İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ HILBERT DÖNÜŞÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özgür MARTİN

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Matematik Mühendisliği

MAYIS 2005

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın oluşmasında bilgisi ve eşsiz desteğiyle bana rehberlik eden değerli hocam Doç. Dr. Mahir Hasanov'a, çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen ve her türlü nazımı çeken araştıma görevlisi arkadaşlarım Cihangir, Nurhan, Özgür, Özlem, Tonguç ve son olarak sabrıyla her zaman yanımda olan Derya'ya teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Mayıs, 2005 Özgür Martin

İÇİNDEKİLER

ÖZET **v**
SUMMARY **viii**

1. GİRİŞ **1**
1.1. $L_1(\mathbb{R}^1)$ uzayında Fourier dönüşümü 1
1.1.1. Bazı fonksiyon uzayları 1
1.1.2. $L_1(\mathbb{R}^1)$'de Fourier dönüşümü 1
1.2. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ Schwartz uzayı 4
1.2.1. Hızla azalan fonksiyonlar 4
1.2.2. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ uzayıda Fourier dönüşümü 5
1.2.3. Ters Fourier dönüşümü 6
1.3.L_1 Fourier dönüşümünün noktasal tersi 8
1.4. $L_2(\mathbb{R}^1)$ uzayında Fourier dönüşümü 9
1.4.1. L_2 Fourier dönüşümünün problemleri 9
1.4.2. L_2 Fourier dönüşümünün tanımı 10
1.4.3. L_2 Fourier dönüşümünün özellikleri 10
1.5. Çok boyutlu Fourier integralleri 12

2. SÖZDE DİFERANSİYEL OPERATÖRLER **13**
2.1. Tanım 13
2.2. S^m sembol sınıfı 14
2.3. Genelleşmiş fonksiyonlar uzayında sözde diferansiyel operatörler 14
2.4. $L_2(\mathbb{R}^n)$ uzayında sözde diferansiyel operatörler 15
2.5. $S^m_{\rho,\delta}$ sembol sınıfları 19
2.6. Fourier integral operatörleri 20

3. HİLBERT DÖNÜŞÜMÜ ve CAUCHY İNTEGRAL OPERATÖRLERİ **21**
3.1. Hilbert dönüşümü 21
3.2. Cauchy tekil integral operatörleri 23
3.2.1. Sınırlılık 24

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ HILBERT DÖNÜŞÜMLERİ **25**

4.1. Giriş 25

4.2. Genelleştirilmiş Hilbert dönüşümleri için sınırlılık ve sınırsızlık kriterleri 27

4.3. A operatörü ile Fourier integral operatörleri arasında bir bağlantı 29

SONUÇLAR VE ÖNERİLER **31**
KAYNAKLAR **32**
ÖZGEÇMİŞ **34**

GENELLEŞTİRİLMİŞ HİLBERT DÖNÜŞÜMLERİ

ÖZET

Sözde diferansiyel operatörler ve Fourier integral operatörler kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinde, diferansiyel operatörlerin tersinin veya farklı genişlemelerinin bulunmasında ortaya çıkmaktadır. Sözde diferalsiyel operatörler genelde

$$Au = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\, d\xi$$

Fourier integral opertörleri ise

$$Fu = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\Phi(x,\xi)} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\, d\xi$$

şeklinde tanımlanmaktadır ve burada $a(x,\xi)$ sembolü ve $\Phi(x,\xi)$ faz fonksiyonu ek koşulları sağlamaktadır ([1] - [4]). Bu operatörlerin farklı uzaylarda tanımlanması, sürekli genişlemesi, kompaktlık koşulları, spektral yapılarının irdelenmesi gibi sorular temel sorulardır.

Örneğin $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}$, $0 \leqslant \rho, \delta \leqslant 1$ olmak üzere A operatörünü L_p ve H^s Sobolev uzaylarına sürekli genişlemesinin bulunması konusunda pek çok araştırmalar yapılmıştır ([5] - [10]).

[11]'de $\delta < \rho$ ise bütün $A \in L^0_{\rho,\delta}$ operatörlerinin $L_2(\mathbb{R}^n)$'den $L_2(\mathbb{R}^n)$'e sınırlı olduğu ispatlamıştır. Eğer (2.5.1) eşitsizliği K herhangi bir kompakt küme olmak üzere $x \in K \subset \mathbb{R}^n$ için bir $A_{\alpha,\beta,K}$ sabiti için sağlanıyorsa Hörmander [5] her $A \in L^0_{\rho,\delta}$ operatörünün $L_2^{comp}(\mathbb{R}^n)$'den $L_2^{loc}(\mathbb{R}^n)$'e sınırlı bir operatör olacak şekilde genişletilebileceğini ispatlamıştır. Diğer yandan Kumano-Go [9] $\rho < 1$ olmak üzere $L^0_{\rho,1}$ sınıfından bir L_2 süreksiz operatöre örnek vermiştir. Calderon ve Vaillancourt [12] ise $0 < \rho < 1$ için $L^0_{\rho,\rho}$ sınıfından operatörlerin $L_2(\mathbb{R}^n)$'den

$L_2(\mathbb{R}^n)$'e sürekli lineer tasvirler olduğunu ispatlamışlardır. Bu sonuç özellikle $\rho = \frac{1}{2}$ için lineer kısmi diferansiyel denklemlerde ve özellikle de subeliptik operatörlerin incelenmesinde önemli bir rol oynamıştır.

$S^m_{\rho,\,\delta}$ Hörmander sınıfları C^∞'un bir alt sınıfıdır. Fakat uygulamada C^∞ sınıfında bulunmayan ve hatta sürekli olmayan $a(x,\xi)$ sembolleri ile karşılaşmaktayız. [10]'de sembolü $R^2 \times R^2$ uzayının konik bir altkümesinin karakteristik fonksiyonu olan bir sınıf sözde diferansiyel operatörü incelemişler ve c(x) tanım kümesi $D \subset R^2$ olan reel değerli bir fonksiyon ve $\Gamma = \{(x,\,\xi) = (x_1,\,x_2,\,\xi_1,\,\xi_2) \mid x \in D,\ \xi_2 > c(x)\xi_1\}$ kümesi $R^2 \times R^2$ uzayında bir koni olmak üzere

$$L(f)(x) = \int e^{-2\pi i x.\,\xi}\Psi_\Gamma(x,\,\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

operatörleri ile ilgilenmişlerdir. [10]'de D tanım kümesini ve $c(x)$ fonksiyonunu seçerek $1 \le p \le 2$ için $L_p(R^2)$ uzayında sınırsız (4.1.1) şeklinde bir operatör inşa etmişlerdir. Γ kümesi R^2 uzayının konik bir altkümesi olduğunda L'nin sınırlılığı Carleson-Hunt teoreminin bir sonucudur ([10]). Bazı ek koşullar altında $w(x) = (w_1(x),\ w_2(x)) \in R^2$ ve

$$\tilde{H}(f)(x) = pv\int_{-\infty}^{\infty} f(x + tw(x))\frac{dt}{t},$$

olmak üzere L operatörünü

$$L(f)(x) = \frac{i}{2\pi}\tilde{H}(f(x)) + \frac{1}{2}f(x),$$

şeklinde yazarak L operatörünün sınırsızlığını $\tilde{H}$ operatörünün sınırsızlığını ispatlayarak göstermişlerdir. $\tilde{H}(f)$ operatörü tam olarak Hilbert dönüşümü değildir ama Hilbert dönüşümünün bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir. Gerçekten $w(x) \in R^1$ ve $w(x) \equiv 1$ alırsak $\tilde{H}(f)$ Hilbert dönüşümü olur.

Benzer sınıftan operatörler aynı zamanda [9] ve [8]'de incelenmiştir. Bu makalelerde sözde diferansiyel ve Fourier integral operatörler sinifinda sınırsızlık kriterleri vermek için

$$H'(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{k}(z)f(\beta(x)z - \alpha(x))\,dz,$$

operatörü kulanılmıştır. Bu benzerlik ise bizi genelleştirilmiş Hilbert dönüşümü olarak adlandırdığımız

$$A(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(z)\,f((\beta(x) \circ z) + \alpha(x))\,dz$$

operatörünü tanımlamaya yönlendirdi. Burada

$$\beta(x) \circ z = \begin{cases} (\beta_1(x)z_1, \ldots, \beta_n(x)z_n), & z, \beta(x) \in R^n \\ (z\beta_1(x), \ldots, z\beta_n(x)) \quad , & z \in R^1,\ \beta(x) \in R^n \end{cases}$$

şeklindedir.

Tezde ele aldığımız esas soru Genelleştirilmiş Hilbert dönüşümlerinin hangi koşullar altında L_2 uzayına sınırlı genişlemesinin bulunup bulunmaması ile ilgilidir. Öte yandan sözde diferansiyel operatörler ve Fourier integral operatörleri Fourier dönüşümlerinin doğal genişlemeleridir. Örneğin Fourier dönüşümü $a(x, \xi) \equiv 1$ koşulunu sağlayan sözde diferansiyel operatör ve $a(x, \xi) \equiv 1$, $\Phi(x, \xi) = ix.\xi$ koşullarını sağlayan Fourier integral operatörüdür. Bundan dolayı Tezin Giriş bölümünde Fourier dönüşümü incelenmiştir. 2. bölümde sözde diferansiyel operatörlerin temel özellikleri araştırılmış ve ele aldığımız problemlerle doğrudan bağlantılı olduğundan dolayı 3. bölümde Hilbert dönüşümlerine ve Cauchy integral operatörlerine ayrıca yer verilmiştir. Son olarak tezde bulduğumuz sonuçlar 4. bölümde verilmiştir.

GENERALIZED HILBERT TRANSFORMS

SUMMARY

Pseudo-differential operators and Fourier integral operators arise from the solutions of differential equations and also from generalizations and inverses of differential operators. Pseudo-differential operators and Fourier integral operators are generally defined as

$$Au = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\, d\xi,$$

$$Fu = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\Phi(x,\xi)} a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\, d\xi.$$

respectively.

Here the symbol $a(x,\xi)$ and the phase function $\Phi(x,\xi)$ satisfy some additional conditions ([1] - [4]). The main questions are defining these operators on several spaces, studying for continuous extensions, criteria for compactness and their spectral structure.

For example many researches were done in the topic of continuous extension for the operator A to the L_p and H^s Sobolev spaces when $a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}$, $0 \leqslant \rho, \delta \leqslant 1$ ([5] - [10]).

It was proved in [11] that all $A \in L^0_{\rho,\delta}$ are continuous from $L_2(\mathbb{R}^n)$ to $L_2(\mathbb{R}^n)$ if $\delta < \rho$. If the estimates (2.5.1) are satisfied for $x \in K \subset \mathbb{R}^n$ with $A_{\alpha,\beta,K}$, which depend on K for any compact set $K \subset \mathbb{R}^n$, then Hörmander [5] proved that all $A \in L^0_{\rho,\delta}$ can be extended to be a bounded operator from $L_2^{comp}(\mathbb{R}^n)$ to $L_2^{loc}(\mathbb{R}^n)$. On the other hand, Kumano-Go [9] has given an example of an operator belonging to $L^0_{\rho,1}$ for every $\rho < 1$, which is not L_2 continuous. Calderon and Vaillancourt [12] proved that every operator $L^0_{\rho,\rho}$ with $0 < \rho < 1$ defines a continuous linear map $L_2 \to L_2$. this result, particularly for $\rho = \frac{1}{2}$,

has played an important role in linear partial differential equations, especially in the study of subelliptic operators.

$S^m_{\rho,\delta}$ Hörmander classes are subsets of C^∞. But in application we see symbols $a(x,\xi)$ which does not belong to C^∞ and are not continuous. In [10] J. Alvarez and R. Duran considered a class of pseudo-differential operators whose symbol is a characteristic function of a conic subset of $R^2 \times R^2$. Namely, they studied operators in the form

$$L(f)(x) = \int e^{-2\pi i x.\,\xi} \Psi_\Gamma(x,\,\xi) \hat{f}(\xi)\, d\xi,$$

where $\Gamma = \{(x,\,\xi) = (x_1,\,x_2,\,\xi_1,\,\xi_2) \mid x \in D,\ \xi_2 > c(x)\xi_1\}$ is a cone in $R^2 \times R^2$ and c(x) is a real valued function defined on a domain $D \subset R^2$. By choosing a domain D and a function c(x) in [10] it was constructed an unbounded operator of the form (4.1.1) in $L^p(R^2)$, $1 \leq p \leq 2$. Note that when Γ is a conic subset of R^2 then the boundedness of L is a consequence of the Carleson-Hunt's theorem (see [10]). A representation of the operator L under some additional conditions in the form

$$L(f)(x) = \frac{i}{2\pi}\tilde{H}(f(x)) + \frac{1}{2}f(x),$$

where

$$\tilde{H}(f)(x) = pv \int_{-\infty}^{\infty} f(x + tw(x))\frac{dt}{t},$$

and $w(x) = (w_1(x),\ w_2(x)) \in R^2$ constitutes the main idea of the paper [10]. The operator $\tilde{H}(f)$ is not exactly a Hilbert transform, but it can be considered as a generalization of the Hilbert transform. Indeed if $w(x) \in R^1$ and $w(x) \equiv 1$ then $\tilde{H}(f)$ is the Hilbert transform.

