İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU MANİFOLDLAR VE HİPERYÜZEYLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Hanife ÇOLAKOĞLU
(509031002)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 8 Mayıs 2006
Tezin Savunulduğu Tarih : 14 Haziran 2006

Tez Danışmanı : Yrd. Doç.Dr. Elif ÖZKARA CANFES
Prof.Dr. Abdülkadir ÖZDEĞER (K.H.Ü.)
Doç. Dr. Uğur DURSUN (İ.T.Ü.)

Mayıs 2006

ÖNSÖZ

Bu çalışma boyunca bana yardımcı olan, ilgisini ve desteğini eksik etmeyen değerli hocam Yard. Doç. Dr. Elif ÖZKARA CANFES'e ve bana her zaman destek olan aileme teşekkür ederim.

Mayıs, 2006 Hanife Çolakoğlu

İÇİNDEKİLER

ÖZET iv
SUMMARY viii

1. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU MANİFODLAR **1**

1.1. Semi-Simetrik Metrik Konneksiyon 1
1.2. S_n'in Konneksiyon Katsayılarının Varlığı 1
1.3. S_n'in Eğrilik Tensörü ve Eğrilik Tensörünün Özellikleri 5
1.4. Bianchi Özdeşlikleri 7
1.5. Ricci Tensörü ve Skaler Eğrilik 9

2. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU MANİFODLARIN HİPERYÜZEYLERİ **11**

2.1. Semi-Simetrik Metrik Konneksiyonlu Manifoldların Hiperyüzeyleri 11
2.2. Gauss ve Mainardi-Codazzi Denklemleri 14

3. REKÜRAN SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU MANİFOLDLARLAR VE HİPERYÜZEYLERİ **18**

3.1. Reküran Semi-Simetrik Metrik Konneksiyonlu Manifoldlar 18
3.2. Reküran Semi-Simetrik Metrik Konneksiyonlu Manifoldların Hiperyüzeyleri 20

4. SONUÇ VE ÖNERİLER **24**

KAYNAKLAR **25**

ÖZGEÇMİŞ **26**

SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU MANİFOLDLAR VE HİPERYÜZEYLERİ

ÖZET

Bu çalışmanın birinci bölümünde semi simetrik metrik konneksiyonlu manifoldlara ilişkin tanımlara yer verilmiştir.

V_n, C^∞ sınıfından diferansiyellenebilen n boyutlu, g metrikli bir manifold ve ∇, V_n'de simetrik olmayan lineer bir konneksiyon olsun.

X ve Y, V_n'de herhangi iki vektör alanı olmak üzere ∇ konneksiyonunun burulma tensörü,

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{1}$$

şeklindedir.

Π 1-form olmak üzere burulma tensörü,

$$T(X,Y) = \Pi(Y)X - \Pi(X)Y \tag{2}$$

olan ve

$$\nabla g = 0 \tag{3}$$

şartını sağlayan manifoldlara semi simetrik metrik konneksiyonlu manifold denir ve S_n ile gösterilir.

$\overset{\circ}{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunu göstermek üzere, ∇ ile $\overset{\circ}{\nabla}$ arasında

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \Pi(Y)X - g(X,Y)P \tag{4}$$

bağıntısı mevcuttur.

$K(X,Y)Z$ Riemann eğrilik tensörü olmak üzere S_n'in $R(X,Y)Z$ eğrilik tensörü

$$R(X,Y)Z = K(X,Y)Z - \alpha(Y,Z)X + \alpha(X,Z)Y - g(Y,Z)AX + g(X,Z)AY \tag{5}$$

şeklindedir.

Burada,

$$\alpha(X,Y) = (\nabla_X \Pi)(Y) - \frac{1}{2}\Pi(P)g(X,Y) \tag{6}$$

ve

$$g(AX,Y) = \alpha(X,Y) \tag{7}$$

dir.

S_n'in R(X,Y,Z,U) eğrilik tensörü

$$R(X,Y,Z,U) = -R(X,Y,U,Z) \tag{8}$$

$$R(X,Y,Z,U) = -R(Y,X,Z,U) \tag{9}$$

özelliklerini sağlamaktadır.

S_n'de birinci Bianchi ve ikinci Bianchi özdeşlikleri sırasıyla,

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X &= [(\nabla_Z \Pi)(Y) - (\nabla_Y \Pi)(Z)]\, X \\ &+ [(\nabla_X \Pi)(Z) - (\nabla_Z \Pi)(X)]\, Y \\ &+ [(\nabla_Y \Pi)(X) - (\nabla_X \Pi)(Y)]\, Z \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \nabla_X R(U,Y)Z + \nabla_Y R(U,Z)X + \nabla_Z R(U,X)Y &= 2\Pi(X)R(U,Y)Z \\ &+ 2\Pi(Y)R(U,Z)X \\ &+ 2\Pi(Z)R(U,X)Y \end{aligned} \tag{11}$$

şeklindedir.

$K(X,Y)$ Levi-Civita konneksiyonuna göre Ricci tensörü olmak üzere semi simetrik metrik konneksiyonuna göre Ricci tensörü,

$$R(X,Y) = K(X,Y) - (n-2)\alpha(X,Y) + \beta g(X,Y) \tag{12}$$

şeklindedir. Burada $\beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha(E_i, E_i)$ dir.

K Riemann uzayının skaler eğriliği ve R Semi-simetrik metrik konneksiyonlu uzayın skaler eğriliği ise

$$R = K - 2(n-1)\beta \tag{13}$$

dir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde semi-simetrik metrik konneksiyonlu manifoldların hiperyüzeyleri incelenmiştir. Hiperyüzeylerle ilgili tanımlar yapılmıştır.

V_{n+1}, C^∞ sınıfından diferansiyellenebilen $(n+1)$ boyutlu bir manifold ve V_n de $i : V_n \to V_{n+1}$ diferansiyellenebilir daldırması ile V_{n+1} manifoldunun içinde yer alan n boyutlu diferansiyellenebilen bir manifold olsun. $i(V_n)$ görüntüsüne V_{n+1} manifoldunun hiperyüzeyi denir ve $i(V_n)$ görüntü kümesi V_n olarak tanımlanır.

i daldırmasının diferansiyelini $di = B$ olarak ifade edilsin. Bu durumda V_n hiperyüzeyindeki herhangi bir X vektör alanına B fonksiyonu uygulanırsa BX

vektör alanı V_{n+1} manifoldu içinde yer alır. V_{n+1}, $\tilde{g}$ metrik tensörü ile ve V_n hiperyüzeyi de g metrik tensörü ile tanımlanan Riemann manifoldlarıdır. X ve Y, V_n hiperyüzeyi üzerinde bulunan herhangi iki vektör alanı olmak üzere g metriği $g(X,Y) = \tilde{g}(BX, BY)$ şeklinde tanımlanır. V_{n+1}'deki herhangi bir vektör alanı için $BX = \tilde{X}$ olarak gösterilecektir.

$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{U})$ V_{n+1}'de semi simetrik metrik konneksiyona göre eğrilik tensörü, $m(X,Y)$ V_n'in ikinci esas formu ve N birim normal vektör alanı olmak üzere, semi-simetrik metrik konneksiyonlu manifoldların hiperyüzeyleri için, Gauss ve Mainardi Codazzi denklemleri, sırasıyla, aşağıdaki gibidir.

Gauss Denklemi,

$$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{U}) = R(X,Y,Z,U) - m(Y,Z)m(X,U) + m(X,Z)m(Y,U) \quad (14)$$

ve

Mainardi-Codazzi Denklemi,

$$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{N}) = (\nabla_X m)(Y,Z) - (\nabla_Y m)(X,Z) + m\left(\Pi(Y)X - \Pi(X)Y, Z\right) \quad (15)$$

şeklindedir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde reküran semi-simetrik metrik konneksiyonlu manifoldlar ve hiperyüzeyleri incelenmiştir.

Sıfırdan ve Π'den farklı herhangi bir Φ vektör alanı için, eğrilik tensörü,

$$\nabla_W R(X,Y,Z,U) = \Phi(W)R(X,Y,Z,U) \quad (16)$$

şartını sağlayan semi-simetrik metrik konneksiyonlu manifoldlara reküran semi-simetrik metrik konneksiyonlu manifoldlar denir ve RS_n ile gösterilir.

