İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SAYISAL ANALİZDE YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Baran Murat YILMAZ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Aralık 2013

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SAYISAL ANALİZDE YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Baran Murat YILMAZ
(509101013)

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Kamil Oruçoğlu

Aralık 2013

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 509101013 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Baran Murat YILMAZ**, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"SAYISAL ANALİZDE YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ"** başlıklı tezini aşağıdaki imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı :	**Prof. Dr. Kamil Oruçoğlu** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
Jüri Üyeleri :	**Doç. Dr. Ali Ercengiz** İstanbul Teknik Üniversitesi	.....
	Yrd. Doç. Dr. Ali Dinler İstanbul Medeniyet Üniversitesi	.....
		.....

Teslim Tarihi : **16 Aralık 2013**
Savunma Tarihi : **21 Ocak 2014**

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca gerek ailemin gerekse Matematik bölümü öğretim üyelerinin bana vermiş oldukları tüm emekler ve sarfettikleri tüm çabalar için sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışmanın oluşmasında göstermiş olduğu gayretlerden ötürü tez hocam Prof. Dr. Kamil Oruçoğlu'na teşekkür ederim.

Aralık 2013 Baran Murat YILMAZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ ..... **v**
İÇİNDEKİLER ..... **vii**
KISALTMALAR ..... **ix**
ÇİZELGE LİSTESİ ..... **xi**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **xiii**
ÖZET ..... **xv**
SUMMARY ..... **xvii**
1. GİRİŞ VE ÖN BİLGİLER **1**
1.1 Giriş 1
1.2 Ön Bilgiler 2
2. ADOMIAN AYRIŞTIRMA METODU **17**
2.1 Nonlineer Adi Diferansiyel Denklem Sistemine Uygulanan Metodun Analizi 19
2.2 Lineer Adi Diferansiyel Denklem Sistemine Uygulanan Metodun Analizi 20
2.3 Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulanan Metodun Analizi 23
2.4 Adomian Ayrıştırma Metodunun Yakınsaklık Analizi 28
2.4.1 Adi diferansiyel denklemler için ADM yakınsama oranı 34
2.4.2 Kısmi diferansiyel denklem sistemlerine uygulanan Adomian ayrıştırma metodunun yakınsaklık analizi 35
3. SOYUT CAUCHY PROBLEMİNE UYGULANAN ADOMIAN AYRIŞTIRMA METODU İÇİN YAKINSAKLIK ANALİZİ **39**
3.1 Giriş 39
3.2 SınırlıBir Çözüm İçin Gereklilik Şartları 40
3.3 ADM İçin TekrarlıİndirgemeŞeması 44
3.4 Hata Tahminleri 45
3.5 ε- Yaklaşık Çözümleri Ve Karşılaştırması 47
3.5.1 ε- yaklaşık çözümleri 47
3.5.2 İki komşu sistemin iki yaklaşık çözümünün karşılaştırılması 49
3.5.3 Uygulamalar 50
3.6 ADM İle Çeşitli Sayısal Metotların Karşılaştırılmaları 56
3.6.1 ADM ile Picard Metodu'nun karşılaştırılması 56
3.6.2 ADM ile Modifiye ADM'nin karşılaştırılması 57
3.6.3 Homotopi Perturbasyon Metodu ile ADM'nin karşılaştırılması 60
4. SONUÇLAR **63**
5. KAYNAKLAR **65**
ÖZGEÇMİŞ **69**

KISALTMALAR

ADM	**:** Adomian Ayrıştırma Metodu
H	**:** Hilbert Uzayı
$\mathbf{R}$	**:** Gerçel Sayılar
$\mathbf{N}$	**:** Doğal Sayılar
Nu	**:** Lineer Olmayan Kısım
$\mathbf{Q}$	**:** Rasyonel Sayılar
$\mathbf{R}_+$	**:** Pozitif Gerçel Sayılar

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1: $\alpha_6, \beta_6, \gamma_6$ ile kesin çözümler arasındaki karşılaştırma 21
Çizelge 2.2: $[0,5]$ aralığında ϕ_5 ve ψ_5 değerleri 23
Çizelge 3.1: $I(t)$ ve $I^*(T)$ değerleri 55
Çizelge 3.2: Picard Metodu ile ADM'nin karşılaştırılması 57
Çizelge 3.3: ADM ile MADM'nin karşılaştırılması 59
Çizelge 3.4: HPM ile ADM'nin karşılaştırılması 61

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SAYISAL ANALİZDE YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

ÖZET

Bu tez çalışmasında Adomian Ayrıştırma Metodu kullanılarak lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemleri ile kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerini bulmak için temel matematik bilgilerinden faydalanarak algoritmalar türetilmiştir. Bu algoritmalar genelde başlangıç ve sınır değerleri ile verilen diferansiyel denklem sistemlerini bir iterasyona bağlayıp, yakınsaklık analizi ile diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerine yaklaşmayı amaçlamaktadır. Bulunan yaklaşık çözümler seri formdadır. Zira, Adomian Ayrıştırma Metodu gereğince; lineer olmayan bir diferansiyel operatörün etki ettiği sıklıkla çalışılan bu denklem sistemlerinin çözüm fonksiyonunu bulmak için alışılmış matematiksel metotları veya bilgisayar teknolojisini kullanmak yerine; bu denklem lineer kısım, lineer olmayan kısım ve ele alınan diferansiyel denklem sisteminin en yüksek mertebeden türevi olmak üzere parçalara ayrılır ve başlangıç verileri ile sınır verilerini kullanarak diferansiyel denklem sistemini lineerleştirmeye gerek duymadan seri ayrışımını yaparak uygun iterasyon ile sistemin çözümünü algoritmaya bağlar.

Bu metot, genel olarak iterasyonda bulunan ayrışım serisinin sınırlı (belli) sayıda terimlerini hesaplayarak çözüme yaklaşmayı sağlar. Analizin temeli limite dayanır, bu yüzden limit ve süreklilik kavramları diferansiyel denklemlerin analizi ve çözümleri hakkında yorum yapmamıza yardımcı olur. O bakımdan sistemlerin çözümlerine ulaşmak için denklemin lineer olmayan kısmındaki fonksiyonun analitik olduğu noktalar civarında Taylor seri açılımı yaparak Adomian polinomları oluşturulur. Böylece algoritma, denklemdeki ters türev operatörleri ve türev operatörleri kullanılarak oluşturulur. Denklem operatör formda yazılır ve başlangıç verisi ile iterasyona bağlanır. Başlangıç verisi ile sıfırıncı çözüm bileşeni operatör formunda yazılan iterasyonda hesaplanır. Birinci çözüm bileşeni sıfırıncı bileşenin iterasyonda yerine yazılması ile hesaplanır. İkinci çözüm bileşeni birinci çözüm bileşeninin iterasyonda yerine yazılması ile hesaplanır. Bu şekilde devam edilerek iteratif bir seri oluşur. Bu serinin belli iterasyonlardaki terimlerinin toplamı denklemin yaklaşık çözüm fonksiyonunu verir. Bu toplam çözüme hızlı yakınsama gösterir. Bu nedenle Adomian Ayrıştırma Metodu gibi pratik ve gerçek çözüme çok hızlı yakınsama gösteren bir yöntemi kullanmak mantıklıdır.

Temel matematiksel tanım ve teoremlerden yola çıkarak herhangi birinci mertebeden iki adi diferansiyel denklemden oluşan iki komşu sistemin yaklaşık çözümleri için tahminler oluşturabiliriz. İntegral tümleştirme anlamına geldiği için iki denklemden oluşan adi diferansiyel denklem sisteminin sıralı ikili olan tek değişkenli yaklaşık çözüm fonksiyonları elde edilebilir. Bu durumda başlangıç verileri ile George Adomian tarafından türetilen algoritmayı bu sistemlere uygulayarak zamandan kazanmak mümkündür. Zaten matematiğin amacı hayatı kolaylaştırmak ve işlemleri hızlandırmaktır.

Bu çalışmada Adomian Ayrıştırma Metodu ile ele alınan sorunun çözümüne hızlı ve pratik bir şekilde sayısal işlemler yaparak yaklaşıldığı anlaşılmıştır. Ayrıca bu metot birinci mertebeden integral denklemlerine de uygulanabilen bir yöntemdir ve bu çalışmada metodun diğer sayısal metotlarla çözüme yakınsama hızı karşılaştırılmıştır. Bu sayısal karşılaştırmalar ile Adomian Ayrıştırma Metodu özellikle birinci mertebeden adi diferansiyel denklemleri olarak verilen Cauchy problemlerinin çözümü için alternatif bir yöntem olarak önerilmektedir.

APPROXIMATE SOLUTION METHODS IN NUMERICAL ANALYSIS

SUMMARY

In this work algorithms were constitued for the solutions of linear and nonlinear ordinary differential equations and also partial differential equations by using Adomian Decomposition Method and basic mathematical expressions.

Adomian Decomposition method was generated by George Adomian to find the analytic solutions of linear and nonlinear differential equations given with initial and boundary conditions in 1980's.

This kind of equations are usually difficult to solve, sometimes it may be impossible. Therefore we should use a practical method like Adomian Decomposition Method.

Adomian Decomposition Method consider the nonlinear functional differential operator on the domain of the function which solution is investigated to find the solutions of differential equations. This nonlinear differential operator is partitioned into linear part and nonlinear part. The highest order derivative of differential equation is taken as derivative operator. Inverse of this derivative operator is applied to both sides of the equation on left side. Solution component with zero index number is calculated with this operation by using initial condition.

By using derivative operators and inverse derivative operators in considered equation first solution component is calculated from solution component with zero index number. Later first solution component is used in the iteration that obtained with derivative operators and inverse derivative operators to calculate second solution component. Continuing in this fashion approximate solution function of the equation is obtained with series summation of the solution components in each iteration.

Adomian decomposition method especially try to find the best approximation as well as possible.

Adomian Decomposition Method make an algorithm for the solution of considered differential equation without requiring linearization. By making Taylor expansion around points which are analytic for nonlinear function that is considered as nonlinear part of the equation, Adomian polynomials are constituted.

These polynomials are special and they are used in algorithm to make iterations. Terms being calculated in each iteration are summed in consecutive iterations. So that approximate solution function is obtained in currant iterations.

This method generally provide approximate solution function by calculating finite number of terms of series in currant iterations. Series summations being calculated converge fast to exact solutions.

So that using a method like Adomian Decomposition Method is more suitable than using other common numerical methods.

This method is applied to Cauchy problems given with initial conditions and boundary conditions. Solution functions are in the form of series summation of terms in currant iterations.

We can suppose to find the exact solution by summing infinite number of iterative terms, but this is not always possible. Therefore finite number of iterative terms are calculated and summed up. Approximate solution function is made up by this series summations.

In the first chapter, basic mathematical expressions and theorems were given. Also vector spaces, normed spaces, differential equations and the existence and uniqueness of their solutions, Volterra integral equation, Lipschitz condition, fixed point concept, contraction mappings etc. were given. Preliminaries were given for constituting algorithm of Adomian decomposition method and also application areas of this method. Because Adomian decomposition method is frequently used to solve differential equations.

In the second chapter starting with Volterra integral equation, algorithm of Adomian decomposition method was constituted. This method was applied to systems of ordinary linear differential equations and systems of ordinary nonlinear differential equations given with initial conditions.

In the second chapter, method was also applied to partial differential equations given with initial and boundary conditions. It was understood that in consecutive iterations error difference between approximate solutions being calculated is too little. Furthermore, it was mentioned about the convergence analysis of the method.

In the third chapter, it was tried to find the approximate solution of an abstract Cauchy problem of a system of first-order two nonlinear differential equations by Adomian Decomposition Method. Adomian decomposition method was applied to two neighboring systems of an abstract Cauchy problems of first-order nonlinear two differential equations in currant iterations and any two approximate solutions of these two systems were numerically compared in same iteration. Gronwall Lemma, Cauchy-Schwarz inequality, Young inequality and basic mathematical expressions were used to find the results about uniform convergence of any two approximate solutions of these two neighboring systems in same iteration.

It was obtained that ordered couples of approximate solutions of two neighboring systems converge uniformly to each other in same iteration. It was seen that Adomian Decomposition Method is always an alternative method for differential equations and first-order integral equations usually given with initial conditions.

As a result Adomian Decomposition Method can be applied to more complex equations because it is a practical method and converges to solution too fast.

So in this work, by making numerical calculations it was fastly and practically approximated to the solution of the problem that considered with Adomian Decomposition Method.

Moreover convergence speed to the solution for this method was compared with other numerical methods.

It was learned that numerical methods like Adomian Decomposition Methods are useful for approximating solution of differential equations and also integral equations.

Consequently this work deal with approximate solution methods in numerical analysis by studying Adomian Decomposition Method being a practical method and its applicability.

1. GİRİŞ VE ÖN BİLGİLER

1.1 Giriş

Bu çalışmada Adomian ayrışım metodu ve metodun yakınsaklık analizi araştırıldı. Bunun için kaynaklarda verilen çalışmalardan yararlanıldı. Adomian ayrıştırma metodu, matematiğin temel tanımları ve teoremleri kullanılarak lineer ve lineer olmayan adi diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler ve integral denklemleri problemlerinin tam çözümlerin bulunamaması durumunda yaklaşık çözümleri elde etmek için uygulandı. Adomian metodu özellikle başlangıç değerleri ile verilen diferansiyel denklemlerden oluşan Cauchy problemlerin çözümü için kullanılmaktadır. Çünkü bu metot, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemleri sadeleştirmeden çözerek kesin çözüme yakın çözümler elde etmeyi sağlar [1]. Bu çalışmada yapılan uygulamalar ile bu durum desteklendi. Bu çalışmanın giriş ve ön bilgiler kısmında [21] MURTAZA NARLI, 2007, ADOMİAN AYRIŞTIRMA METODU İLE KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ, KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ isimli yüksek lisans tezinden yararlanıldı. Bulunan çözümler seri çözümlerdir. Sınırlı sayıda ayrışım serisinin terimleri hesaplanarak gerçek çözüme yakın sonuçlar bulunur. Bu teknik ile bir diferansiyel denklemin sayısal çözümü ayrıklaştırmaya gerek duyulmadan sembolik programlama dilleri ile kodlanarak yani bilgisayar teknolojisi kullanılarak, hesaplamada kısmen bir kolaylık sağlanır [21].

Diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için bu metotta ayrıklaştırmaya ihtiyaç duyulmaz. Sayısal çözümleri elde edebilmek için ayrıklaştırma yapma yerine, ayrıştırma metodu ile ayrıştırma serisinin terimleri bulunarak sayısal çözümleri oluşturulmuştur [21],[3].

G. Adomian tarafından 1980'li yıllarda verilen ayrışım metodu; lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için uygulamada başlangıç ve sınır değer problemlerinin matematiksel modelleri olan uzay ve zamana

göre bir veya çok boyutlu denklemlerin sayısal çözümlerini bulmada kullanılmaktadır. Ayrışım yöntemi, lineer olmayan denklemlerin çözümünde kullanılan diğer klasik yöntemlere göre daha basittir ve daha karmaşık denklemlere uygulanabilen bir yöntemdir [21], [3].

Literatürde bu metot kullanılarak (lineer ve lineer olmayan) kısmi diferansiyel denklemlerin [4], [5], [7], [8], [9], [17] ve kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin [6] analitik çözümlerinin elde edilmesi ile birlikte bu denklemlerin sayısal çözümleri de hesaplanabilmiştir ve bilinen klasik metotlar kullanılarak bu sayısal sonuçların karşılaştırılması yapılmıştır [11],[2], [20],[12], [13], [14],[21].

Birinci bölümde çözümü araştırılan diferansiyel denklem sistemlerinin ele alındıkları uzaylar ve çözüm analizi yapmak için matematiğin temel bigilerinden faydalanılarak, temel tanımlar ve teoremler ile Adomian ayrıştırma metodunun algoritması ve kullanım yerleri için ön bilgiler verilmektedir.

İkinci bölümde Adomian ayrıştırma metodunun algoritması, birinci bölümde verilen Volterra integral denkleminden yola çıkılarak oluşturulmaktadır ve metodun adi diferansiyel denklem sistemleri ile kısmi diferansiyel denklem sistemlerine uygulanabildiği gösterilmektedir. Ayrıca metodun yakınsaklık analizi yapılmaktadır.

Üçüncü bölümde soyut Cauchy probleminden oluşan birinci mertebeden iki komşu diferansiyel denklem sisteminin herhangi yaklaşık çözümlerini bulmak için Gronwall Lemması, Cauchy-Schwarz Eşitsizliği ve Young Lemmasından faydalanılarak ADM ile algoritma kurulup belli iterasyonlarda yaklaşık çözümler elde edilmektedir ve bulunan yaklaşık çözüm ikilileri arasında düzgün yakınsama olduğu gösterilmektedir. Ayrıca ADM, farklı denklem çeşitlerine de uygulanmaktadır ve çeşitli sayısal metotlarla çözüme yakınsama oranı ve yakınsama hızı konusunda kıyaslanmaktadır.

1.2 Ön Bilgiler

Mühendislikte, fen bilimlerinde, sosyal bilimler gibi pek çok bilim dalında çok sayıda problemi çözümleyebilmek için önce bu problemler matematiksel olarak formüle edilir. Sonra bunlarla ilgili bazı başlangıç şartlarını ve sınır şartlarını kullanarak problemlerin çözümlerini oluşturan fonksiyonlar bulunur. Verilen bir problemi formüle eden bu matematiksel ifadeler aranan fonksiyonun en azından birinci

mertebeden türevini içeriyorsa bu çeşit bir matematiksel ifadeye diferansiyel denklem denir. Bir denklemde belli bir değişkene göre türev alınıyorsa, o değişkene bağımsız değişken ve denklemde türevi alınan değişkene ise bağımlı değişken denir [21].

Bir diferansiyel denklem sadece tek bir bağımsız değişken içeriyor ise bu tip denklemlere adi diferansiyel denklem denir ve genel olarak n-inci mertebeden bir diferansiyel denklemin genel formu F keyfi bir genel fonksiyon olmak üzere

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)}) = 0 \qquad \textbf{(1.1)}$$

şeklinde ifade edilir [21].

Diferansiyel denklemin çözümü; çözüm kavramında daima bir fonksiyonun kaçıncı mertebeden türevinin var olduğu ve bu türev fonksiyonlarının sürekliliği söz konusu olacaktır. Bir $I \in \mathbf{R}$ aralığını ele alınsın, bu aralıkta tanımlı bir fonksiyon g olsun. g nin I aralığında ilk n-inci mertebeden türevinin var olduğu ve türevlerinin sürekli olduğu kısaca $g \in C^n[I]$ ile gösterilecektir [21].

Bir $g \in C^n[I]$ fonksiyonunun kendisi ve gerekli türevleri (1.1) de yerine konulduğunda elde edilen $g^{(n)} = F(x, g(x), g'(x), g''(x), ..., g^{(n-1)}(x))$ fonksiyonu x bağımsız değişkenine göre bir özdeşlik oluşturuyorsa g ye (1.1) diferansiyel denkleminin çözümü denir [21].

İkinci mertebeden diferansiyel denklemlerde genellikle iki keyfi sabit olduğundan iki ek şart verilmelidir. Eğer şartlar bağımsız değişkenin tek değeri için fonksiyonun kendisinin ve bazı türevlerinin değerlerinin verilmesi şeklinde ise başlangıç şartları, bağımsız değişkenin iki ya da daha fazla değeri için fonksiyonun veya türevinin değerlerinin verilmesi şeklinde ise sınır şartları adını alır. Bir diferansiyel denklemin başlangıç şartları ile incelenmesine başlangıç değer problemi, sınır şartları ile incelenmesine de sınır değer problemi denir [21]. (1.1) diferansiyel denklemi

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \qquad \textbf{(1.2)}$$

başlangıç şartları ile birlikte verilmiş ise (1.1) denklemi ve (1.2) başlangıç şartları ile birlikte Cauchy problemi olarak bilinir [21].

Benzer şekilde bir diferansiyel denklem bir veya daha çok değişkenli fonksiyonun türevlerini içeriyor ise diferansiyel denkleme kısmi diferansiyel denklem denir. Genel bir kısmi diferansiyel denklem açık formda ve herhangi bir kısmi diferansiyel denklem

x, y, z, t bağımsız u bağımlı değişken olmak üzere

$$F(x, y, z, t, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{tt}, ..., u_{tt...t}) = 0 \qquad \textbf{(1.3)}$$

şeklinde kapalı formda verilebilir [21].

Diferansiyel denklemler lineer olup olmadıklarına göre de sınıflandırılır. Eğer bir diferansiyel denklem bağımlı değişken y nin ve türevlerinin cinsinden $b_0(x), b_1(x), ..., b_n(x)$ katsayı fonksiyonları ile

$b_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + b_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + b_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + b_n(x) = R(x)$ formunda yazılıyorsa lineer olarak isimlendirilir, aksi takdirde nonlineerdir denir [21].

Burada verilecek tanımlar ve teoremler diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği hakkında görüş elde etmeyi sağlayacaktır. Önce ele alınan diferansiyel denklemlerin tanımlı oduğu uzaylar açıklanmalıdır ve daha sonra bu uzaylarda yakınsamanın getirdiği sonuçlar ile ele alınan diferansiyel denklemlerin çözüm analizlerinin, metrik tanımı ve Hilbert uzayları esas alınarak yapılacağı sonucuna varılacaktır.

Lineer Uzay: Bir lineer uzay bir F vektör alanı üzerinde toplama ve skaler eşleme kurallarını sağlayan bir X kümesidir.

Toplama Kuralları:

(i) $x + y = y + x$

(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$

(iii) Her $x \in X$ için $x + 0 = x$ olacak şekilde en azından bir $0 \in X$ vardır.

(iv) Herbir $x \in X$ için $x + (-x) = 0$ olmak üzere $-x$ elemanı vardır.

Skaler Eşleme Kuralları:

$(i) 1x = x$

$(ii)(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

Lineer uzaylar vektör uzaylarıdır. Bir lineer uzayın elemanları vektörlerdir.

Lineer Dönüşümler: Eğer X ve Z iki lineer uzay ise, bir $T : X \to Z$ lineer operatörü $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in F$ için herbir $x \in X$ elemanını $Tx \in Z$ elemanı ile bağdaştırır. Yani

$T(x+y) = Tx+Ty, T(\alpha x) = \alpha Tx$ dir. Lineer operatörler lineer dönüşümlerdir. Bir lineer dönüşüm veya lineer operatör olan T, X ve Y uzayları arasında bir $T : X \to Y$ fonksiyonudur, öyle ki $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ve $x, y \in X$ için $T(\lambda x + \mu y) = \lambda Tx + \mu Ty$ dir.

Normlu Uzay: Norm bir lineer X uzayı üzerinde $\forall x, y \in X; \alpha \in F$ için $x \in X$ nonnegatif sayısını elde eden bir $||.|| : X \to [0, \infty)$ fonksiyonudur ve aşağıdaki aksiyomları sağlar.

