüşür. (3.30) denkleminin terimleri düzenlenecek olursa

$$2e_i(\alpha) \sum_{r=n+2}^{m} \omega_{n+1}^{r}(e_i)\, e_r = 2 \sum_{r=n+2}^{m} \omega_{n+1}^{r}(e_i(\alpha)\, e_i)e_r, \tag{3.31}$$

$$\nabla\alpha = \sum_{i=1}^{n} e_i(\alpha)e_i \tag{3.32}$$

ve (2.7) Laplace operatörü tanımına göre

$$\Delta\alpha = \sum_{i=1}^{n} [(\nabla_{e_i}e_i)(\alpha) - e_i(e_i\alpha)] \tag{3.33}$$

olarak yazılır. (2.11) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} < De_{n+1}, De_{n+1} > =& \sum_{i=1}^{n} < D_{e_i}e_{n+1}, D_{e_i}e_{n+1} > \\ =& \sum_{i=1}^{n} < \sum_{r=n+2}^{m} \omega_{n+1}^{r}(e_i)e_r, \sum_{r=n+2}^{m} \omega_{n+1}^{r}(e_i)e_r > \end{aligned}$$

şeklinde yazılan bu ifade, (3.30) denkleminin son teriminin düzenlenmesi için kullanılırsa

$$\begin{aligned}-\alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{\gamma,r=n+1}^{m} \omega_{n+1}^{r}(e_i)\,\omega_{r}^{\gamma}(e_i)\,e_\gamma =& -\alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=n+1}^{m} \omega_{n+1}^{r}(e_i)\,\omega_{r}^{n+1}(e_i)\,e_{n+1} \\ & -\alpha \sum_{i=1}^{n} \sum_{\gamma,r=n+2}^{m} \omega_{n+1}^{r}(e_i)\,\omega_{r}^{\gamma}(e_i)\,e_\gamma \\ =&\alpha \,<De_{n+1}, De_{n+1}>\, e_{n+1} \\ & +\alpha \sum_{\gamma=n+2}^{m} <De_{n+1}, De_\gamma>\, e_\gamma \end{aligned} \tag{3.34}$$

yazılır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} tr(\nabla\omega_{n+1}^{r}) =& \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{e_i}\omega_{n+1}^{r})\,e_i \\ =& \sum_{i=1}^{n} [e_i(\omega_{n+1}^{r}(e_i)) - \omega_{n+1}^{r}(\nabla_{e_i}e_i)] \end{aligned} \tag{3.35}$$

olmak üzere (3.31), (3.32), (3.33), (3.34) ve (3.35) denklemleri (3.30) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\Delta^D H =& \sum_{i=1}^{n}[\Delta\alpha\, e_{n+1} - 2\sum_{r=n+2}^{m} \omega_{n+1}^{r}(\nabla\alpha)\,e_r + \alpha \sum_{r=n+2}^{m} \omega_{n+1}^{r}(\nabla_{e_i}e_i)e_r \\ & -\alpha \sum_{r=n+2}^{m} e_i(\omega_{n+1}^{r}(e_i))e_r - \alpha \sum_{\gamma,r=n+1}^{m} \omega_{n+1}^{r}(e_i)\,\omega_{r}^{\gamma}(e_i)\,e_\gamma] \\ =&(\Delta\alpha + \alpha \,<De_{n+1}, De_{n+1}>)e_{n+1} \\ & +\sum_{r=n+2}^{m} [\alpha \,<De_{n+1}, De_r> -2\omega_{n+1}^{r}(\nabla\alpha) - \alpha\, tr(\nabla\omega_{n+1}^{r})]e_r \end{aligned}$$

(3.26) eşitliği elde edilir. □

Yardımcı Teorem 3.5 kullanılarak Yardımcı Teorem 3.4 yeniden şu şekilde ifade edilebilir.

Yardımcı Teorem 3.6. M, E^m Öklid uzayının n-boyutlu, 1-tipinden olmayan bir alt manifoldu olsun. M alt manifoldunun sıfırlı 2-tipinden olması için gerek ve yeter koşul

$$tr(\bar{\nabla}A_H) = 0, \tag{3.36}$$

$$\alpha\, tr(A_{n+1}A_r) = 2\omega^r_{n+1}(\nabla\alpha) + \alpha\, tr(\nabla\omega^r_{n+1}) - \alpha < De_{n+1}, De_r > \tag{3.37}$$

$r = n+2, ..., m$ ve

$$\Delta\alpha = c\alpha - ||A_{n+1}||^2\alpha - \alpha < De_{n+1}, De_{n+1} > \tag{3.38}$$

(c sıfırdan farklı bir sabit) olmasıdır.

İspat: $a(H)$ teriminin (2.6) ile verilen tanımı ve (3.26) denklemi ile belirlenen $\Delta^D H$ ifadesi (3.25) denkleminde yerine yazılır ve e_r $(r = n+1, ..., m)$ vektörlerinin katsayıları eşitlenirse (3.37) ve (3.38) elde edilir. □

Eğer M, E^4 Öklid uzayının sıfırlı 2-tipinden bir yüzeyi ise Yardımcı Teorem 3.6 aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Yardımcı Teorem 3.7. *M yüzeyinin, E^4 Öklid uzayının sıfırlı 2-tipinden bir alt yüzeyi olması için gerek ve yeter koşul*

$$A_3(\nabla\alpha) = -\alpha\nabla\alpha - \alpha\omega^4_3(e_1)A_4e_1 - \alpha\omega^4_3(e_2)A_4e_2 \tag{3.39}$$

$$\Delta\alpha = \alpha(c - ||\omega^4_3||^2 - ||A_3||^2) \tag{3.40}$$

$$\alpha\, tr(A_3A_4) = 2\omega^4_3(\nabla\alpha) + \alpha\, tr(\nabla\omega^4_3) \tag{3.41}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat: $n = 2,\ m = 4$ için $tr(\bar{\nabla}A_H) = 0$ ise (3.17) denklemi

$$\nabla\alpha^2 + 2\sum_{i=1}^{2} A_{D_{e_i}H}e_i = 0 \tag{3.42}$$

olur. $D_{e_i}H$ terimi şu şekilde hesaplanır:

$$\begin{aligned} D_{e_i}H =& D_{e_i}(\alpha e_3) \\ =& e_i(\alpha)e_3 + \alpha D_{e_i}e_3 \\ =& e_i(\alpha)e_3 + \alpha\omega^4_3(e_i)e_4. \end{aligned}$$

Buna göre, (3.42) denklemi

$$\begin{aligned}
\nabla\alpha^2 + 2\sum_{i=1}^{2} e_i(\alpha)A_{e_3}e_i + 2\alpha\sum_{i=1}^{2}\omega_3^4(e_i)A_{e_4}e_i &= 0 \\
\nabla\alpha^2 + 2A_{e_3}(\nabla\alpha) + 2\alpha\sum_{i=1}^{2}\omega_3^4(e_i)A_{e_4}e_i &= 0 \\
\nabla\alpha^2 + 2A_3(\nabla\alpha) + 2\alpha\sum_{i=1}^{2}\omega_3^4(e_i)A_4e_i &= 0 \\
2\alpha\nabla\alpha + 2A_3(\nabla\alpha) + 2\alpha(\omega_3^4(e_1)A_4e_1 + \omega_3^4(e_2)A_4e_2) &= 0 \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

olur, bu da (3.39) eşitliğini verir. (2.11) denkleminin $n = 2$ için $D_{e_i}e_3 = \omega_3^4(e_i)e_4$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
< De_3, De_3 > &= \sum_{i=1}^{2} < D_{e_i}e_3, D_{e_i}e_3 > \\
&= \sum_{i=1}^{2} < \omega_3^4(e_i)e_4, \omega_3^4(e_i)e_4 > \\
&= ||\omega_3^4||^2
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, (3.38) denkleminden (3.40) bulunur. (3.37) denkleminde $n = 2$ yazılırsa

$$\alpha\, tr(A_3A_4) = 2\omega_3^4\,(\nabla\alpha) + \alpha\, tr(\nabla\omega_3^4) - \alpha\ < De_3, De_4 >$$

eşitliği bulunur.

$$< De_3, De_4 > = \sum_{i=1}^{2} < D_{e_i}e_3, D_{e_i}e_4 > = \sum_{i=1}^{2} < \omega_3^4(e_i)e_4, \omega_4^3(e_i)e_3 > = 0$$

olduğu için (3.41) ifadesi elde edilir. □

4. E^3 ÖKLİD UZAYININ SIFIRLI 2-TİPİNDEN YÜZEYLERİ

Bu bölümde, E^3 Öklid uzayının sıfırlı 2-tipinden yüzeylerinin sınıflandırılması yapılmış ve E^3 Öklid uzayında yer alan bir yüzeyin sıfırlı 2-tipinden olması için gerek ve yeter koşulun yüzeyin bir çembersel silindirin açık bir parçası olması gerektiği gösterilmiştir.