Reküran semi-simetrik metrik konneksiyonlu manifoldlar için aşağıdaki teoremler ispat edilmiştir.

Teorem V_n, reküran semi simetrik metrik konneksiyonlu manifold ise Φ tam formdur.

Teorem S_{n+1}'in S_n hiperyüzeyinde $R(X,Y,Z,U)$ eğrilik tensörü olmak üzere,

$$\begin{aligned}\nabla_W R(X,Y,Z,U) - \tilde{\Phi}(W)R(X,Y,Z,U) &= \nabla_W \Omega(X,Y,Z,U) \\ &- \tilde{\Phi}(W)\Omega(X,Y,Z,U) \\ &+ m(W,X)\tilde{R}(N,BY,BZ,BU) \\ &+ m(W,Y)\tilde{R}(BX,N,BZ,BU) \\ &+ m(W,Z)\tilde{R}(BX,BY,N,BU) \\ &+ m(W,U)\tilde{R}(BX,BY,BZ,N)\end{aligned} \quad (17)$$

sağlanır.

Teorem Reküran semi-simetrik metrik konneksiyonlu manifoldun hiperyüzeyi total geodezik ise hiperyüzey de reküran semi simetriktir.

Teorem S_n, RS_{n+1} reküran semi simetrik metrik konneksiyonlu manifoldun total geodezik hiperyüzeyi ise,

$$2\Pi(W) - \Phi(W) = \Psi(W) \tag{18}$$

olmak üzere,

$$\Psi(X)R(W,Y,Z,U)+\Psi(Y)R(W,Z,X,U)+\Psi(Z)R(W,X,Y,U) = 0 \tag{19}$$

dır.

MANIFOLDS WITH SEMI SYMMETRIC METRIC CONNECTION AND THEIR HYPERSURFACES

SUMMARY

In the first chapter of this work basic definitions are given about manifolds with semi symmetric metric connection.

Let V_n be an n dimensional differentiable manifold of class C^∞ and V_n has a metric g and ∇ be a linear connection in V_n.

The torsion tensor T of ∇ given by

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{1}$$

any vector fields X and Y.

When the torsion tensor satisfies

$$T(X,Y) = \Pi(Y)X - \Pi(X)Y \tag{2}$$

for a 1-form Π, the connection ∇ is said to be semi symmetric connection.

Let V_n be a differentiable manifold with Riemannian metric g satisfying the condition

$$\nabla g = 0. \tag{3}$$

Such a linear connection is called metric connection and is denoted by S_n.

If $\overset{\circ}{\nabla}$ is Levi-Civita connection then,

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \Pi(Y)X - g(X,Y)P \tag{4}$$

If $K(X,Y)Z$ is Riemann curvature tensor and $R(X,Y)Z$ is curvature tensor in S_n, then the following equation is satisfied;

$$R(X,Y)Z = K(X,Y)Z - \alpha(Y,Z)X + \alpha(X,Z)Y - g(Y,Z)AX + g(X,Z)AY \tag{5}$$

where

$$\alpha(X,Y) = (\nabla_X \Pi)(Y) - \frac{1}{2}\Pi(P)g(X,Y) \tag{6}$$

and

$$g(AX, Y) = \alpha(X, Y) \tag{7}$$

$R(X, Y, Z, U)$ curvature tensor in S_n satisfies the following properties,

$$R(X, Y, Z, U) = -R(X, Y, U, Z) \tag{8}$$

$$R(X, Y, Z, U) = -R(Y, X, Z, U) \tag{9}$$

First Bianchi and second Bianchi identities for S_n are, respectively,

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X &= [(\nabla_Z \Pi)(Y) - (\nabla_Y \Pi)(Z)]\, X \\ &+ [(\nabla_X \Pi)(Z) - (\nabla_Z \Pi)(X)]\, Y \\ &+ [(\nabla_Y \Pi)(X) - (\nabla_X \Pi)(Y)]\, Z \end{aligned} \tag{10}$$

and

$$\begin{aligned} \nabla_X R(U, Y)Z + \nabla_Y R(U, Z)X + \nabla_Z R(U, X)Y &= 2\Pi(X)R(U, Y)Z \\ &+ 2\Pi(Y)R(U, Z)X \\ &+ 2\Pi(Z)R(U, X)Y. \end{aligned} \tag{11}$$

Let $K(X, Y)$ be the Ricci tensor according to Levi-Civita connection. Then Ricci tensor of S_n is

$$R(X, Y) = K(X, Y) - (n-2)\alpha(X, Y) + \beta g(X, Y). \tag{12}$$

Where $\beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha(E_i, E_i)$.

Let K be the scalar curvature of the Levi-Civita connection. The scalar curvature R of S_n is

$$R = K - 2(n-1)\beta. \tag{13}$$

In the second chapte hypersurfaces of S_n are studied.

Let V_{n+1} be an $(n+1)$ dimensional differentiable manifold of class C^∞ and V_n an n dimensional differentiable manifold immersed in V_{n+1} by a differentiable immersion $i : V_n \to V_{n+1}$. We call the image $i(V_n)$ a hypersurface of V_{n+1} and identify $i(V_n)$ with V_n. The differential di of the immersion i will be denoted by B, so that, to a vector field X in V_n corresponds a vector field BX in V_{n+1} Suppose that the manifold V_{n+1} is a Riemannian manifold with metric tensor $\tilde{g}$. Then the hypersurface V_n is also a Riemannian manifold with the induced metric g defined by $g(X, Y) = \tilde{g}(BX, BY)$, X and Y being arbitrary vector fields in V_n.

Let $BX = \tilde{X}$ then the equations of Gauss and Mainardi Codazzi of hypersurfaces of S_n are, respectively,

$$\tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{U}) = R(X, Y, Z, U) - m(Y, Z)m(X, U) + m(X, Z)m(Y, U) \tag{14}$$

and

$$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{N}) = (\nabla_X m)(Y,Z) - (\nabla_Y m)(X,Z) + m(\Pi(Y)X - \Pi(X)Y,Z) \quad (15)$$

where $\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{U})$ is the curvature tensor of V_{n+1} according to semi symmetric metric connection, $m(X,Y)$ is the second fundamental form and N is the unit normal vector field.

In the third chapter of this work, recurrent manifolds with semi symmetric metric connection and their hypersurfaces is studied.

Let Φ be a non-zero vector field. If the curvature tensor of S_n satisfies,

$$\nabla_W R(X,Y,Z,U) = \Phi(W)R(X,Y,Z,U) \quad (16)$$

then S_n is called recurrent manifold with semi symmetric metric connection and denoted by RS_n.

For RS_n the following theorems are proved.

Theorem If V_n is recurrent with the recurrence vector field Φ, then Φ is gradient.

Theorem Let S_{n+1} be a recurrent space then the following relations holds for a hypersurface S_n of S_{n+1}.

$$\begin{aligned} \nabla_W R(X,Y,Z,U) - \tilde{\Phi}(W)R(X,Y,Z,U) &= \nabla_W \Omega(X,Y,Z,U) \\ &- \tilde{\Phi}(W)\Omega(X,Y,Z,U) \\ &+ m(W,X)\tilde{R}(N,BY,BZ,BU) \\ &+ m(W,Y)\tilde{R}(BX,N,BZ,BU) \\ &+ m(W,Z)\tilde{R}(BX,BY,N,BU) \\ &+ m(W,U)\tilde{R}(BX,BY,BZ,N). \end{aligned} \quad (17)$$

Theorem If the hypersurface of recurrent manifold with semi symmetric metric connection is totally geodesic, then the hypersurface is recurrent semi symmetric.

Theorem If S_n is totally geodesic hypersurface of RS_{n+1}, then

$$\Psi(X)R(W,Y,Z,U) + \Psi(Y)R(W,Z,X,U) + \Psi(Z)R(W,X,Y,U) = 0 \quad (18)$$

is satisfied, where

$$2\Pi(W) - \Phi(W) = \Psi(W). \quad (19)$$

1. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU MANİFOLDLAR

1.1 Semi-Simetrik Metrik Konneksiyon

V_n, C^∞ sınıfından diferansiyellenebilen n boyutlu bir manifold ve ∇, V_n'de simetrik olmayan lineer bir konneksiyon olsun.