(i) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Üçgen Eşitsizliği)

(ii) $||\alpha x|| \leq |\alpha| ||x||$ (Skaler Özelliği)

(iii) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Eğer $||.||$ bir lineer X uzayı üzerinde bir norm ise o zaman $(X, ||.||)$ bir normlu lineer uzay veya normlu uzaydır.

Norm bir X vektör uzayı üzerinde iki farklı $x, y \in X$ noktaları arasındaki uzaklığı ölçmede kullanılabilir. Yani metrik tanımlanabilir. Böylece bir dizinin limiti tanımlanabilir.

Sınırlı Lineer Dönüşümler: X ve Y iki normlu lineer uzayı üzerinde, $T : X \to Y$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ için $||Tx|| \leq M||x||$ olacak şekilde bir $M \geq 0$ sabiti varsa sınırlıdır. Eğer böyle bir sabit yoksa T sınırsızdır.

Fonksiyon uzayları vektör uzaylarıdır.

Sınırlı Fonksiyonlar Uzayı: X boştan farklı bir küme ve $(Y, ||.||)$, $\mathbf{R}$ üzerinde bir normlu uzay olsun. Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu, görüntüsü Y içerisinde sınırlı ise sınırlıdır denir. Yani $r > 0$ için $f(X) \subset B_y(0, r)$ dir. Açıkça, bu $r > 0$ ın varlığı anlamına gelir öyle ki her $x \in X$ için $||f(x)|| < r$ dir. Tüm sınırlı $f : X \to Y$ fonksiyonlarının kümesi $B(X, Y)$ ile gösterilir. Bu X ten Y ye tüm sınırlı fonksiyonların uzayı olan bir vektör uzayıdır. Eğer $f \in B(X, Y)$ ise $||f||_\infty = sup\{||f(x)|| \mid x \in X\}$ dir. Eğer $f, g \in B(X, Y)$ ve $x \in X$ ise, o zaman $||f(x)+g(x)|| \leq ||f(x)|| + ||g(x)|| \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$ ve x, X içerisinde keyfi bir eleman olduğundan $||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$ olur. Yani $||.||_\infty$ üçgen eşitsizliğini sağlar. Diğer aksiyomlar ayrıca sağlanmaktadır. Böylece $(B(X, Y), ||.||_\infty)$ bir normlu uzaydır.

Şimdi normlu uzayın aynı zamanda metrik uzay olduğunu ispatlamak için normlu uzaylarda yakınsama ve mutlak yakınsama tanımlarından faydalanılacaktır.

Herhangi bir X normlu uzayı içerisinde bir $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi, $x_n \in X, n \in \mathbf{N}$ ve tüm $n > N$ ler için $||x_n - x|| < \varepsilon$ olmak üzere $\varepsilon > 0$ için en azından bir $N \in \mathbf{N}$ varsa bir $x \in V$ limitine yakınsar. Bunun ne anlama geldiği yakınsamanın tanımındadır.

Normlu Uzaylarda Yakınsama: X bir normlu lineer uzay (bir iç çarpım uzayı gibi) olsun ve $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, X in elemanlarının bir dizisi olsun.

(a) $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}, f \in X$ e yakınsar denir ve $\lim_{n\to\infty} ||f - f_n|| = 0, \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$ öyle ki $n > N \Rightarrow ||f - f_n|| < \varepsilon$.

(b) $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ Cauchy dizisidir, eğer $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$ öyle ki $m, n > N$ için $||f_m - f_n|| < \varepsilon$.

Normlu Uzaylarda Mutlak Yakınsama: X bir normlu uzay ve $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, X in elemanlarının bir dizisi olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} ||f_n|| < \infty$ ise o zaman $\sum_n f_n$ serisi X içerisinde mutlak yakınsaktır denir.

Tam Normlu Uzay: Normlu lineer bir X uzayının her Cauchy dizisi yakınsak ise X tamdır denir.

Lemma 1.1: Eğer $(X, ||.||)$ bir normlu vektör uzayı ise o zaman $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ noktalarının bir dizisi Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow$ verilen herhangi $\varepsilon > 0$ için en azından bir $N \in \mathbf{N}$ vardır, öyle ki $i, j > N$ için $||x_i - x_j|| < \varepsilon$.

Teorem 1.1: Bir normlu X uzayı tamdır $\Leftrightarrow$ her Cauchy serisi yakınsak ise.

İspat: $(V, ||.||)$ tam olsun ve $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$ olsun. O zaman $M > N$ için

$|\sum_{n=N}^{M} x_n| \leq \sum_{n=N}^{M} ||x_n|| \to 0$ dir. Yani seri Cauchydir, sonuçta yakınsaktır. Aksine her mutlak yakınsak seri Cauchy farzedilsin ve (x_n) bir Cauchy dizisi olsun. Bir x_{n_j} alt dizisinin herhangi $x \in V$ ye yakınsadığını göstermek yeterlidir.

$m, j \to \infty$ iken $||x_m - x|| \leq ||x_m - x_{n_j}|| + ||x_{n_j} - x|| \to 0$.

$n_1 \in \mathbf{N}, ||x_{n_1} - x_m|| \leq \frac{1}{2}, \forall m > n_1$ olacak şekilde seçilsin. O zaman $n_2 > n_1$ alınsın, öyle ki $||x_{n_2} - x_m|| \leq \frac{1}{2^2}, \forall m > n_2$ ve bu şekilde devam edilsin. O zaman

$x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + x_{n_2} - x_{n_1} + \ldots + x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$, fakat $\sum_{j=1}^{\infty} ||x_{n_{j+1}} - x_{n_j}|| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1$ olur. Yani herhangi $x \in V$ için $x_{n_j} \to x$ olur.

Lemma 1.2: $(X, ||.||)$ bir normlu uzay ise, o zaman $d(x, y) = ||x - y||$ ile verilen

$d : XxX \to \mathbf{R}$, X üzerinde bir metriktir.

Banach Uzayları: Bir X vektör uzayı üzerindeki norm, bir uzaklık fonksiyonu belirlediğinden herhangi normlu vektör uzayının ayrıca bir metrik uzay olduğu anlaşılır. Bir B Banach uzayı, $d(x,y) = ||x-y||$ metriği ile birleşen bir normlu uzaydır, öyle ki B deki her Cauchy dizisinin yine B içerisinde bir limiti vardır. Yani $(B, ||.||)$ normlu vektör uzayı tam ise bir Banach uzayıdır, öyle ki bu uzayda $||.||$ normuna bağlı olarak bir dizi Cauchy olduğunda yakınsaktır. Bu yüzden bu uzaydaki bir dizinin Cauchy olup olmadığı belirlenebilir.

Hilbert Uzayları: Bir H Hilbert uzayı bir iç çarpım normu ile tam bir uzaydır, öyle ki H daki her Cauchy dizisinin yine H içerisinde bir limiti vardır. Bir H Hilbert uzayı ayrıca bir Banach uzayıdır. Hilbert uzayı ile Banach uzayı arasındaki fark normun kaynağıdır. Hilbert uzayında norm iç çarpıma göre tanımlıdır, $||x|| = \sqrt{< x,x >}$.

Her normlu uzay metrik uzaydır, fakat bunun tersi doğru değildir. Bundan sonraki analizler ve adi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin karakterleri metrik uzaylar üzerinde ele alınıp incelenecektir. Çözümleri araştırılan diferansiyel denklemler vektör notasyonunda ele alındıkları için bu vektörlerin içinde düşünüldükleri normlu vektör uzayları olarak Hilbert uzayları esas alınmaktadır.

Analizin kuruluşu kesinlikle limittir ve limitin kavramsal kuramı birbirine yakın keyfi olarak verilen sayıların görüntüsüdür. Yani iki nokta arasındaki uzaklık üzerine temellenmiştir. Sezgisel olarak belli kümeler arasındaki uzaklık düşülünerek; bir doğru üzerindeki noktalar olan gerçel sayılar ve bir düzlemdeki sıralı ikililer ele alınıp, bunları birbirine bağlayan doğrunun uzunluğu geometrik olarak bunlar arasındaki uzaklık olarak düşünülebilmektedir [24].

Metrik: Bir X kümesi üzerindeki $d : XxX \to \mathbf{R}$ fonksiyonu bir metriktir.$\forall x,y,z \in X$ için metrik aşağıdaki şartları sağlar.

(i) $d(x,y) \geq 0$

(ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(iii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iv) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Üçgen Eşitsizliği)

Metriğin (i) ve (ii) aksiyomları pozitif-tanımlılığı oluşturur.

Metrik bir küme içerisindeki noktalar arasındaki uzaklığı düşünmeyi sağlamaktadır. Sezgisel bir örnek olarak $d(f,g) = sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ metriği ile beraber $[a,b]$ kapalı aralığı üzerindeki sürekli fonksiyonların C kümesi ele alınsın. d fonksiyonu, sürekli fonksiyonlar kapalı bir aralık üzerinde bir minimum ve bir maksimum değeri oluşturduğundan CxC lerin hepsinin üzerinde iyi-tanımlıdır ve bu yüzden $|f-g|$ sınırlı olmalıdır. Bir metrik uzayın ilk iki şartı C yi alışılmış gerçel metriğin özellikleri ile takip eder. Üçgen Eşitsizliği' nden eğer

$sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)| > sup_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)| + sup_{x\in[a,b]}|g(x)-h(x)|$ eşitsizliği yazılırsa, o zaman $|f-g|$ nin maksimum x_0 noktasında

$|f(x_0)-g(x_0)| > |f(x_0)-h(x_0)| + |g(x_0)-h(x_0)|$ elde edilebilir. Bu bir çelişkidir; çünkü alışılmış gerçel metrik, üçgen eşitsizliğini sağlar.

Metrik Uzaylar: Bir metrik uzay yukarıda tanımlı $d : XxX \to \mathbf{R}$ metriği ile birlikte verilen bir X kümesidir.

Metrik uzaylar arasında verilen bir fonksiyon için limitler ve süreklilik, analizdeki limitler ve sürekliliğe benzeştirilerek tanımlanabilir.

Metrik Uzayda Yakınsama: Bir X metrik uzayındaki bir $\{x_n\}$ dizisine eğer $\lim_{k\to\infty} d(x_k,x) = 0$ ise, X içerisinde x noktasına yakınsıyor denir. Yani x_k her $\varepsilon > 0$ için x e yakınsar $\Leftrightarrow$ en azından bir N vardır öyle ki $k > N$ için $d(x_k,x) = \varepsilon$ anlamına gelir. Bu durumda $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ veya $x_k \to x$ yazılır.

Tam Metrik Uzay: Bir X metrik uzayında eğer her Cauchy dizisi X in bir elemanına yakınsıyorsa, X tam uzay olarak adlandırılır. Örneğin $\mathbf{R}^n$ tamdır. $\mathbf{Q}$ rasyonel sayılar kümesi tam değildir. Çünkü $\mathbf{Q}$ içerisinde $\sqrt{2}$ sayısına yakınsayan bir $\{x_n\}$ uzayı alındığında; böyle bir dizinin varlığı, gerçel sayılardaki rasyonel sayıların yoğunluğundan bilinmektedir. O halde $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir, ama $\mathbf{Q}$ nun bir elemanına yakınsamaz [24], [25].

Adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği hakkında tartışılmalıdır. Yukarıda verilen C kümesinin tamlığı başlangıç değer problemlerinden oluşan bir lineer sistemin tek çözümünün varlığını garanti eder. Uygulama (veya ispat), bir kapalı aralık üzerindeki vektör değerli sürekli fonksiyonların bir dizisini inşa ederek tekrarlı bir şekilde devam ettirilerek yapılabilir. Dizi Cauchy olduğundan o kapalı aralık üzerinde bir başka sürekli fonksiyona yakınsamalıdır. Bu durumda, başlangıç

değer problemini sağlayan dizinin limit fonksiyonunu göstermek diziyi tanımlamak için yeterlidir [24], [25], [26].

Birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemleri olan Cauchy problemlerinden yola çıkılarak bu denklem sistemlerinin çözüm analizi yapılacaktır.

$$y_1'(t) = f_1(t, y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)), y_1(0) = Y_1$$

$$y_2'(t) = f_2(t, y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)), y_2(0) = Y_2$$

$$\vdots$$

$$y_n'(t) = f_n(t, y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)), y_n(0) = Y_n$$

başlangıç şartları ile verilen diferansiyel denklem sistemi ele alınsın. Banach Sabit Nokta Teoremi'nden ve $C([0,a], \mathbf{R}^n)$ in tamlığından böyle sistemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği gösterilecektir. Vektör notasyonu,

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, f(t, y(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)) \\ f_2(t, y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)) \end{pmatrix} \quad \textbf{(1.4)}$$

ile oluşturulur [27]. Bu notasyonda sistem $y'(t) = f(t, y(t)), y(0) = y_0$ olur. İntegrasyon yapılarak $y(t) - y_0 = \int_0^t f(s, y(s))ds$, yani $y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds$ bulunur. Bu denklemin sağ tarafının içerisine keyfi z fonksiyonunu yerleştirerek başlatılsın. Başka bir $u(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds$ ile tanımlı u fonksiyonu ortaya çıkarılabilir. Bu fonksiyon, z sürekli fonksiyonlarını $u = F(z)$ sürekli fonksiyonlarına eşleştiren bir F fonksiyonu olarak düşünülebilir. Bu bakış açısından $y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))ds$ nin bir çözümü F için sadece bir noktadır; öyle ki $y = F(y)$ olacak şekilde bir y aranmalıdır. F, yeni bir $u = F(z)$ fonksiyonu üretmek için z üzerinde rol oynayan bir fonksiyondur. Amaç Banach Sabit Nokta Teoremi' ni kullanarak F nin tek sabit noktası olduğunu ispatlamaktır, ama önce kritik bir koşul olan Lipschitz koşulu ile sabit nokta ve büzülme dönüşümü kavramları sunulmalıdır.

Lipscihtz Koşulu: f bir türevlenebilir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \tag{1.5}$$

$$y(t_0) = y_0$$

genel başlangıç değer problemi ele alınsın. Başlangıç verisi ile bu problemin tek çözümünün bulunmasını aşağıdaki durum garanti eder. (t,y) düzleminin verilen bir S alt kümesi ele alınsın. S içerisinde herbir (t,y_1) ve (t,y_2) nokta çiftleri için herhangi bir K sabiti $|f(t,y_2)-f(t,y_1)| \leq K|y_2-y_1|$ olacak şekilde varsa f fonksiyonuna y ye bağlı olarak S alanında nüfuz eden Lipschitz fonksiyonu denir [28].

Lemma 1.3: f fonksiyonu y ye bağlı ve $R = [a,b]x[c,d]$ kapalı dikdörtgeni üzerinde sürekli türevlenebilir olsun. O zaman f, R üzerinde y ye bağlı Lipschitz fonksiyonudur.

İspat: $\frac{\partial f}{\partial y}$, kapalı ve sınırlı R kümesi üzerinde sürekli olduğundan R üzerinde bir minimuma ve bir maksimuma ulaşır. Bu yüzden $K = max_{(t,y)\in B_0}|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)| < \infty$ olur. Böylece B_0 içerisinde verilen (t,y_1) ve (t,y_2) nokta çiftleri için Ortalama Değer Teoremi'nden y_1 ile y_2 arasında bir y_3 vardır ,öyle ki

$|f(t,y_2)-f(t,y_1)| = |\frac{\partial f}{\partial y}(t,y_3)||y_2-y_1| \leq K|y_2-y_1|$.

Örnek: $f(t,y) = |t|e^{ty} + tsin(t+2y)$ olsun. $\frac{\partial f}{\partial y} = t|t|e^{ty} + sin(t+y) - 2cos(t+2y)$,

R üzerinde süreklidir. Bu yüzden f Lipschitz fonksiyonudur.

Bu lemmanın tersi doğru değildir. Yani, y ye bağlı Lipschitz fonksiyonu olmak y ye bağlı türevlenebilir olmak değildir.

Örnek: $f(t,y) = |t|y, R = [-2,2]x[-2,2]$. O halde

$|f(t,y_2)-f(t,y_1)| = |t||y_2|-|y_1|| \leq |t||y_2-y_1|$ olduğundan $L=2$ Lipschitz sabiti ile f, R üzerinde y ye bağlı Lipschitz fonksiyonudur. Ancak $\frac{\partial f}{\partial y}$, R üzerinde sürekli değildir.

Teorem 1.2: $f(t,y)$, t'de sürekli ve $R = [a,b]x[c,d]$ alanının üzerinde y ye bağlı bir Lipschitz fonksiyonu olsun. O zaman, R içerisinde verilen herhangi (t_0,y_0) noktası için en azından bir $\varepsilon > 0$ vardır ve $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ aralığında (1.5) başlangıç değer probleminin tek $y(t)$ çözümü vardır.

Düzgün Yakınsama ve Sürekli Fonksiyonların Uzayı:

Bir I aralığı üzerinde bir f fonksiyonunun düzgün normu $||f|| = sup_{x\in I}|f(x)|$ ile tanımlanır [30].

Örnek: $f(x) = x^2$ olsun.$I = [-3,3]$ aralığı üzerinde $||f|| = 9$ olur. $\mathbf{R}$ üzerinde $||f|| = \infty$ olur, çünkü $\mathbf{R}$ üzerinde f sınırsızdır.

Düzgün norma bağlı yakınsama düzgün yakınsama olarak bilinir. Bir I aralığı üzerinde bir f fonksiyonu için eğer $\lim_{n\to\infty}||f_n - f|| = \lim_{n\to\infty} sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = 0$ ise f fonksiyonuna bir f_n fonksiyon dizisine düzgün yakınsar denir.

Örnek: $f_n(x) = x^n$ ve $f(x) = 0$ olsun. O halde $[0, \frac{1}{2}]$ aralığı üzerinde

$||f_n - f|| = sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]}|x^n| = \frac{1}{2^n} \to 0$, yani $[0, \frac{1}{2}]$ aralığı üzerinde f_n, f ye düzgün yakınsar. Ancak $[0,1]$ üzerinde $||f_n - f|| = sup_{x\in[0,1]}|x^n| = 1 \nrightarrow 0$, yani $[0,1]$ üzerinde f_n, f ye düzgün yakınsamaz.

Düzgün yakınsama sürekliliği korur. Yani sürekli fonksiyonların bir dizisinin düzgün limiti süreklidir [24], [25].

Teorem 1.3: f_n, $\mathbf{R}$ içerisinde herhangi bir I aralığı üzerinde sürekli fonksiyonların bir dizisi olsun ve f_n, I üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olsun. O halde f, I üzerinde düzgün süreklidir.

Sabit Nokta ve Büzülme Dönüşümleri:

Sabit Nokta: X bir metrik uzay olsun. Bir $T : X \to X$ fonksiyonunun bir sabit noktası $T(x) = x$ olmak üzere $x \in X$ elemanıdır.

Ters operatörler üzerinde, Banach Teoremi'nin bir genelleştirmesi olarak alınabilen en basit durum lineer olmayan denklemler için çalışılmıştır. X tam metrik uzayı (lineer olması gerekmeyen) ve X in kapalı alt kümesi Ω ele alınsın. $T : \Omega \to \Omega$ dönüşümü için eğer $x^* = T(x^*)$ ise $x^* \in \Omega, T$ nin bir sabit noktasıdır. Yani T nin sabit noktaları $x = T(x)$ denkleminin çözümleridir. Eğer $X = \Omega$ bir metrik vektör uzayı ve

$T(x) = x + x_0, (x_0 \neq 0)$ ise T nin sabit noktaya sahip olması gerekmez. Yani ele alınan vektör uzayı (veya aralık) T nin sabit noktaya sahip olup olmadığını belirlemektedir.

Örnek: $X = \Omega = \mathbf{R}$ olmak üzere X üzerinde tanımlı $T(x) = \frac{\Pi}{2} + x - tan^{-1}(x)$, dönüşümünün sabit noktası yoktur. Çünkü ξ, x ile x' arasında bir nokta olmak üzere

$d(T(x),T(x')) = |T(x)-T(x')| = |T'(\xi)||x-x'| = |\frac{\xi^2}{1+\xi^2}||x-x'| < d(x,x')$ dir [37].

Büzülme Dönüşümü: Bir X metrik uzayı üzerinde bir büzülme dönüşümü, herhangi $0 < \alpha < 1$ için her $x, y \in X$ olmak üzere $d(T(x),T(y)) \leq \alpha d(x,y)$ olacak şekilde bir

$T : X \to X$ fonksiyonudur. Yani α sabiti ile bir büzülme dönüşümü en azından bir α faktörü ile farklı noktalar arasındaki uzaklığı kısaltır.

Lemma 1.4: Her büzülme dönüşümü süreklidir.

İspat: $T : X \to X$ bir (X,d) tam metrik uzayı üzerinde büzülme dönüşümü olsun. β modülü (veya genliği) ve herhangi $x^* \in X$ için $\varepsilon > 0$ ve $\delta > 0$ olsun. O zaman $d(x,x^*) < \delta \Rightarrow d(T(x),T(x^*)) \leq \beta\delta < \varepsilon$ dır. Bu yüzden T, x^* üzerinde süreklidir. x^* keyfi olarak alındığından T, X üzerinde süreklidir.

Lemma 1.5: (X,d_x) ve (Y,d_y) iki metrik uzay olsunlar. Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu düzgün süreklidir $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ için en azından bir $\delta > 0$ vardır öyle ki

$\forall x, x^* \in X : d_x(x,x^*) < \delta \Rightarrow d_y(f(x),f(x^*)) < \varepsilon.$

Bu tanımın süreklilik tanımından nasıl farklılaştığına dikkat edilirse; verilen herhangi bir ε ve tek δ için f nin nüfuz alanının tamamı üzerinde düzgün süreklilik vardır. f nin x noktası üzerindeki sürekliliğine dayanan δ nın sürekliliği değerlendirilir. Herhangi $x \in X$ için düzgün süreklilik δ ya bağlı olmak üzere, f nin ε a bağlı bir $f(x)$ görüntüsünün varlığını garanti eder. Yani her büzülme dönüşümü düzgün süreklidir.

Büzülme dönüşümünün sürekliliği ve düzgün sürekliliği Volterra integral denkleminin çözümünün karakter analizi yapılmasında yardımcı olacaktır.

Teorem 1.4 (Büzülme Dönüşümü İlkesi = Banach Sabit Nokta Teoremi): X bir tam metrik uzay farzedilsin ve $T : X \to X$, X tam metrik uzayı üzerinde bir büzülme dönüşümü olsun. O halde T tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir öyle ki $T(z) = z$ dir. Dahası x_0, X içerisinde herhangi bir nokta ise $n \to \infty$ iken $T^n(x_0) \to z$ olur.