M, E^3 Öklid uzayının bir alt manifoldu olsun. Sıfırlı 2-tipinden bir alt manifoldun x yer vektörü

$$x = x_0 + x_q, \;\; \Delta x_0 = 0, \;\; \Delta x_q = \lambda x_q \tag{4.1}$$

şeklinde ayrıştırılabilir, burada x_0 ve x_q sabit olmayan tasvirler ve $\lambda \neq 0$. M alt manifoldunun hiperyüzey olması durumunda, $a(H) = 0$ ve $||A_{n+1}||^2 = ||h||^2$ olur. Aynı zamanda manifold üzerindeki D normal konneksiyonu da sıfırdır. Buna göre, (3.10) denklemi

$$\Delta H = \Delta^D H + ||h||^2 H + tr(\bar{\nabla} A_H) \tag{4.2}$$

şeklinde yazılır.

Yardımcı Teorem 4.1. M, E^3 Öklid uzayının bir yüzeyi olsun. $tr(\bar{\nabla} A_H) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $U = \{p \in M : \nabla\alpha^2(p) \neq 0\}$ kümesi üzerinde

$$A(\nabla\alpha^2) = -\alpha\nabla\alpha^2 \tag{4.3}$$

denkleminin sağlanmasıdır, yani $\nabla\alpha^2$ vektörünün A Weingarten tasvirinin $-\alpha$ özdeğerine karşı gelen bir özvektörü olmasıdır, burada $\alpha^2 =< H, H >$'dır.

İspat: e_1, e_2 teğet vektörleri ($\xi = e_3$) A_ξ Weingarten tasvirinin özvektörleri, κ_1, κ_2 de bunlara karşılık gelen özdeğerler olsun, yani

$$A_\xi(e_i) = \kappa_i e_i, \quad i = 1, 2$$

$n = 2$ için (3.17) ifadesi

$$tr(\bar{\nabla} A_H) = \nabla\alpha^2 + 2trA_{DH} \tag{4.4}$$

olur. Buradaki $tr(A_{DH})$ terimini hesaplamak gerekir. Yüzeyin karşıt boyutu bir olduğu için H ortalama eğrilik vektörünün normal konneksiyona göre türevi

$$D_{e_i} H = e_i(\alpha)\xi$$

şeklindedir. Buna göre,

$$\begin{aligned} tr(A_{DH}) &= \sum_{i=1}^{n} A_{D_{e_i}H} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_{e_i(\alpha)\xi} e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i(\alpha) A_\xi e_i \\ &= A_\xi (\sum_{i=1}^{n} e_i(\alpha) e_i) \\ &= A_\xi(\nabla\alpha) \end{aligned} \tag{4.5}$$

olarak bulunur. (4.5) eşitliği (4.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$tr(\bar{\nabla} A_H) = \nabla\alpha^2 + 2A(\nabla\alpha) \tag{4.6}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $tr(\bar{\nabla} A_H) = 0$ olabilmesi için ancak ve ancak

$$\nabla\alpha^2 + 2A(\nabla\alpha) = 0,$$

yani

$$A(\nabla\alpha^2) = -\alpha\nabla\alpha^2$$

olmalıdır. Dolayısıyla, ispat tamamlanır. □

Teorem 4.1. E^3 Öklid uzayına ait bir M yüzeyinin sıfırlı 2-tipinden olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin bir çembersel silindirin açık bir parçası olmasıdır.

İspat: M, E^3 Öklid uzayının sıfırlı 2-tipinden bir yüzeyi olsun. Bu durumda, M yüzeyinin bir çembersel silindirin açık bir parçası olduğu gösterilsin. (3.4) ve (4.2) denklemleri birbirine eşitlenirse

$$\Delta^D H = (\lambda - ||h||^2)H \tag{4.7}$$

ve

$$tr(\bar{\nabla} A_H) = 0 \tag{4.8}$$

elde edilir. e_1 ve e_2 vektörleri, A_ξ ($\xi = e_3$) Weingarten tasvirinin özvektörleri olarak alınsın öyle ki e_1 vektörü $\nabla\alpha^2$ gradiyentine paralel olsun, yani

$$\nabla\alpha = e_1(\alpha)e_1, \quad e_2(\alpha) = 0.$$

A_ξ Weingarten tasvirine karşı gelen matrisin elemanları h_{ij} ile gösterilirse, Yardımcı Teorem 4.1'den dolayı $h_{11} = -\alpha$ olur. Buna göre,

$$\alpha = \frac{1}{2}(h_{11} + h_{22})$$

eşitliğinden $h_{22} = 3\alpha$ olarak hesaplanır. e_1, e_2 özvektörler olduğundan $h_{12} = h_{21} = 0$ olur. Dolayısıyla,

$$A_\xi = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & 3\alpha \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. (2.12) denkleminden $\omega_i^3 = \sum_{j=1}^{2} h_{ij}^3 \omega^j$ yazılır ve A_ξ matrisinin elemanları göz önüne alınarak

$$\omega_1^3 = h_{11}^3\omega^1 + h_{12}^3\omega^2 = -\alpha\omega^1$$

$$\omega_2^3 = h_{21}^3\omega^1 + h_{22}^3\omega^2 = 3\alpha\omega^2$$

ifadeleri, yani

$$\omega_3^1 = \alpha\omega^1, \;\; \omega_3^2 = -3\alpha\omega^2 \tag{4.9}$$

elde edilir. Aynı zamanda, e_1 vektörü $\nabla\alpha$ gradiyentine paralel olduğu için $e_2(\alpha) = 0$ olduğu göz önüne alınarak α ortalama eğrilik fonksiyonunun diferansiyeli

$$\begin{aligned} d\alpha =& e_1(\alpha)\omega^1 + e_2(\alpha)\omega^2 \\ =& e_1(\alpha)\omega^1 \end{aligned} \tag{4.10}$$

şeklinde yazılır. (4.9) ifadesindeki ilk denklemin diferansiyeli alınır ve (4.10) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} d\omega_3^1 =& d(\alpha\omega^1) \\ =& d\alpha \wedge \omega^1 + \alpha\, d\omega^1 \\ =& \alpha\, d\omega^1 \end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir. Ayrıca, (2.15) Codazzi denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} d\omega_1^3 =& \sum_{k=1}^{2} \omega_1^k \wedge \omega_k^3 \\ =& \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 \\ =& 3\alpha\, \omega_1^2 \wedge \omega^2 \\ =& 3\alpha\, d\omega^1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre, $d\omega_3^1 = -3\alpha\, d\omega^1$ şeklindedir. Bu ifade, (4.11) denklemine eşitlenirse

$$\begin{aligned} -3\alpha\, d\omega^1 =& \alpha d\omega^1 \\ 0 =& 4\alpha\, d\omega^1 \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. $\alpha \neq 0$ olduğu için

$$d\omega^1 = 0 \tag{4.12}$$

sonucu elde edilir. u, M yüzeyinin U açık parçası üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$\omega^1 = du \tag{4.13}$$

şeklindedir. (4.9) eşitliğinde ikinci denklemin diferansiyeli alınırsa

$$\begin{aligned} d\omega_3^2 =& -3\, d\alpha \wedge \omega^2 - 3\alpha d\omega^2 \\ =& -3(e_1\alpha)\omega^1 \wedge \omega^2 - 3\alpha\, \omega^1 \wedge \omega_1^2 \\ =& -3\,(e_1\alpha)\omega^1 \wedge \omega^2 - 3\alpha\omega^1 \wedge \omega_1^2(e_2)\, \omega^2 \end{aligned}$$

bulunur. Burada,

$$\omega_1^2 = \omega_1^2(e_1)\,\omega^1 + \omega_1^2(e_2)\,\omega^2 \tag{4.14}$$

olarak alınır. Ayrıca, (2.15) Codazzi denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} d\omega_2^3 =& \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 \\ =& \omega_2^1 \wedge (-\alpha\omega^1) \\ =& -\alpha\,\omega_2^1 \wedge \omega^1 \\ =& \alpha\omega_1^2(e_2)\,\omega^2 \wedge \omega^1 \end{aligned}$$

elde edilir. $\omega_3^2 = -\omega_2^3$ özelliği kullanılarak, bulunan iki $d\omega_3^2$ ifadesi birbirine eşitlendiğinde

$$\begin{aligned} -3(e_1\alpha)\omega^1 \wedge \omega^2 - 3\alpha\,\omega_1^2(e_2)\,\omega^1 \wedge \omega^2 =& -\alpha\,\omega_1^2(e_2)\,\omega^2 \wedge \omega^1 \\ -3(e_1\alpha)\omega^1 \wedge \omega^2 - 3\alpha\,\omega_1^2(e_2)\,\omega^1 \wedge \omega^2 =& -\alpha\,\omega_1^2(e_2)\,(-)\omega^1 \wedge \omega^2 \\ [-3(e_1\alpha) - 4\alpha\omega_1^2(e_2)]\,\omega^1 \wedge \omega^2 =& 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $\omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0$ olduğu için $-3(e_1\alpha) - 4\alpha\omega_1^2(e_2) = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla,