A similar class of operators was considered in [9] and [8]. In these papers boundedness criterion for pseudodifferential and Fourier integral operators are investigated by using the operators

$$H'(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{k}(z) f(\beta(x)z - \alpha(x))\, dz,$$

where $k(z) \in \mathcal{S}$, $\hat{k}(z)$ denotes the Fourier transform of $k(z)$, $\alpha(x)$ and $\beta(x)$ are real-valued functions.

The similarities in the definitions of these operators, mentioned above motivated us to define the following operator

$$A(f)(x) = \int_{R^n} k(z)\, f((\beta(x) \circ z) + \alpha(x))\, dz,$$

which we called generalized Hilbert transform where

$$\beta(x) \circ z = \begin{cases} (\beta_1(x)z_1, \ldots, \beta_n(x)z_n), & z, \beta(x) \in R^n \\ (z\beta_1(x), \ldots, z\beta_n(x)) \quad , & z \in R^1,\ \beta(x) \in R^n. \end{cases}$$

The main problem studied in this thesis is whether the generalized Hilbert transforms have a bounded extension to the space L_2 or not. Pseudo-differential operators and Fourier integral operators are the natural extensions of the Fourier transforms. Fourier transform is the pseudo-differential operator with the symbol $a(x, \xi) \equiv 1$ and the Fourier integral operator with $a(x, \xi) \equiv 1$ and $\Phi(x, \xi) = ix.\xi$. This is why we studied the Fourier transform in the first chapter. In the 2nd chapter we studied the main properties of pseudo-differential operators and taking into account a connection with the problems in the thesis we considered Hilbert transforms and Cauchy singular integral operators in the 3rd chapter. Finally in chapter 4 we gave our results.

1. GİRİŞ

1.1 $L_1(\mathbb{R}^1)$ uzayında Fourier dönüşümü

$f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}^1$ periyodik olmayan bir fonksiyon olsun. f'nin **Fourier dönüşümü** olan $\hat{f} : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}^1$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır [13]

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}_{x\to\xi} = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx. \tag{1.1.1}$$

Bundan sonra genellikle $\mathbb{R}^1$ üzerinde integral alacağımızdan $\int_{-\infty}^{\infty}$ yerine $\int$ kullanacağız.

1.1.1 Bazı fonksiyon uzayları

İlk problemimiz uygun bir fonksiyon sınıfı seçmektir ve ilk başta düşüneceğimiz iki seçenek vardır:

(1) $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ kompakt destekli sonsuz türevlenebilir fonksiyonların uzayı;

(2) $L_p(\mathbb{R}^1) = \{f \mid f$ ölçülebilir ve $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx < \infty\}$, $1 \leqslant p < \infty$.

Biz özellikle $p = 1$ ve $p = 2$ durumunda Fourier dönüşümünü ayrıntılı bir şekilde ele alacağız. İleride aşağıdaki ispatlanmamış teoremi kullanacağız.

Yardımcı Teorem 1.1. $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ uzayı $L_p(\mathbb{R}^1)$, $1 \leqslant p < \infty$ uzaylarında yoğundur.

1.1.2 $L_1(\mathbb{R}^1)$'de Fourier dönüşümü

Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^1)$ ise (1.1.1) intergali yakınsaktır ve bir $\hat{f} : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}^1$ fonksiyonu tanımlar.

Teorem 1.1. $f \in L_1(\mathbb{R}^1)$ ise $\hat{f}$ sınırlı ve sürekli bir fonksiyondur.

İspatr. Her $\xi \in \mathbb{C}^1$ için

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &= (2\pi)^{-1/2} \left| \int e^{-ix\xi} f(x) dx \right| \\ &\leqslant (2\pi)^{-1/2} \int |e^{-ix\xi} f(x)|\, dx = (2\pi)^{-1/2} \int |f(x)| = (2\pi)^{-1/2} \parallel f \parallel_1 . \end{aligned}$$

Böylece $\hat{f}$ 'in sınırlığını göstermiş oluruz.

$\hat{f}$ 'in sürekliliği Lebesgue yakınsaklık teoreminden çıkarılabilir fakat burada farklı bir yöntem izleyelim.

Herhangi $f, g \in L_1(\mathbb{R}^1)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| &= (2\pi)^{-1/2} \left| \int e^{-ix\xi} \left(f(x) - g(x)\right) dx \right| \\ &\leqslant (2\pi)^{-1/2} \int |f(x) - g(x)|\, dx \\ &= (2\pi)^{-1/2} \parallel f - g \parallel_1 . \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Yardımcı teorem 1.1'i kullanarak, verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ için, $\parallel f - g \parallel_1 \leqslant (2\pi)^{1/2}\varepsilon/3$ olacak seçilde bir $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ bulunabilir. O halde (1.1.2) dolayısı ile, her ε için

$$|\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| \leqslant \varepsilon/3.$$

yazılabilir.

Ortalama değer teoremi kullanılarak

$$e^{-ix\xi_1} - e^{-ix\xi_2} = -ixe^{-ix\tilde{\xi}} \left(\xi_1 - \xi_2\right)$$

olacak şekilde bir $\tilde{\xi} \in [\xi_1,\ \xi_2]$ bulunabilir. Bundan dolayı eğer ξ_1 ve ξ_2'yi $|\xi_1 - \xi_2| \leqslant \sqrt{2\pi}(\int |x||g(x)|dx)^{-1}\varepsilon/3$ olacak şekilde seçersek aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz;

$$\begin{aligned} |\hat{g}(\xi_1) - \hat{g}(\xi_2)| &= (2\pi)^{-1/2} \left| \int (e^{-ix\xi_1} - e^{-ix\xi_2}) g(x)\, dx \right| \\ &\leqslant (2\pi)^{-1/2} \int |e^{-ix\xi_1} - e^{-ix\xi_2}||g(x)|\, dx \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int |x||\xi_1 - \xi_2||g(x)|dx \leqslant \varepsilon/3. \end{aligned}$$

Böylece yeterince küçük $|\xi_1 - \xi_2|$ için

$$|\hat{f}(\xi_1) - \hat{f}(\xi_2)| \leqslant |\hat{f}(\xi_1) - \hat{g}(\xi_1)| + |\hat{f}(\xi_2) - \hat{g}(\xi_2)| + |\hat{g}(\xi_1) - \hat{g}(\xi_2)| \leqslant \varepsilon$$

olduğu gözükür.

Teorem 1.2. Eğer $f_k \in L_1(\mathbb{R}^1)$, $f \in L_1(\mathbb{R}^1)$ ve $\| f - f_k \|_1 \to 0$ ise $\hat{f}_k$ dizisi $\hat{f}$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

İspat. (1.1.2) dolayısı ile $|\hat{f}(\xi) - \hat{f}_k(\xi)| \leqslant \| f - f_k \|_1$ yazılabilir. Böylece düzgün yakınsaklık gösterilmiş olur.

Teorem 1.3. $f \in L_1(\mathbb{R}^1)$ ise $\lim_{\xi \to \pm\infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

İspat. Bu sonuç Lebesgue yakınsaklık teoreminden çıkmaz ama yukarıdaki yöntem hala kullanılabilir.

$\| f - g \| \leqslant (2\pi)^{1/2}\varepsilon/2$ eşitsizliğini sağlayan $\varepsilon > 0$ ve $g \in C_0^\infty$, her ξ için $|\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| \leqslant \varepsilon/2$ eşitsizliğini de sağlar. Kısmi integrasyon kullanarak

$$\begin{aligned} |\hat{g}(\xi)| &= (2\pi)^{-1/2} \int e^{-ix\xi} g(x)\, dx \\ &= -(2\pi)^{-1/2} \int (-i\xi)^{-1} e^{-ix\xi} g'(x)\, dx = (2\pi)^{-1/2} (i\xi)^{-1} \int e^{-ix\xi} g'(x)\, dx \end{aligned}$$

olduğu gösterilebilir. Bu yüzden eğer $|\xi|$ yeterince büyük ise

$$|\hat{g}(\xi)| = (2\pi)^{-1/2} |\xi|^{-1} \int |g'(x)|\, dx \leqslant \varepsilon/2$$

olur. Dolayısı ile yeterince büyük $|\xi|$ için

$$|\hat{f}(\xi)| \leqslant |\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| + |\hat{g}(\xi)| \leqslant \varepsilon$$

olduğu gözükür.

Tanım 1.1. $f, g \in L_1(\mathbb{R}^1)$ olmak üzere f ile g fonksiyonlarının **konvolüsyonu**

$$f * g(x) = \int f(x-y) g(y)\, dy$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.4. Eğer $f, g \in L_1(\mathbb{R}^1)$ ise $f * g \in L_1(\mathbb{R}^1)$ dir ve hemen hemen heryerde $f * g = g * f$ olur.

İspat. Açıkça $|f * g(x)| \leqslant \int |f(x-y)g(y)|\, dy$ dir. $x = z + y$ döşümü yaparak

$$\int |f * g(x)|\, dx \leqslant \iint |f(x-y)g(y)|\, dy\, dx = \iint |f(z)g(y)|\, dy\, dz = \| f \|_1 \| g \|_1,$$

yani $f * g \in L_1(\mathbb{R}^1)$ olduğunu göstermiş oluruz. Yine $y = x - z$ dönüşümü yaparak

$$f * g(x) = \int f(x-y) g(y)\, dy = \int g(x-z) f(z)\, dz = g * f(x)$$

istediğimiz eşitlik elde edilir.

Teorem 1.5. $f, g \in L_1(\mathbb{R}^1)$ ise $\widehat{f * g} = (2\pi)^{1/2}\ \hat{f}\hat{g}$.

İspat.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{x\to\xi}(f*g) &= (2\pi)^{-1/2}\int e^{-ix\xi}\ (f*g)(x)\ dx \\ &= (2\pi)^{-1/2}\iint e^{-ix\xi}\ f(x-y)g(y)\ dy\ dx \\ &= 2\pi)^{-1/2}\iint e^{-i(y+z)\xi}\ f(z)g(y)\ dy\ dz = (2\pi)^{1/2}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).\end{aligned}$$

Bu da teoremi ispatlar.

1.2 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ Schwartz uzayı

1.2.1 Hızla azalan fonksiyonlar

Tanım 1.2. f sonsuz türevlenebilen bir fonksiyon ve her $k, m = 0, 1, 2, \ldots$,için $f^{(m)} = d^m f/dx^m$ olmak üzere

$$\sup_x |x^k f^{(m)}(x)| \leqslant c_{k,\,m}\ , \tag{1.2.1}$$

eşitsizliğini sağlayan $c_{k,\,m}$ sabitleri varsa $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$'dir denir.

Açık olarak $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ bir lineer uzaydır. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ ise her k, m ve bazı $\tilde{c}_{k,\,m}$ sabitleri için

$$|f^{(m)}(x)| \leqslant \tilde{c}_{k,\,m}(1+|x|)^{-1}\ .$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ uzayına Schwartz uzayı ve bu uzayın elemanlarına ise **hızla azalan fonksiyonlar** denir.

Yardımcı Teorem 1.2. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ ise her $p = 1, 2, \ldots$ için $f^{(p)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ ve $x^p f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ dir.

İspat. Teoremi $p = 1$ için ispatlamak yeterlidir. Genel ispat p üzerinden tümevarım uygulanarak elde edilir.

(2.4.2) den dolayı

$$|x^k \frac{d^m}{dx^m} f'| = |x^k \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} f| \leqslant c_{k,\,m+1}\ ,$$

$$|x^k \frac{d^m}{dx^m}(xf)| = |x^{k+1}\frac{d^m}{dx^m}f + mx^k \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}f| \leqslant c_{k+1,\,m} + mc_{k,\,m-1}\ .$$

Dolayısı ile $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ ise $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ ve $xf \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ dir.