İspat: $x_0 \in X$ olsun. $\{x_n = T^n(x_0)\}|_{n=1}^{\infty}$ dizisinin X içerisinde bir Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir. $D = d(x_0,T(x_0))$ olsun ve T için büzülme sabiti $0 < c < 1$ alınsın. Büzülme dönüşümünün tanımından $d(T(x_0),T^2(x_0)) \leq cd(x_0,T(x_0)) = cD$ dir. Tümevarımdan $d(T^n(x_0),T^{n+1}(x_0)) \leq c^nD$ eşitsizliği inşa edilebilir. Yani

$d(x_0, T^{n+1}(x_0)) \leq \sum_{k=0}^{n} c^k D < \frac{D}{1-c}$ dir. Benzer şekilde $\forall n < m$ için

$$d(T^n(x_0), T^m(x_0)) \leq Dc^n \sum_{k=0}^{m-n-1} c^k < c^n \frac{D}{1-c}$$

olur. Dizinin Cauchy olduğunu göstermek için $\varepsilon > 0$ olsun ve $c^N \frac{D}{1-c} < \varepsilon$ olacak şekilde N seçilsin. O zaman $N \leq n \leq m$ için $d(T^n(x_0), T^m(x_0)) < \varepsilon$ dir. Yani dizi Cauchy dizisidir.

$\{x_n = T^n(x_0)\}|_{n=1}^{\infty}$ dizisi Cauchy dizisi olduğundan, bu dizi bir $z \in X$ noktasına yakınsar. Ama bu z için $\lim_{n\to\infty} T^n(x_0) = z = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x_0) = T(z)$ dir. Böylece z, T nin bir sabit noktasıdır. Diğer taraftan X içerisinde eğer bir başka $z' \neq z$ sabit noktası olsaydı, o zaman $d(T(z), T(z')) = d(z, z') > cd(z, z')$ olurdu ki, bu son eşitsizlik T nin büzülme dönüşümü olması ile çelişir. Bu yüzden sadece bir sabit nokta vardır.

Çözümün Varlığının ve Tekliğinin İspatı:

Çözümün analizi için Teorem 1.2'in ifadesi ile ilerlemek gerekmektedir. İlk önce

$\frac{dy}{dt} = f(t,y), y(t_0) = y_0$ (1.5) başlangıç değer probleminin bir tam metrik uzay üzerindeki bir dönüşümün sabit noktaları olarak alınan çözümleri karakterize edilmelidir. Daha sonra eğer yeterince küçük zaman aralığı ele alınıyor ise bu dönüşümün büzülme dönüşümü olduğu gösterilmelidir. Dönüşümü tanımlayarak başlamak gerekir. f sürekli farzedilsin ve $y(t)$ herhangi $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ üzerinde başlangıç değer probleminin bir çözümü olsun. O halde t_0 dan t ye integrasyon yapılarak

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \qquad \textbf{(1.6)}$$

olur. Bu denklem integral denklemi adını alır, çünkü y içeren bir integral ile bilinmeyen y fonksiyonunu bağlar. Sonuçta (1.5) in herhangi bir çözümü (1.6) nın bir çözümüdür. Aksine $f(s, x(s))$ süreklidir ve Cebirin Esas Teoremi'nden y türevlenebilirdir ve

$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$ dir. Ayrıca $t = t_0$ için $y(t_0) = y_0$ olur. Sonuçta (1.6) nin herhangi sürekli çözümü (1.5) in bir çözümüdür. (1.5) üzerine odaklanılsın. Verilen bir y sürekli fonksiyonu için $T(y)$ fonksiyonu $T(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$ ile tanımlanır. Böylece y, (1.5) in bir çözümüdür $\Leftrightarrow T(y) = y$ yani y, T dönüşümünün sabit noktasıdır. Şimdi T büzülme dönüşümü olmak üzere bir tam metrik uzay tanımlansın. $\varepsilon > 0$ ve $\eta > 0$ için bir $X = C([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon], [y_0 - \eta, y_0 + \eta])$ tanımlanır. $C([a,b],[c,d])$ uzayı tam olduğundan X tamdır [29].

Teorem 1.5: $f(t,y)$ sürekli ve $R=[a,b]x[c,d]$ alanında nüfuz eden y ye bağlı bir Lipschitz fonksiyonu olsun. O zaman R içerisinde herhangi (t_0,y_0) için en azından bir $\varepsilon>0$ ve en azından bir $\eta>0$ vardır, öyle ki $T:X\to X$ bir büzülme dönüşümüdür.

İspat: Önce $[y_0-\eta,y_0+\eta]$ aralığı $[c,d]$ içerisinde olmak üzere yeterince küçük $\eta>0$ seçilsin. Sonra f, R üzerinde y ye bağlı Lipschitz fonksiyonu olduğundan R içerisinde her (t,y_1) ve (t,y_2) için $|f(t,y_2)-f(t,y_1)|\leq K|y_2-y_1|$ olmak üzere en azından bir K sabiti vardır. $M=max_{(t,y)\in R}|f(t,y)|$ olsun. $\varepsilon<min\{\frac{1}{K+1},\frac{1}{M+1}\}$ olmak üzere $\varepsilon>0$ seçilsin. İlk önce $T:X\to X$ olduğu gösterilmelidir. $x(t)$,X uzayında bir fonksiyon ve $y=T(x)$ olsun. O zaman $y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds$ olur. x sürekli ve f sürekli olduğundan $f(s,x(s))$ süreklidir; böylece Cebirin Esas Teoremi'nden y türevlenebilirdir, sonuçta süreklidir. y nin alanının (menzilinin), $[y_0-\eta,y_0+\eta]$ nın bir alt kümesi olduğunu göstermek için $t_0\leq t\leq t_0+\varepsilon$ olmak üzere

$$|y(t)-y_0|=|\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))ds|\leq\int_{t_0}^{t}|f(s,x(s))|ds$$

$$\leq\varepsilon M<\frac{\eta M}{M+1}<\eta$$

bulunur ve benzer şekilde $t_0-\varepsilon\leq t\leq t_0$ için $|y(t)-y_0|<\eta$ dır. Sonuçta $y\in X$, yani $T:X\to X$ olur. T nin düzgün norma bağlı bir büzülme dönüşümü olduğunu göstermek için $x,y\in X$ alınsın ve $\alpha=\varepsilon K<1$ olsun. O halde $t_0\leq t\leq t_0+\varepsilon$ için

$$|T(x)(t)-T(y)(t)|=|\int_{t_0}^{t}(f(s,x(s))-f(s,y(s)))ds|$$

$$\leq\int_{t_0}^{t}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|ds$$

$$\leq K\int_{t_0}^{t}|x(s)-y(s)|ds$$

$$\leq K\int_{t_0}^{t}||x-y||ds\leq K\varepsilon||x-y||=\alpha||x-y||$$

olur. Aynı şekilde $t_0-\varepsilon\leq t\leq t_0$ için $|T(x)(t)-T(y)(t)|\leq\alpha||x-y||$, yani $||T(x)-T(y)||\leq\alpha||x-y||$ ve bu yüzden T bir büzülme dönüşümüdür.

Teorem 1.2'nin İspatı: $C([a,b],[c,d])$ uzayı tam uzay olduğundan X düzgün norma bağlı bir tam metrik uzaydır. Teorem 1.5'ten $T:X\to X$ yeterince küçük seçilen ε ve η sabitlerini sağlayan bir (contraction mapping) büzülme dönüşümüdür. Büzülme Dönüşümü İlkesi'nden X içerisinde T nin tek y noktası vardır. Sonuç olarak

y fonksiyonu $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ aralığı üzerinde (1.5) in tek çözümüdür.

Bu teoremin geçerli olduğu sistemler aşağıda verilmektedir. $i = 1,2,...$ için

$\frac{dx_i}{dt} = \phi_i(x_1,x_2,...,x_n;t)$ adi diferansiyel denklemlerinden oluşan sistem ele alınsın. Eğer n-boyutlu vektör fonksiyonları, bir başka deyişle gerçel fonksiyonlardan oluşan n-mertebeli sistemler ele alınırsa $(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t))$ bileşenlerine sahip $x(t)$ ve $\phi_1(x_1,x_2,...,x_n;t),...,\phi_n(x_1,x_2,...,x_n;t)$ bileşenlerine sahip $\phi(x,t)$ için tek (single)

$\frac{dx}{dt} = \phi(x,t)$ denklemi yazılabilir. Burada türev $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, ..., \frac{dx_n}{dt}$ bileşenlerine sahip vektör fonksiyonları olarak ifade edilir. $x = T(x)$ büzülme dönüşümü denkleminin

$x_i(a) = y_0^{(i)}, (i = 1,2,...,n)$ veya vektör formunda $x(a) = y_0$ başlangıç şartını sağlayan çözümü $[a,b]$ aralığında bulunmak istensin $(y_0; y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, ..., y_0^{(n)}$ koordinatlarına sahip $\mathbf{R}^n$ in bir elemanı). Bu problemi çözmek, $x(t) = y_0 + \int_a^t \phi(x(\tau),\tau)d\tau$ integral denklemini çözmek demektir [36].

Diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği, Volterra integral denklemi esas alınarak ispatlanmaktadır. Lipscihtz koşulu, sabit nokta ve büzülme dönüşümü kavramları; bu denklem sistemlerinin çözümlerinin karakterlerini analiz etmek için nasıl bir yol izleneceğini gösterir. Burada çözüme çok hızlı yakınsama gösteren bir metot olan Adomian Ayrıştırma Metodu'nun oluşumuna giriş yapmak için metodun algoritmasını oluşturan polinomlar olan Adomian polinomları, denklem sisteminin lineer olmayan kısmının Taylor açılımı yapılarak elde edilir. Taylor seri açılımı, herhangi bir Cauchy probleminin yakınsaklık analizi ve fonksiyonun çözümünün gerçek değeri ile belli iterasyonlardaki yaklaşık değerleri arasındaki hata farkı hakkında yorum yapmayı sağlayacaktır.

2. ADOMIAN AYRIŞTIRMA METODU

Adomian ayrıştırma metodu adi diferansiyel denklem sistemlerine ve kısmi diferansiyel denklem sistemlerine uygulanmaktadır. Önce adi diferansiyel denklem sistemlerine uygulanması ele alınacaktır. Bunun için N. Shawagfeh ve D. Kaya tarafından 2004 yılında yayımlanan Comparing Numerical Methods for the Solutions of Systems of Ordinary Differential Eqauations isimli çalışmadan faydalanılmıştır [39]. Metodun algoritması ve oluşum şekli için [21] MURTAZA NARLI, 2007, ADOMIAN AYRIŞTIRMA METODU İLE KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ, KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ isimli yüksek lisans tezinden yararlanıldı. Ayrışım metodu bir seri çözüm yöntemidir. Lineer ve nonlineer (lineer olamayan) cebirsel diferansiyel denklemlere uygulanır. Bu metodda, F hem lineer hem de nonlineer terimleri içeren genel bir nonlineer adi diferansiyel operatör olmak üzere

$$F(u(x)) = g(x) \tag{2.1}$$

dir [21]. Bu denklemde N; diferansiyel denklemde lineer olmayan (nonlineer) terimi, R; lineer operatörden kalan kısmı ve L; verilen diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevini göstermek üzere

$$Lu + Ru + Nu = g \tag{2.2}$$

şeklinde ayrıştırılarak yazılsın. L bir lineer operatör ve tersi de mevcuttur. (2.2) eşitliği $Lu = g - Ru - Nu$ şeklinde yazılabilir. Her iki tarafa L^{-1} operatörü sol taraftan uygulanırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{2.3}$$

elde edilir [21].

L operatörünün ikinci mertebeden ve tersi de mevcut olan lineer bir operatör olduğu kabul edilsin. (2.3) eşitliğinde gerekli işlemler yapılınca

$$u = u_0 + xu'(0) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{2.4}$$

kesin çözüm bulunur [21]. Burada biraz açıklama yapmak gerekir.

$F(u(x)) = g(x)$ diferansiyel denklemi yukarıda belirtildiği duruma benzer şekilde ayrıştırılabilir. Burada lineer kısım ve lineer olmayan kısımlar için notasyon farkları önemsenmemelidir. F bir genel adi diferansiyel nonlineer operatörü temsil etmek üzere $F(u(x)) = g(x)$ denklemi ele alınsın. F, L lineer kısım ve R nonlineer kısım olmak üzere iki parçaya ayrılır. Adomian tarafından çözüm L yi lineer kısmın en yüksek mertebeden türevi almayı esas alır. Örneğin; başlangıç değer problemi için Adomian 0 dan x e iki katlı $L = \frac{d^2}{dx^2}$ yi L^{-1} olarak tanımlar.

$L^{-1}Lu(x) = u(x) - u(0) - xu'(0)$ ve bu yüzden $u(x) = u(0) + xu'(0) - L^{-1}R - L^{-1}g$ olur. Adomian'ın olaya bakışı L yi non-homojen kısımdaki veya R (kalan) kısmındaki tüm diğer terimleri iten, tersi kolayca alınabilen en basit operatör olarak almaktı. İkinci mertebeden lineer denklemin genel formu olarak

$$L(x,D) - R(x,f,Df,D^2f) = 0 \qquad \textbf{(2.5)}$$

verilir. $D = \frac{d}{dx}$ ve R; $L(x,D)$ öncü kısmında yer almayan tüm terimleri içeren kalan kısım ve

$$L(x,D) = h(x)Dp(x)D \qquad \textbf{(2.6)}$$

,$h(x)$ ve $p(x)$ gerekli mertebeye kadar türevleri alınabilen fonksiyonlar olsunlar.

(2.5) formundaki denklemde $L(x,D)$ yerine yazılarak, $h(x)$ ve $p(x)$ fonksiyonlarının gerekli mertebeye kadar türevlerinin olduğu düşünülerek $\frac{1}{p(x)}$ istisnasız $x = 0$ alınabilecek herhangi bir nokta civarında yerel olarak integrallenebilirdir. Ayrıştırma metodu L^{-1} ters operatörünü bulmayı ve en iyi yaklaşık çözümü bulmayı amaçlar.(2.6) denkleminden

$$L^{-1}(x,D)u(x) = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{p(t)}}\,\mathrm{d}t \int_0^x \frac{\mathrm{u(y)}}{\mathrm{h(y)}}\,\mathrm{d}y$$
$$\Rightarrow (LL^{-1})u(x) = I.u(x)$$

olur; fakat $(LL^{-1})u(x) \neq I.u(x)$ dir, I birim operatördür ve bu durum L^{-1} in doğru bir ters operatör olmadığını gösterir ve $u(0)$ ile $u'(0)$ değerlerine karşılık gelen başlangıç şartları esas alındığında

$$(LL^{-1})u(x) = \int_0^x \frac{1}{p(t)}dt \int_0^x (\frac{dy}{h(y)}h(y) + \frac{d}{dy}p(y)\frac{du(y)}{dy}) = \int_0^x \frac{1}{p(t)}\,[\mathrm{p(y)}\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dy}}]\Big|_0^{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^x \frac{\mathrm{du(t)}}{\mathrm{d(t)}}\,\mathrm{d}t - p(0)u'(0)\int_0^x \frac{1}{\mathrm{p(t)}}\,\mathrm{d}t = u(x) - u(0) - p(0)u'(0)\int_0^x \frac{1}{\mathrm{p(t)}}\,\mathrm{d}t$$

ve buradan

$$u(x) = u(0) - p(0)u'(0)\int_0^x \frac{1}{\mathrm{p(t)}}\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{1}{\mathrm{p(t)}}\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{\mathrm{R(y,Du)}}{\mathrm{h(y)}}\,\mathrm{d}y$$

şeklinde bir Volterra denklemi elde edilir. Son denklemin çözümü

$$u_0 = u(0) - p(0)u'(0)\int_0^x \frac{1}{\mathrm{p(t)}}\,\mathrm{d}t$$

olmak üzere $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ şeklinde bir seri açılımıdır.

Bu bilgilerden faydalanılarak (2.4) eşitliğindeki Nu lineer olmayan terimi

$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ biçiminde ifade edilebilir. Buradaki A_n polinomları özel polinomlardır. (2.4) eşitliğindeki u ayrıştırılmış bir seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonu ile yukarıda verilen bilgilerden u_0; verilen başlangıç değeri ve denklemin sağ tarafı fonksiyonun integrali olmak üzere a ve b sabitleri için

$u_0 = a + bx - L^{-1}g$ olarak bulunur. Daha sonra seri çözümün birinci terimi olan u_0 kullanılarak $u_1, u_2, u_3, ...$ terimleri elde edilir [21].

2.1 Nonlineer Adi Diferansiyel Denklem Sistemine Uygulanan Metodun Analizi

$L = \frac{d}{dt}$; B, t nin nxn tipinde matris fonksiyonu olmak üzere

$$LX = BX + F(X) + g(t), X(a) = C \tag{2.7}$$

başlangıç değer problemi ele alınsın.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, F(X) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix}, g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

olarak verilsin. Tüm vektörler H Hilbert uzayında farzedilmektedir. L^{-1} ters operatörü her iki tarafa soldan uygulanarak

$$X = C + L^{-1}(BX) + L^{-1}(F(X)) + L^{-1}(g(t)) \tag{2.9}$$

elde edilir. Şimdi ayrıştırma (ayrışma) formundaki çözüm

$$X = X_0 + X_1 + ... + X_m + ... \tag{2.10}$$

olarak yazılır. O halde $F(X)$ fonksiyonunun $A_m^{(j)}$, (2.8) denklemindeki $f_j(x_1,x_2,...,x_n)$ fonksiyonu için Adomian polinomları olmak üzere

$$F(X)=\sum_{m=0}^{\infty}A_m=\sum_{m=0}^{\infty}\begin{pmatrix}A_m^{(1)}\\A_m^{(2)}\\.\\.\\.\\A_m^{(j)}\end{pmatrix} \tag{2.11}$$

şeklinde açılabilir. Çözüm bileşenleri

$$X_0=C+L^{-1}(g(t)),X_m=L^{-1}(BX_{m-1})+L^{-1}(A_{m-1});m\geq 1 \tag{2.12}$$

ile tanımlanır. k ıncı terim yaklaşık çözüm

$$U_k=\sum_{m=0}^{k-1}X_m \tag{2.13}$$

ve tam çözüm

$$X=\lim_{k\to\infty}U_k \tag{2.14}$$

olur. Ayrıştırma metodu geleneksel metodlarla karşılaştırılınca az uğraştıran güvenilir bir teknik sağlar [39].

2.2 Lineer Adi Diferansiyel Denklem Sistemine Uygulanan Metodun Analizi

B sabit bir matris olmak üzere $LX=BX+g(t)$ denklem tipi çeşitli farklı bilimsel alanlardaki birçok uygulamada yer alır. Bu durumda (2.12) denklemi

$$X_0=C+L^{-1}(g(t)),X_m=L^{-1}(BX_{m-1});m\geq 1$$

olur. $L^{-1}=\int_a^t(.)\,\mathrm{d}t$ olduğu not edilerek açıkça

$$X_1=BL^{-1}(X_0)=BC(t-a)+BL^{-1}(g(t))$$

$$\vdots$$

$$X_m=B^mC\frac{(t-a)^m}{m!}+B^mL^{-(m+1)}(g(t)) \tag{2.15}$$

elde edilir. İyi-tanımlı özdeşliği kullanarak

$$L^{-(m+1)}(g(t))=\int_a^t\int_a^t...\int_a^t g(t)dt^{m+1}=\frac{1}{\gamma(m+1)}\int_a^t(\mathrm{t}-\tau)^{\mathrm{m}}\mathrm{g}(\mathrm{t})\,\mathrm{d}\tau$$

ve bileşenleri toplayarak $X = Ce^{B(t-a)} + \int_a^t \mathrm{e}^{\mathrm{B}(\mathrm{t}-\tau)}\mathrm{g}(\mathrm{t})\,\mathrm{d}\tau$ iyi-tanımlı tam çözüm halinde yazılabilen

$X = \sum_{m=0}^{\infty} B^m C\frac{(t-a)^m}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}B^m\int_a^t(\mathrm{t}-\tau)^{\mathrm{m}}\mathrm{g}(\mathrm{t})\,\mathrm{d}\tau$ tam çözümü elde edilir [39].

Örnek 1:

$$\frac{dx}{dt} = 3x+4y-2z, \frac{dy}{dt} = 2x+y-4z, \frac{dz}{dt} = x+2y \qquad \textbf{(2.16)}$$

$$x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 1$$

sistemi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(9-8e^t+8t) \\ -2te^t \\ e^t(5-4e^t-4t) \end{pmatrix} \qquad \textbf{(2.17)}$$

tam çözümü ile ele alınsın. (2.14) ile (2.15) karşılaştırılınca $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ve $X(0) = C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ olur. Denklem sistemi lineer olduğundan (2.14) formülü kullanılmalıdır. $U_k = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix} = \left(\sum_{m=0}^{k-1} B^m C\frac{(t-a)^m}{m!} \right)$ herhangi a başlangıç değeri için k ıncı terim yaklaşım ile tam çözüm arasında sayısal karşılaştırmalar yapılmıştır, hata farkları incelenmiştir. Sistem $k = 6$ terimine kadar açılsın. Çizelge 2.1'de

$$\alpha_6 = 1+t-\frac{7t^2}{2}-\frac{29t^3}{6}-\frac{87t^4}{24}-\frac{207t^5}{120}$$

$$\beta_6 = -2t-2t^2-t^3-\frac{t^4}{3}-\frac{t^5}{12}$$

$$\gamma_6 = 1+t-\frac{3t^2}{2}-\frac{5t^3}{2}-\frac{43t^4}{24}-\frac{103t^5}{120}$$

yaklaşık çözümleri tam çözümler ile karşılaştırılmaktadır.

Çizelge 2.1: $\alpha_6, \beta_6, \gamma_6$ ile kesin çözümler arasındaki karşılaştırma

t	$x-\alpha_6$	$y-\beta_6$	$z-\gamma_6$
0.01	-3.3334E-07	-1.66937E-14	-3.16127E-13
0.1	-0.000333985	-1.69485E-08	-3.25032E-07
0.12	-0.0005777957	-5.07791E-08	-9.76551E-07
0.15	-0.00113254	-1.94693E-07	-3.76009E-06
0.2	-0.00270968	-1.10326E-06	-0.0000214599

Örnek 2: Bir nonlineer adi diferansiyel denklem sistemine ayrıştırma metodunun bir uygulanışı olarak

$$\frac{dx}{dt} = \lambda(Tx - y) - \lambda x^3, \frac{dy}{dt} = x \tag{2.18}$$

$$x(0) = c_1, y(0) = c_2 \tag{2.19}$$

insan kalbinin atış modeli olan Zeeman modelini temsil eden sistemi ele alınsın. Burada $x(t)$,t zamanındaki kas lifinin uzunluğu ve $y(t)$,t zamanındaki kimyasal kontrol etkeninin toplamıdır. λ sabiti uygun bir pozitif sayı ve T kas telindeki sabit gerilimdir. Sistem (2.8) formunda tekrar yazılarak $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \lambda T & -\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. (2.9) denkleminde yerine koyarak, a başlangıç noktası için beşinci terim yaklaşık çözümü $U_5(t) = \begin{pmatrix} \phi_k \\ \psi_k \end{pmatrix} = X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + X_4$,

$$X_0 = C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = (t-a)\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \frac{(t-a)^2}{2}\begin{pmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = \frac{(t-a)^3}{6}\begin{pmatrix} \gamma_3 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

$$X_4 = \frac{(t-a)^4}{24}\begin{pmatrix} \gamma_4 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$$

ve

$$\gamma_1 = \lambda(Tc_1 - c_2 - c_1^3)$$

$$\gamma_2 = \lambda(T\gamma_1 - c_1 - 3c_1^2\gamma_1)$$

$$\gamma_3 = \lambda(T\gamma_2 - \gamma_1 - 3c_1^2\gamma_1 - 6c_1\gamma_2)$$

$$\gamma_4 = \lambda(T\gamma_3 - \gamma_2 - 3c_1^2\gamma_3 - 18c_1\gamma_1\gamma_2 - 6\gamma_1^3)$$

olur. Gerçek fiziksel veri $\lambda = 40, T = 0.1575, c_1 = 0.45$ ve $c_2 = -0.02025$ değerleridir. Bu halde $\gamma_1 = 0.0, \gamma_2 = -18, \gamma_3 = 324, \gamma_4 = -5112$ dir. Yukarıdaki formüllerde yerine yazılarak

$$\phi_5 = 0.45 - 9t^2 + 54t^3 - 213t^4$$

$$\psi_5 = -0.02025 + 0.45t + 13.5t^4$$

olur. $t \leq 1$ değerleri için bu sayısal (nümerik) çözüm harika bir kabuldür. t nin daha büyük değerlerinde yakınsamayı hızlandırmak için t aralığını $[t_k, t_{k+1}]$ alt aralıklarına bölünür ve (2.12) formülünde yaklaşımı $C = U(t_k)$ alarak $U(t_{k+1})$ i hesaplamak için $a = t_k$ alınır. Bu ayrıklık içermesine rağmen nonlineerite halen mevcuttur ve bu yüzden ayrıştırma metodu denklemin orijinal sisteminin nümerik lineerleştirmesi olaral tanımlanır. Çizelge 2.2'de ϕ_5 ve ψ_5 değerlerinin $[0,5]$ aralığında karşılaştırılması yapılmıştır [39].