$$\omega_2^1(e_2) = \frac{3e_1\alpha}{4\alpha} \tag{4.15}$$

elde edilir. (2.13) birinci yapı denklemi kullanılarak

$$d\omega^1 = \sum_{k=1}^{2} \omega^k \wedge \omega_k^1 = 0 + \omega^2 \wedge \omega_2^1 = \omega_1^2 \wedge \omega^2$$

ifadesi yazılır. (2.15) Codazzi denklemi göz önüne alınarak (4.11) eşitliğinden

$$\begin{aligned} d\omega_3^1 =& \alpha d\omega^1 \\ -\omega_1^2 \wedge \omega_2^3 =& \alpha\,\omega^2 \wedge \omega_2^1 \\ -\omega_1^2 \wedge 3\alpha\,\omega^2 =& \alpha\,\omega^2 \wedge (-\omega_1^2) \\ -\omega_1^2 \wedge 3\alpha\,\omega^2 =& \alpha\,\omega_1^2 \wedge \omega^2 \\ 4\alpha\,\omega_1^2 \wedge \omega^2 =& 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha \neq 0$ olduğu için

$$\omega_1^2 \wedge \omega^2 = 0 \tag{4.16}$$

olmalıdır. (4.14) ifadesi kullanılırsa (4.16) eşitliğinden $\omega_1^2(e_1)\omega^1\wedge\omega^2 = 0$ bulunur. Buna göre,

$$\omega_1^2(e_1) = 0 \tag{4.17}$$

olur. Bunun sonucunda,

$$\omega_1^2 = \omega_1^2(e_2)\,\omega^2 \tag{4.18}$$

ifadesi elde edilir. (4.10) ve (4.13) denklemleri kullanılarak

$$d\alpha \wedge du = 0 \tag{4.19}$$

olduğu bulunur. Bu eşitlik α'nın u'nun fonksiyonu olduğunu gösterir. Kısacası, $\alpha = \alpha(u)$ şeklindedir. Eşitliğin diferansiyeli alınırsa

$$d\alpha = \alpha'(u)du \tag{4.20}$$

denklemi elde edilir. (4.13) denklemi göz önüne alınarak, (4.10) ve (4.20) denklemlerinden

$$e_1(\alpha) = \alpha'(u) \tag{4.21}$$

yazılabilir. Buna göre, (4.15) denklemi

$$\omega_2^1(e_2) = \frac{3\alpha'(u)}{4\alpha}$$

olarak yazılır. Bu ifade, (4.18) eşitliğinde yerine koyularak

$$4\alpha\,\omega_2^1 = 3\alpha'(u)\,\omega^2 \tag{4.22}$$

bulunur. (4.22) denkleminin diferansiyeli alınırsa

$$4\,d\alpha \wedge \omega_2^1 + 4\alpha\,d\omega_2^1 = 3\,d\alpha'(u) \wedge \omega^2 + 3\,\alpha'(u)d\omega^2$$

eşitliği bulunur. Burada, $d\alpha'(u) = \alpha''\,du = \alpha''\,\omega^1$, (2.13) birinci yapı denklemi, (2.14) Gauss denklemi ile (4.9), (4.10), (4.22) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
4e_1(\alpha)\,\omega^1 \wedge \omega_2^1 + 4\alpha\,\omega_2^3 \wedge \omega_3^1 =& 3\alpha''\,\omega^1 \wedge \omega^2 + 3\alpha'\,\omega^1 \wedge \omega_1^2 \\
4\alpha'\,\omega^1 \wedge \frac{3}{4\alpha}\alpha'\omega^2 + 4\alpha\,3\alpha\omega^2 \wedge \alpha\omega^1 =& \alpha''\,\omega^1 \wedge \omega^2 + 3\alpha'\,\omega^1 \wedge (\frac{-3\alpha'}{4\alpha}\omega^2) \\
3\frac{(\alpha')^2}{\alpha}\,\omega^1 \wedge \omega^2 + 12\alpha^3\,\omega^2 \wedge \omega^1 =& [3\alpha'' - \frac{9(\alpha')^2}{4\alpha}]\,\omega^1 \wedge \omega^2 \\
[12(\alpha')^2 - 48\alpha^4]\,\omega^1 \wedge \omega^2 =& [12\alpha''\alpha - 9(\alpha')^2]\omega^1 \wedge \omega^2 \\
[12\alpha''\alpha - 21(\alpha')^2 + 48\alpha^4]\,\omega^1 \wedge \omega^2 =& 0
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $\omega^1 \wedge \omega^2 \neq 0$ olduğu için

$$4\alpha''\alpha - 7(\alpha')^2 + 16\alpha^4 = 0 \tag{4.23}$$

şeklinde ikinci mertebeden adi bir diferansiyel denklem elde edilir. $y = (\alpha')^2$ olsun. Buna göre,

$$y' = \frac{dy}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}(\alpha')^2 = \frac{d}{du}(\alpha')^2\frac{du}{d\alpha} = 2\alpha'\alpha''\frac{1}{\alpha'} = 2\alpha''(u)$$

şeklindedir. (4.23) eşitliğinde $2\alpha'' = y'$ ve $(\alpha')^2 = y$ yerine koyulursa denklem birinci merteben diferansiyel denklem haline dönüşür.

$$2\alpha y' - 7y = -16\alpha^4 \tag{4.24}$$

(4.24) denkleminin homojen çözümü $y_h = c\,\alpha^{\frac{7}{2}}$ şeklinde bulunur, burada c bir sabittir. Özel çözümü de $y_p = -16\alpha^4$ olur. Bunlara göre, genel çözüm

$$y = (\alpha')^2 = c\alpha^{\frac{7}{2}} - 16\alpha^4 \tag{4.25}$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan,

$$A_\xi A_\xi = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & 9\alpha^2 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca, Δ^D tanımı göz önüne alınarak, $\Delta^D H = \Delta^D(\alpha\xi)$ ifadesi hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\Delta^D H =& \sum_{i=1}^{2}[D_{\nabla_{e_i}e_i}(\alpha\xi) - D_{e_i}D_{e_i}(\alpha\xi)] \\
=& \sum_{i=1}^{2}[(\nabla_{e_i}e_i)(\alpha)\xi + \alpha D_{\nabla_{e_i}e_i}\xi - D_{e_i}(e_i(\alpha)\xi + \alpha D_{e_i}\xi)] \\
=& \sum_{i=1}^{2}[(\nabla_{e_i}e_i)(\alpha)\xi - e_i(e_i(\alpha))\xi - e_i(\alpha)D_{e_i}\xi] \\
=& (\sum_{i=1}^{2}[(\nabla_{e_i}e_i)\alpha - e_ie_i(\alpha)])\,\xi \\
=& (\Delta\alpha)\,\xi
\end{aligned} \tag{4.26}$$

elde edilir, burada $D_{\nabla_{e_i}e_i}\xi = D_{e_i}\xi = 0$ olduğu kullanılmıştır. Şimdi $||h||^2 = trA_\xi A_\xi = 10\alpha^2$ ile $H = \alpha\xi$ ifadeleri, (4.7) denkleminde yerine yazılır ve (4.26) denklemine eşitlenirse

$$\Delta\alpha = (\lambda - 10\alpha^2)\alpha$$

elde edilir. Her iki tarafın $-\alpha$ ile çarpımı

$$-\alpha\Delta\alpha = (10\alpha^2 - \lambda)\alpha^2 \tag{4.27}$$

sonucunu verir. (2.10) denklemine göre, (4.17) ifadesi dikkate alınırsa

$$\nabla_{e_1}e_1 = \sum_{k=1}^{2}\omega_1^k(e_1)e_k = \omega_1^1(e_1)e_1 + \omega_1^2(e_1)e_2 = \omega_1^2(e_1)e_2 = 0 \tag{4.28}$$

olur. Aynı şekilde, (2.10) denklemi kullanılarak

$$\nabla_{e_2}e_2 = \sum_{k=1}^{2}\omega_2^k(e_2)e_k = \omega_2^1(e_2)e_1 + \omega_2^2(e_2)e_2 = \omega_2^1(e_2)e_1$$

elde edilir. Bu ifade α'ya uygulanır ve (4.15) kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_2}e_2)\alpha =& \omega_2^1(e_2)\, e_1(\alpha)\\ =& \omega_2^1(e_2)\,\alpha'\\ =& \frac{3e_1(\alpha)}{4\alpha}\,\alpha',\end{aligned}$$

yani

$$4\alpha(\nabla_{e_2}e_2)\alpha = 3(\alpha')^2 \tag{4.29}$$

eşitliği bulunur. (4.28), (4.29) ve $e_2(\alpha) = 0$ göz önüne alınarak, (2.7) formülünden $\Delta\alpha$ hesaplanarak

