**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# SCHRÖDİNGER-NEWTON DENKLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**Özsev KAÇAN**

**Anabilim Dalı: Fen Fakültesi**
**Programı: Matematik Mühendisliği**

**Tez Danışmanı: Doç.Dr. Emanullah HIZEL**
**Tez Ek Danışmanı: Doç.Dr. Semih KÜÇÜKARSLAN**

**HAZİRAN 2008**

## ÖNSÖZ

İTÜ Matematik Mühendisliği bünyesine katılmamda bana destek veren ve zengin bilgi birikimleriyle bu çalışmaya yön veren değerli hocalarım Doç. Dr. Emanullah Hızel ve Doç. Dr. Semih Küçükarslan'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezin oluşmasında yardımcı olan arkadaşlarım Cihangir Özemir, Atilla Altıntaş, Özgür Karaköse, Hale Aytaç'a, eğitimimi destekleyen ve bana manevi destekleri olan ağabeyim Baycan Kaçan ve eşi Sezen Avcı'ya, çalışma süresince benden sonsuz desteğini eksik etmeyen eşim Emrah Ateş'e teşekkürlerimi sunarım.

**Haziran 2008** **Özsev Kaçan**

**İÇİNDEKİLER**


**KISALTMALAR** **iv**
**ŞEKİL LİSTESİ** **v**
**SEMBOL LİSTESİ** **vı**
**ÖZET** **vıı**
**SUMMARY** **vııı**

**1. GİRİŞ** **1**
1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı 1
1.2. S-N Denklemlerinin Bazı Analitik Özellikleri 3
1.2.1 Varlık ve Benzemezlik 3
1.2.2 Yeniden Derecelendirme 3

**2. SCHRÖDİNDER-NEWTON DENKLEMLERİ** **5**
2.1 Küresel Olarak Simetrik Sabit Durumlar 6

**3. KÜRESEL OLARAK SİMETRİK EVRİME İLİŞKİN SAYISAL YÖNTEMLER** **8**

**4. $S_n$ VE $V_n$ DENKLEMLERİ İÇİN GRAFİK ÇİZİMLERİ** **11**
4.1 n = 1 için 0 < r < 1 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği 11
4.2 n = 1 için 0 < r < 2 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği 12
4.3 n = 1 için 0 < r < 3 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği 13
4.4 n = 1 için 0 < r < 1 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği 14
4.5 n = 1 için 0 < r < 2 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği 15
4.6 n = 1 için 0 < r < 3 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği 16
4.7 n = 2 için 0 < r < 1 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği 17
4.8 n = 2 için 0 < r < 2 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği 18
4.9 n = 2 için 0 < r < 3 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği 19
4.10 n = 2 için 0 < r < 1 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği 20
4.11 n = 2 için 0 < r < 2 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği 21
4.12 n = 2 için 0 < r < 3 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği 22
4.13 n = 3 için 0 < r < 1 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği 23
4.14 n = 3 için 0 < r < 2 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği 24
4.15 n = 3 için 0 < r < 3 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği 25
4.16 n = 3 için 0 < r < 1 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği 26
4.17 n = 3 için 0 < r < 2 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği 27
4.18 n = 3 için 0 < r < 3 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği 28

**5.SONUÇLAR** **29**

**KAYNAKLAR** **30**

**ÖZGEÇMİŞ** **31**

**KISALTMALAR**

**S-N** : Schrödinger-Newton Denklemleri

**ŞEKİL LİSTESİ**


**Sayfa No**

**Şekil 1** : $R_0$=0,05 ve 20 adım ile 0<r<1 için $S_1$..... 11
**Şekil 2** : $R_0$=0,05 ve 40 adım ile 0<r<2 için $S_1$..... 12
**Şekil 3** : $R_0$=0,05 ve 60 adım ile 0<r<3 için $S_1$..... 13
**Şekil 4** : $R_0$=0,05 ve 20 adım ile 0<r<1 için $V_1$..... ..... 14
**Şekil 5** : $R_0$=0,05 ve 40 adım ile 0<r<2 için $V_1$..... 15
**Şekil 6** : $R_0$=0,05 ve 60 adım ile 0<r<3 için $V_1$..... 16
**Şekil 7** : $R_0$=0,05 ve 20 adım ile 0<r<1 için $S_2$..... 17
**Şekil 8** : $R_0$=0,05 ve 40 adım ile 0<r<2 için $S_2$.....18
**Şekil 9** : $R_0$=0,05 ve 60 adım ile 0<r<3 için $S_2$ ..... 19
**Şekil 10** : $R_0$=0,05 ve 20 adım ile 0<r<1 için $V_2$..... 20
**Şekil 11** : $R_0$=0,05 ve 40 adım ile 0<r<2 için $V_2$..... 21
**Şekil 12** : $R_0$=0,05 ve 60 adım ile 0<r<3 için $V_2$..... 22
**Şekil 13** : $R_0$=0,05 ve 20 adım ile 0<r<1 için $S_3$..... 23
**Şekil 14** : $R_0$=0,05 ve 40 adım ile 0<r<2 için $S_3$..... 24
**Şekil 15** : $R_0$=0,05 ve 60 adım ile 0<r<3 için $S_3$..... 25
**Şekil 16** : $R_0$=0,05 ve 20 adım ile 0<r<1 için $V_3$..... 26
**Şekil 17** : $R_0$=0,05 ve 40 adım ile 0<r<2 için $V_3$..... 27
**Şekil 18** : $R_0$=0,05 ve 60 adım ile 0<r<3 için $V_3$.....28