Çizelge 2.2: $[0,5]$ aralığında ϕ_5 ve ψ_5 değerleri

t	ϕ_5	ψ_5
0.05	0.432919	0.0195938
0.5	-0.457448	-0.328475
1.0	-0.435876	-0.0446845
1.5	-0.388992	0.0556261
2.0	0.316124	-0.0650413
2.5	-0.2200838	0.722067
3.0	0.118777	-0.767065
3.5	-0.247071	-0.785796
4.0	-0.0558401	-0.781363
4.5	0.12327	0.75739
5.0	-0.179883	-0.717079

2.3 Kısmi Diferansiyel Denklemlere Uygulanan Metodun Analizi

Şimdi Adomian ayrıştırma metodu kısmi diferansiyel denklemler için ele alınsın [21]. Ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \tag{2.20}$$

biçiminde yazılabilir ve serinin yakınsak olduğu düşünülecektir. Bu seri çözüm kullanılarak (2.4) eşitliği tekrar yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{2.21}$$

biçiminde genel seri formu elde edilir [21]. Bununla beraber

$$u_1 = -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0$$

$$u_2 = -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1$$

$$\vdots$$

$$u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n, n \geq 0 \qquad \textbf{(2.22)}$$

şeklinde de yazılabilir. Buradaki A_n polinomları lineer olmayan herbir terim için genelleştirilebilir [21]. Bu genelleştirme ile A_0 sadece u_0'a, A_1 sadece u_0 ve u_1'e, A_2 ise u_0, u_1 ve u_2'ye bağlı ve benzer şekilde (2.21) eşitliğindeki bütün Adomian polinomları elde edilebilir. Bir F nonlineer operatörü için $F(u(x,t)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ olur. Buradan

$$A_0 = F(u_0)$$

$$A_1 = u_1(\frac{du}{du_0})F(u_0)$$

$$A_2 = u_2(\frac{du}{du_0})F(u_0) + (\frac{u_1^2}{2})(\frac{d^2}{du_0^2})F(u_0)$$

$$A_3 = u_3(\frac{du}{du_0})F(u_0) + u_1u_2(\frac{d^2}{du_0^2})F(u_0) + (\frac{u_1^3}{6})(\frac{d^3}{du_0^3})F(u_0), \qquad \textbf{(2.23)}$$

$$\vdots$$

şeklinde verilmektedir [21]. Ayrıştırılmış polinomların genel durumu

$$A_n = \frac{1}{n!}\,[\frac{d^n}{d\lambda^n}N(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i)]\Big|_{\lambda=0} \qquad \textbf{(2.24)}$$

biçiminde formülize edilerek Adomian (1994),Seng ve arkadaşları (1996) tarafından kaynaklara kazandırılmıştır [21]. (2.24) eşitliği, denklemin lineer olmayan kısmının Taylor açılımı yapılarak oluşturulur. $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ lineer olmayan kısım için

$$A_n(u_0, u_1, u_2, ..., u_n) = \frac{1}{n!}\,[\frac{d^n}{d\lambda^n}N(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i u_i)]\Big|_{\lambda=0}$$

olur. Bu yüzden $u_{i+1} = -L^{-1}Ru_i - L^{-1}A_i, i \geq 0$ kalıntı çözümü oluşturan terimleri hesaplamak daha kesin bir hale gelir. Nonlineer $Nu = u^2$ kısmı için ilk iki Adomian polinomu şu şekildedir:

$$A_0 = u_0^2$$

$$A_1 = 2u_0u_1$$

olur. Benzer şekilde $Nu = u^3$ alınırsa ilk dört Adomian polinomu

$$A_0 = u_0^3$$

$$A_1 = 3u_0^2 u_1$$

$$A_2 = 3u_1^2 u_0 + 3u_0^2 u_2$$

$$A_3 = u_1^3 + 3u_0^2 u_3 + 6u_1 u_2 u_0$$

olur. Ayrıştırma metodu kullanılarak $u(x,t)$ kapalı çözüm fonksiyonuna ait sayısal çözümlerin elde edilmesi için

$$\phi_n(x,t) = \sum_{n=1}^{n-1} u_n(x,t); n \geq 0 \qquad \textbf{(2.25)}$$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = u(x,t) \qquad \textbf{(2.26)}$$

ifadesi (2.22) indirgeme bağıntısı incelenerek kolayca hesaplanabilir. Ayrıca (2.22) ayrıştırma seri çözümü genellikle fiziksel problemlerde çok hızlı yakınsama ortaya çıkarmaktadır [21].

Örnek:

$$u_x + u_y = 2x + 2y$$

$$u(x,0) = 0, u(0,y) = 0$$

denklem sistemine Adomian ayrıştırma metodu uygulansın.

$L_x = \frac{\partial}{\partial x}, L_y = \frac{\partial}{\partial y}, L_x^{-1} = \int_0^x (.)dx, L_y^{-1} = \int_0^y (.)dy$

x çözümü:

$$L_x u = 2x + 2y - L_y u$$

$$L_x^{-1} L_x u = L_x^{-1}(2x+2y) - L_x^{-1} L_y u$$

$$u(x,y) = \int_0^x (2x+2y)dx - L_x^{-1} L_y u = x^2 + 2xy - L_x^{-1} L_y u$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = 0 + x^2 + 2xy - L_x^{-1}(L_y \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y))$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... = x^2 + 2xy - L_x^{-1}(L_y(u_0 + u_1 + u_2 + ...))$$

$$u_0(x,y) = x^2 + 2xy, u_{k+1} = -L_x^{-1} L_y(u_k)$$

$$u_1 = -L_x^{-1} L_y(u_0) = -L_x^{-1}(L_y(x^2+2xy)) = -L_x^{-1}(2x) = -\int_0^x (2x)dx = -(x^2) = -x^2$$

$$u_2 = -L_x^{-1}L_y(u_1) = -L_x^{-1}(L_y(-x^2) = -L_x^{-1}(0) = -\int_0^x (0)dx = 0$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... = x^2 + 2xy - x^2 = 2xy$$

y çözümü:

$$L_y u = 2x + 2y - L_x u$$

$$L_y^{-1}L_y u = L_y^{-1}(2x+2y) - L_y^{-1}L_x u$$

$$u(x,y) = \int_0^y (2x+2y)dy - L_y^{-1}L_y x = y^2 + 2xy - L_y^{-1}L_x u$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = 0 + y^2 + 2xy - L_y^{-1}(L_x \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y))$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... = y^2 + 2xy - L_y^{-1}(L_x(u_0 + u_1 + u_2 + ...))$$

$$u_0(x,y) = y^2 + 2xy, u_{k+1} = -L_y^{-1}L_x(u_k)$$

$$u_1 = -L_y^{-1}L_x(u_0) = -L_y^{-1}(L_x(y^2+2xy)) = -L_y^{-1}(2y) = -\int_0^y (2y)dy = -(y^2) = -y^2$$

$$u_2 = -L_y^{-1}L_x(u_1) = -L_y^{-1}(L_x(-y^2) = -L_y^{-1}(0) = -\int_0^y (0)dy = 0$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... = y^2 + 2xy - y^2 = 2xy$$

Kısmi diferansiyel denklemlerden olan bir fiziksel problem ele alınsın [21]. Cauchy problemi

$$u_{tt} - cu_{xx} = 0 \quad \textbf{(2.27)}$$

$$u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \quad \textbf{(2.28)}$$

$$u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) \quad \textbf{(2.29)}$$

gözönüne alınsın. Özel olarak $c = 1, f(x) = sin(x), g(x) = 0$ ve $l = \Pi$ için

$$u(0,t) = 0, u(\Pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = sin(x), u_t(x,0) = 0$$

olur. Ayrıca $L_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}, L_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ lineer operatörler olmak üzere bu operatörlerin tersi de mevcut olup $L_{tt}^{-1} = \int_0^t \int_0^s (.)dsdt$ ve $L_{xx}^{-1} = \int_0^x \int_0^s (.)dsdx$ şeklinde tanımlanır. Burada (2.27) denklemi operatör formda yazılırsa

$$u(x,t) = u(0,t) + xu_x(0,t) + L_{xx}^{-1}L_{tt}u(x,t) \quad \textbf{(2.30)}$$

şeklinde $u(x,t)$ çözümü bulunabilir [21]. Bu çözüm (2.20) seri formunda bir çözüm olduğundan başlangıç şartları kullanılarak

$$u_0 = sin(t) \tag{2.31}$$

serinin ilk terimi bulunur. Serinin diğer terimlerini bulmak için (2.22) indirgeme bağıntısına benzer şekilde

$$u_{n+1}(x,t) = L_{xx}^{-1} L_{tt} u_n(x,t), n \geq 0 \tag{2.32}$$

indirgeme bağıntısı yazılabilir [21]. $n \geq 0$ için başlangıç şartları kullanılarak serinin ilk terimi (2.30) ve (2.31) den ayrışım serisinin

$$u_0 = u(t,0) + xu_x(t,0) = sin(t)$$

$$u_1(x,t) = u(0,t) + xu_x(0,t) + L_{xx}^{-1}[(sin(t))']' = L_{xx}^{-1}[-sin(t)] = \int_0^x \int_0^x (-sin(t))dxdx$$

$$= \int_0^x (-sin(t)x)dx = \frac{-x^2}{2} sin(t)$$

$$u_2(x,t) = L_{xx}^{-1} L_{tt} \frac{-x^2}{2} sin(t) = L_{xx}^{-1}(\frac{-x^2}{2} cos(t))' = \int_0^x \int_0^x \frac{x^2}{2} sin(t)dxdx$$

$$= \int_0^x \frac{x^3}{6} sin(t)dx = \frac{x^4}{4!} sin(t)$$

$$u_3(x,t) = L_{xx}^{-1} L_{tt}(\frac{x^4}{4!} sin(t)) = L_{xx}^{-1}(\frac{x^4}{4!} cos(t))' = L_{xx}^{-1}(\frac{-x^4}{4!} sin(t)) = \int_0^x \int_0^x (\frac{-x^4}{4!} sin(t))dxdx$$

$$= \int_0^x (\frac{-x^5}{5!} sin(t))dx = (\frac{-x^6}{6!} sin(t))$$

$$\vdots$$

$$u_n(x,t) = L_{xx}^{-1} L_{tt} u_{n-1}(x,t) = (-1)^n (-sin(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!}) \tag{2.33}$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 ... = sin(t) + [\frac{-x^2}{2} sin(t)] + [\frac{x^4}{4!} sin(t)] + [\frac{-x^6}{6!} sin(t)] + ...$$

terimleri kolayca elde edilir [21]. Bu elde edilen terimler (2.18) serisinde yerine yazılırsa serinin açık formu

$$= sin(t)[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...] \tag{2.34}$$

elde edilir ve eşitliğin sağ tarafında parantez içerisindeki serinin $cos(x)$ fonksiyonunun açılımı olduğu kolayca görülmektedir. Buradan $(2.28) - (2.29)$ ile hiperbolik kısım diferansiyel denklem çözümünün kapalı formu olan

$$u(x,t) = sin(t)cos(x) \tag{2.35}$$

fonksiyonu olduğu görülür. Bu fonksiyon da başlangıç şartını ve (2.27) denklemini sağlamaktadır [21].

Fiziksel problemlerden biri olan ve sıkça üzerinde çalışılan ısı denklemleri homojen sınır koşulları ile verilsin. Homojen sınır koşulları ile oluşan ısı denklemlerine Adomian ayrıştırma metodu uygulanabilir [38]. Homojen sınır koşulları ile verilen

$$u_t = u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$$

$$u(0,t) = 0, t \geq 0$$

$$u(l,t) = 0, t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq l$$

sınır değer probleminde $f(x)$ in iyi-tanımlı olduğu düşünülürse Adomian ayrıştırma metodu ile çözüme ulaşılabilir. Örneğin $f(x) = sin(\frac{\Pi x}{l})$ ve $L_t = \frac{\partial}{\partial t}, L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ türev operatörleri için denklem $L_t u = L_x u$ olur. Adomian ayrışım metodu algoritması kullanılarak

$$u = u(x,0) + L_t^{-1} L_x \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$u_0 = f(x) = sin(\frac{\Pi x}{l})$$

$$u_1 = L_t^{-1} L_x u_0 = -\frac{\Pi^2 t}{l^2} sin(\frac{\Pi x}{l})$$

$$u_2 = L_t^{-1} L_x u_1 = \frac{\Pi^4 t^2}{l^4} sin(\frac{\Pi x}{l})$$

$$\vdots$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = (1 - \frac{\Pi^2 t}{l^2} + \frac{\Pi^4 t^2}{l^4} - ...) sin(\frac{\Pi x}{l}) = e^{-\frac{\Pi^2 t}{l^2}} sin(\frac{\Pi x}{l})$$

bulunur [38].

2.4 Adomian Ayrıştırma Metodunun Yakınsaklık Analizi

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), y \in \mathbf{R^d}; f : \mathbf{RxR^d} \to \mathbf{R^d}, y(0) = y_0 \in \mathbf{R^d} \qquad \textbf{(2.36)}$$

diferansiyel denklem sistemi ele alınsın. f, $y = y_0$ ve $t = 0$ civarında analitik olsun [15].(2.36) denklemini çözmek

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s,y) ds \qquad \textbf{(2.37)}$$

Volterra integral denklemini çözmek demektir. ADM kurmak için

$$y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \tag{2.38}$$

serisi ele alınsın ve $f(t,y)$ nonlineer fonksiyonu

$$f(t,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t, y_0, y_1, ..., y_n) \tag{2.39}$$

fonksiyon serisi olarak yazılsın. ε bir formal parametre olmak üzere $n = 0,1,2,...$ için

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\varepsilon^n}\left[f(t, \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i y_i)\right]\Bigg|_{\varepsilon=0} \tag{2.40}$$

elde edilir. $(y_1, y_2, ...y_n)$ içerisindeki A_n polinomları Adomian polinomları olarak tercih edilir. $d = 1$ için bir skaler diferansiyel denklem ele alınsın. İlk dört Adomian polinomu

$$A_0 = f(t, y_0)$$

$$A_1 = y_1 f'(t, y_0)$$

$$A_2 = y_2 f'(t, y_0) + \frac{y_1^2}{2} f''(t, y_0)$$

$$A_3 = y_3 f'(t, y_0) + y_1 y_2 f''(t, y_0) + \frac{y_1^3}{6} f'''(t, y_0)$$

olur. Adomian polinomları $n \geq 1$ için

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t, y_0)\left(\sum_{p_1+p_2+...+p_k=n} y_{p_1} ... y_{p_k}\right)$$

veya

$$A_n = \sum_{|nk|=n} f^{(|k|)}(t, y_0) \frac{y_1^{k_1} ... y_n^{k_n}}{k_1! ... k_n!}$$

, $|k| = k_1 + k_2 + ... + k_n$ ve $|nk| = k_1 + 2k_2 + ... + nk_n$ olur. Khelifa ve Cherrault verilen bir $J \subseteq \mathbf{R}$ zaman aralığında $sup_{t \in J} |f^{(k)}(t, y_0)| \leq M$ olmak üzere $|A_n| \leq \frac{(n+1)^n}{(n+1)!} M^{n+1}$ sınırını Adomian polinomlarına uygulamışlardır [14]. (2.39) ve (2.38),(2.37)'de yerine yazılırsa $(y_0, y_1, ..., y_n)$ terimleri için y_{n+1} elde edilen denklem $n = 0,1,2,...$ için

$$y_{n+1}(t) = \int_0^t A_n(s, y_0(s), y_1(s), ..., y_n(s)) ds \tag{2.41}$$

dır. (2.41) ile (2.38) serisinin yakınsaklığı bulunur.

Cherrault tarafından tartışılan ADM'nin yakınsaklığını ispatlamak için H bir Hilbert uzayı olmak üzere $f : H \to H$ için

$$y = y_0 + f(y), y \in H \tag{2.42}$$

fonksiyonel denklemi ele alınsın. ADM; $S_n = f_n(y_0 + S_n), S_0 = 0$ ile tanımlanan $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ dizisini belirlemektir [15].

Eğer bir H Hilbert uzayında $S = \lim_{n\to\infty} S_n, f = \lim_{n\to\infty} f_n$ limitleri varsa; o zaman S, H içerisinde bir $S = f(y_0 + S)$ sabit nokta denklemini çözer. ADM nin yakınsaklığı $n \to \infty$ için

$$||f|| \leq 1, ||f_n - f|| = \varepsilon_n \to 0 \tag{2.43}$$

olarak verilmiştir. Bu iki şartın verilen bir nonlineer $f(y)$ fonksiyonu için sağlandığını göstermek zordur. Cauchy-Kowalevska teoremi kullanılarak adi diferansiyel denklem sistemlerinde Adomian metodunun yakınsaklığı ispatlanır. Sadece f nonlineeritesinin t ve y değişkenlerinde analitik olduğu düşünülsün [15].

Teorem 2.1: Herhangi $t_0 > 0$ ve $\delta_0 > 0$ için $[-t_0, t_0]xB_{\delta_0}(y_0)$ alanında nüfuz eden

$f : \mathbf{RxR^d} \to \mathbf{R^d}$ gerçel analitik bir fonksiyon olsun. $y(t, y_0), t \in [-t_0, t_0]$ olmak üzere

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), y(0) = y_0 \tag{2.44}$$

başlangıç değer problemi için tek çözüm olsun. O halde $t = 0$ civarında $y(t, y_0)$ da gerçel bir fonksiyondur,yani en azından $\tau \in (0, t_0)$ vardır öyle ki $y : [-\tau, \tau] \to \mathbf{R^d}$ bir gerçel analitik fonksiyondur [15].

$d = 1$ için Teorem 2.1 ele alınsın.

İspat: $[-t_0, t_0]xB_{\delta_0}(y_0)$ alanında nüfuz eden bir gerçel değerli f fonksiyonu için Cauchy tahminleri ile en azından bir $C > 0$ vardır öyle ki

$$1 + |f(0, y_0)| \leq C \tag{2.45}$$

$$\sum_{k_1+k_2=k} \frac{1}{k_1!k_2!} |\partial_t^{k_1} \partial_y^{k_2} f(0, y_0)| \leq \frac{C}{a^k} \tag{2.46}$$

(2.45) ve (2.46) Cauchy tahminleri ile $t = 0$ ve $y = y_0$ noktalarında $f(t,y)$ nin Taylor açılımı, $\rho = |t| + |y - y_0|$ olmak üzere

$$1 + |f(t,y)| \leq C \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{\rho}{a})^k = \frac{C}{1 - \frac{\rho}{a}} = \frac{Ca}{a - \rho} = g(\rho)$$

olur. Weierstrass M-testi ile f nin Taylor açılımı

$$|t| + |y - y_0| < a \tag{2.47}$$

için yakınsamaktadır. Bu yüzden $\forall k_1, k_2 > 0, k \geq 1$ için

$$1 + |f(0, y_0)| \leq C = g(0)$$

$$\sum_{k_1+k_2=k} \frac{1}{k_1!k_2!} |\partial_t^{k_1} \partial_y^{k_2} f(0, y_0)| \leq \frac{C}{a^k} = \frac{1}{k!} g^{(k)}(0)$$

olur. $\rho \in \mathbf{R}_+$ için bir üst sınır problemi ele alınsın.

$$\frac{d\rho}{dt} = g(\rho) = \frac{Ca}{a - \rho}$$

$$\rho(0) = 0$$

Bu problem $|t| < \frac{a}{2C}$ sınırındaki t nin analitik bir fonksiyonu olan

$\rho(t) = a - \sqrt{a^2 - 2aCt}$ tam çözümüne sahiptir. Karşılaştırma prensibinden eğer

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

$$y(0) = y_0$$

ve her $|t| + |y - y_0| < a$ için,$1 + |f(t, y)| \leq g(|t| + |y(t) - y_0|)$ ise o zaman,

$|t| + |y - y_0| < a \leq \rho(t) = a - \sqrt{a^2 - 2aCt} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \rho^{(k)}(0) t^k$ dir.

Bu yüzden $\forall t \geq 0$ için $|t| < \frac{a}{2C}$ sınırında Taylor serisi mutlak yakınsak olmak üzere

$$|y(t; 0) - y_0| \leq t(\rho'(0) - 1) + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k!} \rho^{(k)}(0) t^k$$

olur. $y(t; y_0)$ ın $t < min(a, \frac{a}{2C})$ sınırında bir analitik fonksiyon olduğunu ispatlamak için herhangi $k \geq 1$ için $|y^{(k)}(0, y_0)| \leq \rho^{(k)}(0)$ olduğunu ispatlamak geriye kalır. Bu durumda $y(t, y_0)$ için oluşan Taylor serisi üst sınır bir yakınsak seriye sahiptir,öyle ki Weierstrass M-testi ile $y(t, y_0)$ için oluşan Taylor serisi yakınsar.

