İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ TÜR LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN MONTE CARLO METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yeşim SARAÇER

Anabilim Dalı : MATEMATİK

Programı : MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ

OCAK 2010

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ TÜR LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN MONTE CARLO METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yeşim SARAÇER

(509071011)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 29 Aralık 2009

Tezin Savunulduğu Tarih : 29 Ocak 2010

Tez Danışmanı : Yard. Doç.Dr. Bahri GÜLDOĞAN

Diğer Jüri Üyeleri Doç.Dr. Cevdet CERİT

Doç.Dr. Semih KÜÇÜKARSLAN

OCAK 2010

ÖNSÖZ

Çalışmalarımı yönlendiren, araştırmamın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Yard. Doç. Dr. Bahri GÜLDOĞAN'a teşekkürlerimi sunarım.

Maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme sonsuz teşekkür ederim.

Ocak 2010 Yeşim SARAÇER

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ……iii
İÇİNDEKİLER……...v
SEMBOL LİSTESİ……....vii
ÖZET……ix
SUMMARY……...xi
1. GİRİŞ……1
1.1. Tarih……...1
1.2. Uygulamalar……2
1.2.1. Fiziksel Bilim ……...2
1.2.2. Tasarım ve Görsel Efektler……2
1.2.3. Finans ve Maliye……...3
1.2.4. İletişim……3
1.2.5. Oyunlar……...3
1.2.6. Matematikte Kullanımı……3
1.3. İntegrasyon……...3
1.3.1. Monte Carlo İntegrasyonu……4
1.3.2. Sonlu Boyutlu İntegrallerin Monte Carlo Hesabı……5
2. YAKLAŞIK METOTLAR……..……..9
2.1. Önem Örneklemesi ……....9
2.2. Varyans Azaltmada Beklenen Değerlerin Kullanılması……...12
2.3. Kontrol Değişkeni……..14
2.3.1. Karşıt Değişkenler……16
3. İKİNCİ TÜR LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN MONTE CARLO METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ……..……19
3.1. Sayısal Tahmin……..…..20
3.1.1. 1. Adım……..….20
3.1.2. 2. Adım……..….20
3.1.3. 3. Adım……...20
3.2. İkinci Tür Lineer Volterra İntegral Denklem Sistemi İçin Tahmin……....20
3.2.1. 1. Adım……20
3.2.2. 2. Adım……21
3.3. Örnekler……..……..23
4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA……...43
5. KAYNAKLAR……45
ÖZGEÇMİŞ……47

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{N}$	:	Ortalama hesaplanmasında kullanılan örnek sayısı
$\mathbf{n}$	:	Boyut sayısı
$\mathbf{X_i}$	:	Rastgele değişken
$\mathbf{g(x)}$	:	İntegrali aranılan fonksiyon
$\mathbf{f(x)}$	:	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
$\mathbf{\tilde{f}(x)}$	:	Yardımcı olasılık yoğunluk fonksiyonu
ε	:	Hata
$\mathbf{G_N}$	:	Aritmetik ortalama
$\mathbf{E(X)}$	:	X değişkeninin beklenen değeri
$\mathbf{E(g\|x)}$	:	Koşullu beklenti
$\mathbf{var\{g\}}$	:	g fonksiyonunun varyansı
$\mathbf{p_i}$	:	Ayrık olasılık dağılım fonksiyonu
σ	:	Standart sapma
σ^2	:	Varyans
$\mathbf{T_c}$	:	Hesaplama için gerekli süre
$\mathbf{w_i}$	:	Tümlev ağırlık dizisi
$\mathbf{N_0}$	:	Sabit
$\mathbf{m}$	:	Marjinal dağılım
λ	:	Largange çarpanı
$\mathbf{h}$	:	Adım uzunluğu

İKİNCİ TÜR LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN MONTE CARLO METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

ÖZET

Son yıllarda birçok karmaşık problemin çözümünde Monte Carlo yönteminin adı geçmektedir. Fizik, tasarım, iletişim, maliye, finans, oyun ve matematik gibi çok değişik alanlarda Monte Carlo yöntemi kullanılmaktadır. Bu yöntemin kullanımı yirminci yüzyıldan önceye dayanmaktadır. Buffon'un iğne deneyi ve William Gosset'in korelasyon örnekleme dağılımları Monte Carlo için bir başlangıçtır. Ama asıl bu yöntem N. Metropolis ve S. Ulam'ın nötronların davranışını incelemeleri sonucu ortaya çıkmıştır. "Monte Carlo" ismini Monako'nun kumarhaneleriyle ünlü Monte Carlo şehrindeki rulet oyunlarından almaktadır. Rulet oyunu, değişik renkler ve sayılar bulunan bir disktir. Disk bir yönde hızla döndürülürken, küçük bir metal top aksi yönde disk üzerinde döndürülür. Bir süre sonra top bir renk ve sayıda durur. Matematiksel olarak rulet diski, rastgele sayı üretecidir.

Monte Carlo yönteminin üç temel yaklaşımı mevcuttur. Bu metotlar önem örneklemesi, varyans azaltmada beklenen değerlerin kullanılması ve kontrol değişkeni yöntemleridir. Önem örneklemesi yönteminde seçilecek olan yardımcı olasılık yoğunluk fonksiyonu varyansı belirler. Ne kadar iyi bir olasılık yoğunluk fonksiyonu seçersek o kadar varyans azalacaktır. Varyans azaltmada beklenen değerlerin kullanılması metodunda çok boyutlu vektörler ele alınır. Bu metotta marjinal dağılım kullanımı ile varyans en aza indirgenebilir. Kontrol değişkeni yöntemi ise, örneklemede, bağdaştırılan noktaların kullanımını bütün noktalara tercih ederek varyansı azaltmayı sağlar. Ayrıca bu yöntemin önem örneklemesi yöntemine göre avantajları ve dezavantajları mevcuttur. Kontrol değişkeni yöntemine bağlı olan karşıt değişkenler yönteminde ise rastgele değişkenler negatif şekilde ilişkili olduğu zaman meydana gelen varyans azaltılır. Çalışmada bu yöntemlere ayrı ayrı değinilmiş ve örnekler çözülmüştür.

Bu çalışmadaki asıl amaç ikinci tür lineer Volterra integral denklem sistemlerinin nümerik çözümlerini Monte Carlo yöntemiyle bulmaktır. Eğer çözümler birkaç değişkene bağlıysa veya başka integral denklemler ile birleştirilmiş ise bu tür denklemlerin çözümünü bulmak genelde uğraştırıcı ve güçtür. Ancak oluşturulan iterasyon tekniği ile integralin verildiği aralıkta belirli bir h adım uzunluğu ile üretilen sayılar yardımıyla bu integralleri yaklaşık olarak çözmek mümkündür. Öncelikle fonksiyonun tahminini bulmayı istediğimiz aralıktaki bir değer ile iterasyona başlanır. Fonksiyon sabit kabul edilir. Böylelikle integralin dışına alınır ve $AX = B$ seklinde bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistemi çözerek aralıkta aldığımız ilk değer için ikinci tür lineer Volterra denklem sisteminin çözümüne ulaşılır. İkinci iterasyonda, aralıkta aldığımız değeri seçilen bir h adım uzunluğu kadar artırarak ya da azaltarak verilen aralıkta ikinci bir değer elde edilir. Bu adımda fonksiyon basamak fonksiyonu olarak kabul edilir. Fonksiyon için bilinmeyen değeri integralin dışına çıkartır birinci adımda bulunan sonuçlar kullanılarak yeni bir $AX = B$ denklem sistemi elde edilir. Sistemi çözerek yeni bir çözüme ulaşılır. Tekrar birinci adıma dönerek iterasyon istediğimiz kadar devam eder. Yapılan örneklerle yöntem ayrıntılı olarak incelenmiştir. Yönteme,

Monte Carlo yöntemi denmesinin sebebi fonksiyonların tanımlı olduğu aralıkta sayılar seçilmesidir.

NUMERICAL SOLUTION OF THE SYSTEM OF LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND USING MONTE-CARLO METHOD

SUMMARY

In recent years, the name of Monte Carlo method is mentioned in the solution of many complex problems. Monte Carlo method is used in various fields such as physical science, design, finance, telecommunications, game and mathematics. The use of this method is based on before the twentieth century. Buffon' needle problem and Gosset's sampling distribution of correlation are a beginning for Monte Carlo. But, actually this method is emerged as a result of exploring the action of the neutron by N. Metropolis and S. Ulam. Monte Carlo is named as Monaco's famous Monte Carlo casino in the roulette games. Roulette game is a disk which has different colors and numbers. As the disk rotated in one direction rapidly, a small metal ball is rotated in the opposite direction on the disk. After a while, the ball stops in a color and number. Mathematically the roulette disk is a random number generator.

Three major classes of technique are used to reduce the variance in Monte Carlo. These methods are importance sampling, the use of expected values to reduce variance and control variate. In the method of importance sampling, the variance determines to selected probability distribution function. However we select a good probability distribution function, the variance will reduce. The method of the use of expected values to reduce variance is discussed in the many-dimensional vectors. This method reduces to variance with the use of marginal distribution. It serves to reduce the variance by the use of correlated points in sampling rather than sampling all points.In addition, this method has the advantages and disadvantages according to the importance sampling methods. In this study, these methods are addressed separately, and examples have been solved. The method of antithetic variates exploits the decrease that in variance that occurs when random variables negatively correlated. In this study, these methods are addressed separately, and examples have been solved.

The base goal of this study is numerical solution of the system of linear Volterra integral equations of the second kind using Monte Carlo method. In general, it is very difficult to find a useful solution of this type integral equation if the solution depends on several variables or if the equation is coupled with other integral equations. However, it is possible to solve this integral approximately with generated iteration technique. Primarily, we start iteration with any value in the interval where we want to find the approximation of the function. We assume that the function is a constant then it can be put outside the integral. Thus $AX = B$ is obtained in the form of an equation system. By solving this system it is reached the second type of solution of linear Volterra equations is reached for the first value in the range. In the second iteration, secondary value is obtained in which increased or reduced in the range about the h step length. So that, the second value is obtained. In this iteration, the functions are assumed a stepwise function. We obtain a new system by using the finding solution

of the first step. A new solution is reached by solving this system. The first step is back again. Iteration continues as far as we want. The method is examined in detail with examples. This method is called Monte Carlo method because of the selecting numbers in the range where the functions are defined.