Kolayca görülebilir ki

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^1) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \subset L_1(\mathbb{R}^1) \cap L_2(\mathbb{R}^1).$$

$C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, $L_1(\mathbb{R}^1)$ ve $L_2(\mathbb{R}^1)$ uzaylarında yoğun olduğundan $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ de bu uzaylarda yoğundur.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \subset L_1(\mathbb{R}^1)$ olduğundan $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ fonksiyonunun $\hat{f}$ Fourier dönüşümü iyi tanımlı, sınırlı ve sürekli fonksiyondur (Teorem 1.1).

1.2.2 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ uzayıda Fourier dönüşümü

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \subset L_1(\mathbb{R}^1)$ olduğundan dolayı $\hat{f}$ Fourier dönüşümü $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ için iyi tanımlı, sınırlı ve süreklidir.

Yardımcı Teorem 1.3. Her $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ için

$$(\hat{f})'(\xi) = -i\mathcal{F}_{x\to\xi}(xf), \qquad \xi\hat{f}(\xi) = -i\mathcal{F}_{x\to\xi}(f'). \tag{1.2.2}$$

İspat.

$$\begin{aligned}(\hat{f})'(\xi) &= (2\pi)^{-1/2}\int \frac{d}{d\xi}(e^{-ix\xi})f(x)\,dx \\ &= -(2\pi)^{-1/2}\int e^{-ix\xi}xf(x)\,dx = -i\mathcal{F}_{x\to\xi}(xf)\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi\hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-1/2}\int \xi e^{-ix\xi}f(x)\,dx = (2\pi)^{-1/2}\int i\frac{d}{dx}(e^{-ix\xi})f(x)\,dx \\ &= -(2\pi)^{-1/2}i\int e^{-ix\xi}f'(x)\,dx = -i\mathcal{F}_{x\to\xi}(f')\ ,\end{aligned}$$

Sonuç 1.1. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ ise $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ dir.

İspat. (1.2.2) eşitliklerinden dolayı

$$\frac{d^m}{d\xi^m}\hat{f}(\xi) = (-i)^m\mathcal{F}_{x\to\xi}(x^m f), \qquad \xi^k\hat{f}(\xi) = (-i)^k\mathcal{F}_{x\to\xi}(f^{(k)}).$$

Bu yüzden $\hat{f}$ sonsuz türevlenebilirdir ve

$$\xi^k \frac{d^m}{d\xi^m}\hat{f}(\xi) = (-i)^{m+k}\mathcal{F}_{x\to\xi}\left((x^m f)^{(k)}\right). \tag{1.2.3}$$

Yardımcı Teorem 1.2 dolayısı ile

$$(x^m f)^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k}(x^m f) \ \in \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \ \subset \ L_1(\mathbb{R}^1)$$

ve (1.2.3) fonksiyonları Teorem 1.1 dolayısı ile her k, m için sınırlıdırlar.

Örnek 1.1. $f(x) = \exp(-x^2/2)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü hesaplayalım.

Bu fonksiyon

$$f'(x) = -xf(x) \tag{1.2.4}$$

diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. (1.2.2) in ışığında (1.2.4) e Fourier dönüşümünü uygularsak

$$i\xi\hat{f}(\xi) = -i(\hat{f})'(\xi)$$

eşitliğini elde ederiz.

$$\left(\frac{\hat{f}(x)}{f(x)}\right)' = \frac{\hat{f}'(x)f(x) - \hat{f}(x)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{-x\hat{f}(x)f(x) + x\hat{f}(x)f(x)}{f^2(x)} = 0,$$

eşitliği ile bir $c_0 \geqslant 0$ için $\hat{f}(x) = c_0 f(x) = c_0 \exp(-x^2/2)$ olduğu gözükür. Son olarak

$$\begin{aligned} c_0^2 &= \left(\hat{f}(0)\right)^2 = (2\pi)^{-1}\left(\int e^{-x^2/2}\,dx\right)^2 = (2\pi)^{-1}\iint e^{-(x^2+y^2)/2}\,dxdy \\ &= (2\pi)-1\int_0^\infty\int_{\mathbf{S}^1} e^{-r^2/2}\,r\,d\theta dr = \int_0^\infty e^{-r^2/2}\,r\,dr = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-s/2}\,ds = 1, \end{aligned}$$

eşitliği dolayısı ile $\hat{f}(x) = f(x) = \exp(-x^2/2)$ olduğunu görebiliriz.

1.2.3 Ters Fourier dönüşümü

Yardımcı Teorem 1.4. $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^1) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ x ile çarpma ve türev alma işlemleri ile değişmeli olan lineer bir tasvir olsun. Yani

$$T(xf) = xTf\ , \quad (Tf)' = (Tf)', \ \ \forall f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1).$$

O zaman c bir sabit olmak üzere $Tf(x) = cf(x)$ dir.

İspat. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ ve $f(x_0) = 0$ olsun. Taylor formülünden dolayı bir $g \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ için $f(x) = (x - x_0)g(x)$ olur. $x \neq x_0$ için $g(x) = (x - x_0)^{-1}f(x)$ olur, böylece $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ olduğu gözükür. O zaman

$$Tf(x_0) = T((x - x_0)g(x))|_{x=x_0} = (x - x_0)Tg(x)|_{x=x_0} = 0\,.$$

T lineer bir tasvir olduğundan $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ ise $(Tf_1)(x_0) = (Tf_2)(x_0)$ olur. Bu yüzden herhangi bir f fonksiyonu için Tf in x_0 daki değeri yalnızca $f(x_0)$ a bağlıdır.

$f_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$, $f_0(x_0) = 1$ olacak şekilde bir fonksiyon ve $z_0 = Tf_0(x_0)$ olsun. T lineer bir tasvir olduğundan herhangi bir $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ için $Tf(x_0) = z_0 f(x_0)$ olur.

φ fonksiyonu her $x_0 \in \mathbb{R}^1$ için $\varphi(x_0) = z_0$ olacak şekilde tanımlansın. O zaman önceki sonuçtan dolayı $Tf(x) = \varphi(x)f(x)$ dir. $Tf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ olduğundan φ türevlenebilir. Buradan

$$\varphi f' = (Tf') = (Tf)' = (\varphi f)' = \varphi f' + \varphi' f, \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1).$$

Böylece $\varphi' \equiv 0$ yani φ sabit fonksiyondur.

Sonuç 1.2. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ ise

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi. \tag{1.2.5}$$

İspat. T tasvirini aşağıdaki gibi tanımlarsak

$$Tf(x) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi,$$

(1.2.2) ışığında

$$\begin{aligned}
xTf(x) &= (2\pi)^{-1/2} \int e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int -i\frac{d}{d\xi}(e^{ix\xi})\hat{f}(\xi)\, d\xi \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int ie^{ix\xi}(\hat{f})'(\xi)\, d\xi = T(xf)(x), \\
(Tf')(x) &= (2\pi)^{-1/2} \int e^{ix\xi} \widehat{f}'(\xi)\, d\xi \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int (i\xi)e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int \frac{d}{dx}(e^{ix\xi})\hat{f}(\xi)\, d\xi = (Tf)'(x).
\end{aligned}$$

Bu yüzden T Yardımcı teorem 1.4 ün koşullarını sağlar ve sabit bir c için

$$cf(x) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

$f(x) = \exp(-x^2/2)$ alırsak

$$(2\pi)^{-1/2} \int e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi = (2\pi)^{-1/2} \int e^{ix\xi} f(\xi)\, d\xi = \hat{f}(-x) = f(x),$$

olur ve bu da $c = 1$ olduğunu gösterir.

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} : f(\xi) \to (2\pi)^{-1/2} \int e^{ix\xi} f(\xi)\, d\xi$$

tasvirine ters Fourier dönüşümü denir. Açıkça $\mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x} = \hat{f}(-x)$ dir yani $\mathcal{F}^{-1}$ $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ den $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ üzerine bir tasvirdir. Böylece aşağıdaki teoremi kanıtlamış oluyoruz.

Teorem 1.6. Fourier dönüşümü $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ den $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ e 1-1 bir fonksiyondur ve ters dönüşüm (1.2.5) ile verilir.

1.3 L_1 Fourier dönüşümünün noktasal tersi

"İyi" f fonksiyonları için

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

olduğunu ispatladık. L_1 Fourier dönüşümü için esas zorluk $f \in L_1(\mathbb{R}^1)$ olması $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^1)$ olmasını gerektirmez. Bu yüzden integral yakınsak değildir. Basit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu bile bir ters örnektir (bu örnekte $\hat{f}(\xi) = 2(2\pi)^{-1/2}(i\xi)^{-1} sin\, \xi$ olur).

Teorem 1.7. $f \in L_1(\mathbb{R}^1)$ ve f parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer f nin x noktasında sonlu sağ ve sol limiti varsa

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = (2\pi)^{-1/2} \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi\,. \tag{1.3.1}$$

İspat. $\hat{f}$ sürekli olduğundan (Teorem 1.1), (1.3.1) eşitliğinin sağındaki sonlu bir aralık üzerindeki integral anlamlıdır. (1.3.1) eşitliğinin sağındaki $(-R, R)$ üzerinde alınmış integrale $f_R(x)$ dersek, Fubini teoreminden

$$\begin{aligned} f_R(x) &= (2\pi)^{-1} \int_{-R}^{R} \int e^{-iy\xi} f(y)\, dy\, e^{ix\xi}\, d\xi = (2\pi)^{-1} \int_{-R}^{R} \int e^{i(x-y)\xi} f(y)\, dy\, d\xi \\ &= (2\pi)^{-1} \int \frac{e^{i(x-y)R} - e^{-i(x-y)R}}{i(x-y)} f(y)\, dy = \pi^{-1} \int f(x-y) \frac{\sin yR}{y} dy\,. \end{aligned}$$

$(\sin yR)/y$ çift fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} \pi^{-1} \int f(x-y) \frac{\sin yR}{y}\, dy &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2} \frac{\sin yR}{y}\, dy \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin yR}{y}\, dy \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{f(x+y) - f(x+0)}{2y} \right. &\left. + \frac{f(x-y) - f(x-0)}{2y} \right) \sin yR\, dy \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{\infty} \frac{f(x+y) + f(x-y)}{2y} \sin yR dy. \quad (1.3.2) \end{aligned}$$

$\sin yR = (e^{iyR} - e^{-iyR})/2i$ ve

$$g(y) = \begin{cases} (f(x+y) + f(x-y))/2y\,, & y \geqslant \pi, \\ 0, & y < \pi \end{cases}$$

fonksiyonu $L_1(\mathbb{R}^1)$ den olduğundan dolayı (1.3.2) eşitliğinin sağ tarafındaki 3. terim Teorem 1.3 ten dolayı sıfıra gider. 2. terimin sıfıra gitmesi ise Riemann-Lebesgue teoremi yardımı ile gözükür. Geriye son olarak $R \to \infty$ iken

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin yR}{y}\, dy \to 1$$

olduğunu göstermek kalır ki bu da kompleks analizin standart bir formülüdür [14].

1.4 $L_2(\mathbb{R}^1)$ uzayında Fourier dönüşümü

1.4.1 $\mathbf{L_2}$ Fourier dönüşümünün problemleri

Her $f \in L_2(\mathbb{R}^1)$ için ne

$$\hat{f} = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-ix\xi} f(x)\, dx$$

tanımı her zaman anlamlı ne de

$$(2\pi)^{-1/2} \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} e^{-ix\xi} f(x)\, dx$$

limitinin olmduğu açık değildir. Yine de aşağıdaki teorem iyi bir L_2 Fourier dönüşümünün varolduğunu söylüyor.

Teorem 1.8. Eğer $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ ise

$$(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}) \tag{1.4.1}$$

dir.

İspat. Fubini teoreminden dolayı her $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ için

$$\begin{aligned}(\hat{f}, h) &= (2\pi)^{-1/2} \iint e^{-ix\xi} f(x)\, dx \bar{h}(\xi)\, d\xi \\ &= (2\pi)^{-1/2} \iint \overline{e^{ix\xi} h(\xi)}\, d\xi f(x)\, dx = (f, \mathcal{F}^{-1} h),\end{aligned}$$

olduğu gözükür (burada $\mathcal{F}^{-1}$ ters Fourier dönüşümüdür). $h = \hat{g}$ alırsak (1.4.1) eşitliğini elde ederiz.