X ve Y, V_n'de herhangi iki vektör alanı olmak üzere ∇ konneksiyonunun burulma tensörü,

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{1.1}$$

şeklindedir [1].

T burulma tensörü, Π 1-formu için

$$T(X,Y) = \Pi(Y)X - \Pi(X)Y \tag{1.2}$$

özelliğini sağlıyor ise ∇'ya semi simetrik konneksiyon denir.

V_n manifoldu üzerinde verilen bir g Riemann metriği ile ∇ konneksiyonu için,

$$\nabla g = 0 \tag{1.3}$$

ise bu lineer konneksiyona metrik konneksiyon denir.

Denklem (1.2) burulmalı ve denklem (1.3) şartını sağlayan manifoldlara semi simetrik metrik konneksiyonlu manifold denir [2] ve S_n ile gösterilir.

X, Y, Z vektör alanları için ∇ konneksiyonuna göre,

$$\nabla_X [g(Y,Z)] = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{1.4}$$

dir.

1.2 S_n'in Konneksiyon Katsayılarının Varlığı

∇, semi simetrik metrik konneksiyonunu ve $\overset{\circ}{\nabla}$ Riemann (Levi-Civita) konneksiyonunu göstermek üzere,

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + U(X,Y) \tag{1.5}$$

olsun. Buradan,

$$g(\nabla_X Y, Z) = g(\overset{\circ}{\nabla}_X Y, Z) + g(U(X,Y), Z) \tag{1.6}$$

elde edilir.

Y ve Z vektör alanlarının yerleri değiştirilirse,

$$\nabla_X Z = \overset{\circ}{\nabla}_X Z + U(X,Z) \tag{1.7}$$

$$g(Y, \nabla_X Z) = g(Y, \overset{\circ}{\nabla}_X Z) + g(Y, U(X,Z)) \tag{1.8}$$

bulunur.

(1.6) ile (1.8)ile verilen denklemler toplanırsa,

$$\nabla_X [g(Y,Z)] = \overset{\circ}{\nabla}_X [g(Y,Z)] + g(U(X,Y),Z) + g(Y,U(X,Z)) \tag{1.9}$$

elde edilir ve buradan da $\nabla_X [g(Y,Z)] = 0$ ve $\overset{\circ}{\nabla}_X [g(Y,Z)] = 0$ olduğundan,

$$g(U(X,Y),Z) + g(Y,U(X,Z)) = 0 \tag{1.10}$$

$$g(U(X,Y),Z) + g(U(X,Z),Y) = 0 \tag{1.11}$$

sonucuna ulaşılır.

denklem (1.11) de X , Y , Z vektör alanları üzerinde sıralı bir permütasyon uygulanırsa,

$$g(U(X,Y),Z) + g(U(X,Z),Y) = 0 \tag{1.12}$$

$$g(U(Z,X),Y) + g(U(Z,Y),X) = 0 \tag{1.13}$$

$$g(U(Y,X),Z) + g(X,U(Y,Z)) = 0 \tag{1.14}$$

elde edilir.

$T(X,Y)$ semi simetrik metrik konneksiyonun burulma tensörü olmak üzere denklem (1.5) den

$$T(X,Y) = U(X,Y) - U(Y,X) \tag{1.15}$$

şeklinde elde edilir.

$T(X,Y)$ tensörü ile Z vektör alanına g metriği uygulanırsa ve benzer şekilde X, Y, Z vektörlerinin yerleri değiştirilirse,

$$g(T(X,Y),Z) = g(U(X,Y),Z) - g(U(Y,X),Z) \tag{1.16}$$

$$g(T(Z,X),Y) = g(U(Z,X),Y) - g(U(X,Z),Y) \tag{1.17}$$

$$g(T(Z,Y),X) = g(U(Z,Y),X) - g(U(Y,Z),X) \tag{1.18}$$

elde edilir.

(1.16), (1.17) ve (1.18) denklemleri taraf tarafa toplanırsa,

$$g(T(X,Y),Z) + g(T(Z,X),Y) + g(T(Z,Y),X) = 2g(U(X,Y),Z) \tag{1.19}$$

bulunur.

$$g(T(Z,X),Y) = g(T'(X,Y),Z) \tag{1.20}$$

olmak üzere (1.19),

$$2g(U(X,Y),Z) = g(T(X,Y),Z) + g(T'(X,Y),Z) + g(T'(Y,X),Z) \tag{1.21}$$

şeklinde ifade edilebilir.

(1.21) den

$$U(X,Y) = \frac{1}{2}\left[T(X,Y) + T'(X,Y) + T'(Y,X)\right] \tag{1.22}$$

elde edilir.

(1.22) denkleminde elde edilen $U(X,Y)$ (1.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \frac{1}{2}\left[T(X,Y) + T'(X,Y) + T'(Y,X)\right] \tag{1.23}$$

bulunur.

Burulma tensörü,

$$T(Z,X) = \Pi(X)Z - \Pi(Z)X \tag{1.24}$$

olduğundan, denklem (1.20) de yerine yazılırsa,

$$g(\Pi(X)Z - \Pi(Z)X, Y) = g(T'(X,Y),Z) \tag{1.25}$$

$$g(\Pi(X)Z,Y) - g(\Pi(Z)X,Y) = g(T'(X,Y),Z) \tag{1.26}$$

elde edilir.

P bir vektör alanı olmak üzere $\Pi(Z) = g(Z, P)$ olarak tanımlansın.

$\Pi(Z)$ vektör bileşeni (1.26) de yerine yazılırsa sırasıyla

$$g(\Pi(X)Z, Y) - g(g(Z, P)X, Y) = g(T'(X, Y), Z) \tag{1.27}$$

$$g(\Pi(X)Z, Y) - g(Z, P)g(X, Y) = g(T'(X, Y), Z) \tag{1.28}$$

$$g(\Pi(X)Y, Z) - g(g(X, Y)P, Z) = g(T'(X, Y), Z) \tag{1.29}$$

bulunur.

ile verilen ifadelerden,

$$T'(X, Y) = \Pi(X)Y - g(X, Y)P \tag{1.30}$$

sonucuna ulaşılır.

Benzer şekilde,

$$T'(Y, X) = \Pi(Y)X - g(Y, X)P \tag{1.31}$$

yazılabilir.

(1.30) ve (1.31) ile verilen eşitlikler (1.23) de yerine yazılırsa $U(X, Y)$ tensörü

$$U(X, Y) = \Pi(Y)X - g(X, Y) \tag{1.32}$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak semi simetrik metrik konneksiyonlu uzayın konneksiyon katsayıları

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \Pi(Y)X - g(X, Y)P \tag{1.33}$$

olarak belirlenir.

Lokal koordinatlar kullanılarak, Γ^i_{jk}'lar S_n'in konneksiyon katsayılarını ve $\left\{{i \atop jk}\right\}$'lar Levi-Civita konneksiyonunun katsayılarını göstermek üzere, S_n'in konneksiyonu ile Levi Civita konneksiyonu arasındaki bağıntının

$$\Gamma^i_{jk} = \left\{{i \atop jk}\right\} + \delta^i_k \pi_j - \pi^i g_{jk} \tag{1.34}$$

olduğu görülür.

Burada Γ^i_{jk}'nın lokal koordinatlarda burulma tensörü,

$$T^i_{jk} = \pi_j \delta^i_k - \pi_k \delta^i_j \tag{1.35}$$

olarak bulunur.

1.3 S_n'in Eğrilik Tensörü ve Eğrilik Tensörünün Özellikleri

$K(X,Y)Z$ Riemann manifoldunun eğrilik tensörü ve $R(X,Y)Z$ S_n'in eğrilik tensörü sırasıyla

$$K(X,Y)Z = \overset{\circ}{\nabla}_X \overset{\circ}{\nabla}_Y Z - \overset{\circ}{\nabla}_Y \overset{\circ}{\nabla}_X Z - \overset{\circ}{\nabla}_{[X,Y]} Z \tag{1.36}$$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{1.37}$$

dir.