$$\begin{aligned}\Delta\alpha =& \sum_{i=1}^{2}[\nabla_{e_i}e_i(\alpha) - e_ie_i(\alpha)]\\ =& (\nabla_{e_1}e_1)(\alpha) + (\nabla_{e_2}e_2)(\alpha) - e_1e_1(\alpha) - e_2e_2(\alpha)\\ =& (\nabla_{e_2}e_2)(\alpha) - \alpha''\\ =& \frac{3(\alpha')^2}{4\alpha} - \alpha''\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$4\alpha(\Delta\alpha) = 3(\alpha')^2 - 4\alpha\alpha'' \tag{4.30}$$

eşitliği elde edilir. (4.27) denklemi -4 ile çarpılıp (4.30) denklemine eşitlendiğinde

$$4(\lambda - 10\alpha^2)\alpha^2 = 3(\alpha')^2 - 4\alpha\alpha''$$

şeklinde bulunan diferansiyel denklem düzenlenirse

$$4\alpha\alpha'' - 3(\alpha')^2 + 4(\lambda - 10\alpha^2)\alpha^2 = 0 \tag{4.31}$$

elde edilir. (4.23) ve (4.31) denklemlerinde α'' terimi yok edilirse

$$7(\alpha')^2 - 16\alpha^4 - 3(\alpha')^2 + 4\lambda\alpha^2 - 40\alpha^4 = 0$$

$$(\alpha')^2 = 14\alpha^4 - \lambda\alpha^2 \tag{4.32}$$

denklemi bulunur. (4.25) ve (4.32) denklemleri karşılaştırıldığında α'nın U kümesi üzerinde bir sabit olduğu sonucuna varılır ki bu da başlangıçta yapılan kabul ile çelişir. Dolayısıyla, U boş kümedir ve sıfırlı 2-tipinden M yüzeyinin ortalama eğriliği sabittir.

(4.7) denklemi kullanılarak ikinci esas formun sabit uzunluğa ($\lambda = ||h||^2$) sahip olduğu bulunur. Ayrıca, ortalama eğriliğin sabit olmasından dolayı

$$e_i(h_{11}) = -e_i(h_{22}) \tag{4.33}$$

şeklindedir. Bununla beraber,

$$e_i(||h||^2) = e_i(h_{11}^2 + h_{22}^2) = 0$$

ifadesinden

$$h_{11}\, e_i(h_{11}) + h_{22}\, e_i(h_{22}) = 0$$

elde edilir. (4.33) denkleminden dolayı

$$e_i(h_{11})\,(h_{11} - h_{22}) = 0$$

bulunur. M, sıfırlı 2-tipinden bir yüzey olduğu için $h_{11} - h_{22} \neq 0$. ($h_{11} = h_{22}$ olması durumunda M yüzeyi ya bir küre parçasıdır ya da bir düzlem parçasıdır.

Bu da M yüzeyinin sıfırlı 2-tipinden olması ile çelişir.) Sonuç olarak, h_{11} ve h_{22} sabitlerdir. (3.21) Codazzi denklemi E^m Öklid uzayının hiperyüzeyleri için yazılırsa

$$e_i(h_{jj}) = (h_{jj} - h_{ii})\omega_j^i(e_j), \;\; i \neq j \tag{4.34}$$

elde edilir. h_{11} ve h_{22} sabitler ve $h_{11} - h_{22} \neq 0$ olduğundan, (4.34) denkleminden

$$e_1(h_{22}) = (h_{22} - h_{11})\omega_2^1(e_2) = 0$$

ve

$$e_2(h_{11}) = (h_{11} - h_{22})\omega_1^2(e_1) = 0$$

yazılır. Buradan, $\omega_2^1(e_1) = \omega_2^1(e_2) = 0$ olduğu görülür, yani M yüzeyinin konneksiyonu sıfırdır. Dolayısıyla, M yüzeyi düzdür ve Gauss eğriliği $K = h_{11}h_{22} = 0$. Buna göre, h_{11} ve h_{22} özdeğerlerinden biri sıfır olmak zorundadır. İkisi birden sıfır olamaz çünkü ortalama eğrilik sıfırdan farklıdır. Sonuç olarak, M yüzeyi düz ve ortalama eğriliği sabit olduğundan bir çembersel silindirin açık bir parçası olmak zorundadır [[1], p. 118].

Teoremin tersi Örnek 3.2'den izlenebilir. □

5. E^4 ÖKLİD UZAYININ SIFIRLI 2-TİPİNDEN YÜZEYLERİ

Bu bölümde, 4 boyutlu E^4 Öklid uzayının sıfırlı 2-tipinden yüzeyleri, ortalama eğrilik vektörünün paralel olup olmamasına göre incelenmiştir. Bir yüzeyin E^4 Öklid uzayının bir hiperdüzlemi içinde bir çembersel silindirin açık bir parçası olması için gerek ve yeter koşulun yüzeyin sıfırlı 2-tipinden ve normalleştirilmiş paralel ortalama eğrilik vektörüne sahip olması gerektiği ispatlanmıştır. Ayrıca, E^4 Öklid uzayında bulunan bir yüzeyin bir helikal silindirin açık bir parçası olmasının ancak ve ancak yüzeyin sıfırlı 2-tipinden ve sabit ortalama eğriliğine sahip olması ile mümkün olduğu gösterilmiştir.

M, E^4 Öklid uzayının sıfırlı 2-tipinden bir yüzeyi olmak üzere e_1, e_2, e_3, e_4 vektörleri M yüzeyi üzerinde tanımlı yerel baz alanı olsun öyle ki e_1, e_2 vektörleri M yüzeyine teğet ve $e_3 = \frac{H}{\alpha}$ ile e_4 vektörleri M yüzeyine normal olsunlar. Yardımcı Teorem 3.7'deki (3.39), (3.40) ve (3.41) eşitlikleri göz önünde bulundurularak

$$A_3(\nabla\alpha) = -\alpha\nabla\alpha - \alpha\omega_3^4(e_1)A_4e_1 - \alpha\omega_3^4(e_2)A_4e_2 \tag{5.1}$$

$$\Delta\alpha = \alpha(c - ||\omega_3^4||^2 - ||A_3||^2) \tag{5.2}$$

$$\alpha\, tr(A_3A_4) = 2\omega_3^4(\nabla\alpha) + \alpha\, tr(\nabla\omega_3^4) \tag{5.3}$$

ifadeleri yazılabilir. Yüzeyin Riemann ve normal konneksiyon 1-formları sırasıyla

$$\omega_2^1 = f_1\,\omega^1 + f_2\,\omega^2 \qquad \omega_4^3 = g_1\,\omega^1 + g_2\,\omega^2 \tag{5.4}$$

şeklindedir, burada

$$f_i = \omega_2^1(e_i) = -\omega_1^2(e_i) \qquad g_i = \omega_4^3(e_i) = -\omega_3^4(e_i).$$

Ayrıca, e_1, e_2 vektörleri $A_3 = A_{e_3}$ Weingarten tasvirinin özvektörleri olarak seçilirse, A_3 ve A_4 matrisleri

$$A_3 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} \mu & \delta \\ \delta & -\mu \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu matrislerin bileşenleri kullanılarak (2.12) ile ifade edilen form tanımından

$$\omega_1^3 = \beta\omega^1, \quad \omega_2^3 = \gamma\omega^2 \tag{5.5}$$

$$\omega_1^4 = \mu\omega^1 + \delta\omega^2, \quad \omega_2^4 = \delta\omega^1 - \mu\omega^2 \tag{5.6}$$

yazılabilir. (5.4) kullanılarak

$$\begin{aligned} tr(\nabla\omega_4^3) =& \sum_{i=1}^{2}(\nabla_{e_i}\omega_4^3)e_i \\ =& \sum_{i=1}^{2}[e_i(\omega_4^3)e_i - \omega_4^3\,\nabla_{e_i}e_i] \\ =& \sum_{i=1}^{2} e_i g_i - \omega_4^3\,(f_2\,e_1 - f_1\,e_2) \\ =& \sum_{i=1}^{2} e_i g_i - f_2\,\omega_4^3(e_1) + f_1\,\omega_4^3(e_2) \\ =& e_1\,g_1 + e_2\,g_2 - f_2\,g_1 + f_1\,g_2 \end{aligned} \tag{5.7}$$

elde edilir. A_3 ve A_4 matrislerinin çarpımı göz önüne alınırsa

$$tr(A_3A_4) = \mu(\beta - \gamma) \tag{5.8}$$

sonucu bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned} \omega_3^4\,(\nabla\alpha) =& \omega_3^4\,(\sum_{i=1}^{2} e_i(\alpha)e_i) \\ =& \omega_3^4\,(e_1(\alpha)\,e_1 + e_2(\alpha)\,e_2) \\ =& -\,(e_1(\alpha)\,g_1 + e_2(\alpha)\,g_2). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Şimdi, (5.7), (5.8) ve (5.9) ifadeleri (5.3) eşitliğinde yerine koyulursa

$$\alpha\mu\,(\gamma-\beta)=2(e_1\alpha)g_1+2(e_2\alpha)g_2+\alpha(e_1\,g_1+e_2\,g_2-f_2\,g_1+f_1\,g_2) \tag{5.10}$$