(1.4.1) eşitliğinden dolayı

$$\| \hat{f} \|^2_{L_2(\mathbb{R}^1)} = \| f \|^2_{L_2(\mathbb{R}^1)} \tag{1.4.2}$$

olur, böylece $\hat{f}$ in her $f \in L_2(\mathbb{R}^1)$ için iyi tanımlı $L_2(\mathbb{R}^1)$ den bir fonksiyon olmasını bekleyebiliriz.

1.4.2 L_2 Fourier dönüşümünün tanımı

$f \in L_2(\mathbb{R}^1)$ olsun. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ uzayı $L_2(\mathbb{R}^1)$ içinde yoğun olduğundan bir $f_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ fonksiyon dizisi vardır ki $k \to \infty$ iken $\| f - f_k \|_{L_2(\mathbb{R}^1)} \to 0$ olur. O zaman $k, m \to \infty$ iken $\| f_m - f_k \|_{L_2(\mathbb{R}^1)} \to 0$ dır yani $\{f_k\}$, $L_2(\mathbb{R}^1)$ de bir Cauchy dizisidir. (1.4.2) eşitliğinden dolayı $k, m \to \infty$ iken $\| \hat{f}_m - \hat{f}_k \|_{L_2(\mathbb{R}^1)} \to 0$ olur. Bu da $\{\hat{f}_k\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu anlamına gelir. $L_2(\mathbb{R}^1)$ uzayı tam uzay olduğundan $\{\hat{f}_k\}$ dizisinin bir $g \in L_2(\mathbb{R}^1)$ limiti vardır. O zaman $\hat{f} = g$ olarak tanımlayabiliriz.

Elbette ki tanımlamamızın doğru olduğunu ispatlamamız gerekir. $g \in L_2(\mathbb{R}^1)$ fonksiyonu $\hat{f}_k$ tarafından dolayısı ile de f_k tarafından tek olarak belirlenir. Tek problem f fonksiyonuna yakınsak başka bir h_k dizisi aldığımızda g fonksiyonunun değişip değişmeyeceğidir. Öte yandan eğer f_k ve h_k f fonksiyonuna yakınsak ise $k \to \infty$ iken

$$\| \hat{f}_k - \hat{h}_k \|_{L_2(\mathbb{R}^1)} = \| f_k - h_k \|_{L_2(\mathbb{R}^1)} \to 0$$

olur bu yüzden $\{\hat{f}_k\}$ ve $\{\hat{h}_k\}$ dizilerinin limitleri aynıdır.

1.4.3 L_2 Fourier dönüşümünün özellikleri

Tanımdan dolayi (1.4.2) her $f \in L_2(\mathbb{R}^1)$ için sağlanır. Bu Fourier dönüşümünün $L_2(\mathbb{R}^1)$ uzayında normu (ve dolayısı ile metriği) koruduğu anlamına gelir. Hilbert uzayının bu şekildeki dönüşümlerine izometrik dönüşümler denir. İç çarpım sürekli olduğundan Parceval formülü herhangi $f, g \in L_2(\mathbb{R}^1)$ fonksiyonları için geçerlidir. Bu sonuç aşağıdaki gibi ispatlanabilir.

Yardımcı Teorem 1.5. Eğer A, H Hilbert uzayında lineer izometrik bir dönüşüm ise her $f, g \in H$ için $(Af, Ag) = (f, g)$ olur.

İspat. İç çarpımın özelliklerinden dolayı

$$(f,g) = \frac{1}{4} \parallel f+g \parallel^2 - \frac{1}{4} \parallel f-g \parallel^2 + \frac{i}{4} \parallel f+ig \parallel^2 - \frac{i}{4} \parallel f-ig \parallel^2 \quad (1.4.3)$$

olur ki buradan yardımcı teorem kolaylıkla görülür.

$f \in L_1(\mathbb{R}^1) \cap L_2(\mathbb{R}^1)$ ise f'in L_2 Fourier dönüşümü ile L_1 Fourier dönüşümünün aynı olduğu açık değildir. Bu sonucu aşağıdaki yardımcı teoremi kullanarak göstereceğiz.

Yardımcı Teorem 1.6. $f \in L_2(\mathbb{R}^1)$ olmak üzere

$$f_R(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leqslant R, \\ 0, & |x| > R \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım ve

$$\widetilde{f}_R = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-ix\xi} f_R(x)dx = 2\pi)^{-1/2} \int_{-R}^{R} e^{-ix\xi} f(x)dx$$

fonksiyonunu f_R fonksiyonunun L_1 Fourier dönüşümü olarak alalım. O zaman $\hat{f}$, f fonksiyonunun L_2 Fourier dönüşümü olmak üzere $R \to \infty$ iken
$\parallel \hat{f} - \widetilde{f}_R \parallel_{L_2(\mathbb{R}^1)} \to 0$ olur.

İspat. $\hat{f}_R$ fonksiyonu f_R fonksiyonunun L_2 fourier dönüşümü olsun. Sınırsız aralıklar üzerindeki integrallerin tanımından dolayı $R \to \infty$ iken
$\parallel f - f_R \parallel_{L_2(\mathbb{R}^1)} \to 0$ olur. Parseval formülünü kullanarak $\parallel \hat{f} - \hat{f}_R \parallel_{L_2(\mathbb{R}^1)} \to 0$ yazabiliriz. O zaman bir tek $\hat{f}_R = \widetilde{f}_R$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$h_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ ve $L_2(\mathbb{R}^1)$ uzayında $h_k \to f_R$ olsun. Açıktır ki h_k fonksiyonunun desteğini *supp* h_k olarak gösterirsek her k için *supp* $h_k \subset (-R-1, R+1)$ olacak

şekilde h_k'lar seçebiliriz. χ fonksiyonu $(-R-1, R+1)$ aralığının karakteristik fonksiyonu olsun. O zaman Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $k \to \infty$ iken

$$\| f_R - h_k \|_1 = \int |f_R(x) - h_k(x)|\, \chi(x)\, dx \leqslant \| \chi \|_2 \, \| f_R - h_k \|_2 \to 0$$

olur. Teorem 1.2'den dolayı $\hat{h}_k$ fonksiyonu $\widetilde{f}_R$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. Aynı zamanda $\{\hat{h}_k\}$ dizisi $\hat{f}_R$ fonksiyonuna L_2 anlamında yakınsaktır. Sınırlı kümeler üzerinde düzgün yakınsaklık ile L_2 anlamında yakınsaklık denk olduğundan her sınırlı küme üzerinde $\hat{f}_R = \widetilde{f}_R$ ve böylece heryerde $\hat{f}_R = \widetilde{f}_R$ olur.

Sonuç 1.3. $f \in L_1(\mathbb{R}^1) \cap L_2(\mathbb{R}^1)$ ise $\hat{f}$ L_2 Fourier dönüşümü ile f'in L_1 Fourier dönüşümüne denktir.

İspat. $\widetilde{f}_R$ fonksiyonu f_R fonksiyonunun L_1 Fourier dönüşümü olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \left| (2\pi)^{-1/2} \int e^{-ix\xi} f(x)\, dx - \widetilde{f}_R \xi \right| &= (2\pi)^{-1/2} \left| \int_{|x| \geqslant R} e^{-ix\xi} f(x)\, dx \right| \\ &\leqslant (2\pi)^{-1/2} \int_{|x| \geqslant R} |f(x)|\, dx \end{aligned}$$

$\int |f(x)|\, dx < \infty$ olduğundan eşitsizliğin sağındaki integral $R \to \infty$ iken sıfır olur. Bu da $R \to \infty$ iken $\widetilde{f}_R$ fonksiyonunun f fonksiyonunun L_1 Fourier dönüşmüne düzgün yakınsak olduğunu gösterir. Yardımcı teorem 1.6'nın ispatı ile aynı şekilde f'nin L_1 Fourier dönüşümünün $\hat{f}$ ile denk olduğunu gösterebiliriz.

1.5 Çok boyutlu Fourier integralleri

$f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ için Fourier integrali

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x.\xi}\, dx$$

şeklinde tanımlanabilir ([15], [2]). Burada $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ ise $x.\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \ldots + x_n\xi_n$ olarak tanımlanır. Bu tanımda integralin karşısında $(2\pi)^{-n/2}$ gibi bir terim yazmammak için Fourier dönüşümünü (1.1.1)'den farklı olarak $\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i x.\xi}\, dx$ gibi tanımladık. $L_1(\mathbb{R}^n)$ ve $L_2(\mathbb{R}^n)$'deki Fourier dönüşümünün özellikleri için [2]'e bakılabilir.

2. SÖZDE DİFERANSİYEL OPERATÖRLER

2.1 Tanım

Sözde diferansiyel operatör $f \mapsto T(f)$ şeklinde bir tasvirdir ve

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x,\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x.\xi}\, d\xi \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlanır [16]. Burada $\hat{f}$ fonksiyonu f fonksiyonunun Fourier dönüşümüdür;

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x.\xi}\, dx\ .$$

(2.1.1) deki $a(x,\xi)$ fonksiyonuna T operatörünün sembolü denir. a sembolünün önemini belirtmek amacı ile genellikle T operatörü yerine T_a yazacağız.

Eğer L aşağıdaki biçimde kısmi diferansiyel operatör olsun

$$L = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha .$$

L operatörü (2.1.1) formunda yazılabilir ve

$$a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(x)(2\pi i\xi)^\alpha,$$

olmak üzere $L = T_a$ olur. Bu örnekte sembol L operatörünün karakteristik polinomudur. L operatörünün tersini, genişlemesini veya başka özelliklerini tanımlamak, kısaca L için bir "fonksiyonel kalkülüs" geliştirebilmek amacı bizi (2.1.1) tanımına götürür.

Eğer a sembolü x değişkeninden bağımsızsa T_a bir *çarpan* operatördür:

$$\widehat{(T_a f)}(\xi) = a_1(\xi)\hat{f}(\xi),$$

a fonksiyonunun ξ den bağımsız olduğu durumda ise T_a bir *çarpım* operatörü olur

$$(T_a f)(x) = a_2(x)f(x).$$

2.2 S^m sembol sınıfı

Muğlak ifadelerden daha kesin ifedelere geçmek için (2.1.1) sözde diferansiyel operatörünün ve kullanılan sembol sınıflarının açık tanımınlarını vermemiz gerekir. İlk önce en çok kullanılan sınıf olan S^m sınıfının tanımını vereceğiz. Bir $a(x,\xi)$ fonksiyonu C^∞ bir fonksiyon ise ve her $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ve her α, β çoklu-indisi için

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leqslant A_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \tag{2.2.1}$$

diferansiyel eşitsizliğini sağlıyor ise S^m sınıfındandır denir. Örneğin a, ξ ye göre m. dereceden bir polinom ise (x değişkeninden bağımsız ise) (2.2.1) eşitsizliğini sağlar.

S^m sınıfından bir a sembolü için T_a operatörü başlangıç olarak $\mathcal{S}$ Schwartz fonksiyonları üzerinde tanımlanacak. Bu durumda (2.1.1) integrali mutlak yakınsak ve sonsuz türevlenebilirdir. Kısmi integrasyon kullanılarak $T_a(f)$ nin hızla azalan bir fonksiyon olduğu (Schwartz sınıfından olduğu) gösterilebilir.

$$(I - \triangle_\xi)e^{2\pi i x.\xi} = (1+4\pi^2|x|^2)e^{2\pi i x.\xi},$$

eşitliğini göz önüne alırsak ve

$$L_\xi = (1+4\pi^2|x|^2)^{-1}(I-\triangle_\xi)$$

operatörünü tanımlarsak $(L_\xi)^N e^{2\pi i x.\xi} = e^{2\pi i x.\xi}$ olur. Bu eşitliği (2.1.1) de yerine yazarsak ve gerekli kısmi integrasyonları yaparsak

$$(T_a f)(x) = \int (L_\xi)^N [a(x,\xi)\hat{f}(\xi)] e^{2\pi i x.\xi}\, d\xi$$

olduğunu görebiliriz ki buradan $T_a(f)$ in hızla azalan olduğu açıkça gözükür. Aynı argumanlar $T_a(f)$ in herhangi bir türevi için geçerli olacağından T_a nın $\mathcal{S}$ den $\mathcal{S}$ ye sürekli bir tasvir olduğunu görebiliriz.