Semi simetrik metrik konneksiyonlu manifoldun, eğrilik tensörü aşağıdaki gibi elde edilir.

(1.33) ile verilen ifade (1.37) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X \left(\overset{\circ}{\nabla}_Y Z + \Pi(Z)Y - g(Y,Z)P \right) \\ &+ \nabla_Y \left(\overset{\circ}{\nabla}_X Z + \Pi(Z)X - g(X,Z)P \right) \\ &- \left(\overset{\circ}{\nabla}_{[X,Y]} Z + \Pi(Z)[X,Y] - g([X,Y],Z)P \right) \end{aligned} \tag{1.38}$$

bulunur.

Böylece (1.33) den,

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \overset{\circ}{\nabla}_X \left(\overset{\circ}{\nabla}_Y Z + \Pi(Z)Y - g(Y,Z)P \right) \\ &+ \Pi \left(\overset{\circ}{\nabla}_Y Z + \Pi(Z)Y - g(Y,Z)P \right) X \\ &- g \left(X, \overset{\circ}{\nabla}_Y Z + \Pi(Z)Y - g(Y,Z)P \right) P \\ &- \overset{\circ}{\nabla}_Y \left(\overset{\circ}{\nabla}_X Z + \Pi(Z)X - g(X,Z)P \right) \\ &- \Pi \left(\overset{\circ}{\nabla}_X Z + \Pi(Z)X - g(X,Z)P \right) Y \\ &+ g \left(Y, \overset{\circ}{\nabla}_X Z + \Pi(Z)X - g(X,Z)P \right) P \\ &- \left(\overset{\circ}{\nabla}_{[X,Y]} Z + \Pi(Z)[X,Y] - g([X,Y],Z)P \right) \end{aligned} \tag{1.39}$$

elde edilir.

Buradan da,

$$R(X,Y)Z = K(X,Y)Z - \alpha(Y,Z)X + \alpha(X,Z)Y - g(Y,Z)AX + g(X,Z)AY \tag{1.40}$$

sonucuna ulaşılır.

Burada α tensör alanı olup,

$$\alpha(X,Y) = (\overset{\circ}{\nabla}_X \Pi)(Y) - \Pi(X)\Pi(Y) + \frac{1}{2}\Pi(P)g(X,Y) \tag{1.41}$$

veya

$$\alpha(X,Y) = (\nabla_X \Pi)(Y) - \frac{1}{2}\Pi(P)g(X,Y) \tag{1.42}$$

ve

$$g(AX,Y) = \alpha(X,Y) \tag{1.43}$$

şeklindedir.

X, Y, Z, U vektör alanları olmak üzere,

$$R(X,Y,Z,U) = g(R(X,Y)Z,U) \tag{1.44}$$

olarak tanımlansın.

Denklem (1.44) de $R(X,Y)Z$ ifadesi yerine (1.37)ile verilen yazılırsa,

$$R(X,Y,Z,U) = g(\nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z, U) \tag{1.45}$$

$$R(X,Y,Z,U) = g(\nabla_X(\nabla_Y Z), U) - g(\nabla_Y(\nabla_X Z), U) - g(\nabla_{[X,Y]}Z, U) \tag{1.46}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$R(X,Y,U,Z) = g(\nabla_X(\nabla_Y U), Z) - g(\nabla_Y(\nabla_X U), Z) - g(\nabla_{[X,Y]}U, Z) \tag{1.47}$$

bulunur.

Bunun yanısıra,

$$g(\nabla_X(\nabla_Y Z), U) = -g\left(Z, \nabla_X(\nabla_Y U)\right) \tag{1.48}$$

$$g(\nabla_Y(\nabla_X Z), U) = -g\left(Z, \nabla_Y(\nabla_X U)\right) \tag{1.49}$$

$$g(\nabla_{[X,Y]}Z, U) = -g\left(Z, \nabla_{[X,Y]}U\right) \tag{1.50}$$

olduğundan (1.46) ve (1.47) denklemleri toplanırsa,

$$R(X,Y,Z,U) + R(X,Y,U,Z) = 0 \tag{1.51}$$

bulunur.

Sonuç olarak,

$$R(X,Y,Z,U) = -R(X,Y,U,Z) \tag{1.52}$$

elde edilir.

(1.46) da U ve Z nin yeri değiştirilirse,

$$R(Y,X,Z,U) = g(\nabla_Y(\nabla_X Z),U) - g(\nabla_X(\nabla_Y Z),U) - g(\nabla_{[X,Y]}Z,U) \tag{1.53}$$

bulunur.

(1.46) ve (1.53) taraf tarafa toplanırsa,

$$R(X,Y,Z,U) + R(Y,X,Z,U) = -g(\nabla_{[X,Y]}Z,U) - g(\nabla_{[Y,X]}Z,U) \tag{1.54}$$

elde edilir.

$[X,Y] = -[Y,X]$ olduğundan,

$$R(X,Y,Z,U) + R(Y,X,Z,U) = 0 \tag{1.55}$$

dir.

Buradan,

$$R(X,Y,Z,U) = -R(Y,X,Z,U) \tag{1.56}$$

olduğu görülür.

1.4 Bianchi Özdeşlikleri

Semi simetrik metrik konneksiyonlu uzayda X, Y, Z vektör alanları olmak üzere, bu vektör alanları cinsinden eğrilik tensörü

$$R(X,Y)Z = K(X,Y)Z - \alpha(Y,Z)X + \alpha(X,Z)Y - g(Y,Z)AX + g(X,Z)AY \tag{1.57}$$

şeklindedir.

(1.57) denkleminde X, Y, Z devirsel olarak değiştirilirse,

$$R(Z,X)Y = K(Z,X)Y - \alpha(X,Y)Z + \alpha(Z,Y)X - g(X,Y)AZ + g(Z,Y)AX \tag{1.58}$$

$$R(Y,Z)X = K(Y,Z)X - \alpha(Z,X)Y + \alpha(Y,X)Z - g(Z,X)AY + g(Y,X)AZ \tag{1.59}$$

bulunur.

(1.57), (1.58) ve (1.59) ile verilen denklemler taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X &= K(X,Y)Z + K(Z,X)Y + K(Y,Z)X \\ &+ (\alpha(Z,Y) - \alpha(Y,Z))\, X \\ &+ (\alpha(X,Z) - \alpha(Z,X))\, Y \\ &+ (\alpha(Y,X) - \alpha(X,Y))\, Z \end{aligned} \tag{1.60}$$

elde edilir.

Birinci Bianchi özdeşliğinden;

$$K(X,Y)Z + K(Z,X)Y + K(Y,Z)X = 0 \tag{1.61}$$

yararlanarak,

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X &= (\alpha(Z,Y) - \alpha(Y,Z))\, X \\ &+ (\alpha(X,Z) - \alpha(Z,X))\, Y \\ &+ (\alpha(Y,X) - \alpha(X,Y))\, Z \end{aligned} \tag{1.62}$$

bulunur.

(1.42) (1.62) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z + R(Z,X)Y + R(Y,Z)X &= [(\nabla_Z \Pi)(Y) - (\nabla_Y \Pi)(Z)]\, X \\ &+ [(\nabla_X \Pi)(Z) - (\nabla_Z \Pi)(X)]\, Y \\ &+ [(\nabla_Y \Pi)(X) - (\nabla_X \Pi)(Y)]\, Z \end{aligned} \tag{1.63}$$

şeklinde semi simetrik metrik konneksiyonlu uzayda birinci Bianchi özdeşliği elde edilir.

Semi simetrik metrik konneksiyonlu uzay için ikinci Bianchi özdeşliği,

$$\begin{aligned}\nabla_X R(U,Y)Z + \nabla_Y R(U,Z)X + \nabla_Z R(U,X)Y &= 2\Pi(X)R(U,Y)Z \\ &+ 2\Pi(Y)R(U,Z)X \\ &+ 2\Pi(Z)R(U,X)Y\end{aligned} \tag{1.64}$$

şeklindedir [3].