1. GİRİŞ

1.1 Tarih

Geniş uygulama alanı bulmuş olan Monte Carlo yöntemleri rassal sayıların kullanımına dayanmaktadır. Bu yöntemlerin kullanımı, yirminci yüzyıldan önce de mevcuttu. 1777 yılında, Georges Louis Leclerc Comte de Buffon, art arda π'ye yaklaşım için bir metot buldu. Paralel çizgilerden oluşan bir ağ üzerine iğne fırlattı ve hangi sıklıkla iğnenin çizgiyi kestiğini izledi. Yirminci yüzyılda, William Gosset, korelasyon katsayısının örnekleme dağılımlarını ve t istatistiğini belirlemek için rassal sayılar ile simülasyonları kullandı. Matematik bir dalı olan Monte Carlo yöntemleri ciddi olarak 1940'larda New Mexico Los Alamos Laboratuvarındaki bir grup bilim adamı arasında başladı. Nicholas C.Metropolis 1915 yılında Chicago'da doğdu. Deneysel fizik doktorasını almak için Chicago üniversitesinde bulundu. Enrico Fermi ve Edward Teller ile birlikte nükleer reaktörleri araştırdı. Bu dikkate değer bilim adamlarının yaptığı çalışma sayesinde, Manhattan Projesi başkanı J. Robert Oppenheimer, Amerika Birleşik Devletleri hükümetinin planının ilk atom bombası icat etmek olduğunu fark etti. 1943 İkinci Dünya Savaşı sırasında, Oppenheimer, fiziksel malzemelerin durumunu açıklayan matematiksel denklemler geliştirmek için Metropolis'i Los Alamos'da işe aldı. Metropolis ve meslektaşları Richard Feynman ve John von Neumann rahatsız edici şekilde yavaş elektromekanik hesap makinelerini kullanıyorlardı. Sonraları hızlı elektronik hesap makineleri ile ilgilenmeye başladılar.

Savaştan sonra, Metropolis Chicago Üniversitesi'ne gitti ama 1948 yılında, Los Alamos'da Amerika'nın en iyi bilim adamları tarafından geliştirilen devlet destekli araştırmalar var olduğu için buraya geri döndü. Metropolis, MANIAC olarak adlandırdığı ilk süper programlanabilir bilgisayarın tasarımına öncülük etti.

Metropolis bilim adamları tarafından tercih edilen bir kısaltma olarak bu ismi seçti.

Monte Carlo yöntemlerinin ve Monte Carlo uygulamaların geliştirilmesinin sürdürülmesi, işlemlerin hızlı yapılması ile mümkündür. Atom bombası içindeki bölünebilir malzemede nötronun rastgele davranışı motive edici bir örnek oldu. Los Alamos'da önde gelen iki matematikçi Stanislaw Ulam ve John von Neumann, simülasyon yoluyla hesaplamaları gerçekleştirme fikrini öne sürdüler ve Metropolis akılda kolay kalan "Monte Carlo" ismini buldu. Bu isim Ulam'ın amcasının kumar oynadığı Monaco'daki Monte Carlo Kumarhanesi'nden gelmektedir. Metropolis ve Ulam , "Monte Carlo Yöntemi" (1949) adlı makalede kendi fikirlerini tanıttılar

1.2 Uygulamalar

Monte Carlo simülasyon metotları, serbestlik derecesine bağlı büyük bir sayıyla çalışan sistemlerde ve girdilerde modelleme için yararlıdır. Uygulamanın özel alanlarının kapsamı:

1.2.1 Fiziksel Bilim

Monte Carlo metotları sayısal fizikte, fiziksel kimyada ve başvurulan ilgili alanlarda çok önemlidir ve karışık kuantum karma dinamik hesaplamalarından aerodinamik biçimleri ve sıcak kalkanları tasarlayan çeşitli uygulamalara sahiptirler. Monte Carlo metodu istatistiksel fizikte ve özellikle sayısal moleküler dinamik için bir alternatif olarak moleküler örneklemede kullanılır. Deneysel madde fiziğinde, bu metotlar detektörleri tasarlamak, onların davranışlarını anlamak ve deneysel veriyi teori ile kıyaslamak için kullanılır.

Ayrıca, Monte Carlo metotları modern hava tahmini çalışmalarının temelini oluşturan bütün örneklerde kullanılır.

1.2.2 Tasarım ve Görsel Efektler

Monte Carlo metotları enerji taşımacılığı ve radyasyon alanlarının integro diferansiyel denklemleriyle çözümünde verimi kanıtlanmıştır ve bu nedenle bu

metotlar video oyunlarında, mimaride, tasarımda ve filmlere sinemada özel efektler oluşturan bilgisayarlar ile üretilen küresel ışıklandırma hesaplamalarında kullanılır.

1.2.3 Finans ve Maliye

Monte Carlo metotları finans alanında çoğunlukla şirketlerin değerini hesaplamak, kurumsal düzeyde projelerde yatırımları değerlendirmek veya mali türevleri değerlendirmek için kullanılır. Monte Carlo yöntemi geleneksel statik ve deterministik modellerin aksine stokastik veya olasılıksal finansal modeller oluşturmak isteyen mali analistler için tasarlanmıştır.

1.2.4 İletişim

Bir kablosuz ağ planlama, başta kullanıcıların sayısına, konumuna ve onların hizmetlerden ne istediğine bağlı olan çok çeşitli tasarılar için çalışması kanıtlanmış olmalıdır. Monte Carlo yöntemleri genellikle bu kullanıcılar ve onların durumlarını oluşturmak için kullanılır. Ağ tasarımı o zaman değerlendirilir ve eğer sonuçlar tatmin edici değilse ağ tasarımı bir optimizasyon sürecini araştırır.

1.2.5 Oyunlar

Monte Carlo yöntemleri son zamanlarda yapay zeka kuramında kullanıldı. Özellikle Go oyununda bilgisayar oyuncularını temel alan Monte Carlo algoritması son derece başarılıdır. Bu yaklaşımın oyun oynanırken sahip olduğu ana problemlerden biri, onun bazen çok iyi hareket eden bir izoleyi farkına varamamasıdır.

1.2.6 Matematikte Kullanımı

Genelde Monte Carlo metotları matematikte çeşitli problemleri, uygun rastgele sayılar üreterek çözmek için kullanılır. Metot analitik olarak çözümü çok zor ve karmaşık olan problemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için kullanışlıdır.

Monte Carlo metodunun en yaygın uygulaması, Monte Carlo integrasyonudur.

1.3 İntegrasyon

Sayısal integrasyondaki deterministik metotlar, bir fonksiyona ait düzenli bir şekilde bulunanan örnekleri alarak hesaplamaya dayanmaktadır. Genellikle bu metotlar tek değişkenli foksiyonlar için çok iyi çalışır. Bununla birlikte, vektörler fonksiyonları için deterministik kuadratik metotlar çok verimsiz olabilir. İki boyutlu bir vektörün bir fonksiyonunu sayısal olarak integre edebilmek için, iki boyutlu bir alanın üzerinde eşit bir biçimde yer alan ağ noktaları gereklidir. örneğin, 10x10'luk ağ, 100 nokta gerektirir. Eğer vektör 100 boyutlu ise ağ üzerinde aynı uzay 10^{100} nokta gerektirir ki bu da hesaplamak için çok fazladır. 100 boyut mantıksal değildir.

Monte Carlo metotları, bu üstel zaman artışının çıkış yolunu verir. Soruda fonksiyon uygun bir şekilde hareket ettiği sürece 100 boyutlu uzayda rastgele seçilen noktalar değerlendirilebilir ve bu noktalarda fonksiyonun değerlerinin bazı tip ortalamaları alınabilir. Büyük sayılar yasası ile bu metot $\frac{1}{\sqrt{N}}$ 'e yakınsamayı gösterecektir.

Bu metodun gelişmesini bir şekilde rastgele noktalar yapmaktadır. Fakat yüksek katılımlı bölgelerde integrale ulaşması düşük katılımlılara göre daha muhtemeldir. Diğer bir deyişle, noktalar integralin biçimine benzer bir dağılım ile yapılmalıdır. Anlaşılır şekilde tam olarak bunu yapmak ilk bölgede integrali çözmek kadar zordur. Ama burada yaklaşık metotlar mevcuttur.

1.3.1 Monte Carlo İntegrasyonu

Eğer $X_1, X_2, \ldots, X_n$, rastgele değişkenler $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ise $g(x)$ fonksiyonunun estimatörü

$$G_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i), \tag{1.1}$$

$$< G_N >= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \tag{1.2}$$

ve

$$var\{G_N\} = \frac{1}{N} var\{g\} \tag{1.3}$$

dir.

$N \to \infty$ iken varyans mevcut ise, G_N olasılık değerlerinin dağılımı, $N^{-\frac{1}{2}}$ olarak ortalamayı sınırlar ya da $< G_N >$ 'den sabit uzaklıkta bir G_N bulmanın olasılığı daha küçük olur. Rastgele değişkenlerin sürekli dağılım fonksiyonundan çekildiği ve bir integrali tahmin etmek için kullanıldığı farz edilmektedir. Benzer prosedürler, Monte Carlo tarafından toplamları yapmak için kullanılır. Çok indisle ilgilenilen kesikli durumlarda Monte Carlo metotlarını kullanmak avantajlıdır. p_i kesikli olasılık dağılımı olmak üzere, $\sum_i p_i g(X_i)$ toplamını alalım. Eğer $X_1, X_2, \ldots, X_M$ rastgele değişkenleri p_i'den çekilen örnekler ise

$$G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} g(X_i) \tag{1.4}$$

G'nin beklenen değeri

$$< G >= \sum p_i g(X_i) \tag{1.5}$$

toplamı için bir estimatördür.

1.3.2 Sonlu Boyutlu İntegrallerin Monte Carlo Hesabı

$$f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{1.6}$$

olmak üzere

$$G = \int g(x) f(x) dx \tag{1.7}$$

integralini alalım. Bu integral hesabı, şans oyunu sayısal tahminleri yapmak için kullanılabilir. $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonundan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ değişkenleri kümesini alalım ve aşağıdaki aritmetik ortalamayı oluşturalım:

$$G_N = \frac{1}{N}\sum_i g(X_i) \tag{1.8}$$

G_N, G için bir estimatördür ve Monte Carlo teoremine göre eğer (1.7) integrali mevcut ise,

$$< G_N >= G \tag{1.9}$$

eşitliğini verir. G_N, G'i hesaplayınca,

$$G_N = G + hata \tag{1.10}$$

yazılabilir.