Eğer $\{a_k\}$, S^m de noktasal yakınsak bir fonksiyon dizisi ise ve (2.2.1) eşitsizliğini k ya göre düzgün olarak sağlıyorsa o zaman her $f \in \mathcal{S}$ için $T_a(f) \to T_a(a)$ dır.

2.3 Genelleşmiş fonksiyonlar uzayında sözde diferansiyel operatörler

(2.1.1) integralini ifade etmenin alternatif bir yolu aşağıdaki iki katlı integraldir;

$$(T_a f)(x) = \iint a(x,\xi) e^{2\pi i \xi.(x-y)} f(y)\, dy d\xi\ . \tag{2.3.1}$$

(2.3.1) integrali ise $f \in \mathcal{S}$ olsa bile mutlak yakınsak olmak zorunda değildir. Bu zorluğu aşmak için verilen sembole kompakt destekli semboller ile yaklaşabiliriz. Bu amaçla $\gamma(0,0) = 1$ olacak şekilde bir $\gamma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ fonksiyonu seçelim. $a_\varepsilon(x,\xi) = a(x,\xi)\gamma(\varepsilon x, \varepsilon\xi)$ olsun. Eğer $a \in S^m$ ise a_ε fonksiyonları da S^m sınıfındandır ve (2.2.1) eşitsizliğini ε değişkenine göre $0 < \varepsilon < 1$ için düzgün olarak sağlarlar.

Önceki bölümde bahsettiğimiz gibi $T_{a_\varepsilon} \to T_a$ diyebiliriz. Buradaki yakınsaklık $f \in \mathcal{S}$ ve $\varepsilon \to 0$ için $\mathcal{S}$ uzayında $T_{a_\varepsilon}(f) \to T_a(f)$ anlamındadır. Aynı zamanda (2.3.1) tanımı a kompakt destekli olduğu zaman anlamlı olduğu için

$$(T_a f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint a_\varepsilon(x,\xi) e^{2\pi i \xi.(x-y)} f(y)\, dy d\xi$$

yazabiliriz. Bunlara ek olarak $f, g \in \mathcal{S}$ olduğunda gösterebiliriz ki

$$\langle T_a f, g \rangle = \langle f, T_a^* g \rangle . \tag{2.3.2}$$

Burada

$$(T_a^* g)(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint \bar{a}_\varepsilon(x,\xi) e^{2\pi i \xi.(y-x)} g(x)\, dx d\xi \tag{2.3.3}$$

ve $\langle f, g \rangle$ iç çarpımı $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\bar{g}(x)dx$ anlamındadır. T_a operatörünün $\mathcal{S}$ den $\mathcal{S}$ ye olduğunu gösterdiğimiz ispatı taklit ederek

$$L_x = (1 + 4\pi^2|x|^2)^{-1}(I - \triangle_x)$$

alırsak (2.3.3) integralinin sağ tarafı

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint (L_x)^N [\bar{a}_\varepsilon(x,\xi) g(x)] e^{2\pi i \xi.(y-x)}\, dx d\xi$$

olur ki buradan da T_a^* operatörünün $\mathcal{S}$ den $\mathcal{S}$ ye olduğu açıkça gözükür.

Böylece başlangıç olarak $\mathcal{S}$ den $\mathcal{S}$ ye tanımlanmış olan T_a operatörünü $\mathcal{S}$ test fonksiyonları üzerinde tanımlanmış genelleşmiş fonksiyonlar uzayından aynı uzaya bir operatöre genişletmiş olduk. T_a bu uzayda otomatik olarak (iç çarpımın özelliğinden dolayı) süreklidir.

2.4 $L_2(\mathbb{R}^n)$ uzayında sözde diferansiyel operatörler

Teorem 2.9. $a \in S^0$ ise başlangıçta $\mathcal{S}$ üzerinde tanımlanan T_a operatörü $L_2(\mathbb{R}^n)$ den aynı uzaya sınırlı bir operatöre genişletilebilir.

İspat. Teoremi ispatlamak için A sabiti f fonksiyonundan bağımsız olmak üzere

$$\| T_a(f) \|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \leqslant A \| f \|_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall f \in \mathcal{S} \tag{2.4.1}$$

olduğunu göstermemiz yeterlidir. $f \in L_2$ olsun ve L_2 uzayında $f_n \to f$ olacak şekilde $\mathcal{S}$ uzayından bir $\{f_n\}$ dizisi alalım. (4.2.9) eşitsizliğinden dolayı $T_a(f_n)$ dizisi L_2 normuna göre yakınsar. Böylece daha önce belirttiğimiz gibi $T_a(f_n)$ genelleşmiş fonksiyonlar anlamında $T_a(f)$ fonksiyonuna yakınsar.

(4.2.9) eşitsizliğinin ispatını ilk önce $a(x,\xi)$ sembolünün x değişkenine göre kompakt desteğinin olduğu durumda ele alalım. Bu kısıtlama bizim a sembolü üzerine x değişkenine göre Fourier dönüşümünü uygulamamızı mümkün kılıyor.

O zaman

$$\hat{a}(\lambda,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} a(x,\xi) e^{-2\pi i x.\,\lambda}\, dx$$

olmak üzere

$$a(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{a}(\lambda,\xi) e^{2\pi i \lambda.\, x}\, d\lambda$$

olur. a sembolünün x değişkenine göre kompakt desteği olduğundan $\hat{a}(\lambda,\xi)$ fonksiyonunu tanımlayan integral yakınsaktır. Kısmi interasyon kullanarak her α çoklu-indisi için

$$(2\pi i\lambda)^\alpha \hat{a}(\lambda,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_x^\alpha a(x,\xi)] e^{-2\pi i x.\,\lambda}\, dx$$

olduğunu ve ξ değişkenine göre düzgün olarak $|(2\pi i\lambda)^\alpha \hat{a}(\lambda,\xi)| \leqslant c_\alpha$ olduğunu gösterebiliriz. Sonuç olarak herhangi $N \geqslant 0$ için

$$\sup_\xi |\hat{a}(\lambda,\xi)| \leqslant A_N (1+|\lambda|)^{-N} \tag{2.4.2}$$

olur. O halde

$$(T^\lambda f)(x) = e^{2\pi i x.\,\lambda} (T_{\hat{a}(\lambda,\xi)} f)(x)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} (T_a f)(x) &= \int a(x,\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x.\,\xi}\, d\xi \\ &= \iint \hat{a}(\lambda,\xi) e^{2\pi i \lambda.\, x} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x.\,\xi}\, d\xi\, d\lambda = \int (T^\lambda f)(x) d\lambda \end{aligned}$$

yazabiliriz. Her λ için $T_{\hat{a}(\lambda,\xi)}$ bir çarpan operatör olduğundan Plancherel teoreminden dolayı

$$\| T_{\hat{a}(\lambda,\xi)} \|_{L_2} \leqslant \sup_\xi |\hat{a}(\lambda,\xi)| \,.\, \| \hat{f} \|_{L_2} = \sup_\xi |\hat{a}(\lambda,\xi)| \,.\, \| f \|_{L_2}$$

olduğu gözükür. (2.4.2) eşitsizliğini kullanarak $\| T^\lambda \| \leqslant A_N(1+|\lambda|)^{-N}$ yazabiliriz. $T_a = \int T^\lambda d\lambda$ olduğundan $N > n$ seçersek

$$\| T_a \| \leqslant A_N \int (1+|\lambda|)^N d\lambda < \infty$$

olur. Dolayısıyla (4.2.9) eşitsizliğini a sembolünün x değişkenine göre kompakt desteği olduğunda göstermiş oluyoruz.

Genel semboller için ispat yapmak için T_a operatörünü tekil integral operatörü olarak algılayabiliriz. Yani

$$(T_a f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,z) f(x-z)\, dz \tag{2.4.3}$$

yazabiliriz. Burada integrali şu şekilde anlayacağız; Her x için $k(x,\cdot)$ Fourier dönüşümü $a(x,\cdot)$ fonksiyonu olan genelleşmiş fonksiyonudur:

$$a(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,z) e^{-2\pi i x.\xi}\, dz.$$

Böylece (2.4.3), $k(x,z)$ genelleşmiş foksiyonu ile $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonun konvolüsyonunun x deki değeri olarak düşünülebilir.

Burada ispatlayacağımız 0 noktasının dışında $k(x,\cdot)$ genelleşmiş fonksiyonunun sonsuzda hızla azalan fonksiyonlar gibi davrandığıdır. Bu yüzden (2.4.3) integrali eğer f fonksiyonunun desteğinin tümleyeninin boş olmadığını varsayarsak destek dışındaki x ler için yakınsaktır. Daha standart yazılışı kullanmak için, $K(x,y) = k(x, x-y)$ olarak alırsak f fonksiyonunun desteğinin dışındaki x ler için

$$(T_a f)(x) = \int K(x,y) f(y)\, dy$$

olur. 0 noktasının dışında $k(x,\cdot)$ aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bir fonksiyondur; her $|z| \geqslant 1$ ve $N > 0$ için

$$|k(x,z)| \leqslant A_N |z|^{-N}. \tag{2.4.4}$$

Bunu görmek için

$$(T_a f)(x) = \int a(x,\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x.\xi}\, d\xi$$

yazarız. Test fonksiyonlarının ve genelleşmiş fonksiyonların konvolüsyonlarının standart özelliklerinden dolayı bu integral, $k(x,\cdot)$ Fourier dönüşümü $a(x,\cdot)$ fonksiyonu olan genelleşmiş fonksiyon olmak üzere, (2.4.3) de yazdığımız gibi $[k(x,\cdot) * f\,](x)$'e eşittir. $k(x,\cdot)$'u z'nin fonksiyonları üzerine etkiyen

bir genelleşmiş fonksiyon olarak düşünürsek $(-2\pi iz)^\alpha k(x,\cdot)$, $\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümüne eşit olur. (2.2.1) eşitsizliğinden dolayı $|\alpha| \geqslant n+1$ için $\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)$ fonksiyonu ξ'ye göre integre edilebilir. Bu da $k(x,\cdot)$'in 0 noktası uzağında $k(x,z)$ fonksiyonuna eşit olduğunu ve $N > n$ ise $|z|^N|k(x,z)| \leqslant A_N$ olduğunu gösterir. Böylece (2.4.4) eşitsizliğini ispatlamış oluruz.

$a(x,\xi)$ fonksiyonunun x değişkenine göre kompakt desteği olmadığı durum için Teorem (2.9)'in ispatına geri dönelim. Başlangıç olarak herhangi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve her $N \geqslant 0$ için

$$\int_{|x-x_0|\leqslant 1} |(T_a f)(x)|^2 dx \leqslant A_N \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2\, dx}{(1+|x-x_0|)^N} \tag{2.4.5}$$

olduğunu göstermeye çalışacağız.

İlk olarak $x_0 = 0$ durumunu ele alalım. Bunun için f fonksiyonunu $f = f_1 + f_2$ şeklinde ikiye ayıralım öyle ki f_1 fonksiyonunun desteği $B(3)$'ün içinde, f_2 fonksiyonu ise $B(2)$'nin dışında kalsın. Aynı zamanda f_1 ve f_2 sonsuz türevli ve $|f_2|, |f_2| \leqslant |f|$ olsun. $B(1)$'in içinde $\eta \equiv 1$ olacak şekilde bir $\eta \in C_0^\infty$ alalım. O zaman $\eta T_a(f_1) = T_{\eta a}(f_1)$ dir ve $\eta(x)a(x,\xi)$ sembolünün de x değişkenine göre kompakt desteği vardır yani önceki sonuç geçerli olur:

$$\int_{B(1)} |T_a f_1|^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |T_{\eta a} f_1|^2 \leqslant A \int_{\mathbb{R}^n} |f_1|^2 \leqslant \int_{B(3)} |f|^2\,. \tag{2.4.6}$$

$x \in B(1)$ olduğunda ise f_2 fonksiyonunun desteği $B(2)$'nin dışında olduğu için (2.4.3) sağlanır:

$$(T_a f_2)(x) = \int_{\overline{B(2)}} k(x, x-z) f_2(z)\, dz.$$

$x \in B(1)$ ve $z \notin B(2)$ olduğunda $|x-z| \geqslant 1$ olduğundan (2.4.4) eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} |(T_a f_2)(x)| &\leqslant A \int_{\overline{B(2)}} |f(z)||z|^{-N}\, dz \\ &\leqslant A \int |f(z)|(1+|z|)^{-N}\, dz \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. Schwarz eşitsizliğinden dolayı $N > n$ için

$$\int_{B(1)} |(T_a f_2)(x)|^2\, dx \leqslant A \int |f|x||^2 (1+|x|)^{-N}\, dx \tag{2.4.7}$$

olur. $T_a(f) = T_a(f_1) + T_a(f_2)$ olduğundan (2.4.6) ve (2.4.4)'ü birleştirirsek $x_0 = 0$ için (2.4.5)'i ispatlamış oluruz.