$|y^{(k)}(0, y_0)| \leq \rho^{(k)}(0)$ olduğunu ispatlamak için verilen diferansiyel denklem sisteminin ikinci ve üçüncü türevleri hesaplanır:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = \frac{\partial^2 f}{dt^2} + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial f \partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial y} + f^2 \frac{\partial^2 f}{dy^2}$$

$$\Rightarrow |\frac{d^2y}{dt^2}| \leq |\frac{\partial f}{\partial t}| + |\frac{\partial f}{\partial y}||f| \leq g'(0)(1 + |f|) \leq g(0)g'(0) = \frac{d^2\rho}{dt^2}(0)$$

$$\Rightarrow |\frac{d^3y}{dt^3}| \leq |\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}| + 2|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t}| + |\frac{\partial f}{\partial t}||\frac{\partial f}{\partial y}| + |f||\frac{\partial f}{\partial y}|^2 + |f|^2|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|$$

$$\leq g''(0)(1+|f|)^2 + g'(0)(1+|f|) \leq g^2(0)g''(0) + (g'(0))^2 g(0) = \frac{d^3\rho}{dt^3}(0)$$

Genel olarak $t = 0$ ve $y = y_0$ noktalarında k-ıncı mertebeye kadar kısmi türevleri değerlendirilen ve f nin bir polinomu olan $P_k(f)$ için $y^{(k+1)}(0,y_0) = [P_k(f)]|_{t=0,y=y_0}$ olur. (2.45) ve $P_k(f)$ pozitif sayılarından $k \geq 0$ için

$$|y^{(k+1)}(0,y_0)| = [|P_k(f)|]|_{t=0,y=y_0} \leq [P_k(|f|)]|_{t=0,y=y_0}$$

$$\leq [P_k(1+|f|)]|_{t=0,y=y_0} \leq [P_k(g)]|_{\rho=0} = \rho^{(k+1)}(0) \qquad \textbf{(2.48)}$$

bulunur. Sonuçta teoremin ifadesi ispatlanmış olur [15].

Weierstrass M-testi: Matematikte Weierstrass M-Testi, terimleri kendi başına gerçel veya karmaşık değerli fonksiyon olan sonsuz serilerin yakınsaklığını bulmaya yarayan bir yöntemdir. Bir A kümesi üzerinde, $\{y_n\}$ gerçel veya karmaşık değerli bir fonksiyonlar dizisi olsun. $\forall x \in A$ ve $n \geq 1$ için $|y_n(x)| \leq A_n$ eşitsizliğini sağlayan A_n pozitif katsayıları olsun. Ayrıca $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ serisi yakınsak olsun. O zaman $\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)$ serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır.

Teorem 2.2: Herhangi $t_0 > 0$ ve $\delta_0 > 0$ için $[-t_0,t_0]xB_{\delta_0}(y_0)$ alanında nüfuz eden $f : \mathbf{RxR^d} \to \mathbf{R^d}$ gerçel analitik fonksiyonu ele alınsın. $y_n(t)$, (2.40) denklemi ile tanımlansın. En azından bir $\tau \in [0,t_0]$ vardır öyle ki n-inci mertebeden (2.38) Adomian serisinin kısmi toplamı, $C([-\tau,\tau],\mathbf{R^d})$ içerisinde (2.37) Volterra denkleminin $y(t,y_0)$ çözümüne yakınsamaktadır [15].

Yine $d = 1$ için düşünülsün.

İspat: $A_k = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\varepsilon^k}[f(t,y_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m y_m)]|_{\varepsilon=0}$ olmak üzere $k \geq 0$ için

$$y_{k+1}(t) = \int_0^t A_k(s,y_0(s),y_1(s),...,y_n(s))ds \qquad \textbf{(2.49)}$$

dir. Örneğin $k = 0$ için

$$|y_1(t)| \leq \int_0^t |f(s,y_0)|ds \leq g(0)t \equiv \rho'(0)t,$$

$k = 1$ için

$$|y_2(t)| \leq \int_0^t |f'(s,y_0)||y_1(s)| \leq \frac{t^2}{2}g'(0)g(0) \equiv \frac{t^2}{2}\rho''(0)$$

dır. $k=n$ için

$$|y_n(t)| \leq \frac{t^n}{n!}\rho^{(n)}(0)$$

bağıntısı doğru olsun. Bunun $k=n+1$ için doğru olduğu gösterilmelidir.

Yani $|y_{n+1}(t)| \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\rho^{(n+1)}(0)$ olduğu gösterilmelidir. $\varepsilon > 0$ bir formal parametre olmak üzere $Y_n(t) = \sum_{m=0}^{n} \varepsilon^m y_m(t)$ olsun. O zaman

$$|Y_n(t)| \leq \sum_{m=0}^{n} \varepsilon^m |y_m(t)| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m t^m \rho^m(0)}{m!} = (\sum_{m=0}^{\infty} - \sum_{m=n+1}^{\infty}) \frac{\varepsilon^m t^m \rho^m(0)}{m!}$$

dir. $m=n-l$ olsun. Yani $|Y_n(t)| \leq \rho(\varepsilon t) - \varepsilon^{n+1} t^{n+1} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^l t^l \rho^{1+l+n}(0)}{(1+l+n)!}$ olur. Bu yüzden $[-\tau,\tau]$ üzerinde bir $\hat{Y}_n(t), C^\infty$ fonksiyonu vardır öyle ki;

τ, Teorem 2.1'de tanımlanmak üzere $Y_n(t) = \rho(\varepsilon t) - \varepsilon^{n+1} t^{n+1} \hat{Y}_n(t), \forall t \in [-\tau,\tau]$ olur. Adomian polinomlarının ilk birkaç tahmini

$$|A_0| \leq C = g(0) = \rho(0)$$

$$|A_1| \leq |f'||y_1| \leq \frac{C}{a} g(0)t = t g(0) g'(0) \equiv t\rho''(0)$$

$$|A_2| \leq |f'||y_2| + \frac{1}{2}|f''||y_1^2| \leq \frac{C}{a}|y_2| + \frac{C}{a^2}|y_1^2| \leq \frac{t^2}{2}(g(0)(g'(0))^2 + g''(0)(g(0))^2) = \frac{t^2}{2}\rho'''(0)$$

olarak verilir. $A_n(t)$ tahminini genelleştirmek için $A_n(t) = \frac{1}{n!}\,[\frac{d^n}{d\varepsilon^n} f(t,Y_n)]\Big|_{\varepsilon=0}$ ve

$$|A_n(t)| \leq \frac{1}{n!}\,[|\frac{d^n}{d\varepsilon^n} f(t,Y_n)|]\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$\leq \frac{t^n}{n!}\,[|\frac{d^n}{d\mu^n} f(t,\rho(\mu))|]\Big|_{\mu=\varepsilon t=0} \leq \frac{t^n}{n!}|P_n(\rho(0))| \leq \frac{t^n}{n!}\rho^{(n+1)}(0) \qquad \textbf{(2.50)}$$

hesaplamaları yapılır. (2.49) iteratif formülünü kullanarak sonuçta

$|y_{n+1}(t)| \leq \frac{1}{(n+1)!} t^{n+1} \rho^{(n+1)}(0)$ elde edilir. Bu yüzden Adomian serisi Teorem 2.1'de verilen analitik çözüm olan aynı kuvvet serisi ile üstten sınırdır. Weierstrass M-testi ile Adomian serisi yakınsar. Ayrıca, (2.49)'dan (2.38) serisi de yakınsar, yani Adomian serisi $C([-\tau,\tau],\mathbf{R})$ içerisinde (2.37) Volterra integral denklemini çözer. Çözümlerin tek olmasından Adomian serisi (2.37)'deki Volterra integral denkleminin $y(t;y_0)$ çözümüne denktir [15].

Bu ispat, Teorem 1.2' in ispatı ile Volterra integral denklemindeki y fonksiyonunun $\forall \varepsilon > 0$ için $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ aralığında tek çözümünün varlığını gösterir.

Weierstrass M-testi $\frac{dy}{dt} = f(t,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ ve $y(0) = y_0$ başlangıç değeri için oluşan $y = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds$ Volterra integral denklemine uygulansın. Buna göre

$y = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \leq y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| \leq y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} A_n = f(t,y_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \geq f(t,y_0) + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ olur. Adomian serisinin yakınsaklığından $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ dir. Yani $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$, böylece Adomian serisinin kısmi toplamı $y = y_0 + \int_0^t f(s,y(s))ds$ için $y(t;y_0)$ çözümüne yakınsar.

2.4.1 Adi diferansiyel denklemler için ADM yakınsama oranı

Teorem 2.3: Teorem 2.2'deki şartın aynısı altında yakınsama oranı üsseldir, yani en azından bir $C_0 > 0$ vardır öyle ki $E_n \leq C_0(\frac{2C\tau}{a})^{n+1}, n \geq 1$ ve $\tau < \frac{a}{2C}$ için

$E_n = ||y - \sum_{m=0}^{\infty} y_m||$ dir. (a,C),(2.45) ve (2.46) tahminlerinde tanımlanmaktadır [15].

İspat: Teorem 2.2'den $\forall t \in [0,\tau]$ için $|y_{n+1}(t)| \leq \frac{1}{(n+1)!} t^{n+1} \rho^{(n+1)}(0)$ yani, $||.||$ Hilbert uzayında tanımlanmak üzere $C([-\tau,\tau],\mathbf{R})$ içerisinde,

$||y_{n+1}|| \leq \frac{1}{(n+1)!} \tau^{n+1} \rho^{(n+1)}(0)$ dir. $\rho(t)$ açıkça $\rho(t) = a - \sqrt{a^2 - 2aCt}$ olarak verilirse o halde

$$\rho^{(n)}(0) = (2n-3)! \frac{C^n}{a^{n+1}} \tag{2.51}$$

dir. Teorem 2.2'den $y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} y_m(t)$ serisi yakınsar ve hata tanımlıdır ve

$$E_n = \sum_{j=n+1} ||y_j|| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j!} \tau^j \rho^{(j)}(0) \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{a}{j!} (\frac{2C\tau}{a})^j (2j-3)!$$

ile verilir. $k = j - (n+1)$ olsun. O zaman

$$E_n \leq a(\frac{2C\tau}{a})^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+n+1}(k+n+1)!} (2k+2n-1)! (\frac{2C\tau}{a})^k$$

dir. $k \leq 1, \forall n \geq 1$ için

$$\frac{1}{2^{k+n+1}(k+n+1)!} (2k+2n-1)! \leq \frac{1}{2n+2k} \leq 1$$

olduğundan tüm $\tau < \frac{a}{2C}$ ler için

$$E_n \leq a(\frac{2C\tau}{a})^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{2C\tau}{a})^k = a \frac{(\frac{2C\tau}{a})^{n+1}}{1 - \frac{2C\tau}{a}}$$

bulunur. Teorem $C_0 = \frac{a}{1 - \frac{2C\tau}{a}}$ için ispatlanır [15].

2.4.2 Kısmi diferansiyel denklem sistemlerine uygulanan Adomian ayrıştırma metodunun yakınsaklık analizi

Bu kısımda X ve Y Banach uzayları olmak üzere $X \subseteq Y, L : X \to Y$ sınırsız (sonsuz) diferansiyel operatörü ve $N(u)$, X in bir elemanını yine X in bir elemanına eşleyen nonlineer fonksiyonu için

$$u_t = Lu + Nu \tag{2.52}$$

formundaki kısmi diferansiyel denklemlere uygulanan ADM nin yakınsaklığı analiz edilmektedir. Örneğin $i = \sqrt{-1}, V(x), x \in \mathbf{R}^n$ için bir dış potansiyel ve $u = u(x,t)$ kompleks (karmaşık) değerli bir fonksiyon olmak üzere bir

$$iu_t = -u_{xx} + V(x)u + |u|^2 u \tag{2.53}$$

nonlineer Schrödinger denklemi ele alınsın [15]. Bu denklem genel (2.52) denkleminin özel bir örneğidir, $L = i\partial_x^2, N(u,x) = -i(V(x)u + |u|^2)u$ ve herhangi $s > \frac{1}{2}$ için

$X = H^s(\mathbf{R})$ ve $Y = H^{s-2}(\mathbf{R})$ Banach uzaylarıdır ($V \in H^s$ olduğu farzedilsin). (2.52) için başlangıç-değer problemi herhangi $s > \frac{1}{2}$ için $f(x) \in H^s(\mathbf{R})$ olmak üzere

$$u(x,0) = f(x), \forall x \in \mathbf{R} \tag{2.54}$$

başlangıç verisi ile bulunur [15].

$$v_t = Lv, v(0) = f, f \in X \tag{2.55}$$

lineer Cauchy problemi ile birleştirilen bir temel çözüm operatörü $E(t)$ olsun, yani $v(t) = E(t)f$ alınsın. Sembolik notasyonlar için $E(t) = e^{tL}$ yazılır. Bunun ne getirdiğini göstermek için

$$||E(t)f||_X \leq C||f||_X \tag{2.56}$$

farzedilsin. Bu durumda eğer $L = i\partial_x^2$ ise

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx, \forall \xi \in \mathbf{R}$$

olmak üzere (2.55) lineer Schrödinger denklemi,

$$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi^2 t + i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi, \forall (x,t) \in \mathbf{R}^2$$

olan Fourier dönüşümünde çözülür. Bu yüzden $E(t)$,$\hat{E}(t) = e^{-i\xi^2 t}$ Fourier dönüşümü ile tanımlıdır. Parseval özdeşliğinden $E(t)$, H^s normunu korur;

$$||E(t)f||_{H^s}^2 = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{\mathbf{R}}(1+\xi^2)^s|\widehat{E(t)f}|^2 d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{\mathbf{R}}(1+\xi^2)^s|\widehat{E(t)}|^2|\hat{f}|^2 d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{\mathbf{R}}(1+\xi^2)^s|\hat{f}|^2 d\xi = ||f||_{H^s}^2$$

yani (2.56) varsayımı $C = 1$ için korunur. Duhamel prensibinden (2.52) için başlangıç değer problemi

$$u(t) = E(t)f + \int_0^t E(t-s)N(u(s))ds \tag{2.57}$$

ile tekrar formülize edilebilir [15].

Hatırlatma: Eğer $L : X \to Y, N : X \to X$ ve herhangi $C > 0$ için $||E(t)f||_X \leq C||f||_X$ ise o zaman $C([0,T],X)$ uzayındaki (2.57) integral denkleminin tek çözümü vardır, öyle ki yeterince küçük $T > 0$ için bu sabit nokta $u(t) \in C([0,T],X) \cap C^1([0,T],Y)$ uzayında (2.53) probleminin tek çözümüne karşılık gelir. Adomian metodunu kurmak için $u_0(t) = E(t)f$ olmak üzere

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \tag{2.58}$$

ve A_n, $N(u)$ analitik fonksiyonundaki Adomian polinomu olmak üzere

$$u_{n+1}(t) = \int_0^t E(t-s)A_n(u_0(s), u_1(s), ..., u_n(s))ds, n \geq 0 \tag{2.59}$$

dir. X içerisinde (2.58) Adomian serisinin yakınsaklığı ispatlanmalıdır [15].

Teorem 2.4: Herhangi $a > 0$ yarıçapı için $B_a(f) \subset X$ yuvarında $N : X \to X$ bir gerçel analitik fonksiyon olsun. $L : X \to Y$,herhangi $C > 0$ için $||E(t)f||_X \leq C||f||_X$ eşitsizliğini sağlasın. $u_0(t) = E(t)f$ ve $n \geq 1$ için $u_n(t)$, (2.59) denklemini sağlasın. En azından bir $T > 0$ vardır öyle ki (2.58) Adomian serisinin n-inci kısmi toplamı, $C([0,T],X)$ içerisindeki (2.57) denkleminin u çözümüne yakınsar [15].

İspat: $u \in X$ içerisinde $N(u)$ analitik olarak kabul edilsin. O halde Cauchy tahminlerinden $a > 0$ ve $b > 0$ vardır öyle ki

$$||\partial_u^k N(f)||_X \leq \frac{bk!}{a^k}, k > 0. \tag{2.60}$$

$u = f$'de $N(u)$ için Taylor açılımı $N(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}[\partial_u^k N(f)](u-f)^k$, herhangi

$||u-f||_X \leq a$ için yakınsar ve dahası $\rho = ||u-f||_X \leq a$ olmak üzere

$$||N(u)||_X \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{bk!}{a^k} ||u-f||_X \leq \frac{b}{1-\frac{||u-f||_X}{a}} = \frac{ba}{a-\rho} = g(\rho)$$

elde edilir. Şimdi $k \geq 0$ için $||\partial_u^k N(f)||_X \leq g^{(k)}(0)$ olduğu açıktır. (2.59) dan

$$||u_0 - f||_X \leq (C+1)||f||_X \equiv a$$

bulunur ve

$$||u_1||_X \leq \int_0^t ||E(t-s)A_0||_X \leq C \int_0^t ||A_0||_X ds \leq Cg(0)t = Ct\rho'(0)$$

$$||u_2||_X \leq \int_0^t ||E(t-s)A_1||_X \leq C \int_0^t ||A_1||_X ds \leq C^2 g'(0)g(0)t = C^2 \frac{t^2}{2} \rho''(0)$$

, tümevarımdan

$$||u_{n+1}||_X \leq C^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \rho^{(n+1)}(0)$$

olur. Bu yüzden X içerisindeki Adomian serisi, Teorem 2.2'nin ispatıyla tamamen örtüşecek biçimde $T < \frac{a}{2bC}$ için herhangi $t \in [O,T]$ olmak üzere $\rho(t) = a - \sqrt{a^2 - 2abCt}$ için oluşan yakınsak kuvvet serisi ile üstten sınırdır [15].

3. SOYUT CAUCHY PROBLEMİNE UYGULANAN ADOMIAN AYRIŞTIRMA METODU İÇİN YAKINSAKLIK ANALİZİ

Bu bölümde lineer olmayan (nonlineer) bir diferansiyel denklem sisteminden oluşan soyut bir Cauchy problemine uygulanan Adomian Ayrıştırma Metodunun yakınsaklığı ile ilgili temel sonuçlar incelendi. Belli şartlar altında bu sistemin çözümlerini bulmak için normdan faydalanarak alt tahminler bulundu. Ayrıca ADM ile bulunan yaklaşık çözümler için hata tahminleri hakkında sonuçlar elde edildi. Bunun için ağırlıklı olarak; Lazhar Bougoffa, R. C. Rach, S. El-Manouni,2012, A convergence analysis of the Adomian decomposition method for an abstract Cauchy problem of a system of first-order nonlinear differential equations [16] makalesi incelendi. Yapılan uygulamalar ile sistemlerin yaklaşık çözümleri belirlendi. Ayrıca ADM ile çeşitli sayısal metotların integral denklemlerine uygulamaları ile bulunan yaklaşık çözümlerin karşılaştırılmaları yapılarak ADM ile bu farklı metotların çözüme yakınsama hızları gözlemlendi.

3.1 Giriş

Birinci mertebe bir denklem sisteminin Cauchy başlangıç değer problemi

$L_{k,1}, L_{k,2} > 0; k = 1,2$ ve H Hilbert uzayında norm $||.||$ olmak üzere

$$||f_k(t,u_1,v_1) - f_k(t,u_2,v_2)|| \leq L_{k,1}||u_1 - u_2|| + L_{k,2}||v_1 - v_2|| \qquad \textbf{(3.1)}$$

; tüm $u_k, v_k \in H$ için Lipscihtz koşulunu sağlayan $k = 1,2$ için

$f_k : [0,T]xHxH \to H$ nonlineer operatörler olacak şekilde

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f_1(t,u,v), \\ \frac{dv}{dt} &= f_2(t,u,v), \\ u(0) &= \alpha, \\ v(0) &= \beta \end{aligned} \qquad \textbf{(3.2)}$$

ele alınsın [16]. Eğer (3.2) sistemi ayrışırsa, o zaman H Hilbert uzayında

$\frac{du}{dt} = f(t,u), u(0) = \alpha$ birinci mertebe nonlineer diferansiyel denkleminin bir soyut Cauchy başlangıç değer problemi ele alınır. Bu problem $f : C[a,b] \to L[a,b]$ bir sürekli operatör olmak üzere $C[a,b], u$ sürekli fonksiyonlarının Banach uzayı ve $L[a,b], u$ Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonların uzayı olacak şekilde varlık ve teklik içeren birkaç sonuçla ilgilidir ve yoğun olarak araştırılmıştır. Ayrıca bu fonksiyonel denklemin yaklaşık çözümlerini bulmaya yarayan metotlar üzerine bazı sonuçlar vardır [16].

$L : X \to Y, X$ Banach uzayında bir lineer operatör olmak $(X \subset Y)$ ve $N(u) : X \to X, X$ üzerinde bir nonlineer operatör olmak üzere $\frac{du}{dt} = Lu + N(u), u(0) = \alpha$ formundaki bu soyut başlangıç-değer problemini ele alan çalışmalar literatürde vardır [18].

Bu bölümde, belli şartlar altında (3.2) sisteminin çözümleri için ADM ile alt tahminler bulunacaktır. Ayrıca ADM nin yakınsaklığı ile ilgili sonuçlar elde edilecek ve ADM ile uygulamalar yapılacaktır [16].

3.2 Sınırlı Bir Çözüm İçin Gereklilik Şartları

Sonuç aşağıdaki lemmalara dayanacaktır [16].

Lemma 3.1: $P(t)$ ve $Q(t)$, $[0,T]$ üzerinde sürekli ve pozitif fonksiyonlar olsunlar ve V; $V(0) \leq (\geq) V_0, V'(s) \leq (\geq) P(s)V(s) + Q(s)$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. O zaman

$$V(t) \leq (\geq) V_0 exp(\int_0^t P(s)ds) + \int_0^t Q(s) exp(\int_s^t P(r)dr)ds$$

dir [16].

İspat: Her iki taraf $V'(t) \leq (\geq) P(t)V(t) + Q(t)$ ile eşlenerek, integrasyon faktörü $e^{\int_0^t P(s)ds}$ kullanılarak ve 0 dan t ye integre edilerek sonuç bulunur [16].

Lemma 3.2: Eğer $a \leq t \leq b$ için $\phi(t) \geq 0, \psi(t) \geq 0$ ve $K(t)$; $a \leq t \leq b$ aralığında

$\phi(t) \leq K(t) + \int_a^t \phi(s)\psi(s)ds$ olmak üzere sürekli fonksiyonlar iseler o zaman

$\phi(t) \leq K(t) + \int_a^t \phi(s)K(s)e^{\int_s^t \psi(r)dr}ds$ dir [16].

Lemma 3.2 aşağıda verilen Gronwall Lemması'nın en geçerli versiyonudur.

Gronwall Lemması: Eğer herhangi kapalı $[0,T]$ aralığı üzerinde bir sınırlı

$f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ fonksiyonu, $a(t)$ artan fonksiyonu ve $b(t)$ pozitif (integrallenebilir) fonksiyonu için $f(T) \leq a(T) + \int_0^T b(t)f(t)dt$ eşitsizliğini sağlıyorsa

$f(T) \leq a(T)exp\{\int_0^T b(t)f(t)\}dt(*)$ dir.