(1.63) ve (1.64) ile verilen Bianchi özdeşliklerde, eğer $T(X,Y)$ sıfır alınırsa, bilinen Riemann uzaylarındaki Bianchi özdeşlikleri elde edilir.

1.5 Ricci Tensörü ve Skaler Eğrilik

E_1, E_2,...,E_n lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere V_n Riemann uzayında Levi-Civita konneksiyonuna göre $K(X,Y)$ Ricci tensörü

$$K(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(K(E_i,X)Y, E_i) \tag{1.65}$$

olarak tanımlanıp, semi simetrik metrik konneksiyonlu uzayda ∇ semi simetrik konneksiyonuna göre $R(X,Y)$ Ricci tensörü,

$$R(X,Y) = K(X,Y) - (n-2)\alpha(X,Y) + \beta g(X,Y) \tag{1.66}$$

şeklinde elde edilir.

Burada

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha(E_i, E_i) \tag{1.67}$$

dir.

$R(X,Y)$ Ricci tensörü simetrik bir tensör değildir. $R(X,Y)$ Ricci tensörünün simetrik kısmını $G(X,Y)$ ve antisimetrik kısmını da $F(X,Y)$ ile ifade edersek,

$$G(X,Y) = \frac{1}{2}\left[R(X,Y) + R(Y,X)\right] \tag{1.68}$$

ve

$$F(X,Y) = \frac{1}{2}\left[R(X,Y) - R(Y,X)\right] \tag{1.69}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned}G(X,Y) &= K(X,Y) - \frac{(n-2)}{2}\left[(\nabla_X\Pi)(Y) + (\nabla_Y\Pi)(X)\right] \\ &- \Pi(P)g(X,Y) + 2\beta g(X,Y)\end{aligned} \tag{1.70}$$

ve

$$F(X,Y) = \frac{(n-2)}{2}\left[\nabla_Y \Pi(X) - \nabla_X \Pi(Y)\right] \tag{1.71}$$

elde edilir.

$R(X,Y)$ Ricci tensörü simetrik ve antisimetrik kısımlarının toplamı olarak,

$$R(X,Y) = F(X,Y) + G(X,Y) \tag{1.72}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 1.5.1 $R(X,Y)$ Ricci tensörünün simetrik bir tensör olması için gerek ve yeter şart Π'nin bir tam form olmasıdır.

İspat $R(X,Y)$ simetrik tensör ise $F(X,Y) = 0$'dır.

(1.71) den Π'nin tam form olduğu görülür.

Eğer Π tam form ise (1.71) den $F(X,Y)$'nin sıfır olduğu görülür.

Eğer $n = 2$ ise, $F(X,Y)$ sıfır olacağından iki boyutlu S_n'lerde $R(X,Y)$'nin simetrik olduğu görünür.

Tanım V_n, n boyutlu semi simetrik metrik konneksiyonlu uzay olsun. V_n manifoldunun $R(X,Y)$ Ricci tensörünün G(X,Y) simetrik kısmı, V_n'de tanımlı g metriği ile,

$$G(X,Y) = \lambda g(X,Y) \tag{1.73}$$

oluyorsa bu uzaya semi simetrik metrik konneksiyonlu Einstein Uzayı denir [5].

V_n uzayında Levi-Civita konneksiyonunun K skaler eğriliği,

$$K = \sum_{i=1}^{n} R(E_i, E_i) \tag{1.74}$$

şeklindedir.

Semi simetrik metrik konneksiyonuna göre skaler eğrilik R olmak üzere (1.66) denkleminden,

$$R = K - 2(n-1)\beta \tag{1.75}$$

elde edilir.

Bundan yararlanarak (1.73) denklemindeki λ katsayısı, $\frac{R}{n}$ olarak belirlenir.

2. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU MANİFOLDLARIN HİPERYÜZEYLERİ

2.1 Semi Simetrik Metrik Konneksiyonlu Manifoldların Hiperyüzeyleri

V_{n+1}, C^∞ sınıfından diferansiyellenebilen $(n+1)$ boyutlu bir manifold ve V_n de $i : V_n \to V_{n+1}$ diferansiyellenebilir daldırması ile V_{n+1} manifoldunun içinde yer alan n boyutlu diferansiyellenebilen bir manifold olsun. $i(V_n)$ görüntüsüne V_{n+1} manifoldunun hiperyüzeyi denir ve $i(V_n)$ görüntü kümesi V_n olarak tanımlanır.

i daldırmasının diferansiyelini $di = B$ olarak ifade edilsin. Bu durumda V_n hiperyüzeyindeki herhangi bir X vektör alanına B fonksiyonu uygulanırsa BX vektör alanı V_{n+1} manifoldu içinde yer alır.

V_{n+1}, $\tilde{g}$ metrik tensörü ile ve V_n hiperyüzeyi de g metrik tensörü ile tanımlanan Riemann manifoldlarıdır. X ve Y, V_n hiperyüzeyi üzerinde bulunan herhangi iki vektör alanı olmak üzere g metriği,

$$g(X,Y) = \tilde{g}(BX, BY) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır.

V_n, hiperyüzeyinde tanımlı tek bir N vektör alanı ve herhangi bir X vektör alanı için

$$\tilde{g}(BX, N) = 0 \tag{2.2}$$

ve

$$\tilde{g}(N, N) = 1 \tag{2.3}$$

oluyorsa, bu N vektör alanına V_n hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı denir.

V_{n+1} manifoldunda semi simetrik metrik konneksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \overset{\tilde{\circ}}{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} + \tilde{\Pi}(\tilde{Y})\tilde{X} - \tilde{g}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{P} \tag{2.4}$$

(2.4) de $\tilde{X}$ ve $\tilde{Y}$ V_{n+1} manifolduna ait herhangi iki vektör alanı, $\overset{\tilde{\circ}}{\nabla}\tilde{g}$ Riemann metriğine göre Levi-Civita konneksiyonudur. V_{n+1} manifoldundaki bir $\tilde{X}$ vektör alanı için $\tilde{\Pi}$ 1-formdur ve $\tilde{P}$ vektör alanı da

$$\tilde{g}(\tilde{P},\tilde{X}) = \tilde{\Pi}(\tilde{X}) \tag{2.5}$$

olarak tanımlanmıştır.

V_n hiperyüzeyinde, P herhangi bir vektör alanı ve λ bir fonksiyon olmak üzere, V_{n+1} manifoldu üzerindeki $\tilde{P}$ vektör alanı,

$$\tilde{P} = B\cdot P + \lambda\cdot N \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

$\overset{\circ}{\nabla}$, V_n hiperyüzeyindeki Levi-Civita konneksiyonu ise,

$$\overset{\tilde{\circ}}{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = B(\overset{\circ}{\nabla}_X Y) + h(X,Y)N \tag{2.7}$$

şeklindedir.

Denklem (2.7) de X, Y herhangi iki vektör alanı, N birim normal vektör alanı ve $h(X,Y)$ ise V_n hiperyüzeyinin ikinci esas formudur.

∇, V_n hiperyüzeyindeki semi simetrik metrik konneksiyonunu göstermekte olup,

$$\tilde{\nabla}_{BX}BY = B(\nabla_Y X) + m(X,Y)N \tag{2.8}$$

şeklindedir.

Denklem (2.6) da X, Y V_n'de herhangi iki vektör alanı, N birim normal vektör alanı ve $m(X,Y)$ ise ikinci esas formdur.

(2.4) den

$$\tilde{\nabla}_{BX}BY = \overset{\tilde{\circ}}{\nabla}_{BX}BY + \tilde{\Pi}(BY)BX - \tilde{g}(BX,BY)\tilde{P} \tag{2.9}$$

elde edilir.

(2.4) ve (2.6) ile verilen ifadeler (2.7) de yerine yazılırsa

$$B(\nabla_Y X) + m(X,Y)N = B(\overset{\circ}{\nabla}_X Y) + h(X,Y)N + \tilde{\Pi}(BY)BX - g(BX,BY)\tilde{P} \tag{2.10}$$

bulunur.

Denklem (2.6), (2.10) da yerine yazılırsa,

$$B(\nabla_Y X)+m(X,Y)N = B(\overset{\circ}{\nabla}_X Y)+h(X,Y)N+\tilde{\Pi}(BY)BX-g(X,Y)(BP+\lambda N) \tag{2.11}$$

elde edilir.