(2.4.5) eşitsizliğini genel x_0 için ispatlamak için şu özelliği görmemiz gerekir; sözde diferansiyel operatörler genel olarak ötelemeden bağımsız olmasalar da (2.2.1) sınıfı öyledir. Bunu görebilmek için $h \in \mathbb{R}^n$ için τ_h öteleme operatörünü tanımlayalım:

$$(\tau_h f)(x) = f(x-h) \ .$$

Kolayca görülebileceği gibi

$$a_h(x,\xi) = a(x-h,\xi)$$

olmak üzere

$$\tau_h T_a \tau_{-h} = T_{a_h}$$

olur. a_h da a gibi aynı (2.2.1) özelliğini h'ye göre düzgün olarak sağlar. Bundan dolayı (2.4.5) eşitsizliği a yerine a_h yazarsak sınırı h'den bağımsız olarak sağlanır. Öyleyse $h = x_0$ yazarsak (2.4.5) eşitsizliği A_N sınırı x_0 dan bağımsız olarak elde edilir.

Son olarak (2.4.5)'i $N > n$ olmak üzere x_0'a göre integre edersek ve integrasyon sırasını değiştirirsek (4.2.9) eşitsizliğini elde etmiş ve böylece teoremi ispatlamış oluruz.

2.5 $S^m_{\rho,\,\delta}$ sembol sınıfları

Sözde diferansiyel operatörleri daha genel sınıflarda incelemek için Hörmander sınıfları adıyla anılan $S^m_{\rho,\,\delta}$ sembol sınıflarını tanımlayalım.

Tanım 2.3. Bir $a(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $S^m_{\rho,\,\delta}$ sınıfındandır ancak ve ancak $a \in C^\infty$ve bir $A_{\alpha,\,\beta}$ sabiti vardır ki bütün α, β çoklu indisleri için

$$|\,\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x,\xi)| \leqslant A_{\alpha,\,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \qquad 0 \leqslant \rho, \delta \leqslant 1 \tag{2.5.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sembolü $S^m_{\rho,\,\delta}$ sınıfından olan sözde diferansiyel operatörlerin sınıfı $L^m_{\rho,\,\delta}$ ile gösterilir.

$\rho = 1$ ve $\delta = 0$ olduğunda önceki bölümlerde incelediğimiz S^m sembol sınıfını elde ederiz.

Teorem 2.10. [16, 3] $0 \leqslant \delta \leqslant \rho < 1$ olmak üzere sembolleri $S^m_{\rho,\,\delta}$ sınıfından olan sözde diferansiyel operatörler L_2'den L_2'ye süreklidir.

2.6 Fourier integral operatörleri

Sözde diferansiyel operatörlerin daha genel hali olan bir operatör şu şekilde tanımlanabilir:

$$F_\Phi(au) = \iint e^{i\Phi(x,\xi)} a(x,\xi) u(x)\, dx d\xi. \tag{2.6.1}$$

Tanım 2.4. [1] Eğer $\Phi(x,\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash 0))$fonksiyonu reel değerli, pozitif, ξ değişkenine göre 1. dereceden homojen olsun ayrıca

$$\Phi'_{x,\xi} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_n} \right)$$

hiçbiryerde sıfır olmuyorsa o zaman Φ fonksiyonuna **faz fonksiyonu**denir.

Tanım 2.5. [1] (2.6.1) integraline eğer $a \in S^m_{\rho,\delta}$ ve Φ bir faz fonksiyonu ise bir **Fourier integral operatörü** adı verilir.

3. HİLBERT DÖNÜŞÜMÜ ve CAUCHY İNTEGRAL OPERATÖRLERİ

3.1 Hilbert dönüşümü

$h(t)$, $\mathbb{R}$ üzerinde reel değerli C^1 den bir fonksiyon ve $h(t) = O(t^{-2})$ olsun. Yani $|t| \to \infty$ iken $h(t)$ fonksiyonu t^{-2} gibi davransın.

Cauchy integrali

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)}{t-\zeta}\, dt = f(\zeta) \tag{3.1.1}$$

bir $f(\zeta)$ fonksiyonu veya iki analitik fonksiyon tanımlar diyebiliriz. Birincisi üst yarı düzlemde ve diğeri alt yarı düzlemde. ζ'yı üst yarı düzleme sınırlayalım.

$\zeta = \xi + i\eta$ yazarsak f fonksiyonunun reel ve sanal kısımlarını şu şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(t)(t-\bar{\zeta})}{|\, t-\zeta|^2}\, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\eta}{(\xi-t)^2+\eta^2}\, h(t)\, dt + \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\xi-t)}{(\xi-t)^2+\eta^2}\, h(t)\, dt. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

h fonksiyonunun özelliklerini kullanarak aşağıdaki özellikler gösterilebilir;

(i) $|\zeta| \to \infty$ iken

$$|f(\zeta)| = o(|\zeta|^{-1}). \tag{3.1.3}$$

(ii) $f(\zeta)$ fonksiyonu üst yarı düzlemde süreklidir ve üst yarı düzlemdeki değerlerinin reel kısmı h fonksiyonuna eşittir:

$$f(\xi) = h(\xi) + ik(\xi). \tag{3.1.4}$$

Burada k fonksiyonu h cinsinden Cauchy esas değer integrali ile verilir:

$$k(\xi) = \frac{1}{\pi}\, pv \int \frac{h(t)}{\xi - t}\, dt \equiv (Hh)(\xi). \tag{3.1.5}$$

(3.1.5)'te tanımlanan H tasvirine Hilbert dönüşümü denir [17]. Hilbert dönüşümü (3.1.3) eşitliğini sağlayan üst yarı düzlemdeki analitik fonksiyonların sınır değerlerinin reel ve sanal kısımları arasındaki bağıntıyı verir.

Teorem 3.11. Hilbert dönüşümü $L_2(\mathbb{R}^1)$ uzayından $L_2(\mathbb{R}^1)$ uzayına bir izometridir.

İspat. $Im\ \zeta > 0$ olduğu bölgede f^2 analitik olduğundan, Cauchy teoreminden dolayı bölgedeki her kapalı kontur için

$$\oint f^2\, d\zeta = 0 \tag{3.1.6}$$

olur. Konturumuzu $\xi + i\epsilon$, $-R \leqslant \xi \leqslant R$ doğru parçası ve $\xi = R\cos\theta$, $R\sin\theta + \epsilon$ yarı çemberi olarak seçelim ve $\epsilon \to 0$ ve $R \to \infty$ iken limit alalım. (3.1.3) eşitliğinden dolayı (3.1.6) integralinin yarı çamberi üzerindeki değeri $R \to \infty$ için 0 olur iken (3.1.3) ve (3.1.4)'ten doğru parçası üzerindeki değeri

$$\int_{\mathbb{R}} (h + ik)^2\, d\xi = 0 \tag{3.1.7}$$

olur. (3.1.7)'in bize

$$\int h^2\, d\xi = \int k^2\, d\xi$$

eşitliğini verir. Bu da teoremin ispatı için gereken sonuçtur.

Teorem 3.12. $1 < p < \infty$ için H Hilbert dönüşümü $L_p(\mathbb{R}^1)$'den $L_p(\mathbb{R}^1)$'e sınırlı operatördür.

İspat. İlk önce $p = 4$ durumunu ve f^4 analitik fonksiyonunu ele alalım. Cauchy teoreminden dolayı

$$\oint f^4\, d\zeta = 0 \tag{3.1.8}$$

dır. (3.1.6)'daki konturun aynısını seçersek ve $\epsilon \to 0$ ve $R \to \infty$ alırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz

$$\int_{\mathbb{R}} (h(\xi) + ik(\xi))^4\, d\xi = 0.$$

Bu bağıntının reel kısmı ise

$$\int_{\mathbb{R}} (h^4 - 6h^2k^2 + k^4)\, d\xi = 0 \tag{3.1.9}$$

olur. İyi bilinen bir eşitsizliğe göre a, b, c pozitif ise $ab \leqslant ca^2/2 + b^2/2c$ dir. Bunu $a = h^2$, $b = k^2$ ve $c = 6$ için uygularsak

$$6h^2k^2 \leqslant 18h^4 + \frac{1}{2}k^4$$

olur. Bunu (3.1.9)'da yerine koyarsak

$$\frac{1}{2}\int k^4\, d\xi \leqslant 17\int h^4\, d\xi$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu da bize $H : L_4 \to L_4$ operatörünün sınırlı olduğunu gösterir.

Aynı yöntem her p çift sayısı için geçerlidir. M. Riesz konvekslik teoremini ([17]) kullanarak $2 \leqslant p < \infty$ için H operatörünün L_p'den L_p'ye sınırlı olduğu sonucuna ulaşırız.

Teoremin ispatını tamamlamak için H operatörünün transpozesi H' ile H'nin normunun aynı olduğunu görmemiz gerekir. Aynı zamanda

$$H' = -H \tag{3.1.10}$$

dir. Eğer H operatörü $L_p \to L_p$ ise H' operatörü $(L_p)' \to (L_p)'$ olur ve

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1 \tag{3.1.11}$$

olmak üzere L_p uzayının dual uzayı $L_{p'}$ uzayıdır. (3.1.10) ve (3.1.11)'den dolayı $H : L_{p'} \to L_{p'}$ operatörünün normu $H : L_p \to L_p$ operatörünün normuna eşittir. $2 < p < \infty$ için H operatörünün normu sonlu olduğu için aynı zamanda $1 < p' < 2$ için de sonludur. Böylece ispatı tamamlamış oluruz.

3.2 Cauchy tekil integral operatörleri

Γ düzlem üzerinde $[0, 1]$ doğru parçasına homeomorfik olan doğrultulabilir ve yönlendirilmiş bir eğri olsun. S_Γ Cauchy tekil itegral operatörü şu şekilde tanımlanır ([18], [19]):

$$(S_\Gamma f)(t) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \qquad (t \in \Gamma).$$

Burada integral $\Gamma(t, \varepsilon) \stackrel{def}{=} \{\tau \in \Gamma : |\tau - t| < \varepsilon\}$ olmak üzere şu şekilde anlaşılır:

$$\int_\Gamma \frac{f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \stackrel{def}{=} \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{\Gamma\setminus\Gamma(t,\varepsilon)} \frac{f(\tau)}{\tau - t}\, d\tau.$$

3.2.1 Sınırlılık

Γ eğrisi üzerinde $|d\tau|$ uzunluk ölçüsünü tanımlayalım. Ağırlık ise $w^{-1}(\{0,\infty\})$ kümesinin ölçüsü sıfır olmak üzere

$$w : \Gamma \to [0,\infty]$$

şeklinde bir fonksiyondur. S_Γ operatörünü

$$\| f \| \overset{def}{=} \left(\int_\Gamma |f(\tau)|^p w(\tau)^p |d\tau| \right)^{1/p}$$

normu ile tanımlanmış $L_p(\Gamma, w)$ ağırlıklı Lebesgue uzayı üzerinde düşünelim.

Teorem 3.13. [18] S_Γ operatörü $L_p(\Gamma, w)$, $1 < p < \infty$ üzerinde sınırlıdır $\Leftrightarrow$ Γ bir Carleson eğrisidir ve w bir Muckenhoupt ağırlığıdır.