İspat: $v(t) = e^{-\int_0^t b(s)ds} \int_0^t b(s)f(s)ds$ fonksiyonu ele alınsın ve $(*)$ eşitsizliğine uygulansın.

$$\frac{dv(t)}{dt} = -b(t)e^{-\int_0^t b(s)ds} \int_0^t b(s)f(s)ds + b(t)f(t)e^{-\int_0^t b(s)ds}$$

$$\leq -b(t)e^{-\int_0^t b(s)ds} \int_0^t b(s)f(s)ds + a(t)b(t)e^{-\int_0^t b(s)ds} + b(t)e^{-\int_0^t b(s)ds} \int_0^t b(s)f(s)ds$$

$$= a(t)b(t)e^{-\int_0^t b(s)ds}$$

İntegrasyon yapılarak ve $a(t)$ nin artan olduğu gözönünde bulundurularak

$$e^{-\int_0^T b(t)dt} \int_0^T b(t)f(t)dt = v(T) \leq \int_0^T a(t)b(t)e^{-\int_0^t b(s)ds}$$

$$\leq a(T) \int_0^T b(t)e^{-\int_0^t b(s)ds}dt = a(T)[1 - e^{-\int_0^T b(s)ds}]$$

olur. (*) eşitsizliğinden ve yukarıdaki sınırdan

$$f(T) \leq a(T) + \int_0^T b(t)f(t)dt$$

$$\leq a(T) + e^{\int_0^T b(t)dt} a(T)[1 - e^{-\int_0^t b(s)ds}] = a(T)exp\{\int_0^T b(t)dt\}$$

olur.

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği: Eğer x ve y bir iç çarpım uzayının elemanları ise o zaman $| < x,y > | \leq ||x||||y||$ dir.

İspat:

$$0 \leq < ||y||x \mp ||x||y, ||y||x \mp ||x||y >$$

$$= ||y||^2 < x,x > \mp 2||x||||y|| < x,y > + ||x||^2 < y,y >$$

$$= 2||x||^2||y||^2 \mp 2||x||||y|| < x,y >$$

$$= 2||x||||y||(||x||||y|| \mp < x,y >)$$

$$\Rightarrow 0 \leq ||x||||y|| \mp < x,y > => \mp < x,y > \leq ||x||||y||$$

Young Eşitsizliği: f gerçel değerli fonksiyonu, $[0,c]$ üzerinde sürekli ve sınırlı artan olsun. Eğer $a \in [0,c], b \in [0,c]$ için $f(0)=0$ ise f^{-1},f nin tersi olmak üzere

$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b \frac{1}{f(x)}dx$ dir. $b=f(a)$ olduğunda eşitlik olur. $ab \leq \frac{a^p}{q} + (\frac{p-1}{p})b^{\frac{p}{p-1}}$ özel formu; $f(x)=x^{p-1}$ genel fonksiyonu alınarak $a,b \geq 0, p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ simetrik formu ile bulunur. Young Eşitsizliği kaynaklarda bazen Peter-Paul eşitsizliği olarak verilir. Bu eşitsizlik durumunda $\forall \varepsilon > 0$ için

$ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \varepsilon\frac{b^2}{2} \Leftrightarrow 2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$ dir. Buradan $||a||$ ve $||b||$ normları bu eşitsizlikte yerine yazılırsa $2||a||||b|| \leq \frac{||a||^2}{\varepsilon} + \varepsilon||b||^2 \leq \frac{1}{\varepsilon} < a,a > +\varepsilon < b,b >$ olur. Cauchy-Schwarz Eşitsizliği'nden faydalanılarak

$$2|<a,b>| \leq 2||a||||b|| \leq \frac{1}{\varepsilon} < a,a > +\varepsilon < b,b >$$

, yani $2|<a,b>| \leq \frac{1}{\varepsilon} < a,a > +\varepsilon < b,b >$ elde edilir.

Teorem 3.1: Eğer her $u,v \in H$ ve $0 \leq t \leq T; j=1,2,3; k=1,2$ olmak üzere bazı

$g_{k,j}(t) \geq 0$ fonksiyonları için

$$||f_k(t,u,v)||^2 \leq g_{k,1}(t) + g_{k,2}(t)||u||^2 + g_{k,3}(t)||v||^2 \qquad \textbf{(3.3)}$$

ise (3.2) sisteminin herbir $\{u,v\}$ çözüm kümesi için aşağıdaki tahminler,

$$K_1(t) = ||u_0||^2 e^{\mu_1(t)} + \int_0^T \frac{g_{1,1}(s)}{\varepsilon_1} e^{\mu_1(t-s)} ds$$

$$+ \int_0^T \frac{g_{1,3}(s)}{\varepsilon_1} (||v_0||^2 e^{\mu_1(t)} \int_0^T \frac{g_{2,1}(s)}{\varepsilon_2} e^{\mu_2(t-s)} ds) e^{\mu_1(t-s)} ds$$

$$K_2(t) = \int_0^T \frac{g_{1,3}(s)}{\varepsilon_1} e^{\mu_1(t-s)} ds$$

$$K_3(t) = ||v_0||^2 e^{\mu_2(t)} + \int_0^T \frac{g_{2,1}(s)}{\varepsilon_2} e^{\mu_2(t-s)} ds + \int_0^T \frac{g_{2,3}(s)}{\varepsilon_2} K_1(s) e^{\mu_2(t-s)} ds$$

$$K_4(t) = \int_0^T \frac{g_{2,3}(s)}{\varepsilon_1} e^{\mu_2(t-s)} ds$$

$\mu_1 = max(\varepsilon_1, max_{0\leq t\leq T} \frac{g_{1,2}(t)}{\varepsilon_1})$, $\mu_2 = max(\varepsilon_2, max_{0\leq t\leq T} \frac{g_{2,3}(t)}{\varepsilon_2})$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ olmak üzere,

$$||u||^2 \leq K_1(t) + K_2(t) \int_0^T K_1(s) \frac{g_{2,1}(s)}{\varepsilon_2} e^{\mu_2(t-s)} e^{K_2(t)\int_0^t \frac{g_{2,1}(r)}{\varepsilon_2} e^{\mu_2(t-r)dr}} ds,$$

$$||v||^2 \leq K_3(t) + K_4(t) \int_0^T K_1(s) \frac{g_{2,1}(s)}{\varepsilon_2} e^{\mu_2(t-s)} e^{K_2(t)\int_0^t \frac{g_{2,1}(r)}{\varepsilon_2} e^{\mu_2(t-r)dr}} ds \qquad \textbf{(3.4)}$$

olur [16].

İspat: İlk önce $u(0)=\alpha$ ile $\frac{du}{dt}=f_1(t,u,v)$ (3.2) sisteminin ilk denklemi ele alınsın. Yani $(\frac{du}{dt},u)_H=(f_1(t,u,v),u)_H$. Aşağıda verilen ε_1 e bağlı Young eşitsizliği olan

$2|(u,v)|_H \leq \frac{1}{\varepsilon_1}||u||^2+\varepsilon_1||v||^2, \forall u,v\in H$ ve $\varepsilon_1>0$ için kullanılarak

$\frac{d}{dt}||u||^2 \leq \frac{1}{\varepsilon_1}[g_{1,1}(t)+g_{1,2}(t)||u||^2+g_{1,3}(t)||v||^2]+\varepsilon_1||u||^2$, yani,

$h_1(t)=\frac{g_{1,1}(t)}{\varepsilon_1}+\frac{g_{1,3}(t)}{\varepsilon_1}||v||^2$ olmak üzere $\frac{d}{dt}||u||^2 \leq \mu_1||u||^2+h_1(t)$ dir. Lemma 3.1 kullanılarak $0\leq t\leq T$ için, $||u||^2 \leq ||u_0||^2e^{\mu_1 t}+\int_0^t h_1(s)e^{\mu_1(t-s)}ds$ ve

$$||u||^2 \leq ||u_0||^2e^{\mu_1 T}+\int_0^T h_1(s)e^{\mu_1(t-s)}ds \tag{3.5}$$

bulunur. (3.2) sisteminin ikinci denklemi $v(0)=\beta$ ile $(\frac{dv}{dt},u)_H=(f_2(t,u,v),v)_H$, yani $h_2(t)=\frac{g_{2,1}(t)}{\varepsilon_2}+\frac{g_{2,3}(t)}{\varepsilon_2}||u||^2$ olmak üzere

$$||v||^2 \leq ||v_0||^2e^{\mu_2 T}+\int_0^T h_2(s)e^{\mu_2(t-s)}ds \tag{3.6}$$

olur. (3.6) eşitsizliği (3.5) eşitsizliğinde yerine yazılarak

$$||u||^2 \leq K_1(t)+K_2(t)\int_0^T \frac{g_{2,1}(s)}{\varepsilon_2}e^{\mu_2(t-s)}||u(s)||^2ds \tag{3.7}$$

elde edilir. Şimdi Gronwall Lemması (3.7) eşitsizliğine uygulanarak

$$||u||^2 \leq K_1(t)+K_2(t)\int_0^T K_1(s)\frac{g_{2,1}(s)}{\varepsilon_2}e^{\mu_2(t-s)}e^{K_2(t)\int_s^t \frac{g_{2,1}(r)}{\varepsilon_2}e^{\mu_2(t-r)}dr}ds \tag{3.8}$$

olur. Son olarak (3.8) eşitsizliği (3.6) eşitsizliğine uygulanarak

$$||v||^2 \leq K_3(t)+K_4(t)\int_0^T K_1(s)\frac{g_{2,1}(s)}{\varepsilon_2}e^{\mu_2(t-s)}e^{K_2(t)\int_s^t \frac{g_{2,1}(r)}{\varepsilon_2}e^{\mu_2(t-r)}dr}ds \tag{3.9}$$

bulunur ve ispat tamamlanır [16].

Önerme: Eğer $\forall u\in H$ için

$$||f(t,u)||^2 \leq g_{1,1}(t)+g_{1,2}(t)||u||^2 \tag{3.10}$$

ise

$$\frac{du}{dt}=f(t,u), u(0)=\alpha \tag{3.11}$$

Cauchy probleminin u çözümü için aşağıdaki

$$||u||^2 \leq ||u_0||^2e^{\mu_1 t}+\int_0^T \frac{g_{1,1}(s)}{\varepsilon_1}e^{\mu_1(t-s)}ds \tag{3.12}$$

tahmini elde edilir [16].

Bu önerme Cauchy probleminin çözümüne dair; bir alt tahmin oluşturmayı, normu alınan terim için birinci mertebeden türevi yerine yazmayı ve böylece başlangıç şartından bir tahmin türetildiğini belirtir.

3.3 ADM İçin Tekrarlı İndirgeme Şeması

$\{u,v\}$ çözümünü bulmak için ADM kullanılarak $n = 0,1,2,...$ olmak üzere;

$$A_{k,n} = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} f_k\left[t, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i u_i, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i\right]\Bigg|_{\lambda=0}$$

formülü ile hesaplanan $A_{k,n}$; $u_0, u_1, ..., u_n$ için Adomian polinomlarıdır.

$f_k(t,u_n,v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{k,n}; k = 1,2$ formunda verilen sonsuz bir seri ile ifade edilen ve analitik fonksiyonlar olarak varsayılan Adomian polinomları için $k = 1,2; f_k(t,u_n,v_n)$ nonlineer terimler ve $L_t^{-1} = \int_0^t (.)dt$ ters lineer operatör olacak şekilde

$$u_0 = \alpha$$

$$v_0 = \beta$$

$$u_{n+1} = L_t^{-1} A_{1,n}, n \geq 0$$

$$v_{n+1} = L_t^{-1} A_{2,n}, n \geq 0 \qquad \textbf{(3.13)}$$

elde edilir. Burada ADM için tekrarlı indirgeme şeması ile hesaplanan çözüm bileşenleri için

$$u = \lim_{N\to\infty} \phi_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$v = \lim_{N\to\infty} \psi_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

olur. u ve v nin n-inci yaklaşımlarının ilk $n+1$ terimleri alınarak

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{n} u_i, \psi_n = \sum_{i=0}^{n} v_i, n \geq 0 \qquad \textbf{(3.14)}$$

veya

$$\phi_n = u_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i, \psi_n = v_0 + \sum_{i=1}^{n} v_i, n \geq 0 \qquad \textbf{(3.15)}$$

olur. Şimdi yukarıdaki ADM için tekrarlı indirgeme şeması (3.15) denkleminde yerine yazılarak

$$\phi_n = u_0 + \sum_{i=1}^{n} L_t^{-1} A_{1,i-1} \qquad \textbf{(3.16)}$$

$$\psi_n = v_0 + \sum_{i=1}^{n} L_t^{-1} A_{2,i-1} \tag{3.17}$$

ve

$$\phi_n = u_0 + L_t^{-1}[A_{1,0} + A_{1,1} + ... + A_{1,n-1}] \tag{3.18}$$

, yani

$$\phi_n = u_0 + L_t^{-1} f_1(t, \phi_{n-1}, \psi_{n-1}) \tag{3.19}$$

olur. Devam etmeden önce

$$\psi_n = v_0 + L_t^{-1} f_2(t, \phi_{n-1}, \psi_{n-1}) \tag{3.20}$$

olduğu bilinmektedir. (3.2) sistemine ADM uygulanarak

$\phi_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ ve $\psi_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$

$$u_0 = \alpha$$

$$v_0 = \beta$$

$$\phi_n = u_0 + L_t^{-1} f_1(t, \phi_{n-1}, \psi_{n-1}), n \geq 1$$

$$\psi_n = v_0 + L_t^{-1} f_2(t, \phi_{n-1}, \psi_{n-1}), n \geq 1 \tag{3.21}$$

için ϕ_n ve ψ_n serilerini bulma problemi elde edilir [16].

3.4 Hata Tahminleri

Bu kısımın amacı (3.2) sisteminin çözümünün ADM ile n-inci yaklaşımı için hata tahminini inceleyen bir teorem oluşturmak ve ispatlamaktır. $\{u, v\}$, (3.2) sisteminin çözüm kümesi olsun ve

$$\varepsilon_n = \phi_n - u, n = 1, 2, ...$$

$$Q_n = \psi_n - v, n = 1, 2, ...$$

farzedilsin. Yukarıdaki ADM için tekrarlı indirgeme şemasından ve (3.2)

sisteminden $n = 1, 2, ...$ için

$$\frac{d\varepsilon_n}{dt} = f_1(t, \varepsilon_{n-1}, Q_{n-1}) - f_1(t, u, v), \frac{dQ_n}{dt} = f_2(t, \varepsilon_{n-1}, Q_{n-1}) - f_2(t, u, v) \tag{3.22}$$

olur. Şimdi $(\frac{d\varepsilon_n}{dt}, \varepsilon_n)_H = (f_1(t, \varepsilon_{n-1}, Q_{n-1}) - f_1(t, u, v), \varepsilon_n)_H$ iç çarpımı ele alınsın. Young eşitsizliği $2|(a,b)|_H \leq \frac{1}{\gamma}||a||^2 + \gamma||b||^2, \forall a, b \in H$ ve $\gamma > 0$ için alınarak

kurulsun, buradan

$$\frac{d}{dt}||\varepsilon_n||^2 \leq \frac{1}{\gamma_1}||f_1(t,\varepsilon_{n-1},Q_{n-1}) - f_1(t,u,v)||^2 + \gamma_1||\varepsilon_n||^2, \gamma_1 > 0 \qquad \textbf{(3.23)}$$

olur. Lipschitz koşulu kullanılarak

$$\frac{d}{dt}||\varepsilon_n||^2 \leq \frac{L_{1,1}}{\gamma_1}||\varepsilon_{n-1}||^2 + \frac{L_{1,2}}{\gamma_1}||Q_{n-1}||^2 + \gamma_1||\varepsilon_n||^2 \qquad \textbf{(3.24)}$$

elde edilir. (3.24) eşitsizliğinin her iki tarafı 0 dan t ye integre edilerek

$$||\varepsilon_n||^2 \leq \frac{L_{1,1}}{\gamma_1}\int_0^t ||\varepsilon_{n-1}||^2 dt + \frac{L_{1,2}}{\gamma_1}\int_0^t ||Q_{n-1}||^2 dt + \gamma_1 \int_0^t ||\varepsilon_n||^2 dt \qquad \textbf{(3.25)}$$

,yani

$$||\varepsilon_n||^2 \leq \frac{L_{1,1}}{\gamma_1}\int_0^T ||\varepsilon_{n-1}||^2 dt + \frac{L_{1,2}}{\gamma_1}\int_0^T ||Q_{n-1}||^2 dt + \gamma_1 \int_0^T ||\varepsilon_n||^2 dt \qquad \textbf{(3.26)}$$

olur. Gronwall eşitsizliği uygulanarak

$$||\varepsilon_n||^2 \leq e^{\gamma_1 T}\frac{L_{1,1}}{\gamma_1}\int_0^T ||\varepsilon_{n-1}||^2 dt + e^{\gamma_1 T}\frac{L_{1,2}}{\gamma_1}\int_0^T ||Q_{n-1}||^2 dt \qquad \textbf{(3.27)}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$(\frac{dQ_n}{dt}, Q_n)_H = (f_1(t,\varepsilon_{n-1},Q_{n-1}) - f_1(t,u,v), Q_n)_H$ iç çarpımı ele alınsın ve devam etmeden önce

$$||Q_n||^2 \leq e^{\gamma_2 T}\frac{L_{2,1}}{\gamma_2}\int_0^T ||\varepsilon_{n-1}||^2 dt + e^{\gamma_2 T}\frac{L_{2,2}}{\gamma_2}\int_0^T ||Q_{n-1}||^2 dt, \gamma_2 > 0 \qquad \textbf{(3.28)}$$

olur. Şimdi (3.27) ve (3.28) eşitsizlikleri

$W_n = \begin{pmatrix} ||\varepsilon_n||^2 \\ ||Q_n||^2 \end{pmatrix}$ ve $K = \begin{pmatrix} e^{\gamma_1 T}\frac{L_{1,1}}{\gamma_1} & e^{\gamma_1 T}\frac{L_{1,2}}{\gamma_1} \\ e^{\gamma_2 T}\frac{L_{2,1}}{\gamma_1} & e^{\gamma_2 T}\frac{L_{2,2}}{\gamma_1} \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$W_n \leq K\int_0^T W_{n-1}dt; n = 1,2,... \qquad \textbf{(3.29)}$$

formunda tekrar yazılsın. Yani $W_0 = max_{0\leq t\leq T}||W_0(t)||$ olmak üzere $n = 1,2,...$ için $W_n \leq (TK)^n W_0$ olur. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu [16].

Teorem 3.2: $i = 1,2,...$ için f_i operatörleri Lipschitz koşulunu ve $\{u,v\}$, (3.2) sisteminin bir çözüm kümesi olmak üzere $n = 1,2,...$ için

$$\varepsilon_n = \phi_n - u$$

$$Q_n = \psi_n - v$$

şartlarını sağlasın. O halde $n = 1,2,...$ için

$$W_n \leq (TK)^n W_0 \qquad \textbf{(3.30)}$$

olur [16].

3.5 ε- Yaklaşık Çözümleri Ve Karşılaştırması

3.5.1 ε- yaklaşık çözümleri

(3.2) sistemine ADM uygulanmasıyla ε-yaklaşık çözümünü bulmak için aşağıdaki tanım kullanılır [16].

Tanım: (3.2) sistemine uygulanan ADM ile elde edilen $\{\phi_n, \psi_n\}$ yaklaşık çözümüne, $i = 1,2$ için ε_i nonnegatif sabitleri

$$||\frac{d\phi_n}{dt} - f_1(t, \phi_n, \psi_n)|| \leq \varepsilon_1 \tag{3.31}$$

$$||\frac{d\psi_n}{dt} - f_2(t, \phi_n, \psi_n)|| \leq \varepsilon_2 \tag{3.32}$$

olacak şekilde mevcut ise (3.2) sisteminin bir ε-yaklaşık çözümü denir. Şimdi aşağıdaki teorem verilsin [16].

Teorem 3.3: $i = 1,2$ için f_i operatörleri Lipschitz koşulunu sağlasın. Eğer $\{\phi_{n,1}, \psi_{n,1}\}$ ve $\{\phi_{n,2}, \psi_{n,2}\}$ iki ε-yaklaşık çözüm iseler o zaman,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2}, \varepsilon_2 = \varepsilon_{2,1} + \varepsilon_{2,2}$$

$$L_1 = L_{1,1} + L_{2,1}$$

$$L_2 = L_{1,2} + L_{2,2}$$

$$\phi_1(0) = \phi_{1,n}(0) - \phi_{2,n}(0)$$

$$\psi_1(0) = \psi_{1,n}(0) - \psi_{2,n}(0)$$

olmak üzere

$$||\phi_{1,n}(t) - \phi_{2,n}(t)|| + ||\psi_{1,n}(t) - \psi_{2,n}(t)||$$
$$\leq (||\phi_1(0) - \phi_2(0)|| + ||\psi_1(0) - \psi_2(0)||)e^{max(L_1,L_2)t} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{max(L_1,L_2)}(e^{max(L_1,L_2)t} - 1) \tag{3.33}$$

olur [16].

İspat:

$$||\frac{d\phi_{n,1}}{dt}-\frac{d\phi_{n,2}}{dt}||+||\frac{d\psi_{n,1}}{dt}-\frac{d\psi_{n,2}}{dt}||\leq \varepsilon_{1,1}+\varepsilon_{1,2}+\varepsilon_{2,1}+\varepsilon_{2,2}$$

$$+||f_1(t,\phi_{n,1},\psi_{n,1})-f_1(t,\phi_{n,2},\psi_{n,2})||+||f_2(t,\phi_{n,1},\psi_{n,1})-f_2(t,\phi_{n,2},\psi_{n,2})|| \quad \textbf{(3.34)}$$

ve

$$||\frac{d\phi_{n,1}}{dt}-\frac{d\phi_{n,2}}{dt}||+||\frac{d\psi_{n,1}}{dt}-\frac{d\psi_{n,2}}{dt}||\leq \varepsilon_{1,1}+\varepsilon_{1,2}+L_{1,1}||\phi_{n,1}-\phi_{n,2}||$$

$$+L_{1,2}||\psi_{n,1}-\psi_{n,2}||+\varepsilon_{2,1}+\varepsilon_{2,2}+L_{2,1}||\phi_{n,1}-\phi_{n,2}||+L_{2,2}||\psi_{n,1}-\psi_{n,2}|| \quad \textbf{(3.35)}$$

dir. $\phi_n=\phi_{n,1}-\phi_{n,2}$ ve $\psi_n=\psi_{n,1}-\psi_{n,2}$ olsun. Yani

$$||\phi_n(t)-\phi_n(0)||+||\psi_n(t)-\psi_n(0)||\leq \int_0^t[\varepsilon_{1,1}+\varepsilon_{1,2}+\varepsilon_{2,1}+\varepsilon_{2,2}]ds$$

$$+\int_0^t[(L_{1,1}+L_{2,1})||\phi_n(s)||+(L_{1,2}+L_{2,2})||\psi_n(s)||]ds \quad \textbf{(3.36)}$$

,yani

$$||\phi_n(t)-\phi_n(0)||+||\psi_n(t)-\psi_n(0)||\leq \int_0^t[\varepsilon_1+\varepsilon_2+L_1||\phi_n(0)||+L_2||\psi_n(0)||]ds$$

$$+\int_0^t[L_1||\phi_n(s)-\phi_n(0)||+L_2||\psi_n(s)-\psi_n(0)||]ds \quad \textbf{(3.37)}$$

olur. Şimdi (3.37) eşitsizliğine Gronwall Lemması uygulanarak

$$||\phi_n(t)-\phi_n(0)||+||\psi_n(t)-\psi_n(0)||$$

$$\leq \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+max(L_1,L_2)(||\phi_n(0)||+||\psi_n(0)||)}{max(L_1,L_2)}(e^{max(L_1,L_2)t}-1) \quad \textbf{(3.38)}$$

olur. Diğer taraftan

$$||\phi_{1,n}(t)-\phi_{2,n}(t)||+||\psi_{1,n}(t)-\psi_{2,n}(t)||$$

$$\leq ||\phi_n(0)||+||\psi_n(0)||+||\phi_n(t)-\phi_n(0)||+||\psi_n(t)-\psi_n(0)|| \quad \textbf{(3.39)}$$

dır. Bu yüzden

$$||\phi_{1,n}(t)-\phi_{2,n}(t)||+||\psi_{1,n}(t)-\psi_{2,n}(t)||$$

$$\leq (||\phi_1(0)-\phi_2(0)||+||\psi_1(0)-\psi_2(0)||)e^{max(L_1,L_2)t}+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{max(L_1,L_2)}(e^{max(L_1,L_2)t}-1) \quad \textbf{(3.40)}$$

dir [16].