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \Pi(Y)X - g(X,Y)P \tag{2.12}$$

ve

$$\Pi(X) = \tilde{\Pi}(BX) \tag{2.13}$$

olduğundan

$$m(X,Y) = h(X,Y) - \lambda g(X,Y) \tag{2.14}$$

sonucuna ulaşır.

(2.4) gözönüne alınırsa,

$$\nabla_X(g(Y,Z)) = (\nabla_X g)(Y,Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \tag{2.15}$$

bulunur.

Buradan,

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = 0 \tag{2.16}$$

ve

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = \Pi(Y)X - \Pi(X)Y \tag{2.17}$$

olduğu görülür [6].

Denklem (2.16) ve denklem (2.17) den, V_n üzerinde V_{n+1} tarafından doğurulan ∇ konneksiyonu da, semi simetrik metrik konneksiyondur, sonucu elde edilir.

X, V_n'de herhangi bir vektör alanı ve $g(HX,Y) = h(X,Y)$ eşitliğini sağlayan H tensör alanı için Riemann konneksiyonuna göre Weingarten denklemi,

$$\overset{\tilde{\circ}}{\nabla}_{BX} N = -BMX \tag{2.18}$$

şeklindedir.

(2.4) den,

$$\tilde{\nabla}_{BX} N = \overset{\tilde{\circ}}{\nabla}_{BX} N + \tilde{\Pi}(BX) - \tilde{g}(BX,N)\tilde{P} \tag{2.19}$$

yazılır.

$\tilde{\Pi}(N) = \lambda$ ve $\tilde{g}(BX, N) = 0$ olduğundan (2.19)

$$\tilde{\nabla}_{BX} N = \overset{\tilde{\circ}}{\nabla}_{BX} N + \lambda BX \tag{2.20}$$

ifadesine dönüşür.

I birim tensör olmak üzere (2.18) ve (2.20) den

$$\tilde{\nabla}_{BX} N = -B(H - \lambda I)X \tag{2.21}$$

elde edilir.

$M = H - \lambda I$ olarak tanımlansın. Bu durumda X herhangi bir vektör alanı olmak üzere, $\tilde{\nabla}$ semi simetrik metrik konneksiyonuna göre Weingarten denklemi,

$$\tilde{\nabla}_{BX} N = -BMX \tag{2.22}$$

şeklindedir.

2.2 Gauss ve Mainardi-Codazzi Denklemleri

$\tilde{R}(BX, BY)BZ$, V_{n+1}'de semi simetrik metrik konneksiyona göre eğrilik tensörü olmak üzere,

$$\tilde{R}(BX, BY)BZ = \tilde{\nabla}_{BX}\tilde{\nabla}_{BY}BZ - \tilde{\nabla}_{BY}\tilde{\nabla}_{BX}BZ - \tilde{\nabla}_{[BX,BY]}BZ \tag{2.23}$$

şeklindedir.

$BX = \tilde{X}$ olarak gösterilirse, V_{n+1} uzayının eğrilik tensörü,

$$\tilde{R}(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Z} - \tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Z} - \tilde{\nabla}_{[\tilde{X},\tilde{Y}]}\tilde{Z} \tag{2.24}$$

olarak yazılır.

(2.24) deki $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Z}$ ifadesini açarsak sırasıyla,

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Z} = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\left(B(\nabla_Y Z) + m(Y, Z)N\right) \tag{2.25}$$

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Z} = B\left[\nabla_X(B(\nabla_Y Z))\right] + m(X, \nabla_Y Z)N + \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}(m(Y, Z))N \tag{2.26}$$

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Z} = B(\nabla_X\nabla_Y Z) + m(X,\nabla_Y Z)N + \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}(m(Y,Z))N + m(Y,Z)\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}N \tag{2.27}$$

(2.22) den

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{Z} = B(\nabla_X\nabla_Y Z) + m(X,\nabla_Y Z)N + \nabla_X(m(Y,Z))N - m(Y,Z)BMX \tag{2.28}$$

elde edilir.

Denklem (2.28) de X ve Y'nin yeri değiştirilirse,

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{Y}}\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Z} = B(\nabla_Y\nabla_X Z) + m(Y,\nabla_X Z)N + \nabla_Y(m(X,Z))N - m(X,Z)BMY \tag{2.29}$$

ve

$$\tilde{\nabla}_{[\tilde{X},\tilde{Y}]}\tilde{Z} = B(\nabla_{[X,Y]}Z) + m([X,Y],Z)N \tag{2.30}$$

elde edilir.

(2.28), (2.29) ve (2.30) denklemleri (2.24) de yerine konursa,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z} &= B\nabla_X\nabla_Y Z + m(X,\nabla_Y Z)N + \nabla_X(m(Y,Z))N - m(Y,Z)BMX \\ &- B\nabla_Y\nabla_X Z - m(Y,\nabla_X Z)N - \nabla_Y(m(X,Z))N + m(X,Z)BMY \\ &- \left[B\nabla_{[X,Y]}Z + m([X,Y],Z)N\right] \end{aligned} \tag{2.31}$$

bulunur ve (2.31) düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z} &= B\left[\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z\right] \\ &+ B\left[m(X,Z)MY - m(Y,Z)MX\right] \\ &+ \left[(\nabla_X m)(Y,Z) - (\nabla_Y m)(X,Z)\right]N \\ &+ m(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y],Z)N \end{aligned} \tag{2.32}$$

bulunur.

(2.17) göz önüne alınırsa (2.32) den,

$$\begin{aligned}\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z} &= B\left[R(X,Y)Z + m(X,Z)MY - m(Y,Z)MX\right] \\ &+ \left[(\nabla_X m)(Y,Z) - (\nabla_Y m)(X,Z),Z\right]N \\ &+ \left[m(\Pi(Y)X - \Pi(X)Y,Z)\right]N \end{aligned} \tag{2.33}$$

olarak elde edilir.

(2.33) deki $R(X,Y)Z$ V_n'de semi simetrik metrik konneksiyona göre eğrilik tensörünü göstermektedir.

$\tilde{U}$, V_{n+1}'de herhangi bir vektör alanı ve $\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z}$ eğrilik tensörününe $\tilde{g}$ metriği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z},\tilde{U}) &= g(B\left[R(X,Y)Z - m(Y,Z)MX + m(X,Z)MY\right],U)\\ &+ g((\nabla_X m)(Y,Z) - (\nabla_Y m)(X,Z),U)\\ &+ g(m(\Pi(Y)X - \Pi(X)Y,Z)N,U) \qquad (2.34)\end{aligned}$$

yazılır.

(2.2) ifadesi gözönüne alınırsa,

$$\tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z},\tilde{U}) = g(B\left[R(X,Y)Z - m(Y,Z)MX + m(X,Z)MY\right],U) \quad (2.35)$$

bulunur.

Buradan da,

$$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{U}) = R(X,Y,Z,U) - m(Y,Z)m(X,U) + m(X,Z)m(Y,U) \quad (2.36)$$

elde edilir.

Burada,

$$\Omega(X,Y,Z,U) = m(Y,Z)m(X,U) - m(X,Z)m(Y,U) \qquad (2.37)$$

ikinci esas formun Sylvesterian'nı olmak üzere, (2.36),

$$R(X,Y,Z,U) = \tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{U}) + \Omega(X,Y,Z,U) \qquad (2.38)$$

şeklinde yazılabilir.

$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z}$ eğrilik tensörü ile $\tilde{N}$ birim normal vektör alanına $\tilde{g}$ metriği uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Z},\tilde{N}) &= g(B\left[R(X,Y)Z - m(Y,Z)MX + m(X,Z)MY\right],N)\\ &+ \left[(\nabla_X m)(Y,Z) - (\nabla_Y m)(X,Z)\right]g(N,N)\\ &+ \left[m(\Pi(Y)X - \Pi(X)Y,Z)\right]g(N,N) \qquad (2.39)\end{aligned}$$

elde edilir.