Γ eğrisine $|\Gamma(t,\varepsilon)|$, $\Gamma(t,\varepsilon)$'un (uzunluk) ölçüsü olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$|\Gamma(t,\varepsilon)| \leqslant C_\Gamma \varepsilon \tag{3.2.1}$$

olacak şekilde bir $C_\Gamma < \infty$ sabiti varsa bir Carleson eğrisi denir. Bir w ağırlığına ise eğer $1/p + 1/q = 1$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\left(\int_{\Gamma(t,\varepsilon)} w(\tau)^p |d\tau| \right)^{1/p} \left(\int_{\Gamma(t,\varepsilon)} w(\tau)^{-q} |d\tau| \right)^{1/q} \leqslant C_w \varepsilon \tag{3.2.2}$$

olacak şekilde bir $C_w < \infty$ sabiti bulunabiliyorsa Muckenhaupt ağırlığı denir [18]. Hölder eşitsizliğini kullanarak

$$|\Gamma(t,\varepsilon)| \leqslant \left(\int_\Gamma (t,\varepsilon) w(\tau)^p |d\tau| \right)^{1/p} \left(\int_\Gamma (t,\varepsilon) w(\tau)^{-q} |d\tau| \right)^{1/q}$$

olduğunu gösterebiliriz. Böylece (3.2.2) eşitsizliğinden (3.2.1) eşitsizliği de çıkar. Bu yüzden (3.2.2) eşitsizliğini sağlayan (Γ, w) ikililerinin kümesine A_p dersek yukarıdaki teoremi tekrar ifade edebiliriz:

$S_\Gamma \in \mathcal{B}(L_p(\Gamma, w)) \quad \Leftrightarrow \quad 1 < p < \infty \quad$ ve $\quad (\Gamma, w) \in A_p$, burada $\mathcal{B}(L_p(\Gamma, w))$ ile $L_p(\Gamma, w)$ uzayında sınırlı operatörlerin kümesi gösterilmiştir.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ HILBERT DÖNÜŞÜMLERİ

4.1 Giriş

Hilbert dönüşümlerinin uzun bir tarihi vardır ([5] ve [17]). Geçen bölümde tanımladığımız gibi Hilbert dönüşümü Cauchy esas değeri ile tanımlanmış bir operatördür:

$$H(f)(x) = pv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\, dt.$$

H operatörü $p = 1$ ve $p = +\infty$ için $L_p(R^1) \stackrel{def}{=} \{f(x) \mid \ f(x)$ ölçülebilir ve $\int_{-\infty}^{\infty} |\, f|^p \ dx < +\infty\}$ olmak üzere $L_p(R^1)$'den $L_p(R^1)$'e sınırsız ve yine önceki bölümde gördüğümüz gibi $1 < p < +\infty$ için ise sınırlı olur. Hilbert dönüşümünün $\mathbb{R}^1$ reel sayılar uzayının bir altkümesine kısıtlamaları ve çeşitli uzaylara (ağırlıklı Sobolev uzayları, Besov ve Besov-Nikolski uzayları, vb.) genişlemeleri birçok kişi tarafından incelenmiştir ([20], [21], [22]). Özellikle Hilbert dönüşümlerinin sözde diferansiyel operatörlerle bağlantısı tezde ele aldığımız sorular açısından ilginçtir. Örneğin [10]'de J. Alvarez ve R. Duran sembolü $R^2 \times R^2$ uzayının konik bir altkümesinin karakteristik fonksiyonu olan bir sınıf sözde diferansiyel operatörü incelemişlerdir. c(x) tanım kümesi $D \subset R^2$ olan reel değerli bir fonksiyon ve $\Gamma = \{(x,\, \xi) = (x_1,\, x_2,\, \xi_1,\, \xi_2) \mid x \in D,\ \xi_2 > c(x)\xi_1\}$ kümesi $R^2 \times R^2$ uzayında bir koni olmak üzere

$$L(f)(x) = \int e^{-2\pi i x.\,\xi} \Psi_\Gamma(x,\, \xi) \hat{f}(\xi)\, d\xi \tag{4.1.1}$$

operatörleri ile ilgilenmişlerdir. [10]'de D tanım kümesini ve $c(x)$ fonksiyonunu seçerek $1 \leq p \leq 2$ için $L_p(R^2)$ uzayında sınırız (4.1.1) şeklinde bir operatör inşa etmişlerdir. Γ kümesi R^2 uzayının konik bir altkümesi olduğunda L'nin sınırlılığı Carleson-Hunt teoreminin bir sonucudur ([10]). Bazı ek koşullar altında $w(x) = (w_1(x),\ w_2(x)) \in R^2$ ve

$$\tilde{H}(f)(x) = pv \int_{-\infty}^{\infty} f(x + tw(x)) \frac{dt}{t}, \tag{4.1.2}$$

olmak üzere L operatörünü

$$L(f)(x) = \frac{i}{2\pi}\tilde{H}(f(x)) + \frac{1}{2}f(x),$$

şeklinde yazmak [10] makalesinin ana fikridir. $\tilde{H}(f)$ operatörü tam olarak Hilbert dönüşümü değildir ama Hilbert dönüşümünün bir genelleştirilmesi olarak düşünülebilir. Gerçekten $w(x) \in R^1$ ve $w(x) \equiv 1$ alırsak $\tilde{H}(f)$ Hilbert dönüşümü olur.

Benzer sınıftan operatörler aynı zamanda [9] ve [8]'de incelenmiştir. Bu makalelerde sözde diferansiyel ve Fourier integral operatörleri için sınırsızlık kriterleri vermek üzere

$$H'(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{k}(z) f(\beta(x)z - \alpha(x))\, dz, \tag{4.1.3}$$

operatörü kulanılmıştır. Burada $k(z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$, $\hat{k}(z)$ $k(z)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü ve $\alpha(x)$, $\beta(x)$ reel değerli foksiyonlardır. $S^0_{1,1}$ ve $S^0_{\rho,1}(\rho < 1)$ sınıflarında sembolleri olan sözde diferansiyel ve Fourier integral operatörleri için sınırsızlık kriterlerini elde etmek üzere [8] ve [9]'da kullanılan metodlar (4.1.3) operatörünün özelliklerine dayanır. Buna benzer operatörler yerel çözülebilirlik problemleri ve komütatör değerlendirmelerinde karşımıza çıkar ([4], [23] ve [23]'deki referanslar). Yukarıda bahsedilen nedenler bizi aşağıdaki operatörü tanımlamaya yönlendirdi:

$$A(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(z)\, f((\beta(x) \circ z) + \alpha(x))\, dz. \tag{4.1.4}$$

Burada

$$\beta(x) \circ z = \begin{cases} (\beta_1(x)z_1, \ldots, \beta_n(x)z_n), & z, \beta(x) \in R^n \\ (z\beta_1(x), \ldots, z\beta_n(x)) \quad , & z \in R^1,\ \beta(x) \in R^n \end{cases}$$

şeklindedir. z ve $\beta(x) \in R^n$ olma durumunda $\beta(x) \circ z$ formülü Hadamard çarpımıdır. Bu metinde A operatörüne *genelleştirilmiş Hilbert dönüşümü* diyeceğiz. Tanımladığımız bu dönüşüm Hilbert dönüşümlerini, (4.1.2) ile verilen $\tilde{H}$ operatörlerini ve (4.1.3) ile verilen H' operatörlerini kapsar. (4.1.4) ile tanımlanan operatörlere Genelleştirilmiş Hilbert dönüşümleri adını vermemizin nedeni budur.

4.2 Genelleştirilmiş Hilbert dönüşümleri için sınırlılık ve sınırsızlık kriterleri

Tezde elde edilen sonuçlar bu bölümde verilmiştir. İlk önce A operatörü için basit bir sınırlılık koşulu kriteri verelim.

Önerme 4.1. Eğer

$$\int_{R^n} \frac{1}{\beta_1(x)\dots\beta_n(x)}\, dx \;<\; +\infty$$

ise

$$\|A(f)(x)\|_{L_2(R^n)} \le C \;\|\; f(s) \;\|_{L_2(R^n)} .$$

İspat. s yerine $(\beta(x)\circ z)+\alpha(x)$ yazıp Hölder eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\|A(f)(x)\|^2_{L_2(R^n)} &= \int_{R^n}\left|\int_{R^n} k(z)\; f((\beta(x)\circ z)+\alpha(x))\; dz\right|^2 dx \\
&\le \int_{R^n}\left(\int_{R^n} |k(z)\; f((\beta(x)\circ z)+\alpha(x))\;|\, dz\right)^2 dx \\
&\le \|\; k(z)\;\|^2_{L_2(R^n)} \int_{R^n}\int_{R^n} |f((\beta(x)\circ z)+\alpha(x))|^2\; dzdx \\
&= \|\; k(z)\;\|^2_{L_2(R^n)} \int_{R^n}\int_{R^n} |f(s)|^2 \frac{1}{\beta_1(x)\dots\beta_n(x)}\; dsdx \\
&= \|\; k(z)\;\|^2_{L_2(R^n)} \int_{R^n} \frac{1}{\beta_1(x)\dots\beta_n(x)}\, dx \int_{R^n} |f(s)|^2\; ds. \\
&= C^2 \;\|\; f(s)\;\|^2_{L_2(R^n)} .
\end{aligned}$$

Şimdi genelleştirilmiş Hilbert dönüşümlerinin sınırsızlığıyla ilgili temel sonucumuzu verelim.

Teorem 4.14. A en azından $x \in I_\delta \stackrel{def}{=} ((0,\delta)\times\ldots\times(0,\delta)) \subset R^n$, $\delta < 1$ için

$$A(f)(x) = \int_{R^n} k(z)\; f((\beta(x)\circ z)+\alpha(x))\; dz \tag{4.2.1}$$

şeklinde verilmiş bir operatör olsun. Burada $x = (x_1,\dots,x_n)$, $\alpha(x) = (\alpha_1(x),\dots,\alpha_n(x))$ ve $\beta(x) = (\beta_1(x),\dots,\beta_n(x))$ şeklindedir.
Eğer

1. herhangi $m = 1,2,\dots$ ve her $i = 1,2,\dots,n$ için $x_i \to 0^+$ iken

$$\frac{x_i-\alpha_i(mx)}{\beta_i(mx)} \to +\infty \quad ve \quad \frac{-x_i-\alpha_i(mx)}{\beta_i(mx)} \to -\infty$$

oluyorsa,

2. herhangi $\lambda \in (0,1)$, $\forall x \in I_\delta$ ve her $i = 1, 2, \ldots, n$.
için,

$$\frac{\lambda - \alpha_i(mx)}{\beta_i(mx)} \qquad ve \qquad \frac{-\lambda - \alpha_i(mx)}{\beta_i(mx)}$$

fonksiyonları sırası ile azalan ve artan fonksiyonlar olsun,

3. $\int_{R^n} k(z)\, dz = 1$, $\forall x \in I_\delta$ ve her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\beta_i(x) \neq 0$

olursa o zaman A operatörü $L_2(R^n)$ uzayında sınırlı bir operatöre genişletilemez.

İspat. 3. koşul ve Riemann integralinin tanımından dolayı öyle bir N_0 vardır ki her $N \geq N_0$ için

$$\left| \int_{-N}^{+N} \cdots \int_{-N}^{+N} K(z)\, dz_1 \ldots dz_n \right| \geq \delta \tag{4.2.2}$$

olur.

Eğer f_ε fonksiyonunu

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x_i \in [-\varepsilon, +\varepsilon] \quad for \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n \\ 0, & x_i \notin [-\varepsilon, +\varepsilon] \quad for \quad \exists i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak

$$\begin{aligned} A(f_\varepsilon)(x) &= \int_{R^n} K(z)\, f_\varepsilon((\beta(x) \circ z) + \alpha(x))\, dz \\ &= \int_{\frac{-\varepsilon - \alpha_1(x)}{\beta_1(x)}}^{\frac{\varepsilon - \alpha_1(x)}{\beta_1(x)}} \cdots \int_{\frac{-\varepsilon - \alpha_n(x)}{\beta_n(x)}}^{\frac{\varepsilon - \alpha_n(x)}{\beta_n(x)}} K(z)\, dz_1 \ldots dz_n \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\varepsilon_k \geq 0$ ve $k \to \infty$ iken $\varepsilon_k \to 0$ olmak üzere

$$A(f_{\varepsilon_k})(x) = \int_{\frac{-\varepsilon_k - \alpha_1(x)}{\beta_1(x)}}^{\frac{\varepsilon_k - \alpha_1(x)}{\beta_1(x)}} \cdots \int_{\frac{-\varepsilon_k - \alpha_n(x)}{\beta_n(x)}}^{\frac{\varepsilon_k - \alpha_n(x)}{\beta_n(x)}} K(z)\, dz_1 \ldots dz_n \tag{4.2.3}$$

şeklinde olur.