Eğer varyans varsa, son ifadedeki hata,

$$\sigma_1^2 = \int g^2(x) f(x) dx - G^2 \tag{1.11}$$

olmak üzere, ortalaması 0 olan ve büyük bir N için genişliği tanımlanan bir rastgele değişkendir:

$$|hata| = \varepsilon \cong \frac{\sigma_1}{N^{\frac{1}{2}}} \tag{1.12}$$

Hata tahmini ters çevrilebilir. Yani

$$N \cong \frac{\sigma_1^2}{\varepsilon^2} \tag{1.13}$$

(1.7) denklemindeki integral sayısal integrasyon ile hesaplanabilir. İntegralin tanım bölgesinin n-boyutlu birim hiperküp olduğunu kabul edelim. Birim hiperküpü dolduran şebekelerin bir noktası X_i ve w_i kuadratür ağırlıklarının bir serisi olmak üzere, sayısal integrasyon,

$$G \cong \sum w_i g(X_i) f(X_i) \tag{1.14}$$

dir. h, X_i'i ayıran aralığın boyutunu ölçmek üzere hata

$$\varepsilon \leq ch^k \tag{1.15}$$

ile sınırlanır. c ve k sabitleri kullanılan sayısal integrasyon metotlarına bağlıdır ve k normal olarak, daha doğru kurallarla artar. (1.15) denklemindeki hatanın sınırı, istatiksel değişken değildir. Fakat bir mutlak sayıdır.

Bir hesaplama için gerekli süreyi T_c olarak kabul edersek, T_c kullanılan noktaların toplam sayısıyla orantılı olur. O zaman N_0 birinci dereceden sabit ve n boyut sayısı olmak üzere

$$T_c \propto N = N_0 (\frac{1}{h})^n \tag{1.16}$$

dir. (1.15) denkleminden

$$h \geq (\frac{\varepsilon}{c})^{\frac{1}{k}} \tag{1.17}$$

yazılır ve böylece (1.16) denklemi

$$T_c \propto N_0 (\frac{c}{\varepsilon})^{\frac{n}{k}} = t_0 \varepsilon^{-\frac{n}{k}} \tag{1.18}$$

olur.

Hesaplamada ne kadar büyük doğruluk isteniyorsa, o kadar büyük hesaplama zamanı olmalıdır.

Monte Carlo hesabında, toplam hesaplama zamanı, tek bir örnekleme noktalarının toplam sayısı için zaman t_2 ürünüdür;

$$T_c = t_1 N \tag{1.19}$$

(1.13) denkleminden,

$$T_c = \frac{t_1 \sigma_1^2}{\varepsilon^2} = \frac{t_1^{'}}{\varepsilon^2} \tag{1.20}$$

yazılabilir. ε'nun üssü ile boyut aynı sayıdır. Büyük n için, $\frac{n}{k} < 2$ olacak şekilde (1.15) ve (1.18) denklemlerindeki k 'yı bulmak zordur. Böylece asimptotik olarak $n \longrightarrow \infty$ iken bir Monte Carlo hesabı (1.7) 'deki sayısal integrasyondan daha avantajlıdır. Monte Carlo hesabı, aynı ε değeri için daha az zaman alır. Bu iki hata tahmini karşılaştırılabilir.

Bir integralin iki farklı Monte Carlo hesabı farklı varyanslara sahip olabilir.

$$Q_1 = t_1 \sigma_1^2 \tag{1.21}$$

bir Monte Carlo hesabının verimli bir ölçümüdür. Q_1 değerlerini temel alan bir hesaplamada kullanılan Monte Carlo algoritması, herhangi bir deneme hesabından çıkardı. Ortak bir olay, σ daha ayrıntılı Monte Carlo algoritması boyunca azalırken t için artar. O zaman, konu, σ^2'deki azalmanın zamandaki artış için daha dengeli olup olmadığıdır. Eğer Q azalırsa bu gerçekleşir.

2. YAKLAŞIK METOTLAR

2.1 Önem Örneklemesi(Importance Sampling)

$$f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{2.1}$$

olmak üzere n-boyutlu

$$G = \int g(x)f(x)dx \tag{2.2}$$

integralini alalım ve hesaplayalım. $f(x)$ integralde bulunmasına rağmen, Monte Carlo hesabında kullanılan en iyi olasılık yoğunluk fonksiyonu olması gerekmez. Bu yöntemi uygulamak için, integrali alınabilen ya daha önceden belirlenmiş uygun bir olasılık yoğunluk fonksiyonu ya da fonksiyonumuza yakın bir fonksiyon ele alınarak işlem yapılır.

Aşağıdaki gibi bir olasılık yoğunluk fonksiyonu alalım:

$$\tilde{f}(x) \geq 0, \int \tilde{f}(x)dx = 1 \tag{2.3}$$

Ayrıca sayılabilen noktaların dışında $\frac{g(x)f(x)}{\tilde{f}(x)} < \infty$ dir. $\tilde{f}(x)$ kullanıldığında G'nin varyansı

$$var\{G\}_{\tilde{f}} = \int [\frac{g^2(x)f^2(x)}{\tilde{f}^2(x)}]\tilde{f}(x)dx - G^2 \tag{2.4}$$

Biz $\int \frac{g^2(x)f^2(x)}{\tilde{f}(x)}dx$ niceliğini en aza indiren $\tilde{f}(x)$ 'i istiyoruz. İntegral, $\tilde{f}(x)$'i istediğimiz kadar büyük seçerek en aza indirilir. Yukarıda verilen kriterlere uyan $\tilde{f}(x)$ fonksiyonu λ Lagrange çarpanını kullanarak çıkarılabilir. Bu metotta

$$L\{\tilde{f}\} = [\int \frac{g^2(x)f^2(x)}{\tilde{f}(x)}dx + \lambda \int \tilde{f}(x)dx] \tag{2.5}$$

mimimum olur. Parantezlerde nicelikte $\tilde{f}(x)$ 'in küçük varyanslarının olduğunu düşünürüz ve parantezlerde niceliğin varyansını 0'a eşitleriz.

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{f}}[\int \frac{g^2(x)f^2(x)}{\tilde{f}(x)}dx + \lambda \int \tilde{f}(x)dx] = 0 \tag{2.6}$$

Buradan

$$-\frac{g^2(x)f^2(x)}{\tilde{f}^2(x)} + \lambda = 0 \tag{2.7}$$

ya da

$$\tilde{f} = \lambda |g(x)f(x)| \tag{2.8}$$

$\int \tilde{f}(x)dx = 1$ olduğunda λ'nın değerini bulabiliriz. Eğer $g(x) \geq 0$ ise o zaman $\tilde{f}(x) = \lambda g(x)f(x)$ ve $\lambda = \frac{1}{G}$. Böylece

$$\tilde{f}(x) = \frac{g(x)f(x)}{G} \tag{2.9}$$

Olasılık yoğunlık fonksiyonu $\tilde{f}(x)$ bu şekilde seçildiği takdirde, formüldeki $\frac{f(x)g(x)}{\tilde{f}(x)}$ oranın varyansı 0'a azalacaktır.

İntegrali hesaplayan bir Monte Carlo algortması $\tilde{f}(x)$ 'den X_i'nin bir dizisini örneklemek için olur ve toplam

$$\tilde{G}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{g(X_i)f(X_i)}{\tilde{f}(X_i)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \frac{g(X_i)f(X_i)}{\frac{g(X_i)f(X_i)}{G}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G = G \tag{2.10}$$

Eğer biz doğru cevabı G olarak biliyorsak Monte Carlo hesabı, kesinlikle, sıfır varyansı ile onu geri verecektir. Bu açıkça, minimum varyans hesabına uyar.

Örnek olarak aşağıdaki integrali alalım:

$$G = \int_0^1 cos(\frac{\pi x}{2})dx \tag{2.11}$$

Monte Carlo algoritması, $(0,1)$ aralığında düzgün bir şekilde X_i'i örneklemek ve

$$g_1(x) = cos(\frac{\pi x}{2}) \tag{2.12}$$

niceliğini toplamak için kullanılır.

Tek bir x örneği için popülasyonun varyansı analitik olarak

$$\sigma_1^2 = \int g_1^2(x) f(x) dx - G^2 \tag{2.13}$$

ile hesaplanır ve

$$var\{g_1\} = 0,0947\ldots \tag{2.14}$$

Bir kuvvet serisinde $cos(\frac{\pi x}{2})$'i genişletilerek, önem fonksiyonu için daha iyi bir seçim bulabiliriz

$$cos(\frac{\pi x}{2}) = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{8} + \frac{\pi^4 x^4}{2^4 4!} - \ldots \tag{2.15}$$

bulabiliriz. Önem fonksiyonu $\tilde{f}(x) = \frac{1-\beta x^2}{1-\frac{1}{3}\beta}$ şeklinde olabilir. β'yı minimum varyans verecek şekilde seçeriz.$\beta = 1$ alırsak,

$$\widetilde{f}(x) = \frac{3}{2}(1-x^2) \tag{2.16}$$

Bu olasılık yoğunluk fonksiyonu x'in küçük değerleri için integrand gibi görünür. G için hesaplayıcı

$$\widetilde{g} = \frac{g_1}{\widetilde{f}} = \frac{2}{3}\frac{cos\frac{\pi x}{2}}{1-x^2} \tag{2.17}$$

olur ve tek bir örnek ile birleştirilen varyans

$$var\{\tilde{g}\} = 0.000990 \tag{2.18}$$

olur.

Önem fonksiyonunun bu seçimi ile varyans 100 kat azaldı.

2.2 Varyans Azaltmada Beklenen Değerlerin Kullanılması

x ve y çok boyutlu vektörler olmak üzere (y genelde bir boyutludur)

$$G = \int g(x,y)f(x,y)dxdy \tag{2.19}$$

integralini hesaplayalım.

x için marjinal dağılımlı fonksiyonu

$$m(x) = \int f(x,y)dy \tag{2.20}$$

dır ve

$$h(x) = \frac{1}{m(x)}\int g(x,y)f(x,y)dy \tag{2.21}$$

olarak $h(x)$ fonksiyonunu tanımlayalım.