elde edilir. (5.1) eşitliğinden

$$A_3(\nabla\alpha)=-\alpha\nabla\alpha+\alpha g_1\,A_4e_1+\alpha g_2\,A_4e_2$$

yazılır. A_3 ve A_4 matrislerine göre $A_3e_1=\beta\,e_1$ ve $A_3e_2=\gamma\,e_2$ ile $A_4e_1=\mu\,e_1+\delta\,e_2$ ve $A_4e_2=\delta\,e_1-\mu\,e_2$ yazılır. Bununla beraber, ortalama eğrilik $\alpha=\frac{1}{2}\,(\beta+\gamma)$ olarak bulunur. $A_3(e_i)$ ve $A_4(e_i)$ ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned}A_3(\nabla\alpha)=&A_3(e_1(\alpha)\,e_1+e_2(\alpha)\,e_2)\\=&e_1(\alpha)\,\beta e_1+e_2(\alpha)\,\gamma e_2\end{aligned} \tag{5.11}$$

ve

$$\alpha g_1\,A_4e_1=\alpha g_1(\mu\,e_1+\delta\,e_2) \tag{5.12}$$

$$\alpha g_2\,A_4e_2=\alpha g_2(\delta\,e_1-\mu\,e_2) \tag{5.13}$$

yazılır. Bulunan bu sonuçlar, (5.1) denkleminde yerine koyulur ve eşitliğin her iki tarafındaki e_1 ve e_2 vektörlerinin katsayıları eşitlenir ve düzenlenirse

$$(3\beta+\gamma)\,(e_1\alpha)=2\alpha\,(g_1\mu+g_2\delta) \tag{5.14}$$

ile

$$(\beta+3\gamma)\,(e_2\alpha)=2\alpha\,(g_1\delta-g_2\mu) \tag{5.15}$$

elde edilir. (5.4) ifadesindeki ilk eşitliğin diferansiyeli alınırsa

$$d\omega_2^1=df_1\,\omega^1+f_1\,d\omega^1+df_2\,\omega^2+f_2\,d\omega^2 \tag{5.16}$$

bulunur. Bu eşitliğin terimlerini hesaplamak için (2.13) kullanılırsa

$$\begin{aligned}f_1\,d\omega^1=&f_1\,(\omega_1^2\wedge\omega^2)\\=&f_1\,(-f_1\,\omega^1-f_2\,\omega^2)\wedge\omega^2\\=&-f_1^2\,\omega^1\wedge\omega^2\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_2\, d\omega^2 =& f_2\, (\omega^1 \wedge \omega_1^2) \\ =& f_2\, \omega^1 \wedge (-f_1\, \omega^1 - f_2\, \omega^2) \\ =& -\, f_2^2\, \omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bununla beraber,

$$df = e_1(f)\, \omega^1 + e_2(f)\, \omega^2.$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} df_1\, \omega^1 =& [e_1(f_1)\, \omega^1 + e_2(f_1)\, \omega^2] \wedge \omega^1 \\ =& e_2 f_1\, \omega^2 \wedge \omega^1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} df_2\, \omega^2 =& [e_1(f_2)\, \omega^1 + e_2(f_2)\, \omega^2] \wedge \omega^2 \\ =& e_1 f_2\, \omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bulunan bu ifadeler, (5.16) denkleminde yerine koyulursa

$$\begin{aligned} d\omega_2^1 =& e_2 f_1\, \omega^2 \wedge \omega^1 - f_1^2\, \omega^1 \wedge \omega^2 + e_1 f_2\, \omega^1 \wedge \omega^2 - f_2^2\, \omega^1 \wedge \omega^2 \\ =& (e_1 f_2 - e_2 f_1 - f_1^2 - f_2^2)\, \omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, (2.2) Gauss denkleminden

$$\begin{aligned} d\omega_2^1 =& \sum_{k=1}^{2} \omega_2^k \wedge \omega_k^1 + \sum_{\beta=3}^{4} \omega_2^\beta \wedge \omega_\beta^1 \\ =& \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2^4 \wedge \omega_4^1 \end{aligned}$$

yazılır. Buna göre,

$$\omega_2^3 \wedge \omega_3^1 + \omega_2^4 \wedge \omega_4^1 = (e_1 f_2 - e_2 f_1 - f_1^2 - f_2^2)\, \omega^1 \wedge \omega^2$$

eşitliğinde (5.5) ve (5.6) kullanılarak

$$\begin{aligned} \gamma\omega^2 \wedge (-\beta)\omega^1 + (\delta\omega^1 - \mu\omega^2) \wedge (-\mu\omega^1 - \delta\omega^2) =& (e_1 f_2 - e_2 f_1 - f_1^2 - f_2^2)\, \omega^1 \wedge \omega^2 \\ (\gamma\beta - \delta^2 - \mu^2)\, \omega^1 \wedge \omega^2 =& (e_1 f_2 - e_2 f_1 - f_1^2 - f_2^2)\, \omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

$$e_1 f_2 - e_2 f_1 = f_1^2 + f_2^2 + \gamma\beta - \delta^2 - \mu^2 \tag{5.17}$$

denklemi elde edilir. Aynı şekilde, (5.4) ifadesindeki ikinci eşitliğin diferansiyeli alınırsa

$$d\omega_4^3 = dg_1\,\omega^1 + g_1\,d\omega^1 + dg_2\,\omega^2 + g_2\,d\omega^2 \tag{5.18}$$

bulunur. Bu eşitliğin tüm terimleri şu şekilde hesaplanır:

$$g_1\,d\omega^1 = -f_1 g_1\,\omega^1 \wedge \omega^2,$$

$$g_2\,d\omega^2 = -f_2 g_2\,\omega^1 \wedge \omega^2,$$

$$\begin{aligned} dg_1\,\omega^1 =& [e_1(g_1)\,\omega^1 + e_2(g_1)\,\omega^2] \wedge \omega^1 \\ =& e_2 g_1\,\omega^2 \wedge \omega^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dg_2\,\omega^2 =& [e_1(g_2)\,\omega^1 + e_2(g_2)\,\omega^2] \wedge \omega^2 \\ =& e_1 g_2\,\omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

Bunlar, (5.18) denkleminde yerine koyulursa

$$\begin{aligned} d\omega_4^3 =& e_2 g_1\,\omega^2 \wedge \omega^1 - f_1 g_1\,\omega^1 \wedge \omega^2 + e_1 g_2\,\omega^1 \wedge \omega^2 - f_2 g_2\,\omega^1 \wedge \omega^2 \\ =& (e_1 g_2 - e_2 g_1 - f_1 g_1 - f_2 g_2)\,\omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

elde edilir. (2.16) denkleminden

$$\begin{aligned} d\omega_4^3 =& \sum_{\nu=3}^{4} \omega_4^\nu \wedge \omega_\nu^3 + \sum_{i=1}^{2} \omega_4^i \wedge \omega_i^3 \\ =& \omega_4^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^3 \end{aligned}$$

yazılır. Buna göre,

$$\omega_4^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_4^2 \wedge \omega_2^3 = (e_1 g_2 - e_2 g_1 - f_1 g_1 - f_2 g_2)\,\omega^1 \wedge \omega^2$$

eşitliğinde (5.5) ve (5.6) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} (-\mu\omega^1 - \delta\omega^2) \wedge \beta\omega^1 + (-\delta\omega^1 + \mu\omega^2) \wedge \gamma\omega^2 =& (e_1 g_2 - e_2 g_1 - f_1 g_1 - f_2 g_2)\,\omega^1 \wedge \omega^2 \\ (\delta\beta - \delta\gamma)\,\omega^1 \wedge \omega^2 =& (e_1 g_2 - e_2 g_1 - f_1 g_1 - f_2 g_2)\,\omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

$$e_1 g_2 - e_2 g_1 = f_1 g_1 + f_2 g_2 + \delta(\beta - \gamma) \tag{5.19}$$

denklemi elde edilir. (5.5) ifadesinde ilk eşitliğin diferansiyeli alınır ve (5.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} d\omega_1^3 =& d\beta \wedge \omega^1 + \beta\, d\omega^1 \\ =& (e_1(\beta)\,\omega^1 + e_2(\beta)\,\omega^2) \wedge \omega^1 + \beta\,[(-f_1\omega^1 - f_2\omega^2) \wedge \omega^2] \\ =& -\,(e_2(\beta) + f_1\beta)\,\omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

elde edilir. (2.15) Codazzi denkleminden

$$\begin{aligned} d\omega_1^3 =& \sum_{k=1}^{2} \omega_1^k \wedge \omega_k^3 + \sum_{\nu=3}^{4} \omega_1^\nu \wedge \omega_\nu^3 \\ =& \omega_1^2 \wedge \omega_2^3 + \omega_1^4 \wedge \omega_4^3 \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre, bu iki denklem birbirine eşitlenirse