(2.3) göz önüne alınırsa,

$$\tilde{R}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z},\tilde{N}) = (\nabla_X m)(Y,Z) - (\nabla_Y m)(X,Z) + m(\Pi(Y)X - \Pi(X)Y, Z) \tag{2.40}$$

sonucuna ulaşılır.

(2.36) ve (2.40) ifadeleri semi simetrik metrik konneksiyonlu uzayda sırasıyla Gauss ve Mainardi-Codazzi denklemleridir [6].

Tanım 2.1 Semi simetrik metrik konneksiyonlu uzayın ikinci esas formu sıfır olan hiperyüzeylerine total geodezik hiperyüzeyler denir.

Tanım 2.2 Semi simetrik metrik konneksiyonlu uzayın, $m(X,Y)$ ikinci esas formu, $g(X,Y)$ Riemann metriği ve λ skaler fonksiyonu için

$$m(X,Y) = \lambda g(X,Y)$$

olan hiperyüzeylerine total ombilik denir.

Tanım 2.3 Eğrilik tensörü sıfır olan semi simetrik metrik konneksiyonlu uzaylara düz semi simetrik metrik konneksiyonlu uzaylar denir.

Teorem 2.2.1 V_{n+1} semi simetrik metrik konneksiyonlu uzayın eğrilik tensörü sıfır ve bu uzayın V_n hiperyüzeyi total ombilik ise V_n'in Levi-Civita konneksiyonuna göre kesitsel eğriliği sabittir.

İspat V_{n+1} semi simetrik metrik konneksiyonlu uzayın eğrilik tensörü sıfır olduğundan $\tilde{R} = 0$ ve V_n total ombilik olduğundan $m(X,Y) = \lambda g(X,Y)$ yazılabilir.

Bu durumda (2.36) ile verilen Gauss denklemi,

$$R(X,Y,Z,U) = \lambda^2 \left[(Y,Z)g(X,U) - g(X,Z)g(Y,U)\right] \tag{2.41}$$

şeklinde yazılabilir.

$$G(X,Y,Z,U) = g(Y,Z)g(X,U) - g(X,Z)g(Y,U) \tag{2.42}$$

olarak ifade edilirse (2.41),

$$R(X,Y,Z,U) = \lambda^2 G(X,Y,Z,U) \tag{2.43}$$

olarak elde edilir ve buradan da V_n'de Levi-Civita konneksiyonuna göre kesitsel eğriliğin sabit olduğu görülür.

3. REKÜRAN SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU MANİFOLDLAR VE HİPERYÜZEYLERİ

3.1 Reküran Semi Simetrik Metrik Konneksiyonlu Manifoldlar

Walker, 1950 yılında Reküran Riemann manifoldlarını tanımlayarak bu tip manifoldlara örnek vermiştir [7].

Semi simetrik metrik konneksiyonlu reküran manifoldlar, Doğan ve Uysal tarafından incelenmıştır [8].

S_n düz olmayan bir manifold olsun. Φ sıfırdan farklı bir vektör alanı olmak üzere eğrilik tensörü,

$$\nabla_W R(X,Y,Z,U) = \Phi(W)R(X,Y,Z,U) \tag{3.1}$$

ise S_n'e reküran semi simetrik metrik konneksiyonlu manifold denir.

Yano [2] çalışmasında, S_n'de $R(X,Y)Z$ eğrilik tensörünün sıfır olması için gerek ve yeter şart $C(X,Y)Z$ konform eğrilik tensörünün sıfır olduğunu ispatlamıştır. Bu nedenle, bu çalışmada konform eğrilik tensörü sıfırdan farklı olan manifoldlar incelenmiştir.

V_n reküran uzayı ise,

$$\begin{aligned}\nabla_W R(U,X,Y,Z)+\nabla_Y R(U,X,Z,W)+\nabla_Z R(U,X,W,Y) &= \Phi(W)R(U,X,Y,Z)\\ &+ \Phi(Y)R(U,X,Z,W)\\ &+ \Phi(Z)R(U,X,W,Y)\end{aligned} \tag{3.2}$$

elde edilir.

İkinci Bianchi özdeşliğinden (3.2) ifadesi,

$$\begin{aligned}\Phi(W)R(U,X,Y,Z)+\Phi(Y)R(U,X,Z,W)+\Phi(Z)R(U,X,W,Y) &= 2\Pi(W)R(U,X,Y,Z)\\ &+2\Pi(Y)R(U,X,Z,W)\\ &+2\Pi(Z)R(U,X,W,Y)\end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklindedir ve

$$2\Pi(W) - \Phi(W) = \Psi(W) \tag{3.4}$$

olarak adlandırılırsa (3.2),

$$\Psi(W)R(U,Y,X,Z) + \Psi(Y)R(U,X,Z,W) + \Psi(Z)R(U,X,W,Y) = 0 \tag{3.5}$$

olarak bulunur.

Reküran semi simetrik metrik konneksiyonlu manifoldlar $(RS)_n$ ile gösterilecektir.

Teorem 3.1.1 V_n, reküran semi simetrik metrik konneksiyonlu manifold ise Φ bir tam formdur.

İspat V_n reküran manifold olduğundan,

$$\nabla_W R(X,Y,Z,U) = \Phi(W)R(X,Y,Z,U)$$

ifadesi yazılabilir.

(1.66) dan

$$\nabla_W R(X,Y) = \Phi(W)R(X,Y) \tag{3.6}$$

bulunur.

(1.74) den

$$\nabla_W R = \Phi(W)R \tag{3.7}$$

ve

$$\Phi(W) = \frac{\nabla_W R}{R} \tag{3.8}$$

elde edilir.

(3.8) den Φ reküran vektör alanının gradiyent olduğu sonucu çıkar.

Sonuç olarak, denklem (3.6) dan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.1.2 Reküran semi simetrik metrik konneksiyonlu manifold Ricci Rekürandır.

3.2 Reküran Semi Simetrik Metrik Konneksiyonlu Manifoldların Hiperyüzeyleri

V_{n+1}, reküran vektörü $\tilde{\Phi}$ olan, reküran semi simetrik bir manifold ve V_n, V_{n+1}'in $\tilde{\Phi}$'nin dik olmadığı hiperyüzey olsun. $\tilde{\Phi}$'nin teğetsel bileşenleri Φ ile gösterilirse $\tilde{\Phi} = B\Phi$'dir.

Teorem 3.2.1 V_n, V_{n+1} reküran semi simetrik metrik konneksiyonlu manifoldun hiperyüzeyi ve $\tilde{\Phi}$, V_{n+1}'de V_n hiperyüzeyine dik olmayan reküran vektör alanı olsun.

V_{n+1}, V_n hiperyüzeyinin $R(X,Y,Z,U)$ eğrilik tensörü olmak üzere,

$$\begin{aligned}\nabla_W R(X,Y,Z,U) - \tilde{\Phi}(W)R(X,Y,Z,U) &= \nabla_W \Omega(X,Y,Z,U) \\ &- \tilde{\Phi}(W)\Omega(X,Y,Z,U) \\ &+ m(W,X)\tilde{R}(N,BY,BZ,BU) \\ &+ m(W,Y)\tilde{R}(BX,N,BZ,BU) \\ &+ m(W,Z)\tilde{R}(BX,BY,N,BU) \\ &+ m(W,U)\tilde{R}(BX,BY,BZ,N)\end{aligned} \tag{3.9}$$

sağlanır.

İspat (2.38) ile verilen Gauss denkleminin ∇ konneksiyonuna göre kovaryant türevi alınırsa,

$$(\nabla_X B)Y = m(X,Y)N \tag{3.10}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\nabla_W R(X,Y,Z,U) &= \nabla_W \Omega(X,Y,Z,U) + (\tilde{\nabla}_{BW}\tilde{R})(BX,BY,BZ,BU) \\ &+ m(W,X)\tilde{R}(N,BY,BZ,BU) \\ &+ m(W,Y)\tilde{R}(BX,N,BZ,BU) \\ &+ m(W,Z)\tilde{R}(BX,BY,N,BU) \\ &+ m(W,U)\tilde{R}(BX,BY,BZ,N)\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir.