Farz edelim ki, $m(x)$ ve $h(x)$ integralleri Monte Carlo'dan başka yollar ile hesaplanabilirsin. (2.19) integrali

$$G = \int m(x)h(x)dx \tag{2.22}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, integrasyonun derecesini önemsemeyelim. (2.19) ve (2.22) denklemlerinin varyanslarının farkı

$$\begin{aligned} var\{g\} - var\{h\} &= E(g^2) - E((E(g|x))^2) \\ &= E(E(g^2|x)) - E((E(g|x))^2) \\ &= E(E(g^2|x) - (E(g|x))^2) \\ &= E(var\{g|x\}) \geq 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

ve böylece genellersek

$$var\{g(x,y)\} - var\{h(x)\} \geq 0 \tag{2.24}$$

Diğer bir deyişle, bir Monte Carlo hesabının varyansı, (2.21) denkleminde olduğu gibi integrasyonun parçasını analitik yaparak azaltılabilir.

Örnek olarak aşağıdaki integrali alalım:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \int_0^1 g(x,y)dxdy. \tag{2.25}$$

Burada

$$g(x,y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \tag{2.26}$$

Eğer x ve y düzgün olarak birim çember içinde seçilirse, Monte Carlo estimatörü ile ilişkilendirilen varyans:

$$var\{g\} = \frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{4})^2 = 0.168 \tag{2.27}$$

Aslında, x için marjinal dağılımı hesaplayabiliriz:

$$m(x) = \int_0^1 dy = 1 \tag{2.28}$$

ve

$$h(x) = \frac{1}{m(x)} \int g(x,y) f(x,y) dy = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy = \sqrt{1-x^2} \tag{2.29}$$

denklemi ile $h(x)$'i tanımlayabiliriz. O halde integral

$$G = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \tag{2.30}$$

şeklinde yazılabilir.

Monte Carlo algoritması, $(0,1)$ aralığında düzgün olarak x'i örnekleyebilir. Varyans

$$var\{h\} = \int_0^1 (1-x^2) dx - (\frac{\pi}{4})^2 = 0.050 \tag{2.31}$$

ile ilişkilendirilir. Bu önceki değere göre bir azalmadır. Yine de, eğer ikinci metot hesaplamak için daha uzunsa, varyansdaki bu gelişme kaybolacaktır (burada zaman kare kökün hesabı için). Sabit hata için hesaplama zamanı $\sqrt{1-x^2}$'in örneklemesini geliştirerek önem örneklemesi yöntemi ile azaltılabilir. Hesaplama, beklenen değerlerin ve önem örneklemenin bir kombinasyonudur. Monte Carlo hesaplanmasında rastgele değişkenin beklenen değerini kullanmak, analitik olarak $m(x)$'i hesaplamak için mümkün olmalıdır.

2.3 Kontrol Değişkeni

Kontrol değişkeni yöntemi, örneklemede, bağdaştırılan noktaların kullanımını bütün noktalara tercih ederek varyansı azaltmayı sağlar. Aşağıdaki integralin değerini bulmak isteyelim:

$$G = \int g(x) f(x) dx \tag{2.32}$$

$\int h(x)f(x)dx$ analitik olarak bilinen bir integral olacak şekilde

$$G = \int (g(x) - h(x))f(x)dx + \int h(x)f(x)dx \tag{2.33}$$

yazabilriz. G için hesaplayıcı aşağıdaki gibidir.

$$G \cong \int h(x)f(x)dx + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[g(x_i) - h(x_i)] \tag{2.34}$$

Bu teknik

$$var\{(g(x) - h(x))\}_f \ll var\{g(x)\}_f \tag{2.35}$$

sağlandığında avantajlıdır ve bu $h(x)$ fonksiyonu $g(x)$'a çok benzediğinde meydana gelir. Eğer $\int g(x)f(x)dx$ bilinen bir integralse, o zaman bu metot yararlı olabilir. Özellikle eğer $|g(x) - h(x)|$, $h(x)$'nun farklı değerleri için yaklaşık olarak sabitse, kontrol değişkeni yöntemi önem örneklemesi yönteminden daha etkili olabilir. Tersine, $|g(x) - h(x)|$, yaklaşık olarak $h(x)$ ile orantlı ise o zaman önem örneklemesi daha uygun bir metot olur.

Aşağıdaki integrali alalım:

$$\int_0^1 e^x dx \tag{2.36}$$

Monte Carlo hesaplaması ile varyans 0.242 olarak verilsin. $h(x)$ fonksiyonunu , e^x'in Taylor açılımında olası ilk iki terimden türetelim.

$$\int_0^1 e^x dx = \int_0^1 (e^x - (1+x))dx + \frac{3}{2} \tag{2.37}$$

Burada $\int_0^1 (1+x)dx = \frac{3}{2}$ dir.

Rastgele x değişkeni, $(0,1)$ aralığında düzenli olarak seçilebilir ve varyans

$$var\{e^x - (1+x)\} = 0.0437 \tag{2.38}$$

Bu, yukarıda anlatılan varyansdan var olan bir azaltmadır. Bununla birlikte $\frac{2}{3}(1+x)$' u önem fonksiyonu olarak kullanarak varyans 0,0269 'a azaltılabilir.

2.3.1 Karşıt Değişkenler

Bu metot, rastgele değişkenler negatif şekilde ilişkili olduğu zaman meydana gelen varyansı azaltmayı sağlar. Değişkenler negatif şekilde ilişkilendirildiğinde, eğer ilk nokta, ortalamaya kıyasla daha büyük bir integrandın değerini verirse, sonraki nokta, ortalamaya göre daha küçük olan bir değeri verebilir ve bu iki değerin ortalaması asıl ortalamaya daha yakın olacaktır. Bu teoride, metot umut vericidir ama pratikte çok boyutta genel bir varyans azaltma metodu olarak çok önemli değildir.

$g(x)$ lineer olmak üzere aşağıdaki integrali düşünelim:

$$G = \int_0^1 g(x)dx \tag{2.39}$$

Bu G integrali

$$G = \int_0^1 \frac{1}{2}[g(x) + g(1-x)]dx \tag{2.40}$$

şeklinde de yazılabilir.

Bu denklemi kullanarak, G integrali Monte Carlo ile hesaplanabilir. $(0,1)$ aralığında bir x alalım. $g(x)$ ve $g(1-x)$ değerleri belirlenebilir ve G için bir estimatör oluşturulur:

$$G_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}[g(x_i) + g(1-x_i)] \tag{2.41}$$

Bu denklem, lineer g için sıfır varyans ile G'i tam olarak verecektir.

$G = \int_0^1 e^{-x} dx$ integralini alalım. Monte Carlo hesaplaması ile varyans 0.242'dir. Eğer x_i 'i $(0,1)$ aralığında düzgün ve rastgele olarak seçer ve

$$G_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} [g(x_i) + g(1 - x_i)] \tag{2.42}$$

denkleminde estimatör oluşturursak, bu hesap ile birlikte varyans 0.0039'dur. Bu da varyansı azatmada çarpıcı bir sonuçtur.

3. İKİNCİ TÜR LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN MONTE CARLO METODUYLA SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

Eğer çözümler birkaç değişkene bağlıysa ya da denklem diğer integral denklemler ile birleştirilmiş ise ikinci tür lineer integral denkleminin çözümünü bulmak genelde zordur. İyi bilinen çözüm metotları, çoğunlukla verimsizdir. Çünkü içerilen hesaplamanın miktarı, en son makineler için bile çok büyüktür. Birçok durumda çözümün pratik amaçlar için yeterli doğrulukta olduğunu bulmak için, istatistiksel Monte Carlo metodu kullanılabilir.

Çalışmamızdaki asıl amaç ikinci tür lineer Volterra integral denklemini çözmek.

Aşağıdaki lineer Volterra integral denklem sistemini alalım:

$$U(x) = F(x) + \int_a^x K(x,t)U(t)dt \tag{3.1}$$

Burada,

$$U(x) = (u_1(x), \ldots, u_m(x))^T \tag{3.2}$$

$$F(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^T \tag{3.3}$$

$$K(x,t) = [k_{ij}(x,t)], i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,m \tag{3.4}$$

ve $F(x)$ ile $K(x,t)$ bilinen, $U(x)$ ise bulunacak olan foksiyonlardır.

(3.1) denkleminin $x \in [a,b]$ için i. eşitliğini alalım:

$$u_i(x) = f_i(x) + \int_a^x \sum_{j=1}^{m} k_{ij}(x,t)u_j(t)dt, i = 1,2,\ldots,m \tag{3.5}$$

3.1 Sayısal Tahmin

Bizim ileri sürdüğümüz metot, integrand bilindiği zaman integralleri tahmin etmek için Monte Carlo metodunun bir benzer içeriğini temel alır. Metot, bilinmeyen bir fonksiyon için sınırlı bir aralıkta bir yaklaşımın olduğu iterasyon tekniği gibi geliştirilir. Her bir adımda, aralık için yeni bir bölüme sahip oluruz. Böyle bölümler aralıktaki rastgele sayıların üretiminden gelir.

Metodu aşağıdaki gibi özetleyelim:

3.1.1 1. Adım

Fonksiyonun tahminini bulmayı istediğimiz aralıktaki bir değer ile başlarız.

3.1.2 2. Adım

Fonksiyonu bir sabit olarak farz edelim. O zaman integralin dışına koyabiliriz. Böylece bir lineer denklem sistemi çözeriz.

3.1.3 3. Adım

Tahmini bulmak istediğimiz aralıkta h adım uzunluğunu kullanarak ikinci bir sayı üretiriz. Çözümü bir basamak fonksiyonu olarak kabul ederiz. 2. adımdaki lineer denklem sisteminin çözümünü bir alt aralık civarındaki fonksiyonun değeri olarak alırız. Diğer aralık civarındaki fonksiyon için yeni bir bilinmeyen değer alır, tekrar, fonksiyon için bilinmeyen değeri integralin dışına çıkartırız. Yeni lineer denklem sistemini bu yeni değer için çözeriz. Daha sonra 2. adıma geri döneriz. Bu iterasyon, bizim tahmini bulmak istediğimiz aralıktaki rastgele sayıları ürettiğimiz anlamına gelir.