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^3 + \omega_1^4 \wedge \omega_4^3 = -(e_2(\beta) + f_1\beta)\,\omega^1 \wedge \omega^2$$

elde edilir. Burada, (5.5) ve (5.6) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} (-f_1\omega^1 - f_2\omega^2) \wedge \gamma\omega^2 + (\mu\omega^1 + \delta\omega^2) \wedge (g_1\omega^1 + g_2\omega^2) &= -\,(e_2(\beta) + f_1\beta)\,\omega^1 \wedge \omega^2 \\ (-f_1\gamma + \mu g_2 - \delta g_1)\,\omega^1 \wedge \omega^2 &= -\,(e_2(\beta) + f_1\beta)\,\omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

$$e_2(\beta) = (\gamma - \beta) f_1 + \delta g_1 - \mu g_2 \tag{5.20}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (5.5) ifadesinde ikinci eşitliğin diferansiyeli alınırsa

$$\begin{aligned} d\omega_2^3 =& d\gamma \wedge \omega^2 + \gamma\, d\omega^2 \\ =& e_1(\gamma)\,\omega^1 \wedge \omega^2 - \gamma f_2\,\omega^1 \wedge \omega^2 \\ =& (e_1(\gamma) - \gamma f_2)\,\omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

bulunur. (2.15) Codazzi denkleminden

$$\begin{aligned} d\omega_2^3 =& \sum_{k=1}^{2} \omega_2^k \wedge \omega_k^3 + \sum_{\nu=3}^{4} \omega_2^\nu \wedge \omega_\nu^3 \\ =& \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_2^4 \wedge \omega_4^3 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre, bu iki denklem birbirine eşitlenirse

$$\omega_2^1 \wedge \omega_1^3 + \omega_2^4 \wedge \omega_4^3 = (e_1(\gamma) - \gamma f_2)\, \omega^1 \wedge \omega^2$$

bulunur. (5.5) ve (5.6) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}(f_1\omega^1 + f_2\omega^2) \wedge \beta\omega^1 + (\delta\omega^1 - \mu\omega^2) \wedge (g_1\omega^1 + g_2\omega^2) =& (e_1(\gamma) - \gamma f_2)\, \omega^1 \wedge \omega^2 \\ (-f_2\beta + \delta g_2 + \mu g_1)\, \omega^1 \wedge \omega^2 =& (e_1(\gamma) - \gamma f_2)\, \omega^1 \wedge \omega^2\end{aligned}$$

$$e_1(\gamma) = (\gamma - \beta) f_2 + \delta g_2 + \mu g_1 \tag{5.21}$$

elde edilir. (5.6) ifadesinde ilk eşitliğin diferansiyeli alınırsa

$$\begin{aligned}d\omega_1^4 =& d\mu \wedge \omega^1 + \mu\, d\omega^1 + d\gamma \wedge \omega^2 + \gamma\, d\omega^2 \\ =& e_2(\mu)\, \omega^2 \wedge \omega^1 - f_1\mu\, \omega^1 \wedge \omega^2 + e_1(\delta)\, \omega^1 \wedge \omega^2 - f_2\delta\, \omega^1 \wedge \omega^2 \\ =& (-e_2(\mu) - f_1\mu + e_1(\delta) - f_2\delta)\, \omega^1 \wedge \omega^2\end{aligned}$$

elde edilir. (2.15) Codazzi denkleminden

$$\begin{aligned}d\omega_1^4 =& \sum_{k=1}^{2} \omega_1^k \wedge \omega_k^4 + \sum_{\nu=3}^{4} \omega_1^\nu \wedge \omega_\nu^4 \\ =& \omega_1^2 \wedge \omega_2^4 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^4\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, son iki denklem birbirine eşitlenirse

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^4 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^4 = (-e_2(\mu) - f_1\mu + e_1(\delta) - f_2\delta)\, \omega^1 \wedge \omega^2$$

elde edilir. (5.5) ve (5.6) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}(-f_1\omega^1 - f_2\omega^2) \wedge (\delta\omega^1 - \mu\omega^2) + & \\ \beta\omega^1 \wedge (-g_1\omega^1 - g_2\omega^2) =& (-e_2(\mu) - f_1\mu + e_1(\delta) - f_2\delta)\, \omega^1 \wedge \omega^2 \\ (f_1\mu + f_2\delta + \beta g_2)\, \omega^1 \wedge \omega^2 =& (-e_2(\mu) - f_1\mu + e_1(\delta) - f_2\delta)\, \omega^1 \wedge \omega^2\end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Buna göre,

$$e_1(\gamma) - e_2(\mu) = 2\mu f_1 + 2\delta f_2 - \beta g_2 \tag{5.22}$$

denklemi bulunur. (5.6) ifadesinde ikinci eşitliğin diferansiyeli alınırsa

$$\begin{aligned} d\omega_2^4 =& d\delta \wedge \omega^1 + \delta\, d\omega^1 - d\mu \wedge \omega^2 - \mu\, d\omega^2 \\ =& e_2(\delta)\, \omega^2 \wedge \omega^1 - f_1\delta\, \omega^1 \wedge \omega^2 - e_1(\mu)\, \omega^1 \wedge \omega^2 - f_2\mu\, \omega^1 \wedge \omega^2 \\ =& (-e_2(\delta) - f_1\delta - e_1(\mu) - f_2\mu)\, \omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

bulunur. (2.15) denkleminden

$$\begin{aligned} d\omega_2^4 =& \sum_{k=1}^{2} \omega_2^k \wedge \omega_k^4 + \sum_{\nu=3}^{4} \omega_2^\nu \wedge \omega_\nu^4 \\ =& \omega_2^1 \wedge \omega_1^4 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^4 \end{aligned}$$

yazılır. Buna göre, bu iki denklem birbirine eşitlenirse

$$\omega_2^1 \wedge \omega_1^4 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^4 = (-e_2(\delta) - f_1\delta - e_1(\mu) - f_2\mu)\, \omega^1 \wedge \omega^2$$

eşitliği bulunur. (5.5) ve (5.6) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} (f_1\omega^1 + f_2\omega^2) \wedge (\mu\omega^1 + \delta\omega^2) + \gamma\omega^2 \wedge (-g_1\omega^1 - g_2\omega^2) =& (-e_2(\delta) - f_1\delta \\ & - e_1(\mu) - f_2\mu)\, \omega^1 \wedge \omega^2 \\ (f_1\delta - f_2\mu + \gamma g_1)\, \omega^1 \wedge \omega^2 =& (-e_2(\delta) - f_1\delta \\ & - e_1(\mu) - f_2\mu)\, \omega^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan,

$$e_1(\mu) + e_2(\delta) = -2\delta f_1 + 2\mu f_2 - \gamma g_1 \tag{5.23}$$

bulunur. (5.14) ve (5.21) denklemleri kullanılarak

$$(3\beta + \gamma)\, (\frac{1}{2} e_1(\beta) + \frac{1}{2} e_1(\gamma)) = 2\alpha(g_1\mu + g_2\delta)$$

yazılır. Bu denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} (3\beta + \gamma)\, e_1(\beta) =& 4\alpha(g_1\mu + g_2\delta) - (3\beta + \gamma)\, e_1(\gamma) \\ =& 4\alpha(g_1\mu + g_2\delta) - (3\beta + \gamma)\, [(\gamma - \beta) f_2 + \mu g_1 + \delta g_2] \\ =& 2(\beta + \gamma)\, (g_1\mu + g_2\delta) - (3\beta + \gamma)\, (\gamma - \beta) f_2 - (3\beta + \gamma)\, (g_1\mu + g_2\delta) \\ =& (2\beta + 2\gamma - 3\beta - \gamma)\, (g_1\mu + g_2\delta) - (3\beta + \gamma)\, (\gamma - \beta) f_2 \\ =& (\gamma - \beta)\, [g_1\mu + g_2\delta - (3\beta + \gamma)\, f_2] \end{aligned} \tag{5.24}$$

elde edilir. (5.15) ve (5.20) kullanılarak

$$(\beta+3\gamma)\,(\frac{1}{2}e_2(\beta)+\frac{1}{2}e_2(\gamma))=2\alpha(g_1\delta-g_2\mu)$$

yazılır. Bu denklemden

$$\begin{aligned}(\beta+3\gamma)\,e_2(\gamma)=&4\alpha(g_1\delta-g_2\mu)-(\beta+3\gamma)\,e_2(\beta)\\=&2(\beta+\gamma)\,(g_1\delta-g_2\mu)-(\beta+3\gamma)\,[(\gamma-\beta)f_1+\delta g_1-\mu g_2]\\=&(2\beta+2\gamma-\beta-3\gamma)\,(g_1\delta-g_2\mu)-(\beta+3\gamma)\,(\gamma-\beta)f_1\\=&(\beta-\gamma)\,[g_1\delta-g_2\mu+(\beta+3\gamma)\,f_1]\end{aligned}\tag{5.25}$$

eşitliği elde edilir.

Önerme 5.1. *M, E^4 Öklid uzayının bir yüzeyi olsun. M yüzeyinin E^4 Öklid uzayının bir hiperdüzlemi içinde bir çembersel silindirin açık bir parçası olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin sıfırlı 2-tipinden ve normalleştirilmiş paralel ortalama eğrilik vektörüne sahip olmasıdır, yani $De_3=0$.*

İspat: M yüzeyi bir çembersel silindirin açık bir parçası ise aynı zamanda sıfırlı 2-tipinden bir yüzey ve $De_3=0$ olduğu Teorem 4.1'den bilinmektedir.