3.5.2 İki komşu sistemin iki yaklaşık çözümünün karşılaştırılması

Bu kısımda iki komşu sistemin ADM ile elde edilen iki yaklaşık çözümü arasında bir karşılaştırma yapılmaktadır [16].

Teorem 3.4:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f_1(t,u,v) \\ \frac{dv}{dt} &= f_2(t,u,v) \\ u(0) = \alpha, v(0) &= \beta \end{aligned} \tag{3.41}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= g_1(t,u,v) \\ \frac{dv}{dt} &= g_2(t,u,v) \\ u(0) = \alpha, v(0) &= \beta \end{aligned} \tag{3.42}$$

sistemleri için ADM ile bulunan iki yaklaşık çözüm sırası ile $\{\phi_{n,1}, \psi_{n,1}\}$ ve $\{\phi_{n,2}, \psi_{n,2}\}$ olsun. $k = 1,2$ için f_k ve g_k Lipschitz koşulunu sağlasın ve $k = 1,2$ için $||f_k(t,u,v) - g_k(t,u,v)|| \leq \varepsilon_k$ olsun. O zaman $C = max(L_{1,1} + L_{2,1}, L_{1,2} + L_{2,2})$ ve $\forall t \in [0,T]$ için

$$||\phi_{n,1} - \phi_{n,2}|| + ||\psi_{n,1} - \psi_{n,2}|| \leq \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{C}(e^{Ct} - 1) \tag{3.43}$$

dir [16].

İspat:

$$||\phi_{n,1} - \phi_{n,2}|| = ||L_t^{-1}[f_1(t,\phi_{n,1},\psi_{n,1}) - g_1(t,\phi_{n,2},\psi_{n,2})]||$$

$$||\psi_{n,1} - \psi_{n,2}|| = ||L_t^{-1}[f_2(t,\phi_{n,1},\psi_{n,1}) - g_2(t,\phi_{n,2},\psi_{n,2})]||$$

olur. O halde

$$||\phi_{n,1} - \phi_{n,2}|| \leq L_t^{-1}||f_1(t,\phi_{n,2},\psi_{n,2}) - g_1(t,\phi_{n,2},\psi_{n,2})||$$

$$+L_t^{-1}||f_1(t,\phi_{n,1},\psi_{n,1}) - f_1(t,\phi_{n,2},\psi_{n,2})||$$

yani,

$$||\phi_{n,1} - \phi_{n,2}|| \leq \varepsilon_1 t + L_{1,1}L_t^{-1}||\phi_{n,1}(t) - \phi_{n,2}(t)|| + L_{1,2}L_t^{-1}||\psi_{n,1}(t) - \psi_{n,2}(t)|| \tag{3.44}$$

dir. Benzer şekilde

$$||\psi_{n,1}-\psi_{n,2}|| \leq \varepsilon_2 t + L_{2,1}L_t^{-1}||\phi_{n,1}(t)-\phi_{n,2}(t)|| + L_{2,2}L_t^{-1}||\psi_{n,1}(t)-\psi_{n,2}(t)|| \quad \textbf{(3.45)}$$

dir. (3.44) ile (3.45) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$||\phi_{n,1}-\phi_{n,2}|| + ||\psi_{n,1}-\psi_{n,2}|| \leq (\varepsilon_1+\varepsilon_2)t + CL_t^{-1}[||\phi_{n,1}(t)-\phi_{n,2}(t)|| + ||\psi_{n,1}(t)-\psi_{n,2}(t)||] \quad \textbf{(3.46)}$$

olur. Şimdi Gronwall Lemması (3.46) eşitsizliğine uygulanarak $\forall t \in [0,T]$ için

$$||\phi_{n,1}-\phi_{n,2}|| + ||\psi_{n,1}-\psi_{n,2}|| \leq \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{C}[e^{Ct}-1] \quad \textbf{(3.47)}$$

bulunur. Eğer $t=0$'da aynı başlangıç değerlerine sahip iki komşu sisteme bu teoremin uygulanmasıyla bulunan iki yaklaşık çözüm $\{\phi_{n,1},\psi_{n,1}\}$ ve $\{\phi_{n,2},\psi_{n,2}\}$ ise, o halde $i=1,2$ için ε_i ler mevcuttur ki, $\forall t \in [0,T]$ olmak üzere

$$||\phi_{n,1}-\phi_{n,2}|| + ||\psi_{n,1}-\psi_{n,2}|| \leq \eta$$

olacak şekilde en azından bir η vardır. Bu durum $\{\phi_{n,1},\psi_{n,1}\}$ in $\{\phi_{n,2},\psi_{n,2}\}$ ye düzgün yakınsadığı anlamına gelir [16].

3.5.3 Uygulamalar

Uygulama 1: Eğer (3.2) sistemi

$$f_1(t,u,v) = 1-\frac{\mu}{v}; \mu,\eta \in \mathbf{R}$$

$$f_2(t,u,v) = 1-\frac{u}{\eta}-v$$

$$u(0)=\eta(1-\mu), v(0)=\mu$$

ele alınırsa o halde

$$|f_1(t,u_1,v_1)-f_1(t,u_2,v_2)| = |1-\frac{\mu}{v_1}-1+\frac{\mu}{v_2}| = |\mu(\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1})|$$

$$|\mu||\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}| = |\mu||\frac{v_1-v_2}{v_1v_2}| \leq |\mu||v_1-v_2|$$

$$|f_2(t,u_1,v_1)-f_2(t,u_2,v_2)| = |1-\frac{u_1}{\eta}-v_1-1+\frac{u_2}{\eta}+v_2|$$

$$|v_2-v_1+\frac{1}{\eta}(u_2-u_1)| \leq \frac{1}{|\eta|}(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|)$$

olur, yani $L_{1,1}=0, L_{1,2}=|\mu|, L_{2,1}=\frac{1}{|\eta|}$ ve $L_{2,2}=1$ bulunur [16]. İki çift nonlineer diferansiyel denklem sistemi Adomian operatör-teorik notasyonunda tekrar yazılarak $L_1=L_2=\frac{d}{dt}(.), R_1=0, R_2=1, N_1v=\frac{\mu}{v}, N_2u=\frac{u}{\eta}, g_1(t)=g_2(t)=1$ olmak üzere

$$L_1u+R_1u+N_1v=g_1$$

$$L_2u+R_2v+N_2u=g_1$$

$$u(0)=\eta(1-\mu), v(0)=\mu$$

elde edilir. $L_1^{-1}=L_2^{-1}=\int_0^t(.)dt$ ters operatörü bu sisteme uygulanarak ve başlangıç şartları kullanılarak

$$u=u(0)+L_1^{-1}g_1-L_1^{-1}R_1u-L_1^{-1}N_1v$$

$$v=v(0)+L_1^{-1}g_2-L_1^{-1}R_2v-L_1^{-1}N_2u$$

bulunur [16]. Yerine yazılarak

$$u=\eta(1-\mu)+t-\mu\int_0^t\frac{1}{v}dt$$

$$v=\mu+t-\int_0^t vdt-\frac{1}{\eta}\int_0^t udt$$

bulunur [16]. Adomian serisi ve Adomian polinomları sırası ile

$u=\sum_{n=0}^{\infty}u_n, v=\sum_{n=0}^{\infty}v_n, \frac{1}{v}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(v_0,v_1,...,v_n)$ olur [16]. Yerine yazılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\eta(1-\mu)+t-\mu\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}A_n(v_0,v_1,...,v_n)dt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}v_n=\mu+t-\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}v_ndt-\frac{1}{\eta}\int_0^t\sum_{n=0}^{\infty}u_ndt$$

bulunur. u_n, v_n çözüm bileşenleri için modifiye tekrarlı indirgeme şeması Wazwaz'ın ADM modifiyesi kullanılarak bulunsun.

$$u_0=\eta(1-\mu), v_0=\mu$$

$$u_1=t-\mu\int_0^t A_0(v_0)dt$$

$$v_1=t-\frac{1}{\eta}\int_0^t u_0dt-\int_0^t v_0dt$$

$$u_{n+2}=-\mu\int_0^t A_{n+1}(v_0,v_1,...,v_{n+1})dt, v_{n+2}=-\frac{1}{\eta}\int_0^t u_{n+1}dt-\int_0^t v_{n+1}dt, n\geq 0$$

İlk birkaç Adomian polinomu negatif-üslü $F(v) = \frac{1}{v}$ nonlineeritesi için

$$A_0 = v_0^{-1}$$

$$A_1 = -v_0^{-2} v_1$$

$$A_2 = v_0^{-3} v_1^2 - v_0^{-2} v_2$$

$$\vdots$$

olmak üzere bulunur [16]. Buradan çözüm bileşenleri

$$u_0 = \eta(1-\mu), v_0 = \mu$$

$$u_1 = 0, v_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$u_{n+2} = 0, v_{n+2} = 0, n \geq 0$$

bulunur. Belli durumlarda Wazwaz'ın modifiye tekrarlı indirgeme şeması, yakınsama oranında önemli bir azalma ile kolay integrallenebilir seriler arasında bir analiz sunar.

Sonuçta, $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = \eta(1-\mu)$ ve $v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) = \mu$, yani sabit noktasındaki Jakobiyen olan $\{u, v\} = \{\eta(1-\mu), \mu\}$ çözüm kümesi kapalı formda bir çözümdür. Aşağıdaki sistemin çözüm kümesinin en azından bir elemanını karşılaştırmalı olarak çalışmakta fayda vardır [16].

$g_1(t,u,v) = -\frac{\mu}{v} + 1 + 2\mu t, g_2(t,u,v) = -\frac{u}{\eta} - v + t^2 \frac{\mu}{v}$,

$$\frac{du}{dt} + \frac{\mu}{v} = 1 + 2\mu t$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u}{\eta} + v = 1 + t^2 \frac{\mu}{v}$$

$$u(0) = \eta(1-\mu), v_0 = \mu \qquad \textbf{(3.48)}$$

sisteminin tam çözümü $\{u^*, v^*\} = \{\eta(1-\mu) + \mu t^2, \mu\}$ dir. Buradan

$$|f_1(t,u,v) - g_1(t,u,v)| = 2t|\mu| \leq 2T|\mu| = \varepsilon_1$$

$$|f_2(t,u,v) - g_2(t,u,v)| = |\frac{\mu}{\eta}|t^2 \leq |\frac{\mu}{\eta}|T^2 = \varepsilon_2$$

olur [16]. Böylece Teorem 3.3 ve Teorem 3.4, $C = max(|\frac{1}{\eta}|, |\mu| + 1)$ olmak üzere

$|u - u^*| + |v - v^*| \leq \frac{2T|\mu| + |\frac{\mu}{\eta}|T^2}{C}(e^{CT} - 1)$ sonucunu verir [16].

Uygulama 2:

$$f_1(t,u,v) = u+2v$$

$$f_2(t,u,v) = t^2u$$

$$u(0) = 1, v(0) = 0, H = \mathbf{R}$$

olmak üzere

$$\frac{du}{dt} = u+2v, u(0) = 1$$
$$\frac{dv}{dt} = t^2u, v(0) = 0$$

olsun. Bu durumda

$$|f_1(t,u_1,v_1) - f_1(t,u_2,v_2)| \leq |u_1-u_2| + 2|v_1-v_2|$$

$$|f_2(t,u_1,v_1) - f_2(t,u_2,v_2)| \leq t^2|u_1-u_2| \leq T^2|u_1-u_2|$$

olur. O zaman $L_{1,1} = 1, L_{1,2} = 2, L_{2,1} = T^2, L_{2,2} = 0$ ve $C = max(1+T^2, 2)$ dir.

$\forall t \in [0,T]$ olmak üzere C sabitinin değeri için $0 < T < 1$ ve $T \geq 1$ durumları ortaya çıkar. $u_n(x)$ ve $v_n(x)$ bileşenleri ADM için tekrarlı indirgeme şeması ile aşağıdaki gibi belirlenir.

$$u_0 = 1, v_0 = 0$$
$$u_n = \int_0^t [u_{n-1} + 2v_{n-1}]dt, n \geq 1$$
$$v_n = \int_0^t t^2u_{n-1}dt, n \geq 1$$

Buradan

$$u_0 = 1, v_0 = 0$$
$$u_1 = t, v_1 = \frac{t^3}{3}$$
$$u_2 = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6}, v_2 = \frac{t^4}{4}$$
$$u_3 = \frac{t^3}{6} + \frac{2t^5}{15}, v_3 = \frac{t^5}{10} + \frac{t^7}{42}$$
$$\vdots$$

ve sonuçta $\phi_{3,1}$ ve $\psi_{3,1}$ yaklaşımları

$$\phi_{3,1} = \sum_{n=0}^{3} u_n = 1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{6}+\frac{t^3}{6}+\frac{2t^5}{15}, \psi_{3,1} = \sum_{n=0}^{3} v_n = \frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^5}{10}+\frac{t^7}{42}$$

olur. Şimdi

$$\frac{du}{dt} = g_1(t,u,v) = u + 2v$$

$$\frac{dv}{dt} = g_2(t,u,v) = t^2 u - \frac{t^4}{2} + \frac{t^5}{5}$$

$$u(0) = 1, v(0) = 0, H = \mathbf{R}$$

ikinci sistemi ele alınsın. Ayrışma, ADM için tekrarlı indirgeme şemasını önermektedir.

$$u_0 = 1, v_0 = \int_0^t (-\frac{t^4}{2} + \frac{t^5}{5})dt = -\frac{t^5}{10} + \frac{t^6}{30}$$

$$u_n = \int_0^t [u_{n-1} + 2v_{n-1}]dt, n \geq 1$$

$$v_n = \int_0^t t^2 u_{n-1} dt, n \geq 1$$

$$u_1 = t - \frac{t^6}{30} + \frac{t^7}{105}, v_1 = \frac{t^3}{3}$$

$$u_2 = \frac{t^2}{2} - \frac{t^7}{210} + \frac{t^8}{840} + \frac{t^4}{6}, v_2 = \frac{t^4}{4} - \frac{t^9}{720} + \frac{t^{10}}{1050}$$

$$u_3 = \frac{t^3}{6} + \frac{2t^5}{15} - \frac{t^8}{1680} + \frac{t^9}{7560} - \frac{t^{10}}{3600} + \frac{t^{11}}{5775}, v_3 = \frac{t^5}{10} + \frac{t^7}{42} - \frac{t^{10}}{2100} + \frac{t^{11}}{9240}$$

$$\vdots$$

ve $\tilde{\phi}_{3,1}$ ile $\tilde{\psi}_{3,1}$ yaklaşımları

$$\tilde{\phi}_{3,1} = \sum_{n=0}^{3} u_n = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{6} + \frac{2t^5}{15} - \frac{t^6}{30} + \frac{t^7}{210} + \frac{t^8}{1680} + \frac{t^9}{7560} - \frac{t^{10}}{3600} + \frac{t^{11}}{5775}$$

$$\tilde{\psi}_{3,1} = \sum_{n=0}^{3} v_n = \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{30} + \frac{t^7}{42} - \frac{t^9}{720} + \frac{t^{10}}{2100} + \frac{t^{11}}{9240}$$

elde edilir. Teorem 3.4'ten

$$|f_1(t,u,v) - g_1(t,u,v)| = 0 = \varepsilon_1$$

$$|f_2(t,u,v) - g_2(t,u,v)| = \frac{t^4}{2} - \frac{t^5}{5} \leq \frac{T^4}{2} - \frac{T^5}{5} = \varepsilon_2$$

bulunur ve

$$I(t) = |\phi_{3,1} - \tilde{\phi}_{3,1}| + |\psi_{3,1} - \tilde{\psi}_{3,1}| = \frac{t^5}{10} - \frac{t^7}{210} + \frac{t^8}{1680} + \frac{23t^9}{15120} - \frac{19t^{10}}{25200} - \frac{3t^{11}}{46200}$$

olur. $I^*(T)$ için iki durum vardır. $\forall t \in [0,T]$ aralığında sistemlerin çözümleri arandığı için aşağıdaki durumlar oluşur.

I.Durum: $0 < T < 1$ ise $C = 2$, $I^*(T) = \frac{5T^4 - 2T^5}{20}(e^{2T} - 1)$ olur.

II. Durum: $T \geq 1$ ise $C = T^2 + 1$, $I^*(T) = \frac{5T^4 - 2T^5}{10T^2 + 10}(e^{T^3 + T} - 1)$ olur.

ε-yaklaşık sistemlerin herhangi yaklaşık çözümlerininin karşılaştırılması esas alındığından Çizelge 3.1, I. Durum ve II. Durum için oluşturulmuştur ve iki komşu sistemin herhangi iki yaklaşık çözümünün birbirlerine düzgün yakınsama durumları incelenmiştir.

Çizelge 3.1: $I(t)$ ve $I^*(T)$ değerleri

T	t	$I(t)$	$I^*(T)$
0.1	0.01	9.9995E-12	5.31367E-06
0.1	0.04	1.02392E-08	5.31367E-06
0.1	0.08	3.27581E-07	5.31367E-06
0.1	0.1	9.99531E-07	5.31367E-06
0.2	0.04	1.02392E-08	0.000180991
0.2	0.08	3.27581E-07	0.000180991
0.2	0.16	0.0000104733	0.000180991
0.2	0.2	0.0000319413	0.000180991
0.4	0.1	9.99531E-07	0.00658851
0.4	0.2	0.0000319413	0.00658851
0.4	0.3	0.000242023	0.00658851
0.4	0.4	0.00101691	0.00658851
0.8	0.1	9.99531E-07	0.275258
0.8	0.4	0.00101691	0.275258
0.8	0.6	0.00766323	0.275258
0.8	0.8	0.0319869	0.275258
1	0.25	0.0000973798	0.951615
1	0.5	0.00309233	0.951615
1	0.75	0.0233234	0.951615
1	1	0.0965356	0.951615
1.02	1.01	0.101399	1.10142
1.05	1.05	0.122828	1.35702
1.1	1.1	0.154493	1.92365
1.125	1.12	0.168832	2.29269
1.2	1.16	0.200654	3.90878
1.2	1.18	0.218244	3.90878
1.31	1.2	0.237027	8.79876
1.32	1.32	0.378004	9.49333
1.45	1.41	0.521093	26.598
1.45	1.45	0.596687	26.598
1.5	1.49	0.680398	40.4919
1.5	1.5	0.702653	40.4919

3.6 ADM İle Çeşitli Sayısal Metotların Karşılaştırılmaları

3.6.1 ADM ile Picard Metodu'nun karşılaştırılması

ADM integral denklemlerine de uygulanır. Son yıllarda yoğun olarak üzerinde çalışılan kuadratik integral denklemlerinin tam çözümlerini bulmak için ADM ve Picard Metodu kullanılmıştır [35]. Önce $x(t) = a(t) + g(t,x(t)) \int_0^t f(s,x(s))ds$ kuadratik integral denklemi ele alınsın. Bu denklemin çözümü ADM ile $x_0(t) = a(t)$ başlangıç koşulu, $x_i(t) = A_{i-1}(t) \int_0^t B_{i-1}(s)ds$; A_i ve B_i, $g(t,x)$ nonlineer teriminin Adomian polinomları olmak üzere $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t)$ seri formundadır [35].

Picard metodu ile çözüme yaklaşım ; yine aynı integral denklemi için tüm $x_n(t)$ fonksiyonları sürekli olduğundan ve x_n ardışık farkların bir toplamı olarak yazıldığından, $n = 1,2,...$ için $x_0(t) = a(t), x_{n-1}(t) = a(t) + g(t,x_{n-1}(t)) \int_0^t f(s,x_{n-1}(s))ds$ algoritması ile $x_n = x_0 + \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})$ iterasyonu oluşturur. Yani x_n dizisinin yakınsaklığı $\sum(x_j - x_{j-1})$ sonsuz serisinin yakınsaklığına denktir ve çözüm

$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ olacaktır, öyle ki $\sum(x_j - x_{j-1})$ serisi yakınsarsa o zaman $x_n(t)$ dizisi $x(t)$ ye yakınsayacaktır [35].

Genel denklemi $x(t) = a(t) + g(t,x(t)) \int_0^t f(s,x(s))ds$ olan bu integral denklemlerinin tam çözümleri ile sayısal yöntemler olan Picard Metodu ve ADM uygulandığında oluşan mutlak hata farkları aşağıda verilen örnekte karşılaştırılmaktadır [35].

Örnek:

$$x(t) = e^{2t} - te^{2t} + x(t) \int_0^t sx(s)ds$$

nonlineer integral denkleminin tam çözümü $x(t) = e^t$ dir .Picard Metodu uygulanırsa $n = 1,2,...$ için $x_n(t) = e^{2t} - te^{2t} + x_{n-1}(t) \int_0^t sx_{n-1}(s)ds$, $x_0(t) = e^{2t} - te^{2t}$ ve çözüm

$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ olur. ADM uygulanırsa $x_i(t) = x_{i-1}(t) \int_0^t sA_{n-1}(s)ds, i \geq 1$; A_i, e^s nonlineer teriminin Adomian polinomları olmak üzere, $x(t) = \sum_{i=0}^{q} x_i(t)$ serisi çözüm olacaktır. Çizelge 3.2'de sırasıyla , $n = 2$ ve $q = 2$ için Picard metodu ve ADM ile bulunan yaklaşık çözümlerin arasında mutlak hata karşılaştırması yapılmıştır.