3.2 İkinci Tür Lineer Volterra İntegral Denklem Sistemi İçin Tahmin

Farz edelim ki, (3.1) denkleminde $a \leq r$ olmak üzere $[r,b]$ aralığında $u_i(x), i = 1,\ldots,m$, çözümü için aşağıdaki gibi bir tahmin bulmak istiyoruz.

3.2.1 1. Adım

$x_0 \in [r,b]$ alalım. Biliyoruz ki, $u_i(x), i = 1,\ldots,m$,

$$u_i(x_0) = f_i(x_0) + \sum_{j=1}^{m} \int_a^x k_{ij}(x_0,t)u_j(t)dt, i = 1,\ldots,m \tag{3.6}$$

denklemi sağlar.

Farz edelim ki, $u_j(x_0), j = 1,\ldots,m$, $[r,b]$ aralığında sabit olsun.Yani,

$$u_{i0} = f_i(x_0) + \sum_{j=1}^{m} u_{j0} \int_a^x k_{ij}(x_0,t)dt, i = 1,\ldots,m \tag{3.7}$$

Bu denklemden, $i = 1,\ldots,m$ için, m denklemli, m blinmeyenli

$$AX = B \tag{3.8}$$

lineer sistemini elde ederiz. Burada,

$$X = \begin{bmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ \vdots \\ u_{mk} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 - \int_0^x k_{k1}(x_k,t)dt & \int_0^x k_{k1}(x_k,t)dt & \ldots \int_0^x k_{k1}(x_k,t)dt \\ \int_0^x k_{k2}(x_k,t)dt & 1 - \int_0^x k_{k2}(x_k,t)dt & \ldots \int_0^x k_{k2}(x_k,t)dt \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^x k_{km}(x_k,t)dt & \int_0^x k_{km}(x_k,t)dt & \ldots 1 - \int_0^x k_{km}(x_k,t)dt \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} f_1(x_k) \\ f_2(x_k) \\ \vdots \\ f_m(x_k) \end{bmatrix}$$

$k = 0$ için, (3.8) denklemini çözersek, $u_{i0}, i = 1,\ldots,m$ buluruz.

Burada $u_{i0} \approx u_i(x_0), i = 1,\ldots,m$ olarak alabiliriz.

3.2.2 2. Adım

$[r,b]$ aralığında x_1 rastgele sayısını üretelim. Biliyoruz ki,

$$u_i(x_1) = f_i(x_1) + \sum_{j=1}^{m} \int_a^x k_{ij}(x_1,t)u_j(t)dt, i = 1,\ldots,m. \tag{3.9}$$

Çözümü bir basamak fonksiyonu olarak alalım:

Eğer $x_1 < x_0$ ise,

$$u_i(x_1) = \begin{cases} u_{i1}, & x_1 \in [r,x_0] \\ u_{i0}, & x_1 \in [x_0,b]. \end{cases} \tag{3.10}$$

dır ve o halde

$$u_i(x_1) = f_i(x_1) + \sum_{j=1}^{m} u_{j1} \int_a^x k_{ij}(x_1,t)dt, i = 1,\ldots,m \tag{3.11}$$

elde ederiz.

Bu denklemden $k = 1$ için (3.8) lineer sistemine sahip oluruz. $u_{i1}, i = 1,\ldots,m$ bulmak için bu sistemi çözeriz.

Eğer $x_0 < x_1$ ise,

$$u_i(x_1) = \begin{cases} u_{i0}, & x_1 \in [r,x_0] \\ u_{i1}, & x_1 \in [x_0,b]. \end{cases} \tag{3.12}$$

Buradan,

$$u_{i1} = f_i(x_1) + \sum_{j=1}^{m} u_{j0} \int_a^{x_0} k_{ij}(x_1,t)dt + \sum_{j=1}^{m} u_{j1} \int_{x_0}^{x_1} k_{ij}(x_1,t)dt, i = 1,\ldots,m \tag{3.13}$$

bulunur.

Aynı şekilde bu denklemden $k = 1$ için (3.8) lineer sistemini elde ederiz. $u_{i1}, i = 1,\ldots,m$ bulmak için bu sistemi çözeriz.

Benzer işlemleri yeni bir rastgele sayı için uygulayabiliriz. Her bir iterasyonda, her defasında daha iyi bir tahmine sahip olabilmek için, $u_i(x_n) \approx u_{in}$ olarak alırız.

3.3 Örnekler

Örnek 1 : Aşağıdaki ikinci tür non-lineer Volterra integral denklem sistemini çözelim:

$$u_1(x) = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^5 + \int_0^x (x^2 - t)(u_1(t) + u_2(t))dt \tag{3.14}$$

$$u_2(x) = x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \int_0^x x(u_1(t) + u_2(t))dt \tag{3.15}$$

Çözüm:Bu sistemin gerçek çözümü $u_1(x) = x$ ve $u_2(x) = x^2$'dir.

$$f_1 = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^5 \tag{3.16}$$

$$f_2 = x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^4 \tag{3.17}$$

$$k_{11}(x,t) = k_{12}(x,t) = x^2 - t \tag{3.18}$$

$$k_{21}(x,t) = k_{22}(x,t) = x \tag{3.19}$$

$$U(x) = (u_1(x), u_2(x))^T \tag{3.20}$$

$h = 0,05$ olarak alalım.

$0 \in [0,1]$ değeri ile başlayalım. (3.5) denkleminden,

$$u_i(x_0) = f_i(x_0) + \sum_{j=1}^{2} \int k_{ij}(x_0,t)u_j(t)dt, i = 1,2 \tag{3.21}$$

elde ederiz. Böylece $x_0 = 0$ için $u_1(0)$ ve $u_2(0)$ değerlerini bulabiliriz.

$$u_1(0) = f_1(0) + \int_0^0 k_{11}(0,t)u_1(t)dt + \int_0^0 k_{12}(0,t)u_2(t)dt \tag{3.22}$$

ve

$$u_2(0) = f_2(0) + \int_0^0 k_{21}(0,t)u_1(t)dt + \int_0^0 k_{22}(0,t)u_2(t)dt \tag{3.23}$$

$f_1(0) = 0$ ve $f_2(0) = 0$ olduğundan $u_1(0) = 0$ ve $u_2(0) = 0$ dır.

$u_i(x_0) \approx u_{i0}$ olarak kabul etmiştik. Bu durumda $u_{10} = 0$ ve $u_{20} = 0$ dır.

$[0,1]$ aralığında $x_1 = 0.05$ rastgele sayısını üretelim. Yine , (3.5) denkleminden,

$$u_1(0.05) = f_1(0.05) + \int_0^{0.05} k_{11}(0.05,t)u_1(t)dt + \int_0^{0.05} k_{12}(0.05,t)u_2(t)dt \tag{3.24}$$

$$u_1(0.05) = f_1(0.05) + \int_0^{0.05} ((0.05)^2 - t)u_1(t)dt + \int_0^{0.05} ((0.05)^2 - t)u_2(t)dt \tag{3.25}$$

Aynı şekilde,

$$u_2(0.05) = f_2(0.05) + \int_0^{0.05} k_{21}(0.05,t)u_1(t)dt + \int_0^{0.05} k_{22}(0.05,t)u_2(t)dt \tag{3.26}$$

$$u_2(0.05) = f_2(0.05) + \int_0^{0.05} (0.05)u_1(t)dt + \int_0^{0,05} (0.05)u_2(t)dt \tag{3.27}$$

dir.

$$f_1 = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^5 \Longrightarrow f_1(0.05) = 0.05004 \tag{3.28}$$

$$f_2 = x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^4 \Longrightarrow f_2(0.05) = 0.002435417 \tag{3.29}$$

Çözümü bir basamak fonksiyonu olarak alalım:

$0 < 0.05$ olduğu için $u_1(0.05) = u_{11}$ ve $u_2(0.05) = u_{21}$ bulunur.

Buradan (3.13) denklemine göre

$$u_{11} = f_1(0.05) + \sum_{j=1}^{2} u_{j0} \int_0^0 k_{1j}(0.05,t)dt + \sum_{j=1}^{2} u_{j1} \int_0^{0.05} k_{1j}(0.05,t)dt \qquad (3.30)$$

$$u_{11} = 0.05004 + u_{10} \int_0^0 ((0.05)^2 - t)dt + u_{20} \int_0^0 ((0.05)^2 - t)dt + u_{11} \int_0^{0.05} ((0.05)^2 - t)dt + u_{21} \int_0^{0.05} ((0.05)^2 - t)dt \qquad (3.31)$$

Düzenleme yapıldığında,

$$u_{11} = 0.05004 + u_{11}(-0.001125) + u_{21}(-0.001125) \qquad (3.32)$$

Benzer yolla,

$$u_{21} = f_2(0.05) + \sum_{j=1}^{2} u_{j0} \int_0^0 k_{2j}(0.05,t)dt + \sum_{j=1}^{2} u_{j1} \int_0^{0.05} k_{2j}(0.05,t)dt \qquad (3.33)$$

$$u_{21} = 0.002435417 + u_{10} \int_0^0 (0.05)dt + u_{20} \int_0^0 (0.05)dt + u_{11} \int_0^{0,05} (0.05)dt + u_{21} \int_0^{0.05} (0.05)dt \qquad (3.34)$$

$$u_{21} = 0.002435417 + u_{11}(0.0025) + u_{21}(0.0025) \qquad (3.35)$$

Böylece,

$$u_{11}(1 + 0.001125) + u_{21}(0.001125) = 0.05004 \qquad (3.36)$$

$$u_{11}(-0.0025)+u_{21}(1-0.0025)=0.002435417 \tag{3.37}$$

AX=B şeklinde bir lineer sistem elde ederiz. Burada,

$X=\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} 1.001125 & 0.00112 \\ -0.0025 & 0.9975 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0.05004 \\ 0.002435417 \end{bmatrix}$

Bu lineer denklem sistemini katsayılar matrisinin inversi yardımıyla çözelim. A matrisinin tersi,

$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0.998873451 & -0.001126555 \\ 0.002503442 & 1.002508777 \end{bmatrix}$

A^{-1} matrisini B ile çarparsak aradığımız X matrisini elde ederiz.