Tersini ispatlamak için M yüzeyi sıfırlı 2-tipinden olsun. Bu durumda, M yüzeyi minimal değildir ve sıfırdan farklı sabit ortalama eğriliğine sahiptir.

$e_3=\frac{H}{\alpha}$ vektörü paralel, yani $De_3=0$ olsun. (2.11) denklemine göre

$$D_{e_i}e_3=\omega_3^4(e_i)\,e_4=0$$

ifadesinden $\omega_3^4=0$ olur. Bu durumda, (5.3) eşitliğinden $tr(A_3A_4)=0$ elde edilir ve

$$\mu\,(\beta-\gamma)=0\tag{5.26}$$

bulunur. $W=\{u\in M:\,\beta\neq\gamma\}$ olsun. $W\neq\emptyset$ ise (5.26) ifadesinden W üzerinde

$$\mu=0\tag{5.27}$$

sonucu çıkar. $\omega_3^4=0$ olduğu göz önüne alınarak (5.1) eşitliğinden

$$A_3\,(\nabla\alpha)=-\alpha\nabla\alpha\tag{5.28}$$

elde edilir. $\bar{W} = \{u \in W : \nabla\alpha^2 \neq 0\}$ olsun. Bu durumda, $\bar{W}$ üzerinde $\nabla\alpha$ gradiyenti A_3 Weingarten tasvirinin bir özvektörü, $-\alpha$ da özdeğeridir. Böylece A_3 Weingarten tasvirinin elemanları $\beta = -\alpha$ ve $\alpha = \frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ olduğundan $\gamma = 3\alpha$ yazılabilir. $g_i = \omega_4^3(e_i) = -\omega_3^4(e_i) = 0$ olduğundan (5.19) eşitliğinden

$$0 = (\beta - \gamma)\delta = -4\alpha\delta \tag{5.29}$$

elde edilir. $\alpha \neq 0$ olduğu için $\delta = 0$ sonucu çıkar. $\mu = \delta = 0$ olmasından dolayı $A_4 = 0$ bulunur. $A_4 = 0$ ve $\omega_4^3 = 0$ olduğu için e_4 sabit vektördür. $\bar{W}$'nin her irtibatlı parçası E^4 Öklid uzayının bir hiperdüzlemi içindedir. Teorem 4.1'den dolayı bir hiperdüzlem içinde kalan M yüzeyi için α ortalama eğriliği sabit olduğundan $\nabla\alpha^2 = 0$ sonucu çıkar. Bu da $\bar{W} = \emptyset$ olmadıkça mümkün değildir. Dolayısıyla, W üzerinde α sabit olmak zorundadır.

Eğer W kümesi M içinde yoğun değilse, $\text{int}(M - W)$ kümesi boş olamaz. $\text{int}(M - W)$ kümesinin irtibatlı bir parçası Z ile gösterilsin. Dolayısıyla, $g_1 = g_2 = 0$ olduğu için (çünkü e_3 paraleldir) (5.14) ve (5.15) denklemlerinden $e_1(\alpha) = 0$ ve $e_2(\alpha) = 0$ elde edilir. Bu, α'nın sabitliğini ifade eder. α sabit ve e_3 vektörü paralel olduğu için H ortalama eğrilik vektörü de paraleldir. Bunlar göz önüne alınarak Teorem [[1], p. 106] uygulanırsa, M yüzeyi ya bir hiperdüzlem içinde ya da E^4 Öklid uzayının bir hiperküresi içinde kalır. Birinci durum oluşursa, teoremin ispatı önceki kısımda verilen sınıflandırma teoreminden dolayı tamamlanır. Küresel uzaylar içinde sıfırlı 2-tipinden yüzeyler olmadığı için ikinci durum mümkün değildir. □

E^3 Öklid uzayında sabit eğrilikli ve burulmalı, birim hızlı bir $y(s)$ eğrisi helis olarak adlandırılır. Ayrıca, 4 boyutlu E^4 Öklid uzayının 3 boyutlu bir E^3 alt uzayı içinde bulunan burulması sıfırdan farklı bir çembersel helis ile E^4 Öklid uzayı içindeki bir doğrunun çarpımının oluşturduğu yüzeye E^4 Öklid uzayı içinde bir helikal silindir denir.

Teorem 5.1. E^4 Öklid uzayında bulunan bir M yüzeyinin bir helikal silindirin açık bir parçası olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin sıfırlı 2-tipinden ve

sabit ortalama eğriliğe sahip olmasıdır.

M yüzeyi, bir helikal silindirin açık bir parçası olsun. Öklidiyen koordinatlarının uygun seçilmesi ile helikal silindirin yer vektörü

$$x(u,v) = (u,\ a\cos v,\ a\sin v,\ bv)$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla, yüzeyin koordinat vektörleri

$$x_u = (1,\ 0,\ 0,\ 0),\ \ x_v = (0,\ -a\sin v,\ a\cos v,\ b)$$

bulunur. Buna göre,

$$g_{11} =< x_u, x_u >= 1,\ \ g_{22} =< x_v, x_v >= a^2 + b^2 = c^2,\ \ g_{12} = g_{21} = 0$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

ve

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2+b^2} \end{pmatrix}.$$

(2.9) denkleminden Christoffell sembolleri $\Gamma_{ij}^k = 0$ olarak bulunur. (2.8) denkleminden Laplace operatörü

$$\Delta = -(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}),\ \ c^2 = a^2 + b^2$$

şeklinde elde edilir. Şimdi

$$x_0 = (u,\ 0,\ 0,\ bv),\quad x_q = (0,\ a\ \cos v,\ a\ \sin v,\ 0)$$

olsun, yani $x = x_0 + x_q$. Δ Laplace operatörüne x_0 uygulanırsa $\Delta x_0 = 0$ bulunur. Bununla beraber,

$$\Delta x_q = -(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2})\,(0,\ a\ \cos v,\ a\ \sin v,\ 0) = \frac{1}{c^2}\,(0,\ a\ \cos v,\ a\ \sin v,\ 0) = \frac{1}{c^2}x_q$$

elde edilir. Buradan, M yüzeyinin sıfırlı 2-tipinden olduğu sonucuna ulaşılır.

Yüzeyin teğet vektör alanları

$$e_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0) = \frac{\partial}{\partial u},\quad e_2 = \frac{1}{c}\,(0,\ -a\ \sin v,\ a\ \cos v,\ b) = \frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial v}$$

ve normal vektör alanları

$$e_3 = (0, -\cos v, -\sin v, 0), \quad e_4 = \frac{1}{c}(0, -b\sin v, b\cos v, -a)$$

olarak seçilsin. (2.2) Weingarten formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_{e_i} e_3 &= -A_{e_3} e_i + D_{e_i} e_3 \\ &= -\sum_{j=1}^{2} a_{ij}^3 e_j + \omega_3^4(e_i)\, e_4\end{aligned}$$

yazılır. Buna göre, $a_{ij}^3 = - < \bar{\nabla}_{e_i} e_3, e_j >$ ve $\omega_3^4(e_i) =< \bar{\nabla}_{e_i} e_3, e_4 >$ şeklinde hesaplanır. Gerekli hesaplamalar yapıldığında A_3 Weingarten tasviri

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{c^2} \end{pmatrix}$$

elde edilir. Aynı şekilde $a_{ij}^4 = - < \bar{\nabla}_{e_i} e_4, e_j >$ ifadesinden A_4 Weingarten tasviri

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olur. Bununla beraber, $\omega_3^4(e_1) = 0$ ve $\omega_3^4(e_2) = -\frac{b}{c^2}$ bulunur. Dolayısıyla, (2.12) denklemi de kullanılarak

$$\begin{gathered}\omega^1 = du, \;\; \omega^2 = c\, dv, \;\; \omega_1^2 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = 0, \\ \omega_2^3 = \frac{a}{c^2}\omega^2, \;\; \omega_2^4 = 0, \;\; \omega_3^4 = -\frac{b}{c^2}\omega^2\end{gathered} \tag{5.30}$$

yazılır. $n = 2$ için, (2.5) ortalama eğrilik vektör tanımından

$$H = \alpha e_3 = \frac{1}{2}\, tr(A_3) e_3,$$

yani $\alpha = \frac{1}{2}\frac{a}{c^2}$ bulunarak M yüzeyinin sabit ortalama eğriliğine sahip olduğu görülür.

Tersini ispatlamak için M sıfırlı 2-tipinden ve sabit ortalama eğriliğine sahip ($\alpha \neq 0$) bir yüzey olsun. M yüzeyinin helikal silindirin açık bir parçası olduğu gösterilsin.