1. koşuldan dolayı herhangi m = 1, 2, ... ve her $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$\frac{\varepsilon_k - \alpha_i(m\varepsilon_k, \ldots, m\varepsilon_k)}{\beta_i(m\varepsilon_k, \ldots, m\varepsilon_k)} \geq N_0, \tag{4.2.4}$$

$$\frac{-\varepsilon_k - \alpha_i(m\varepsilon_k, \ldots, m\varepsilon_k)}{\beta_i(m\varepsilon_k, \ldots, m\varepsilon_k)} \leq -N_0, \tag{4.2.5}$$

ve $m\varepsilon_k \leq \delta < 1$ olacak şekilde bir $\varepsilon_k \geq 0$ sayısı vardır. 2. koşul ve (4.2.4), (4.2.5) eşitsizliklerinden dolayı her $i = 1, 2, \ldots, n$ ve $0 < x_i \leq m\varepsilon_k$ için

$$\frac{\varepsilon_k - \alpha_i(x)}{\beta_i(x)} \geq \frac{\varepsilon_k - \alpha_i(m\varepsilon_k, \ldots, m\varepsilon_k)}{\beta_i(m\varepsilon_k, \ldots, m\varepsilon_k)} \geq N_0, \tag{4.2.6}$$

$$\frac{-\varepsilon_k - \alpha_i(x)}{\beta_i(x)} \leq \frac{-\varepsilon_k - \alpha_i(m\varepsilon_k, \ldots, m\varepsilon_k)}{\beta_i(m\varepsilon_k, \ldots, m\varepsilon_k)} \leq -N_0, \tag{4.2.7}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Son olarak (4.2.2), (4.2.3), (4.2.6), ve (4.2.7)'yi kullanarak

$$\| Af_{\varepsilon_k} \|^2_{L_2(R^n)} = \int_{R^n} |Af_{\varepsilon_k}|^2 \, dx \geq \int_0^{m\varepsilon_k} \cdots \int_0^{m\varepsilon_k} |Af_{\varepsilon_k}|^2 \, dx_1 \ldots dx_n \geq \delta^2 m^n \varepsilon_k^n \tag{4.2.8}$$

sonucunu elde ederiz.

Eğer A operatörünün $L_2(R^n)$ uzayında sınırlı olduğunu kabul edersek o zaman bir $C \geq 0$ sabiti için

$$\| Af \|_{L_2(R^n)} \leq C \| f \|_{L_2(R^n)} \tag{4.2.9}$$

olur. Böylece $f = f_{\varepsilon_k}(x)$ için

$$\delta^2 m^n \varepsilon_k^n \leq \| Af_{\varepsilon_k}(x) \|^2_{L_2(R^n)} \leq C^2 \| f_{\varepsilon_k}(x) \|^2_{L_2(R^n)} = C^2 \varepsilon_k^n$$

eşitsizliğine ulaşırız. Bu eşitsizlikten dolayı herhangi m için $\delta^2 m^n \leq C^2$ olur. Bu ise (4.2.9) ile çelişir ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Şimdi teorem 4.14'in koşullarını sağlayan $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonlarına örnek verelim.

Örnek 4.2. $n \in N$ olmak üzere $\alpha(x) = (x^{2n}, \ldots, x^{2n})$ ve $\beta(x) = (x^{2n}, \ldots, x^{2n})$ fonksiyonları açıkça teorem 4.14'in koşullarını sağlar.

4.3 A operatörü ile Fourier integral operatörleri arasında bir bağlantı

Bu bölümde genelleştirimiş Hilbert dönüşümleri ile Fourier integral operatörlerinin kanonik dönüşümler denen bir alt sınıfı arasında bir bağlantı elde edeceğiz. A operatörü, $k(z)$ fonksiyonu uygun olarak seçildiğinde bir Fourier integral operatörü olur.

Eğer $k(z) = \hat{l}(z) = \int_{R^n} l(s)\, e^{-iz.s}\, ds$ olursa

$$\begin{aligned} A(f)(x) &= \int_{R^n} k(z)\, f((\beta(x) \circ z) + \alpha(x))\, dz \\ &= \int_{R^n} \int_{R^n} e^{-iz.s} l(s)\, f((\beta(x) \circ z) + \alpha(x))\, dsdz. \end{aligned}$$

Her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\beta_i(x) z_i + \alpha_i(x) = y_i$ alırsak

$$A(f)(x) = \int_{R^n} \int_{R^n} e^{-i\ \frac{y_1 - \alpha_1(x)}{\beta_1(x)} s_1 + \ldots + \frac{y_n - \alpha_n(x)}{\beta_n(x)} s_n}\ l(s)\, f(y)\, \frac{1}{\beta_1(x) \ldots \beta_n(x)}\, dsdy.$$

Şimdi $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\xi_i = \frac{s_i}{\beta_i(x)}$ dönüşümünü yaparsak

$$\begin{aligned} A(f)(x) &= \int_{R^n} \int_{R^n} e^{-i(y - \alpha(x)).\xi} l(\beta(x) \circ \xi)\, f(y)\, d\xi dy \\ &= \int_{R^n} e^{i\, \alpha(x).\xi}\, l(\beta(x) \circ \xi) \left[\int_{R^n} f(y)\, e^{-i\, y.\xi} dy \right] d\xi \\ &= \int_{R^n} e^{i\, \alpha(x).\xi}\, l(\beta(x) \circ \xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi \end{aligned}$$

operatörünü elde ederiz ki bu da sembolü $p\,(x,\, \xi) = l(\beta(x) \circ \xi)$ ve faz fonksiyonu $\alpha(x).\xi$ olan Fourier integral operatörüdür. Teorem 4.14'den dolayı uygun $\beta(x)$ ve $\alpha(x)$ foksiyonları seçilirse A operatörü $L_2(R^n)$'de sınırlı bir operatöre genişletilemez.

$S^0_{1,\,1}(R^1 \times R^1)$ sınıfından $p\,(x,\, \xi) = a(x)\, l(\beta(x) \circ \xi) = a(x)\, k(b(|x|)x\xi)$ formunda sembolü olan sınırsız Fourier integral operatörü örneği [8]'de verilmiştir. Burada $a(x)$ kompakt destekli $C^\infty(R^1)$'den bir fonksiyondur. Bir teoremden dolayı ([6][9]) $k(t) \in \mathcal{S}$, $\left[-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right]$ üzerinde $k(t) = 1$, $b(t)$ fonksiyonu $[0,\, 1]$ kümesi üzerinde sürekli ve aşağıdaki koşulları sağlıyorsa

$$b \in C^\infty(0,\, 1], \quad b(0) = 0, \quad b'(t) > 0\ in\ (0,\, 1],$$

$$\left|b^{(n)}(t)\right| \leq C_n.t^{-n} \quad in\ (0,\, 1],\ n = 1,\, 2, \ldots\,,$$

$[-1,\, 1] \times R^1_\xi$ üzerinde tanımlı $k(b(|x|)x\xi) \in C^\infty$ fonksiyonu için $[-1,\, 1] \times R^1_\xi$ üzerinde ve $k,\, l,\, j = 0,\, 1,\, 2, \ldots,$ için $C_{j,\,k,\,l}$ sabitler olmak üzere

$$\left|\partial^j_x \partial^k_\xi \left[k(b(|x|)x\xi)x^l\right]\right| \leq C_{j,\,k,\,l}(1 + |\xi|)^{j-k-l}.\, \left[b\left(\frac{1}{1 + |\xi|}\right)\right]^{-l}$$

olur ([8], [9]). Bu da $k(b(|x|)x\xi)$ fonksiyonu $S^0_{1,\,1}([-1,\, 1] \times R^1)$ sınıfının elemanıdır anlamına gelir. Açıkça bu fonksiyonu kompakt destekli $a(x) \in C^\infty$ fonksiyonu ile çarparak $p(x,\, \xi) \in S^0_{1,\,1}(R^1 \times R^1)$ sembolünü elde ederiz.

R^n uzayında ise

$$p(x, \xi) = \prod_{i=1}^{n} a(x_i) k(b(|\,x|)|\,x|\,\xi_i)$$

fonksiyonu faz fonksiyonu $\alpha(x).\xi$ şeklinde olan sınırsız bir Fourier integral operatörün $S^0_{1,\,1}(R^n \times R^n)$ sınıfından sembolü olarak gözükmektedir. Burada a ve b fonksiyonları tek boyutlu uzaydaki gibi tanımlanmıştır.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada genelleştirilmiş Hilbert dönüşümleri tanımı verilmiş ve bu dönüşümlerin sınırlılık problemleri ile ilgilenilmiştir.

Genelleştirilmiş Hilbert dönüşümlerinin sınırlı olması için basit bir koşul verildikten sonra bu dönüşümlerin L_2 uzayına sınırlı genişlemesi bulunamayan geniş bir sınıfı tanımlanmıştır. Bu da tezin esas sonucunu oluşturur.

Genelleştirilmiş Hilbert dönüşümlerinin Fourier integral operatörleri ile olan bağlantısı gösterilip, sembolü $S^0_{1,1}$ Hörmander sınıfından olan bazı Fourier integral operatörlerinin de bu sınıftan olduğu sonucuna varılmıştır.

Hilbert dönüşümlerinin de kapsayan Cauchy tekil integral operatörlerinin spektral yapısı literatürde çok incelenmemiş olup üzerine çalışılmaya açıktır.

KAYNAKLAR

[1] **Shubin, M. A.**, 2001. Pseudodifferential Operators and Spectral Theory, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

[2] **Stein, E. M. and Weiss, G.**, 1971. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, New Jersey.

[3] **Treves, F.**, 1981. Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators, Vol. 1 Pseudodifferential Operators, Plenum Press, New York.

[4] **Treves, F.**, 1981. Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators, Vol. 2 Fourier Integral Operators, Plenum Press, New York.

[5] **Hörmander, L.**, 1985. The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Springer Verlag, Berlin.

[6] **Hörmander, L.**, 1988. Pseudo-differential operators of type 1, 1, *Commun. in Partial Differential Equations*, **13**(9), 1085-1111.

[7] **Hörmander, L.**, 1989. Continuity of pseudo-differential operators of type 1, 1, *Commun. in Partial Differential Equations*, **14**(2), 231-243.

[8] **Hasanov, M.**, 1998. A class of Unbounded Fourier Integral Operators, *Jour. Math. Anal. App.*, **225**, 641-651.

[9] **Kumano-go, H.**, 1970. A problem of Nirenberg on pseudo-differential operators,*Comm. Pure App. Math.*, **23**, 115-121.

[10] **Alvarez, J. and Durán, R.**, 1988. L^p continuity of pseudo-differential operators with discontinuous symbol, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **104**, 165-168.

[11] **Hörmander, L.**, 1971. On L_2 continuity of pseudo-differential operators, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **24**, 529-535.

[12] **Calderon, A. P. and Vaillancourt, R.**, 1972. On the boundedness of pseudo-differential operators,*J. Math. Soc. Japan*, **23**, 374-378.

[13] **Safarov, Y.**, 2005. Lecture notes : Fourier Analysis, King's College London.

[14] **Ablowitz, M. J. and Fokas, A. S.**, 2003. Complex Variables : Introduction and Applications, Cambridge University Press, Cambridge.

[15] **Dym, H. and McKean, H. P.**, 1972. Fourier Series and Integrals, Academic Press, New York and London.

[16] **Stein, E. M.**, 1993. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals, Princeton University Press, New Jersey.

[17] **Lax, P.**, 2002. Functional Analysis, Wiley-Interscience.

[18] **Böttcher, A. and Karlovich, Y. I.**, 1997. Carleson Curves, Muckenhoupt Weights, and Toeplitz Operators, Birkhäuser Verlag, Berlin.

[19] **Böttcher, A. and Karlovich, Y. I.**, 2001. Cauchy's singular integral operator and its beautiful spectrum, *Oper. Theory Adv. Appl.*, **129**, 109–142.

[20] **Elliott, D. and Okada, S.**, 2004. The finite Hilbert transform and wighted Sobolev spaces, *Math. Nachr.,* **266**, 34-47.

[21] **Gohberg, I. and Krupnik, N.**, 1992. One-dimensional Linear Singular Integral Equations, Birkhäuser-Verlag, Basel.

[22] **Jørsboe, O. G. and Mejlbro, L.**, 1982. The Carleson-Hunt Theorem on Fourier Series, Lecture Notes in Math., vol. 911, Springer-Verlag, Berlin and New York.

[23] **Hasanov, M.**, 2001. On local invertible operators in $L^2(R^1, H)$, *Math. Nachr.*, **228**, 145-154.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında İstanbul'da doğdu. 1996 yılında Kadıköy Anadolu Lisesi'den ve 2002 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik lisans programından mezun oldu. 2002 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Matematik bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı ve yine aynı bölüme araştırma görevlisi olarak atandı. Halen bu görevine devam etmektedir.