$\begin{bmatrix} 0.998873451 & -0.001126555 \\ 0.002503442 & 1.002508777 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.05004 \\ 0.002435417 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.049980884 \\ 0.002566798 \end{bmatrix}$=X

Sonuç olarak,

$$u_{11}=u_1(x_1)=u_1(0.05)=0.049980884 \tag{3.38}$$

$$u_{21}=u_2(x_1)=u_2(0.05)=0.002566798 \tag{3.39}$$

buluruz.

Şimdi $x_2=0.1\in[0,1]$ alalım. (3.5) eşitliğinden

$$u_1(0.1)=f_1(0.1)+\int_0^{0.1}((0.1)^2-t)u_1(t)dt+\int_0^{0.1}((0.1)^2-t)u_2(t)dt \tag{3.40}$$

Benzer şekilde,

$$u_2(0.1)=f_2(0.1)+\int_0^{0.1}(0.1)u_1(t)dt+\int_0^{0.1}(0.1)u_2(t)dt. \tag{3.41}$$

$$f_1(0.1)=0.100305 \tag{3.42}$$

$$f_2(0.1)=0.009466667 \tag{3.43}$$

Burada, $u_i(x_2)$ fonksiyonlarını sabit farz edelim. Böylece yukardaki denklemlerdeki integralleri çözersek, (3.7) denkleminden

$$u_1(0.1) = 0.100305 + u_{12}(-0.004) + u_{22}(-0.004) \tag{3.44}$$

$$u_2(0.1) = 0.009466667 + u_{12}(0.01) + u_{22}(0.01) \tag{3.45}$$

$u_1(0.1) = u_{12}$ ve $u_2(0.1) = u_{22}$ olarak kabul ettiğimizden,

$$u_{12}(1 + 0.004) + u_{22}0.004 = 0.100305 \tag{3.46}$$

$$u_{12}(-0.01) + u_{22}(1 - 0.01) = 0.009466667 \tag{3.47}$$

Böylece AX=B formunda bir lineer denklem sistemi elde ederiz. Burada,

$X = \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1.004 & 0.004 \\ -0.01 & 0.99 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0.100305 \\ 0.009466667 \end{bmatrix}$

Bu sistemi çözmek için önce A matrisinin tersini bulalım.

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.995975855 & -0.004024144 \\ 0.010060361 & 1.010060363 \end{bmatrix}$

Bu matrisi B ile çarparsak

$X = \begin{bmatrix} 0.099863263 \\ 0.010571009 \end{bmatrix}$

elde edilir.

Böylece,

$$u_{12} = u_1(x_2) = u_1(0.1) = 0.099863263 \tag{3.48}$$

$$u_{22} = u_2(x_2) = u_2(0.1) = 0.010571009 \tag{3.49}$$

bulunur.

$x_3 = 0.15$ rastgele sayısını üretelim. (3.5) denkleminden

$$u_1(0.15) = f_1(0.15) + \int_0^{0.15} ((0.15)^2 - t)u_1(t)dt + \int_0^{0.15} ((0.15)^2 - t)u_2(t)dt \quad (3.50)$$

ve

$$u_2(0.15) = f_2(0.15) + \int_0^{0.15} (0.15)u_1(t)dt + \int_0^{0.15} (0.15)u_2(t)dt. \quad (3.51)$$

elde ederiz.

$$f_1(0.15) = 0.105973126 \quad (3.52)$$

$$f_2(0.15) = 0.02064375 \quad (3.53)$$

Farz edelim ki, çözüm bir basamak fonksiyonu olsun.

$0.1 < 0.15$ olduğu için $u_1(0.15) = u_{13}$ ve $u_2(0.15) = u_{23}$ bulunur.

(3.13) denkleminden,

$$u_{13} = f_1(0.15) + \sum_{j=1}^{2} u_{j2} \int_0^{0.1} k_{1j}(0.15,t)dt + \sum_{j=1}^{2} u_{j3} \int_{0.1}^{0.15} k_{1j}(0.15,t)dt \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} u_{13} = 0.105973126 &+ u_{12} \int_0^{0.1} ((0.15)^2 - t)dt + u_{22} \int_0^{0.1} ((0.15)^2 - t)dt \\ &+ u_{13} \int_{0.1}^{0.15} ((0.15)^2 - t)dt + u_{23} \int_{0.1}^{0.15} ((0.15)^2 - t)dt \end{aligned} \quad (3.55)$$

Düzenleme yapıldığında,

$$\begin{aligned} u_{13} = 0.105973126 &+ 0.99863263(-0.00275) + 0.01071009(-0.00275) \\ &+ u_{13}(-0.005125) + u_{23}(-0.005125) \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$u_{13}(1+0.005125)+u_{23}(0.005125)=0.150669433 \tag{3.57}$$

Aynı şekilde,

$$u_{23}=f_2(0.15)+\sum_{j=1}^{2}u_{j2}\int_0^{0.1}k_{2j}(0.15,t)dt+\sum_{j=1}^{2}u_{j3}\int_{0.1}^{0.15}k_{2j}(0.15,t)dt \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}u_{23}=0.02064375+u_{12}\int_0^{0.1}(0.15)dt+u_{22}\int_0^{0.1}(0.15)dt\\ +u_{13}\int_{0.1}^{0,15}(0.15)dt+u_{23}\int_{0.1}^{0.15}(0.15)dt\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}u_{23}=0.02064375+0.099863263(0.015)+0.010571009(0.015)\\ +u_{13}(0.0075)+u_{23}(0.0075)\end{aligned} \tag{3.60}$$

Böylece

$$u_{13}(1.005125)+u_{23}(0.005125)=0.150669433 \tag{3.61}$$

$$u_{13}(-0.0075)+u_{23}(0.9925)=0.022300263 \tag{3.62}$$

denklemleriyle AX=B şeklinde bir lineer sistem elde ederiz. Burada,

$X=\begin{bmatrix}u_{13}\\u_{23}\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1.005125 & 0.005125\\-0.0075 & 0.9925\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0.150669433\\0.022300263\end{bmatrix}$

Önce A matrisinin tersini bulalım.

$A^{-1}=\begin{bmatrix}0.994862799 & -0.05137200\\0.007517854 & 1.007517854\end{bmatrix}$

Bu matrisi B ile çarparsak X matrisini buluruz.

$X=\begin{bmatrix}0.1510410229\\0.023600623\end{bmatrix}$

Sonuç olarak,

$$u_{13} = u_1(x_3) = u_1(0.15) = 0.1510410229 \tag{3.63}$$

$$u_{23} = u_2(x_3) = u_2(0.15) = 0.023600623 \tag{3.64}$$

bulunur.

Şimdi $x_4 = 0.2 \in [0,1]$ alalım. (3.5) denkleminden

$$u_1(0.2) = f_1(0.2) + \int_0^{0.2} ((0.2)^2 - t)u_1(t)dt + \int_0^{0.2} ((0.2)^2 - t)u_2(t)dt \tag{3.65}$$

ve

$$u_2(0.2) = f_2(0.2) + \int_0^{0.2} (0.2)u_1(t)dt + \int_0^{0.2} (0.2)u_2(t)dt. \tag{3.66}$$

$f_1(0.2)$ ve $f_2(0.2)$ değerlerini bulalım:

$$f_1(0.2) = 0.20216 \tag{3.67}$$

$$f_2(0.2) = 0.035466667 \tag{3.68}$$

Burada $u_1(x_4)$ ve $u_2(x_4)$ fonksiyonlarını sabit kabul edelim. Böylece (3.7) denkleminden

$$u_1(0.2) = 0.20216 + u_{14}(-0.012) + u_{24}(-0.012) \tag{3.69}$$

$$u_2(0.2) = 0.035466667 + u_{14}(0.04) + u_{24}(0.04) \tag{3.70}$$

$u_1(0.2) = u_{14}$ ve $u_2(0.4) = u_{24}$ olarak aldığımızdan,

$$u_{14}(1+0.012) + u_{24}(0.012) = 0.20216 \tag{3.71}$$

$$u_{14}(-0.04) + u_{24}(1-0.04) = 0.035466667 \tag{3.72}$$

Bu lineer denklem sistemini çözelim. Burada,

$X = \begin{bmatrix} u_{14} \\ u_{24} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1.012 & 0.012 \\ -0.04 & 0.96 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0.20216 \\ 0.035466667 \end{bmatrix}$

A matrisinin tersini bulup B ile çarpalım:

$X = \begin{bmatrix} 0.199226337 \\ 0.045245542 \end{bmatrix}$

Böylece,

$$u_{14} = u_1(x_4) = u_1(0.2) = 0.199226337 \tag{3.73}$$

$$u_{24} = u_2(x_4) = u_2(0.2) = 0.045245542 \tag{3.74}$$

bulunur.

Örnek 2 : Aşağıdaki ikinci tür non-lineer Volterra integral denklem sistemini çözelim:

$$u_1(x) = 1 - x^2 - x^3 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^6 + \int_0^x t u_1(t) + \int_0^x t^3 u_2(t))dt \tag{3.75}$$

$$u_2(x) = 2 + 3x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^5 + \int_0^x t u_1(t) + \int_0^x t^2 u_2(t))dt \tag{3.76}$$

$$u_3(x) = x + 2x^2 - x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{5}x^5 + \int_0^x x^2 u_1(t) + \int_0^x t^3 u_2(t))dt \tag{3.77}$$

Çözüm: Bu sistemin gerçek çözümü $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = 2+3x$ ve $u_3(x) = x+2x^2$'dir.

$h = 0,05$ olarak alalım.

$0 \in [0,1]$ değeri ile başlayalım. (3.5) denkleminden,

$$u_i(x_0) = f_i(x_0) + \sum_{j=1}^{2} \int k_{ij}(x_0,t)u_j(t)dt, i = 1,2,3 \tag{3.78}$$

elde ederiz. Böylece $x_0 = 0$ için $u_1(0) = 1$,$u_2(0) = 2$ ve $u_3(0) = 0$ dır.

$u_i(x_0) \approx u_{i0}$ olarak kabul etmiştik. Bu durumda $u_{10} = 1$, $u_{20} = 2$ ve $u_{30} = 0$ dır.