V_{n+1} reküran semi simetrik metrik konneksiyonlu manifold olduğundan (3.11),

$$\begin{aligned}\nabla_W R(X,Y,Z,U) &= \nabla_W \Omega(X,Y,Z,U) + \tilde{\Phi}(W)\tilde{R}(BX,BY,BZ,BU) \\ &+ m(W,X)\tilde{R}(N,BY,BZ,BU) \\ &+ m(W,Y)\tilde{R}(BX,N,BZ,BU) \\ &+ m(W,Z)\tilde{R}(BX,BY,N,BU) \\ &+ m(W,U)\tilde{R}(BX,BY,BZ,N) \qquad (3.12)\end{aligned}$$

haline gelir.

(3.12) de Gauss denklemi kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\nabla_W R(X,Y,Z,U) - \tilde{\Phi}(W)R(X,Y,Z,U) &= \nabla_W \Omega(X,Y,Z,U) \\ &- \tilde{\Phi}(W)\Omega(X,Y,Z,U) \\ &+ m(W,X)\tilde{R}(N,BY,BZ,BU) \\ &+ m(W,Y)\tilde{R}(BX,N,BZ,BU) \\ &+ m(W,Z)\tilde{R}(BX,BY,N,BU) \\ &+ m(W,U)\tilde{R}(BX,BY,BZ,N) \qquad (3.13)\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.2.2 Reküran semi simetrik metrik konneksiyonlu manifoldun bir hiperyüzeyi total geodezik ise hiperyüzey de reküran semi simetriktir.

İspat V_n, reküran semi simetrik metrik konneksiyonlu V_{n+1} manifoldunun hiperyüzeyi olsun. X, Y, Z, U V_n manifolduna ait vektör alanları olmak üzere, (2.38) ile verilen Gauss denkleminin V_n hiperyüzeyindeki W vektör alanına göre kovaryant türevi alındığında, (3.2.3) elde edilir.

V_n hiperyüzeyi total geodezik olduğundan ikinci esas form sıfırdır ve (3.12),

$$\nabla_W R(X,Y,Z,U) = \tilde{\Phi}(W)R(X,Y,Z,U) \qquad (3.14)$$

ifadesine dönüşür.

(3.14) den V_n hiperyüzeyinin $\tilde{\Phi}$ reküran vektör alanı ile reküran semi simetrik olduğu sonucu görülür.

Teorem 3.2.3 V_n, V_{n+1} reküran semi simetrik metrik konneksiyonlu manifoldun total geodezik bir hiperyüzeyi ise V_n'de

$$\Psi(X) = 2\Pi(X) - \Phi(X)$$

olmak üzere,

$$A(X)R(W,Y,Z,U) + A(Y)R(W,Z,X,U) + A(Z)R(W,X,Y,U) = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat (3.13) den

$$\begin{aligned}
\nabla_X R(W,Y,Z,U) - \tilde{\Phi}(X)R(W,Y,Z,U) &= \nabla_X \Omega(W,Y,Z,U) \\
&- \Phi(X)\Omega(W,Y,Z,U) \\
&+ m(X,W)\tilde{R}(N,BY,BZ,BU) \\
&+ m(X,Y)\tilde{R}(BW,N,BZ,BU) \\
&+ m(X,Z)\tilde{R}(BW,BY,N,BU) \\
&+ m(X,U)\tilde{R}(BW,BY,BZ,N)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

yazılabilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\nabla_Y R(W,Z,X,U) - \tilde{\Phi}(Y)R(W,Z,X,U) &= \nabla_Y \Omega(W,Z,X,U) \\
&- \Phi(Y)\Omega(W,Z,X,U) \\
&+ m(Y,W)\tilde{R}(N,BZ,BX,BU) \\
&+ m(Y,Z)\tilde{R}(BW,N,BX,BU) \\
&+ m(Y,X)\tilde{R}(BW,BZ,N,BU) \\
&+ m(Y,U)\tilde{R}(BW,BZ,BX,N)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

ve

$$\begin{aligned}
\nabla_Z R(W,X,Y,U) - \tilde{\Phi}(Z)R(W,X,Y,U) &= \nabla_Z \Omega(W,X,Y,U) \\
&- \Phi(Z)\Omega(W,X,Y,U) \\
&+ m(Z,W)\tilde{R}(N,BX,BY,BU) \\
&+ m(Z,X)\tilde{R}(BW,N,BY,BU) \\
&+ m(Z,Y)\tilde{R}(BW,BX,N,BU) \\
&+ m(Z,U)\tilde{R}(BW,BX,BY,N)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

olur.

(3.15), (3.16), (3.17) denklemleri taraf tarafa toplanır ve ikinci Bianchi özdeşliği ile denklem (3.5) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \Psi(X)R(W,Y,Z,U)+\Psi(Y)R(W,Z,X,U)+\Psi(Z)R(W,X,Y,U) \\
= \;& \nabla_X\Omega(W,Y,Z,U)-\Phi(X)\Omega(W,Y,Z,U) \\
+ \;& m(X,W)\tilde{R}(N,BY,BZ,BU)+m(X,Y)\tilde{R}(BW,N,BZ,BU) \\
+ \;& m(X,Z)\tilde{R}(BW,BY,N,BU)+m(X,U)\tilde{R}(BW,BY,BZ,N) \\
+ \;& \nabla_Y\Omega(W,Z,X,U)-\Phi(Y)\Omega(W,Z,X,U) \\
+ \;& m(Y,W)\tilde{R}(N,BZ,BX,BU)+m(Y,Z)\tilde{R}(BW,N,BX,BU) \\
+ \;& m(Y,X)\tilde{R}(BW,BZ,N,BU)+m(Y,U)\tilde{R}(BW,BZ,BX,N) \\
+ \;& \nabla_Z\Omega(W,X,Y,U)-\Phi(Z)\Omega(W,X,Y,U) \\
+ \;& m(Z,W)\tilde{R}(N,BX,BY,BU)+m(Z,X)\tilde{R}(BW,N,BY,BU) \\
+ \;& m(Z,Y)\tilde{R}(BW,BX,N,BU)+m(Z,U)\tilde{R}(BW,BX,BY,N)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

elde edilir.

V_n total geodezik olduğundan, (3.18),

$$\Psi(X)R(W,Y,Z,U)+\Psi(Y)R(W,Z,X,U)+\Psi(Z)R(W,X,Y,U)=0$$

olarak elde edilir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada reküran semi-simetrik metrik konneksiyonlu manifoldlar ve bu manifoldların hiperyüzeyleri incelenmiştir.

Reküran semi-simetrik metrik konneksiyonlu manifoldların hiperyüzeylerinin reküran olması için gerek ve yeter şart hiperyüzeyin total geodezik olmasıdır.

Bundan sonra zayıf reküran ve birekürان semi simetrik metrik konneksiyonlu manifoldlar ve hiperyüzeyleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Kobayashi, H. A., Nomizu**, 1963.Foundations of Differential Geometry, I. Intersclence Publishers, New York.

[2] **Yano, K.**, 1970. On Semi-symmetric metric connection. *Roum Pures et Appl.***19**, No.9, 1579-1586.

[3] **Schouten, J. A.**, 1954. Der Ricci-Kalkül. Springer, Berlin

[4] **Eisenhart, L. P.**, 1927. Non-Riemannian Geometry. American Mathematical Society, Colloquium Publications, **8**.

[5] **Canfes E.Ö. ve Çağın T.**, 2004. Einstein spaces with semi symmetric metric connections, *M.Sc Thesis*, ITU.

[6] **Imai T.**, 1972. Hypersuraces of a Riemannian Manifold with semi-symmetric metric connection, Tensor N.S.,
Volume 23,300-306

[7] **Walker, A. G.**, 1950. On Ruse's spaces of recurrent curvature, Proc. London Math. Soc. No 2, 36-54

[8] **Uysal, S. A. ve Doğan, R. Ö.**, 2003. On recurrent spaces with semi-symmetric singh connection. *Indian J. pure appl. Math.*, **34**, 1061-1065.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Varna'da doğdu. 1999 yılında Mimar Sinan Lisesi'nden mezun oldu. Aynı yıl Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'ne girdi ve Haziran 2003'te ikincilikle mezun oldu. 2003 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde lisans üstü eğitimine başladı.