Çizelge 3.2: Picard Metodu ile ADM'nin karşılaştırılması

t	$\lvert x_{tam} - x_{Picard} \rvert$	$\lvert x_{tam} - x_{ADM} \rvert$
0.001	0.0993599	0.281101
0.002	0.10274	0.290758
0.003	0.104877	0.30071
0.004	0.107768	0.310962
0.005	0.110749	0.321521
0.006	0.113819	0.332392
0.007	0.116977	0.343581
0.008	0.120223	0.355093
0.009	0.123555	0.366932
0.01	0.126971	0.379103

3.6.2 ADM ile Modifiye ADM'nin karşılaştırılması

İkinci tür lineer Fredholm-İntegral denklemlerine uygulanan ve hızlı yakınsama gösteren bir diğer sayısal yöntem Modifiye ADM (MADM) dir [32]. Bu yöntemde

$i = 1,2,...,n$ için $u_i(t) = f_i(t) + \int_a^b \sum_{j=1}^n k_{i,j}(s,t)u_j(s)ds$ sistemi

$u_i(t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{i,m}(t)$ seri ayrışımı ile çözülmektedir. Yani $i = 1,2,...,n$ için

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_{i,m}(t) = f_i(t) + \int_a^b \sum_{j=1}^{n} k_{i,j}(s,t)(\sum_{m=0}^{\infty} u_{j,m}(s))ds$$

olur [32]. ADM için tekrarlı indirgeme şemasından $u_{i,0}(t) = f_i(t), i = 1,2,...,n$ ve

$k = 0,1,2,...$ için $u_{i,k+1}(t) = \int_a^b \sum_{j=1}^n k_{i,j}(s,t)u_{j,k}(s)ds$ olur [32]. Modifiye ADM yönteminde $u_i(t)$ nin ilk üç terimi $f_i(t)$ verilen fonksiyonları ile tanımlıdır. $u_i(t)$ nin ilk üç terimi $i = 2,...,n$ için

$$u_{1,0}(t) = f_1(t)$$

$$u_{i,0}(t) = f_i(t) + \int_a^b \sum_{j=1}^{i-1} k_{i,j}(s,t)u_{j,0}(s,t)dt$$

olur, yani $u_{i,0}(t)$ nin $i = 2,...,n$ için değerleri önceki değerler ile modifiye edilir ve diğer terimler $i = 1,2,...,n; k = 0,1,...$ için

$$u_{1,k+1} = \int_a^b \sum_{j=1}^{n} k_{i,j}(s,t)u_{j,k}(s)ds$$

$$u_{i,k+1} = \int_a^b (\sum_{j=1}^{i-1} k_{i,j}(s,t)u_{j,k+1}(s) + \sum_{j=1}^{n} k_{i,j}(s,t)u_{j,k}(s))ds$$

ile elde edilir [32]. İkinci tür bir Fredholm-İntegral denklem sistemi bu metot ile çözülebilir.

$$u_1(t) = f_1(t) + \int_0^1 (k_{1,1}(s,t)u_1(s) + k_{1,2}(s,t)u_2(s))ds \quad \textbf{(3.49)}$$

$$u_2(t) = f_1(t) + \int_0^1 (k_{2,1}(s,t)u_1(s) + k_{2,2}(s,t)u_2(s))ds \quad \textbf{(3.50)}$$

(3.49) ve (3.50) nin çözümü için

$$u_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{1,m}(t), u_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{2,m}(t) \quad \textbf{(3.51)}$$

yazılır [32]. (3.51), (3.50) ve (3.49) da yerine yazılırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_{1,m}(t) = f_1(t) + \int_0^1 (k_{1,1}(s,t) \sum_{m=0}^{\infty} u_{1,m}(s) + k_{1,2}(s,t) \sum_{m=0}^{\infty} u_{2,m}(s))ds$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_{2,m}(t) = f_2(t) + \int_0^1 (k_{2,1}(s,t) \sum_{m=0}^{\infty} u_{1,m}(s) + k_{2,2}(s,t) \sum_{m=0}^{\infty} u_{2,m}(s))ds$$

$$\Rightarrow u_{1,0}(t) = f_1(t)$$

$$u_{2,0}(t) = f_2(t) + \int_0^1 k_{2,1}(s,t)u_{1,0}(s)ds$$

$$u_{1,1}(t) = \int_0^1 (k_{1,1}(s,t)u_{1,0}(s) + k_{1,2}(s,t)u_{2,0}(s))ds$$

$$u_{2,1}(t) = \int_0^1 (k_{2,1}(s,t)u_{1,0}(s) + k_{2,2}(s,t)u_{2,0}(s))ds$$

olur. $u_{2,0}(t)$ ve $u_{2,1}(t)$ değerleri, bir önceki değerler ve (3.49) ve(3.50) nin değerleriyle modifiye edilir [32]. Buradan $k = 1,2,...$ için

$$u_{1,k+1} = \int_0^1 (k_{1,1}(s,t)u_{1,k}(s) + k_{1,2}(s,t)u_{2,k}(s))ds$$

$$u_{2,k+1} = \int_0^1 (k_{2,1}(s,t)u_{1,k}(s) + k_{2,2}(s,t)u_{2,k}(s))ds$$

olur. Yani $k = 1,2,...$ için $u_{1,k+1}$ ile aynı iterasyondaki değerler $u_{2,k+1}$ hesaplamada kullanılır [32].

Örnek:

$$u_1(t) = f_1(t) + \int_0^1 (\frac{s+t}{3})(u_1(s) + u_2(s))ds$$

$$u_2(t) = f_2(t) + \int_0^1 st(u_1(s) + u_2(s))ds$$

lineer Fredholm-İntegral denklemi $f_1(t) = \frac{13t}{18} - \frac{7}{36}$ ve $f_2(t) = t^2 - \frac{7t}{12}$ olmak üzere ele alınsın. Bu sistemin tam çözümü $u_1(t) = t, u_2(t) = t^2$ dir.

i) ADM ile yaklaşım:

$$u_{1,0}(t) = \frac{13t}{18} - \frac{7}{36}, u_{2,0}(t) = t^2 - \frac{7t}{12}$$

$$u_{1,m+1}(t) = \int_0^1 (\frac{s+t}{3})(u_{1,m}(s) + u_{2,m}(s))ds$$

$$u_{2,m+1} = \int_0^1 st(u_{1,m}(s) + u_{2,m}(s))ds, m = 0,1,2,...$$

Çözüme ilk beş terim yaklaşımlar

$$\Phi_{1,5}(t) = 1.20309t - 0.132517, \Phi_{2,5}(t) = t^2 - 2.42838t$$

olur.

ii) MADM ile yaklaşım:

ADM için tekrarlı indirgeme şeması ile

$$u_{1,0}(t) = \frac{13t}{18} - \frac{7}{36}, u_{2,0}(t) = t^2 - 0.439815t$$

olur.

$$u_{1,m+1}(t) = \int_0^1 (\frac{s+t}{3})(u_{1,m}(s) + u_{2,m}(s))ds$$

$$u_{2,m+1} = \int_0^1 st(u_{1,m}(s) + u_{2,m}(s))ds, m = 0,1,2,...$$

iterasyonu ile çözüme ilk beş terim yaklaşımlar

$$\Phi_{1,5}(t) = 0.995452t - 0.00161544, \Phi_{2,5}(t) = t^2 - 0.138672t$$

bulunur. Çizelge 3.3'te, sırası ile tam çözümler ve ilk beş terim yaklaşık çözümler arasındaki hata farkları e hata sembolü olmak üzere $e_{ADM}\Phi_{1,5}(t), e_{MADM}\Phi_{1,5}(t), e_{ADM}\Phi_{2,5}(t), e_{MADM}\Phi_{2,5}(t)$ olarak verilmektedir.

Çizelge 3.3: ADM ile MADM'nin karşılaştırılması

t	$e_{ADM}\Phi_{1,5}(t)$	$e_{MADM}\Phi_{1,5}(t)$	$e_{ADM}\Phi_{2,5}(t)$	$e_{MADM}\Phi_{2,5}(t)$
0	-0.0132517	0.00016544	0	0
0.01	-0.0152826	0.000207524	0.0242838	0.00138672
0.02	-0.0173135	0.000253504	0.0485676	0.00277344
0.03	-0.0193444	0.000299484	0.0728514	0.00416016
0.04	-0.0213753	0.000345464	0.0971352	0.00554468
0.05	-0.0234062	0.000391444	0.12419	0.0069336

3.6.3 Homotopi Perturbasyon Metodu ile ADM'nin karşılaştırılması

Bu iki metot, nonlineer Fredholm integro-diferansiyel denklemlerine uygulanmaktadır. Bu uygulamalardaki hata farklarını karşılaştırmak için önce nonlineer Fredholm integro-diferansiyel denklemlerinin genel formu verilmelidir. Bu tip denklemler; $u^{(n)}(x)$ bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun n-inci mertebeden türevi, $k(x,t)$ integral denkleminin çekirdeği (kernel), $f(x)$ verilen bir analitik fonksiyon, $R(u)$ ve $N(u)$ sırası ile u nun lineer ve nonlineer fonksiyonları olmak üzere

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^1 k(x,t)[R(u(t)) + N(u(t))]dt, u^{(k)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq (n-1)$$

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)[R(u(t)) + N(u(t))]dt, u^{(k)}(0) = b_k, 0 \leq k \leq (n-1)$$

$u^{(k)}(0) = b_k$ başlangıç şartları ile verilmektedir [30].

Homotopi Perturbasyon Metodu: Metodun algoritmasını oluşturmak için B bir sınır operatörü ve $B(u, \frac{\partial u}{\partial n}) = 0, r \in \Gamma$ sınır şartları için, A bir genel türev operatörü ,$f(r)$ verilen bir analitik fonksiyon ve bu fonksiyonun Ω nüfuz alanının sınırı Γ olmak üzere

$$A(u) = f(r), r \in \Omega \qquad \textbf{(3.52)}$$

nonlineer diferansiyel denklemi ele alınsın [30]. A operatörü M ve N olmak üzere iki parçaya ayrılabilir. Bu yüzden (3.52), $M(u) + N(u) = f(r)$ olarak tekrar yazılabilir. Ji-Huan He $r \in \Omega$,$p \in [0,1]$ bir gömme (embedding) parametresi, y_0 ise (3.52) nin başlangıç yaklaşımı olmak üzere

$$H(v-p) = (1-p)[M(v) - M(y_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \qquad \textbf{(3.53)}$$

eşitliğini sağlayan bir $V(r,p) : \Omega x[0,1] \to \mathbf{R}$ homotopisini inşa etmiştir. Sonuçta $H(v,0) = M(v) - M(y_0), H(v,p) = A(v) - f(r) = 0$ olur. p parametresi 0 ile 1 arasında değiştiğinden $H(v,p)$ de, $M(v) - M(y_0)$ ile $A(v) - f(r)$ arasında değişir. Topolojide bu deformasyon olarak adlandırılır. (3.53) eşitliğinde perturbasyon tekniği ile $p \to 1$ iken $v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + p^3v_3 + ...$ seri açılımı yerine yazılırsa

$u = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + ...$ olur. Bu seri yakınsaktır ve ayrıca hata farkı, $A(v)$ nin nasıl seçildiğine bağlıdır [30].

Örnek: $u'(x) = 1 - \frac{1}{4}x + \int_0^1 xtu^2(t)dt, u(0) = 0$ denklemi ele alınsın [30].

i) HPM'nin uygulanması: $H(v,p) = v'(x) - \frac{1}{4}x + \int_0^1 [(1-p)xt^3 pxtv^2(t)]dt = 0$. Burada p nin kuvvetleri bir araya getirilip sıfıra eşitlenecek biçimde yerine yazılıp aşağıdaki terimler bulunur.

$$p^0 : v_0'(x) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x - \int_0^1 xt^3 dt = 0 \Rightarrow v_0(x) = x$$

$$p^1 : v_1'(x) + \int_0^1 xt^3 dt - \int_0^1 xtv_0^2(t)dt = 0 \Rightarrow v_1(x) = 0$$

$$p^2 : v_2'(x) - \int_0^1 xt(2v_0(t)v_1(t))dt = 0 \Rightarrow v_2(x) = 0$$

$$\vdots$$

Bu şekilde devam edilirse $v_3(x) = v_4(x) = ... = 0$ olduğu görülür [30].

Sonuçta $u(x) = v_0(x) = x$ tam çözümü elde edilir [30].

ii) ADM'nin uygulanması: A_n Adomian polinomları olmak üzere

$(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x))' = 1 - \frac{1}{4}x + \int_0^1 xt(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t))dt$ ve sıfırıncı bileşen $u_0'(x)$, $1 - \frac{1}{4}x$ ile özdeşleştirilerek $n \geq 1$ için kalan $u_n'(x)$ terimleri aşağıdaki bağıntı ile bulunur.

$$u_0'(x) = 1 - \frac{1}{4}x, u_n'(x) = \int_0^1 xt(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t))dt, n \geq 1$$

$$\Rightarrow u_0(x) = x - \frac{1}{8}x^2, u_1(x) = \frac{389}{3840}x^2, u_2(x) = \frac{16727}{921600}x^2, u_3(x) = \frac{179711392057}{9784472371200000}x^2, ...$$

$$u(x) = x + (-\frac{1}{8} + \frac{389}{3840} + \frac{16727}{921600} + \frac{179711392057}{9784472371200000} + ...)x^2$$

kapalı formda yaklaşık çözümü bulunur. ADM ile ikinci ve üçüncü adımlarda bulunan yaklaşık çözümler sırası ile u_2 ve u_3 ile gösterilirse, Çizelge 3.4'te HPM ile elde edilen tam çözüm ve ADM ile elde edilen yaklaşık çözümler arasındaki mutlak hata farkları karşılaştırılmaktadır [30].

Çizelge 3.4: HPM ile ADM'nin karşılaştırılması

x	$\lvert u_{HPM} - u_2 \rvert$	$\lvert u_{HPM} - u_3 \rvert$
0.1	0.000219325	0.000219141
0.2	0.0008773	0.000876566
0.3	0.00197393	0.00197227
0.4	0.0035092	0.00350626
0.5	0.00548313	0.00547854

4. SONUÇLAR

ADM için tekrarlı indirgeme şeması birinci-mertebeden bir adi diferansiyel denklem sisteminin soyut bir Cauchy probleminin çözümlerini hesaplamak için kurulmaktadır. Hata tahminleri türetilmektedir.

Bu tip problemlerin çözümlerini türetmek ADM'nin çok etkili olduğunu gösteren uygulamalar yapılmaktadır. Belli iterasyonlardaki yaklaşımlar arasında çok küçük sayısal farkların olduğu görülmektedir. Buradan hareket ederek iki adi diferansiyel denklem sisteminin herhangi bir adımdaki (iterasyondaki) yaklaşık çözümleri arasında karşılaştırma yapılmaktadır.

Sonuçta bu çalışmada, adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünün çok zaman alması durumunda problemin doğasını anlayıp, temel matematik bilgileri ile seri formdaki yaklaşık çözümler elde edilmiştir. Analizin yardımı bu konuda çok fazladır; çünkü integral hesabı ve analiz, problemlerin yapısını anlamaya yarar.

Bu tez çalışmasında diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerini bulmak için ADM kullanılmıştır. Ayrıca Adomian ayrıştırma metodunun kullanışlılığı hakkında bilgi edinilmiştir ve Cauchy problemlerinin çözümü için alternatif bir yöntem olarak önerilmiştir. Bu bakımdan Adomian ayrıştırma metodu matematiğin günlük hayata uygulanmasında önemlidir. Zira günlük hayatımızdaki sorunları sahip olduğumuz teknik ve teknolojiler ile çözümleme imkanı matematik gibi pozitif bir bilim sayesinde elde edilmiştir. Bu tez çalışması da bu amaca hizmet etmek için yapılmıştır.

5. KAYNAKLAR

[1] ADOMIAN, G., 1990a, A Review of the Decomposition Method and Some Recent Results for Nonlinear Equations, Math. Comp. Modell., 13, 17-43.

[2] ADOMIAN, G. and RACH, R., 1990b, Equality of Partial Solutions in the Decomposition Method for Linear or Nonlinear Partial Differential Equations, Comp. Math. Appl., 19, 9-12.

[3] ADOMIAN, G., 1988, A Review of the Decomposition Method in Applied Mathematics, J. Math. Anal. Appl.,135, 501-544.

[4] KAYA, D., 2000, An Application of the Decomposition Method on Second Order Wave Equations, Intern. J. Computer Math., 75, 235-245.

[5] KAYA, D., 2001a, Explicit Solution of a Generalized Nonlinear Boussinesq Equation, J. Appl. Math., 1, 29-37.

[6] KAYA, D., 2001b, An ExplicitSolution of Coupled Viscous Burgers' Equation by the Decomposition Method, Intern. J. Math. and Math. Sci., 27, 675-680.

[7] KAYA, D. and AASSILA, M., 2002, An Application for a Generalized KdV Equation by Decomposition Method, Phys. Lett. A, 299, 201-206.

[8] WAZWAZ, A.M., 1997, Equality of Partial Solutions In The Decomposition Method for Partial Differential Equations, Int. J. Comput. Math., 65, 293-308.

[9] WAZWAZ, A.M., 1999a, The numerical solution of fifth-order boundary value problems by the decomposition method, Journal of Computational and Applied Mathematics 136 (2001) 259-270.

[10] WAZWAZ, A.M., 2007, A comparison between the variational iteration method and Adomian decomposition method, Journal of Computational and Applied Mathematics, 1 October 2007, Pages 129-136.

[11] BELLOMO, N. and MONACO, R., 1985, A comparison between Adomian's decomposition methods and perturbation techniques for nonlinear random differential equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, September 1985, Pages 495-502.

[12] VAN TONNINGEN S., 1995, Adomian's Decomposition Method: A Powerful Technique for Solving Engineering Equations by Computer, Comp. Education Journal, 5, 30-34.

[13] KAYA, D. and ÇATALBAŞ N., 2000, A Computer Program for the Implementation of Adomian's Decomposition Method, J. Inst. Math. Comp. Sci., 11, 185-194.

[14] CHERRAULT, Y. and ADOMIAN, G., 1993, Decomposition Methods: A New Proof of Convergence, Copyright @1994 Elsevier Science Ltd, August 1993, 12, 103-106.

[15] ABDELRAZEC, AHMED H.M., 2008, Adomian Decomposition Method: Convergence Analysis, Master Thesis, McMaster University Hamilton Ontario, Copyright By Ahmed Abdelrazec, November 2008.

[16] BOUGOFFA ,L. and RACH ,R.C. and EL-MANOUNI, S., 2012, A convergence analysis of the Adomian decomposition method for an abstract Cauchy problem of a system of first-order nonlinear differential equations, Int. J. Comput. Math.,2, 360-375.

[17] WAZWAZ, A.M. and EL-SAYED, S.M., 2001, A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators, App. Math. Comput. 122(3), 393-405.

[18] ABDELRAZEC, AHMED H.M. and PELINOVSKY, D., 2011, Convergence of the Adomian decomposition method for initial-value problems, Numer. Meth. Part. Differ. Equat. 27(4), 749-766.

[19] WAZWAZ, A.M., 1999b, A reliable modification of Adomian decomposition method, App. Math. Comput. 102(1), 77-86.

[20] SOMALI, S. and GOKMEN, G., 2007, ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD FOR NONLINEAR STURM-LIOUVILLE PROBLEMS, Surveys in Mathematics and its Applications 2(2007), 11-20.

[21] MURTAZA NARLI, 2007, YÜKSEK LİSANS TEZİ, ADOMİAN AYRIŞTIRMA METODU İLE KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ,KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ.

[22] KAMEL AL-KHALED and FATHI ALLAN, 2005, DECOMPOSITION METHOD FOR SOLVING NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS, J. Appl. Math. and Computing Vol. 19(2005),No. 1-2,pp. 415-425.

[23] Yahya Qaid Hasan and Liu Ming Zhu, 2008, MODIFIED ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD FOR SINGULAR INITIAL VALUE PROBLEMS IN THE SECOND-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS, Surveys in Mathematics and its Applications, Volume 3(2008), 183-193.

[24] HUTSON V., PYM J. and CLOUD M. J., 2005 , Applications of Functional Analysis and Operator Theory, Volume 200, Second Edition (Mathematics in Science and Engineering).

[25] HIROSHI F., 2001, Operator Theory and Numerical Methods, Amsterdam; London: Elsevier.

[26] MIKLAVCIC M., 1954, Applied Functional Analysis anad Partial Differential Equations, Singapore; World Scientific, c1998.

[27] PHILLIPS G. M. and TAYLOR P. J., 1996, Theory and Applications of Numerical Analysis, London; San Diego: Academic Press, Second Edition.

[28] BRUNDY A. and BRUNDY Y., METRIC SPACES WITH LINEAR EXTENSIONS PRESERVING LIPSCHITZ CONDITION, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF CALGARY, CALGARY, CANADA; DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TECHNION, HAIFA, ISRAEL.

[29] GHOLIDAZEH, L., 2010, A fixed point theorem in generalized ordered metric spaces with application, Department of Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University (IAU), Tehran, Iran.

[30] Jafar Saberi-Nadjafi and Asghar Ghorbani, 2009, He's homotopy perturbation method: An effective tool for solving nonlinear integral and integro-differential equations,Computers and Mathematics with Applications, Elsevier, 58 (2009) 2379-2390.

[31] GRANAS A. and DUGUNDJI J., 2000, FIXED POINT THEORY, Springer-Verlag New York Inc.

[32] A. R. Vahidi and T. Damercheli,2012, A Modified ADM for Solving Systems of Linear Fredholm Integral Equations of the Second Kind, Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, 2012, no. 26, 1267 - 1273.

[33] GRIFFEL D. H., 1981, APPLIED FUNCTIONAL ANALYSIS, Pan American and International Copyright Conventions.

[34] COPSON E. T., 1968, METRIC SPACES, Cambridge University Press.

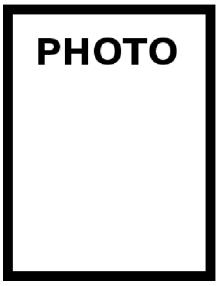
[35] EL-SAYED A.M.A., HASHEM H.H.G. and ZIADA E.A.A., 2010, Picard and Adomian methods for quadratic integral equation, Volume 29, N. 3, pp. 447-463, Copyright 2010.

[36] L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, Functional Analysis in Normed Spaces. (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Volume 46) XIII + 773 S. m. 7 Fig. Oxford/London/Edinburgh/New York/Paris/Frankfurt, Pergamon Press 1964.

[37] DATTA B. K., 1987, A New Approach to the Wave Equation- An Application of the Decomposition Method, Journals of Mathematical Analysis and Applications 142, 6-12.

[38] Xing-Guo Luo and Qing-Biao Wu and Bing-Quang Zhang, 2005, Revisit on partial solutions in the Adomian decomposition method: Solving heat and wave equations, Journals of Mathematical Analysis and Applications 321 (2006), 353-363.

[39] N. Shawagfeh and D. Kaya, 2003, Comparing Numerical Methods for the Solutions of Systems of Ordinary Differential Eqauations, Applied Mathematic Letters, Elsevier, 17 (2004),323-328.



ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Baran Murat Yılmaz

Doğum Yeri ve Tarihi: Akçadağ-17.12.1986

Adres: Ataköy Mah. 3. Sok. Çağ Apt. Kat:2 No:2, Merkez, MALATYA.

E-Posta: baran111222@hotmail.com

Lisans: İnönü Üniversitesi-Matematik

Y. Lisans: Devam ediyor

Mesleki Deneyim ve Ödüller: 26. Ulusal Matematik Sempozyumu, Katılım Belgesi, 4-7 Eylül 2013, Diyarbakır ,TÜRKİYE.