$[0,1]$ aralığında $x_1 = 0.05$ rastgele sayısını üretelim. (3.5) denkleminden,

$$u_1(0.05) = f_1(0.05) + \int_0^{0.05} (t)u_1(t)dt + \int_0^{0.05} (t^3)u_2(t)dt + \int_0^{0.05} 0u_3(t)dt, \tag{3.79}$$

$$u_2(0.05) = f_2(0.05) + \int_0^{0.05} tu_1(t)dt + \int_0^{0,05} t^2u_2(t)dt + \int_0^{0,05} 0u_3(t)dt \tag{3.80}$$

ve

$$u_3(0.05) = f_3(0.05) + \int_0^{0.05} x^2u_1(t)dt + \int_0^{0,05} t^3u_2(t)dt + \int_0^{0,05} 0u_3(t)dt \tag{3.81}$$

elde ederiz.

$$f_1(0.05) = 0.997374933 \tag{3.82}$$

$$f_2(0.05) = 2.1487483133 \tag{3.83}$$

$$f_3(0.05) = 0.054871688 \tag{3.84}$$

Çözümü bir basamak fonksiyonu olarak farz edelim:

$0 < 0.05$ olduğu için $u_1(0.05) = u_{11}$, $u_2(0.05) = u_{21}$ ve $u_3(0.05) = u_{31}$ bulunur.

Buradan (3.13) denklemine göre

$$u_{11} = f_1(0.05) + \sum_{j=1}^{3} u_{j0} \int_0^0 k_{1j}(0.05,t)dt + \sum_{j=1}^{3} u_{j1} \int_0^{0.05} k_{1j}(0.05,t)dt \qquad (3.85)$$

$$u_{11} = 0.997374933 + u_{10} \int_0^0 tdt + u_{20} \int_0^0 t^3 dt + u_{30} \int_0^0 0dt + u_{11} \int_0^{0.05} tdt + u_{21} \int_0^{0.05} t^3 dt + u_{31} \int_0^{0.05} 0dt \qquad (3.86)$$

Düzenleme yapıldığında,

$$u_{11} = 0.997374933 + u_{11}(0.00125) + u_{21}(0.000001562) \qquad (3.87)$$

ve

$$u_{21} = f_2(0.05) + \sum_{j=1}^{3} u_{j0} \int_0^0 k_{2j}(0.05,t)dt + \sum_{j=1}^{3} u_{j1} \int_0^{0.05} k_{2j}(0.05,t)dt \qquad (3.88)$$

$$u_{21} = 2.1487483133 + u_{10} \int_0^0 tdt + u_{20} \int_0^0 t^2 dt + u_{30} \int_0^0 0dt + u_{11} \int_0^{0,05} tdt + u_{21} \int_0^{0.05} t^2 dt + u_{31} \int_0^{0.05} 0dt \qquad (3.89)$$

$$u_{21} = 2.1487483133 + u_{11}(0.00125) + u_{21}(0.000041666) \qquad (3.90)$$

Benzer yolla,

$$u_{31} = f_3(0.05) + \sum_{j=1}^{3} u_{j0} \int_0^0 k_{3j}(0.05,t)dt + \sum_{j=1}^{3} u_{j1} \int_0^{0.05} k_{3j}(0.05,t)dt \qquad (3.91)$$

$$u_{31} = 0.054871688 + u_{10} \int_0^0 x^2 dt + u_{20} \int_0^0 t^3 dt + u_{30} \int_0^0 0dt + u_{11} \int_0^{0,05} x^2 dt + u_{21} \int_0^{0.05} t^3 dt + u_{31} \int_0^{0.05} 0dt \qquad (3.92)$$

$$u_{31} = 0.054871688 + u_{11}(0.000125) + u_{21}(0.000001562) \tag{3.93}$$

Böylece,

$$u_{11}(1 - 0.00125) + u_{21}(-0.000001562) = 0.997374933 \tag{3.94}$$

$$u_{11}(-0.00125) + u_{21}(1 - 0.000041666) = 2.1487483133 \tag{3.95}$$

$$u_{11}(-0.000125) + u_{21}(-0.000001562) + u_{31} = 0.054871688 \tag{3.96}$$

AX=B şeklinde bir lineer sistemi elde ederiz. Burada,

$$X = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.99875 & -0.000001562 & 0 \\ -0.00125 & 0.999958334 & 0 \\ -0.000125 & -0.000001562 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.997374933 \\ 2.1487483133 \\ 0.054871688 \end{bmatrix}$$

Bu lineer denklem sistemini katsayılar matrisinin inversi yardımıyla çözelim. A matrisinin tersi,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.001251566 & 1.564020113*^{-6} & 0 \\ 0.001251616 & 1.000041669 & 0 \\ 0.000125158 & 1.562260590*^{-6} & 1 \end{bmatrix}$$

A^{-1} matrisini B ile çarparsak aradığımız X matrisini elde ederiz.

$$X = \begin{bmatrix} 0.998626574 \\ 2.150086179 \\ 0.054999874 \end{bmatrix}$$

Sonuç olarak,

$$u_{11} = u_1(x_1) = u_1(0.05) = 0.998626574 \tag{3.97}$$

$$u_{21} = u_2(x_1) = u_2(0.05) = 2.150086179 \tag{3.98}$$

$$u_{31} = u_3(x_1) = u_3(0.05) = 0.054999874 \tag{3.99}$$

buluruz.

$x_2 = 0.1 \in [0,1]$ alalım. (3.5) eşitliğinden

$$u_1(0.1) = f_1(0.1) + \int_0^{0.1} tu_1(t)dt + \int_0^{0.1} t^3 u_2(t)dt + \int_0^{0.1} 0u_3(t)dt, \qquad (3.100)$$

$$u_2(0.1) = f_2(0.1) + \int_0^{0.1} tu_1(t)dt + \int_0^{0.1} t^2 u_2(t)dt + \int_0^{0.1} 0u_3(t)dt \qquad (3.101)$$

ve

$$u_3(0.1) = f_3(0.1) + \int_0^{0.1} x^2 u_1(t)dt + \int_0^{0.1} t^3 u_2(t)dt + \int_0^{0.1} 0u_3(t)dt. \qquad (3.102)$$

bulunur.

$$f_1(0.1) = 0.988997667 \qquad (3.103)$$

$$f_2(0.1) = 2.294971 \qquad (3.104)$$

$$f_3(0.1) = 0.118944 \qquad (3.105)$$

Burada, $u_i(x_2)$ fonksiyonlarını sabit farz edelim. Böylece yukardaki denklemlerde integralleri çözersek, (3.7) denkleminden

$$u_1(0.1) = 0.988997667 + u_{12}(0.005) + u_{22}(0.000025) \qquad (3.106)$$

$$u_2(0.1) = 2.294971 + u_{12}(0.05) + u_{22}(0.000333333) \qquad (3.107)$$

$$u_3(0.1) = 0.118944 + u_{12}(0.001) + u_{22}(0.000025) \tag{3.108}$$

$u_1(0.1) = u_{12}$, $u_2(0.1) = u_{22}$ ve $u_3(0.1) = u_{32}$ olarak kabul ettiğimizden,

$$u_{12}(1 - 0.005) + u_{22}(-0.000025) = 0.988997667 \tag{3.109}$$

$$u_{12}(-0.05) + u_{22}(1 - 0.000333333) = 2.294971 \tag{3.110}$$

$$u_{12}(-0.001) + u_{22}(-0.000025) + u_{32} = 0.118969 \tag{3.111}$$

Böylece AX=B formunda bir lineer denklem sistemi elde ederiz. Burada,

$$X = \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ u_{32} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.995 & -0.000025 & 0 \\ -0.05 & 0.999666667 & 0 \\ -0.001 & -0.000025 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.988997667 \\ 2.294971 \\ 0.118969 \end{bmatrix}$$

Bu sistemi çözmek için önce A matrisinin tersini bulalım.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.005026388 & 0.000025134 & 0 \\ 0.050268075 & 0.000334701 & 0 \\ 0.000101759 & 0.000025010 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matrisi B ile çarpalım:

$$X = \begin{bmatrix} 0.994026434 \\ 2.345454137 \\ 0.120021661 \end{bmatrix}$$

Böylece,

$$u_{12} = u_1(x_2) = u_1(0.1) = 0.994026434 \tag{3.112}$$

$$u_{22} = u_2(x_2) = u_2(0.1) = 2.345454137 \tag{3.113}$$

$$u_{32} = u_3(x_2) = u_3(0.1) = 0.120021661 \tag{3.114}$$

bulunur.

$x_3 = 0.15$ rastgele sayısını üretelim. (3.5) denkleminden

$$u_1(0.15) = f_1(0.15) + \int_0^{0.15} tu_1(t)dt + \int_0^{0.15} t^3 u_2(t)dt \tag{3.115}$$

$$u_2(0.15) = f_2(0.15) + \int_0^{0.15} tu_1(t)dt + \int_0^{0.15} t^2 u_2(t)dt + \int_0^{0.15} 0u_3(t)dt. \tag{3.116}$$

ve

$$u_3(0.15) = f_3(0.15) + \int_0^{0.15} x^2 u_1(t)dt + \int_0^{0.15} t^3 u_2(t)dt + \int_0^{0.15} 0u_3(t)dt. \tag{3.117}$$

elde ederiz.

$$f_1(0.15) = 0.974106017 \tag{3.118}$$

$$f_2(0.15) = 2.438593063 \tag{3.119}$$

$$f_3(0.15) = 0.191326313 \tag{3.120}$$

Farz edelim ki, çözüm bir basamak fonksiyonu olsun.