(5.14) ve (5.15) denklemleri kullanılarak

$$\mu g_1 + \delta g_2 = 0 \tag{5.31}$$

ve

$$\delta g_1 - \mu g_2 = 0 \tag{5.32}$$

elde edilir. Buna göre, (5.31) ve (5.32) eşitliklerinden

$$(\mu^2 + \delta^2) g_1 = (\mu^2 + \delta^2) g_2 = 0 \tag{5.33}$$

elde edilir. $(\mu^2 + \delta^2) \neq 0$ ise $g_1 = g_2 = 0$ olmalıdır. Bu durumda, $De_3 = 0$ olur.

$W = \{u \in M : (\mu^2 + \delta^2) \neq 0\} \neq \emptyset$ ise W üzerinde $g_1 = g_2 = 0$, $\omega_3^4 = 0$ ve $De_3 = 0$ olur.

M sıfırlı 2-tipinden ($\alpha \neq 0$, $De_3 = 0$) bir yüzey olduğu için W yüzeyinin her irtibatlı parçası, E^4 Öklid uzayının bir hiperdüzleminde bulunur. Bu sebeple $A_4 = 0$ ($\delta = \mu = 0$) olur. Bu durumda, $(\mu^2 + \delta^2) \neq 0$ sonucu ile çelişki elde edilir.

Sonuç olarak, $\delta = \mu = 0$ dolayısıyla, $A_4 = 0$ ve e_4 =sabit vektör olarak bulunur. Böylece, (5.22) ve (5.23) eşitliklerinden

$$\beta g_2 = \gamma g_1 = 0 \tag{5.34}$$

elde edilir. (2.5) ortalama eğrilik vektör tanımına göre $\beta + \gamma = 2\alpha \neq 0$ olduğu için β ve γ'dan en az biri sıfırdan farklıdır. β ve γ'nın ikisi de sıfırdan farklıysa, M normalleştirilmiş paralel ortalama eğrilik vektörüne sahiptir. Bu durumda, Önerme 5.1, M yüzeyinin çembersel silindirin açık bir parçası olduğunu gösterir ki bu da $\beta\gamma = 0$ olmasını ifade eder. Buna göre β veya γ'dan biri sıfırdır. Genelliği bozmadan $\beta = 0$ ve $\gamma = 2\alpha \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$g_1 = 0 \tag{5.35}$$

sonucu çıkar. (5.20) eşitliğinden $2\alpha f_1 = 0$, (5.21) eşitliğinden de $2\alpha f_2 = 0$ olduğu bulunur ve

$$f_1 = f_2 = 0 \tag{5.36}$$

elde edilir. (5.10) eşitliğinden $\alpha(e_2 g_2) = 0$, (5.19) eşitliğinden de $e_1 g_2 = 0$ olur. Dolayısıyla, g_2 sabittir.

Sonuç olarak, α =sabit, g_2 =sabit, $\beta = g_1 = 0$ olmak üzere

$$\omega_1^2 = \omega_1^3 = \omega_1^4 = 0, \;\; \omega_2^3 = 2\alpha\,\omega^2, \;\; \omega_2^4 = 0, \;\; \omega_3^4 = g_2\,\omega^2$$

şeklindedir. Bu gösterir ki, M E^4 Öklid uzayının düz bir yüzeyidir. Bununla beraber, bu yüzeyin (ω_B^A) konneksiyon formları (5.30) ile verilen bir helikal yüzeyin konneksiyon formları ile çakışır. Sonuç olarak, alt manifoldların temel teoremi gereğince M yüzeyi helikal silindirin açık bir parçasıdır. □

Teorem 5.2. E^4 Öklid uzayında bulunan bir M yüzeyinin bir helikal silindirin açık bir parçası olması için gerek ve yeter koşul M yüzeyinin sıfırlı 2-tipinden ve birinci normal uzayının boyutunun ≤ 1 olmasıdır.

İspat: M, E^4 Öklid uzayında sıfırlı 2-tipinden ve normal uzayının boyutu ≤ 1 olan bir yüzey ise $\mu = \delta = 0$ olur. Buna göre, (5.14) ve (5.15) eşitliklerinden

$$(3\beta + \gamma)\,(e_1\alpha) = (\beta + 3\gamma)\,(e_2\alpha) = 0 \tag{5.37}$$

(5.1) eşitliğinden de

$$A_3(\nabla\alpha) = -\alpha(\nabla\alpha) \tag{5.38}$$

elde edilir. Bu eşitliğe göre $U = \{u \in M : \nabla\alpha^2 \neq 0\}$ üzerinde $\nabla\alpha$ özvektör, $-\alpha$ da özdeğerdir. $\beta = -\alpha$ ise ortalama eğrilikten $\gamma = 3\alpha$ olur. $\mu = \delta = 0$ olduğundan, Teorem 5.1'in ispatındaki gibi $f_1 = f_2 = g_2 = 0$ ve $\gamma - \beta \neq 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, (5.21) denkleminden

$$e_1(\gamma) = 0$$

elde edilir. Buradan, $e_1(3\alpha) = 3e_1(\alpha) = 0$ yani, $e_1(\alpha) = 0$ bulunur. Ayrıca, (5.37) denkleminden $\beta + 3\alpha \neq 0$ olduğu için $e_2(\alpha) = 0$ bulunur.

Sonuç olarak, $e_1(\alpha) = 0$ ve $e_2(\alpha) = 0$ olduğu için U kümesinin bir boş küme olduğu görülür, yani M yüzeyinin ortalama eğriliği sabittir. Teorem 5.1 koşulları

sağlandığından M yüzeyinin bir helikal silindirin açık bir parçası olduğu sonucuna ulaşılır.

Teorem 5.2'nin tersinin ispatı, Teorem 5.1'de verilmiştir. □

6. SONUÇ VE TARTIŞMALAR

Bu çalışmada, E^m Öklid uzayının sonlu tipten alt manifoldlarının içinden sıfırlı 2-tipinden alt manifoldlar geniş bir şekilde ele alınmıştır. 3 boyutlu bir E^3 Öklid uzayında bir M yüzeyinin sıfırlı 2-tipinden olması için gerek ve yeter koşulun M yüzeyinin bir çembersel silindirin açık bir parçası olması gerektiği gösterilmiştir.

E^4 Öklid uzayının sıfırlı 2-tipinden yüzeyleri, yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün paralel olup olmamasına göre incelenmiştir. Ortalama eğrilik vektörünün paralel olması durumunda sıfırlı 2-tipinden bir yüzeyin, E^4 Öklid uzayının bir hiperdüzlemi içinde kalan çembersel bir silindirin açık bir parçası olması gerektiği sonucuna varılmıştır. Ortalama eğrilik vektörünün paralel olmaması durumunda ise sıfırlı 2-tipinden bir M yüzeyinin helikal bir silindirin açık bir parçası olduğu belirtilmiştir.

E^3 Öklid uzayı içindeki sıfırlı 2-tipinden yüzeylerin hiperyüzeylere olan genişletilmesi [5] numaralı makalede ele alınmıştır. Karşıt boyutun 2 ve ortalama eğrilik vektörünün paralel olması durumundaki sıfırlı 2-tipinden alt manifoldların sınıflandırılması [6] numaralı çalışmada yapılmıştır. Ortalama eğrilik vektörünün paralel olmaması durumundaki sıfırlı 2-tipinden alt manifoldların sınıflandırılması henüz yapılmamıştır.

KAYNAKLAR

[1] **Chen, B.Y.**, 1973. Geometry of Submanifolds, Mercel Dekker, New York.

[2] **Chen, B.Y.**, 1984. Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type, World Scientific, Singapore and New Jersey.

[3] **Dajczer, M.**, 1990. Submanifolds and Isometric Immersions, Mathematics Lecture Series 13, Houston, Texas.

[4] **Kobayashi, S. ve Nomizu, K.**, 1963. Foundations of Differential Geometry I, Interscience, New York.

[5] **Ferrandez, A. ve Lucas, P.**, 1991. Null Finite Type Hypersurfaces in Space Forms, Kodai Math. J., 14, 406-419.

[6] **Dursun, U.**, 2005. Null 2-Type Submanifolds of the Euclidean Space E^5 with parallel Normalized Mean Curvature Vector, Kodai Math. J., 28, 191-198.

[7] **Chen, B.Y.**, 1996. A report on submanifolds of finite type, Soochow Math. J., 22, 117-337.

[8] **Chen, B.Y.**, 1988. Null 2-Type Surfaces In E^3 Are Circular Cylinders, Kodai Math. J., 11, 295-299.

[9] **Chen, B.Y.**, 1989. Null 2-Type Surfaces In Euclidean Spaces, World Sci. Publishing, 1-18.

ÖZGEÇMİŞ

Bilger KURTUL, 14.11.1978 Antakya doğumludur. İlkokul eğitimini Adana Ziya Paşa İlkokulu'nda tamamlamış ve 1996 yılında Adana İsmail Safa Özler Anadolu Lisesi'nden mezun olmuştur. Aynı yıl girdiği İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümü'nü 2001 yılında bitirdikten sonra 2003 Şubat döneminde de İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği yüksek lisans programına başlamıştır.