**SEMBOL LİSTESİ**

| | |
|---|---|
| $\hbar$ | **:** Planck sabiti |
| $\Psi$ | **:** Dalga fonksiyonu |
| **G** | **:** Yerçekimi potansiyeli |
| **t** | **:** Zaman |
| **r** | **:** Uzaklık |

## SCHRÖDİNGER-NEWTON DENKLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ


## ÖZET

Bu tez çalışmasında küresel olarak simetrik sabit durum için zamandan bağımsız S-N denklemlerin sayısal bir çalışması sunulmuştur.

Kendi yerçekimsel potansiyeliyle hareket eden bir kuantum mekanik kütle parçacığı *m* için Schrödinger-Newton denklemleri, bağlanmış lineer-olmayan kısmi diferansiyel denklem çiftidir. S-N Denklemlerini küresel simetri durumundaki durağan çözümleri hesaplamak için kullanmışlardır. S-N denklemlerinin bazı analitik özellikleri anlatılmıştır. Bu analitik özellikler küresel simetri durumunda durağan çözümlerin hesaplanması için bir yöntem kullanılmıştır. Tezde, küresel simetri durumunda durağan çözümleri hesaplamak için kullanılabilecek yöntemlerin gözden geçirilmesiyle ilgili çalışılmıştır. Durağan durumlara karşılık gelen doğru başlangıç değerlerinin elde edilmesine yönelik çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Tezin içeriğinde bu yöntemler arasında Picard yöntemi kullanılmaya çalışılmıştır.

Bu çalışmada bizim amacımız bir durağan durum etrafında zamandan bağımsız küresel olarak simetrik S-N denklemleri bulunmasıdır. S-N denklemlerinin farklı metodlarla genel denklemlerinin oluşturulup S ve V değerlerinin ilk 3 noktalarına ait toplam 18 adet grafiğin değişimi gösterilmiştir. Belirli uzaklıklar vererek bu değerlerin birbirleriyle kıyaslanması ve aralarındaki ilişki hakkında yorum yapılmıştır.

S-N denklemlerini farklı yöntemlerle sayısal çözümleri incelenmeye çalışılmıştır. Bunlardan biri olan Picard yöntemiyle S-N denklemlerine ait ilk üç S ve V değerleri için çizdirdiğimiz grafikler arasında yaptığımız karşılaştırma sonucu S-N denklemlerinin bu yöntemle de çözülmesinin olası olduğu tespit edilmiştir. Durağan simetri altında Schrödinger-Newton denklemlerinin nümerik ve analitik olarak çözümleri gösterilebilir.Buna ek olarak zamandan bağımsız S-N denklemlerinin belirli uzaklıkların değişimiyle bulunan durağan olarak simetrik olması incelenebilir sonucu ortaya çıkmıştır.

Tezin sonucu olarak da zamandan S-N denklemlerinin durağan bir durum etrafında küresel olarak simetrik durumu için Picard yöntemiyle başlangıç değerinden belirli bir uzaklık için sayısal bir çözümünün olası olduğu tespit edilmiştir.

**NUMERIC SOLUTIONS OF SCHRÖDİNGER-NEWTON EQUATIONS**


**SUMMARY**

In this thesis, globally, the solutions are tested by taking the time-independent S-N equations for the symmetrical stable situation and then the numerical study of evolution which is not absolutely linear in the basic symmetrical situation is rendered.

Schrödinger-Newton equations are tied-up nonlinear partial differential equation couples. S-N equations are used for calculating fixed solutions at the state of global symmetry. Some analytical properties of these equations are described. Methods are used for calculating the constant solutions at the state of global symmetry. In this thesis, these methods are studied in detail. There are several ways for getting the correct starting values corresponding to constant states. Within this study Picard method is used among these ways.

The time-independent symmetrical S-N Equations which are linear around the constant case are derived. The change in eighteen graphs which belong to the first three points of S and V values are shown by composing general equations of S-N Equations with different methods. These values are compared and the relationships between them are commented by giving specific ranges.

S-N equations are studied from different numerical solutions. By using Picard method, which is one of these solutions, it is proved that these S-N equations may be solved within the use of graphics that are designed for the first three S and V values. The solutions may be showed as numeric or analytic depending on the constant symmetry. In addition to that is also proved that time independent S-N equations may be analyzed by the symmetry of specific destinations that vary.