$0.1 < 0.15$ olduğu için $u_1(0.15) = u_{13}$,$u_2(0.15) = u_{23}$ ve $u_3(0.15) = u_{33}$ bulunur. (3.13) denkleminden,

$$u_{13} = f_1(0.15) + \sum_{j=1}^{3} u_{j2} \int_0^{0.1} k_{1j}(0.15,t)dt + \sum_{j=1}^{3} u_{j3} \int_{0.1}^{0.15} k_{1j}(0.15,t)dt \tag{3.121}$$

$$u_{13} = 0.974106017 + u_{12}\int_0^{0.1} t\,dt + u_{22}\int_0^{0.1} t^3\,dt + u_{32}\int_0^{0.1} 0\,dt + u_{13}\int_{0.1}^{0.15} t\,dt + u_{23}\int_{0.1}^{0.15} t^3\,dt + u_{33}\int_{0.1}^{0.15} 0\,dt \quad (3.122)$$

Düzenleme yapıldığında,

$$u_{13} = 0.974106017 + 0.994026434(0.005) + 2.345454137(0.000025) + u_{13}(0.00625) + u_{23}(0.000101562) \quad (3.123)$$

$$u_{13}(1-0.00625) + u_{23}(-0.000101562) = 0.979134785 \quad (3.124)$$

Aynı şekilde,

$$u_{23} = f_2(0.15) + \sum_{j=1}^{3} u_{j2}\int_0^{0.1} k_{2j}(0.15,t)\,dt + \sum_{j=1}^{3} u_{j3}\int_{0.1}^{0.15} k_{2j}(0.15,t)\,dt \quad (3.125)$$

$$u_{23} = 2.438593063 + u_{12}\int_0^{0.1} t\,dt + u_{22}\int_0^{0.1} t^2\,dt + u_{32}\int_0^{0.1} 0\,dt + u_{13}\int_{0.1}^{0,15} t\,dt + u_{23}\int_{0.1}^{0.15} t^2\,dt + u_{33}\int_{0.1}^{0.15} 0\,dt \quad (3.126)$$

$$u_{23} = 2.438593063 + 0.994026434(0.005) + 2.345454137(0.000333333) + u_{13}(0.00625) + u_{23}(0.000791667) \quad (3.127)$$

$$u_{13}(-0.00625) + u_{23}(1-0.000791667) = 2.444345012 \quad (3.128)$$

ve

$$u_{33} = f_3(0.15) + \sum_{j=1}^{3} u_{j2}\int_0^{0.1} k_{3j}(0.15,t)\,dt + \sum_{j=1}^{3} u_{j3}\int_{0.1}^{0.15} k_{3j}(0.15,t)\,dt \quad (3.129)$$

$$u_{33} = 0.191326313 + u_{12}\int_0^{0.1} x^2dt + u_{22}\int_0^{0.1} t^3dt + u_{32}\int_0^{0.1} 0dt$$
$$+u_{13}\int_{0.1}^{0.15} x^2dt + u_{23}\int_{0.1}^{0.15} t^3dt + u_{33}\int_{0.1}^{0.15} 0dt \qquad (3.130)$$

$$u_{33} = 0.191326313 + 0.994026434(0.001) + 2.345454137(0.000025)$$
$$+u_{13}(0.002375) + u_{23}(0.000101562) \qquad (3.131)$$

$$u_{13}(-0.002375) + u_{23}(-0.000101562) + u_{33} = 0.192378793 \qquad (3.132)$$

bulunur.

Böylece

$$u_{13}(0.99375) + u_{23}(-0.000101562) = 0.979134785 \qquad (3.133)$$

$$u_{13}(-0.00625) + u_{23}(0.999208333) = 2.444345012 \qquad (3.134)$$

$$u_{13}(-0.002375) + u_{23}(-0.000101562) + u_{33} = 0.192378793 \qquad (3.135)$$

denklemleriyle AX=B şeklinde bir lineer sistemi elde ederiz. Burada,

$$X = \begin{bmatrix} u_{13} \\ u_{23} \\ u_{33} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.99375 & -0.000101562 & 0 \\ -0.00625 & 0.999208333 & 0 \\ -0.002375 & -0.000101562 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.979134785 \\ 2.444345012 \\ 0.192378793 \end{bmatrix}$$

Önce A matrisinin tersini bulalım.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.006295741 & 0.001022823 & 0 \\ 0.006294331 & 1.000798691 & 0 \\ 0.002396345 & 0.001018860 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matrisi B ile çarparsak

$$X = \begin{bmatrix} 0.987799296 \\ 2.452460286 \\ 0.197215583 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Sonuç olarak,

$$u_{13} = u_1(x_3) = u_1(0.15) = 0.987799296 \tag{3.136}$$

$$u_{23} = u_2(x_3) = u_2(0.15) = 2.452460286 \tag{3.137}$$

$$u_{33} = u_3(x_3) = u_3(0.15) = 0.197215583 \tag{3.138}$$

bulunur.

Şimdi $x_4 = 0.2 \in [0,1]$ alalım. (3.5) denkleminden

$$u_1(0.2) = f_1(0.2) + \int_0^{0.2} t u_1(t)dt + \int_0^{0.2} t^3 u_2(t)dt + \int_0^{0.2} 0 u_3(t)dt \tag{3.139}$$

$$u_2(0.2) = f_2(0.2) + \int_0^{0.2} t u_1(t)dt + \int_0^{0.2} t^2 u_2(t)dt + \int_0^{0.2} 0 u_3(t)dt. \tag{3.140}$$

ve

$$u_3(0.2) = f_3(0.2) + \int_0^{0.2} x^2 u_1(t)dt + \int_0^{0.2} t^3 u_2(t)dt + \int_0^{0.2} 0 u_3(t)dt. \tag{3.141}$$

$f_1(0.2)$, $f_2(0.2)$ ve $f_3(0.2)$ değerlerini bulalım:

$$f_1(0.2) = 0.951914667 \tag{3.142}$$

$$f_2(0.2) = 2.579472 \tag{3.143}$$

$$f_3(0.2) = 0.271008 \tag{3.144}$$

Burada $u_1(x_4)$, $u_2(x_4)$ ve $u_3(x_4)$ fonksiyonlarını sabit kabul edelim. Böylece (3.7) denkleminden

$$u_1(0.2) = 0.951914667 + u_{14}(0.002) + u_{24}(0.0004) \tag{3.145}$$

$$u_2(0.2) = 2.579472 + u_{14}(0.02) + u_{24}(0.002666666) \tag{3.146}$$

$$u_3(0.2) = 0.271008 + u_{14}(0.08) + u_{24}(0.0004) \tag{3.147}$$

$u_1(0.2) = u_{14}$,$u_2(0.4) = u_{24}$ ve $u_3(0.4) = u_{34}$ olarak aldığımızdan,

$$u_{14}(1 - 0.002) + u_{24}(-0.0004) = 0.951914667 \tag{3.148}$$

$$u_{14}(-0.02) + u_{24}(1 - 0.002666666) = 2.579472 \tag{3.149}$$

$$u_{14}(-0.08) + u_{24}(-0.0004) + u_{34} = 0.271008 \tag{3.150}$$

Bu lineer denklem sistemini çözelim. Burada,

$$X = \begin{bmatrix} u_{14} \\ u_{24} \\ u_{34} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0,98 & -0.0004 & 0 \\ -0.02 & 0.997333334 & 0 \\ -0.08 & -0.0004 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.951914667 \\ 2.579472 \\ 0.271008 \end{bmatrix}$$

A matrisinin tersini bulup B ile çarparsak

$$X = \begin{bmatrix} 0.972405116 \\ 2.605869084 \\ 0.278891475 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Böylece,

$$u_{14} = u_1(x_4) = u_1(0.2) = 0.972405116 \tag{3.151}$$

$$u_{24} = u_2(x_4) = u_2(0.2) = 2.605869084 \tag{3.152}$$

$$u_{34} = u_3(x_4) = u_3(0.2) = 0.278891475 \tag{3.153}$$

4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Monte Carlo yöntemi, fizikten matematiğe iletişimden finansa kadar pek çok alanda uygulanan ve oldukça iyi sonuçlar elde edilen bir teknik ve yaklaşımdır. Bu yöntem ile ilgili, çeşitli alanlarda pek çok eser yazılmıştır.

Bu tezin yapılmasındaki amaç, Monte Carlo metodunu kullanarak ikinci tür lineer Volterra integral denklem sistemlerinin nümerik çözümlerini bulmak ve bu çözümleri denklem sisteminin gerçek çözümleri ile karşılaştırmaktır. Çizelgelerden de anlaşılacağı gibi sonuçlar birbirine çok yakındır. İkinci tür lineer Volterra integral denklem sistemlerini bilinen yöntemler ile çözmek her zaman kolay değildir. Özellikle çözümler birkaç değişkene bağlıysa veya başka integral denklemler ile birleştirilmiş ise denklemlerin çözümünü bulmak uğraştırıcıdır. İyi bilinen çözüm yöntemleri ise genelde verimsizdir. Bu tür denklemlerde Monte Carlo yöntemini kullanarak istenilen sonuca yaklaşık olarak ulaşmak mümkündür.

Ayrıca çalışmada üç temel Monte Carlo yöntemi hakkında bilgi verilmiştir. Bunlar,

1-Önem örneklemesi
2-Varyans azaltmada beklenen değerlerin kullanılması
3-Kontrol değişkeni

yöntemleri idi. Önem örneklemesi yönteminde seçilen olasılık yoğunluk fonksiyonu varyansı belirler. İyi bir olasılık yoğunluk fonksiyonu seçimi varyansı azaltacaktır. Varyans azaltmada beklenen değerlerin kullanılması metodunda marjinal dağılım kullanımı ile varyans en aza indirgenebilir. Kontrol değişkeni yöntemi ise, örneklemede, bağdaştırılan noktaların kullanımını bütün noktalara tercih ederek varyansı azaltmayı sağlar. Anlaşılmasının kolaylığı açısından her bir integral alma yöntemi, basit integral denklemlere uygulanmış ve sonuçlar yorumlanmıştır.

5. KAYNAKLAR

Dagpunar J. S., 2006, Simulation and Monte Carlo, John Wiley-Sons Inc.

Kalos Malvin H. and Whitlock Paula A., 2008, Monte Carlo Methods, New York University, John Wiley-Sons Inc.

Metropolis N.,1987, The Beginning of the Monte-Carlo Method, Los Alamos Science

Saeed Rostam K. and Ahmed Chinar S., 2008, Numerical Solution of the System of Linear Volterra Integral Equations of the Second Kind Using Monte-Carlo Method, INSInet Publication

Tavukçu D., 2000, Monte Carlo Yöntemlerinin Sayısal İntegrallere ve Elektromanyetik Denklem İntegrallerine Uygulanması, Yüksek Lisans Bitirme Ödevi, İTÜ Elektrik Elektronik Mühendisliği

Url -1 http://www.questia.com/googleScholar.qst;jsessionid, alındığı tarih 30.09.2009

Url -2 http://www.answers.com/topic/monte-carlo-method, alındığı tarih 15.08.2009

ÖZGEÇMİŞ

Yeşim SARAÇER 1984 yılında İstanbul'da dünyaya geldi. 2002 yılında Bahçelievler Anadolu Lisesi'nden ve 2007 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. Aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği Bölümü'nde Yüksek Lisans programına başladı.