As a result of this study it is proved that there is a numeric solution for calculating the constant solutions at the state of global symmetry of S-N equations.

# 1.Giriş

## 1.1. Giriş ve Çalışmanın Amacı

Kendi yerçekimsel potansiyeliyle hareket eden bir kuantum mekanik kütle parçacığı *m* için Schrödinger-Newton denklemleri (bundan böyle S-N denklemleri olarak ifade edilecektir), kuple lineer-olmayan kısmi diferansiyel denklem çiftidir.

Schrödinger-Newton (S-N) denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$i\hbar \partial S / \partial t = - \hbar^2 \Delta S + m\Phi S$$

$$\Delta V = 4\pi G m |S|^2 \qquad (1.1)$$

Bu denklemdeki potansiyel, $|S|^2$ yoğunluğundan kaynaklanan yerçekimdir. $\hbar$; Planck sabiti,S; dalga fonksiyonu, V; Yerçekimi potansiyeli, *G*; Newton yerçekimi sabiti,ve *t* ise zaman'dır.

S-N Denklemlerini ilk önce *Ruffini* ve *Bonazzola* [1] ele almışlardır. R*uffini* ve *Bonazzola* [1], durağan küresel simetrik çözümlerinin bulunması ile ilgili çözümler ortaya koymuşlardır.

S-N denklemleri, *Penrose* [2] tarafından yerçekimiyle ilişkin çalışmasında ele alınmışlardır ve dalga fonksiyonunun yerçekiminin etkisiyle çökmesine yönelik bir model olarak ortaya konmuştur.

Ayrıca S-N Denklemlerini *Moroz*, *Penrose* ve *Tod* [3] çalışmalarında da *Ruffini* ve *Bonazzola* [1] 'un ortaya koyduğu küresel simetri durumundaki durağan çözümleri hesaplama yöntemini kullanmışlardır. *Moroz* ve *Tod* [4], S-N denklemlerinin bazı analitik özelliklerini kanıtlamışlardır. Bu analitik özellikleri *Bernstein*, *Giladi* ve *Jones* [5] ayrıca kendi çalışmalarında küresel simetri durumunda durağan çözümlerin hesaplanması için bir yöntem geliştirmişlerdir.

Son olarak, *Harrison* [6], zamana bağımlı ve zamandan bağımsız durumlarda S-N denklemlerini incelemiştir. Durağan durumlar için lineer kararlılık problemini ele almıştır ve bunu spektral yöntemler kullanarak sayısal olarak çözümünü gerçekleştirmiştir.

Bu çalışmanın planı aşağıda belirtildiği gibi olacaktır. Bu bölümün geri kalan kısmında, durağan S-N denklemlerini gözden geçirilecek ve bunlara ilişkin bazı analitik sonuçlar verilecektir. Bölüm 1.2'de S-N denklemlerinin bazı analitik özelliklerinden bahsedilmiştir. Bölüm 2.1'de, küresel olarak simetrik durağan durumlar incelenmektedir. Bölüm 3'te ise bir durağan durum etrafında lineerleştirilmiş zamandan bağımsız küresel olarak simetrik S-N denklemleri türetilip, çözülmektedir.

Bölüm 4'te S-N denklemlerinin integral gösterimi kullanılarak, Picard yöntemiyle S ve V için denklemleri bulunmuştur. S-N denklemlerini ardışık $S_{n+1}$ ve $V_{n+1}$ denklemleri oluşturularak $S_0 = 1{,}089$ başlangıç değeri kullanılarak $S_1$, $S_2$, $S_3$ ve $V_1$, $V_2$, $V_3$ değerleri bulunmuş ve bunların S-N denklemindeki r uzaklığı için grafikleri elde edimiştir. Bunun sonucunda S-N denklemlerinin $0<r<1$, $0<r<2$ ve $0<r<3$ değerleri için değişimi incelenmiştir.

## 1.2 S-N denklemlerinin bazı analitik özellikleri

### 1.2.1 Varlık ve teklik

Çözümler için varlık ve teklik, Illner vd.'nin teoreminin [7] aşağıdaki basitleştirilmiş versiyonuyla saptanır.

$L_2$-normunun 1'e eşit olduğu $X(x) \in H^2((R)^3)$ durumunda, sistem (1.1) tek, güçlü bir S(r,t) çözümüne sahiptir; bu çözüm zamanda global olup $S(x,0) = X(x)$ ve $\int |S|^2 = 1$. Illner vd. [7], S ve V çözümü için gerekli düzgünlük özelliklerini vermiştir.

### 1.2.2 Yeniden ölçeklendirme

Varsayalım ki

$$\int |S|^2 \, dV = \lambda^{-1},$$

olup bu denklemde $\lambda$ bir reel sabittir; ve

$$\Psi\hat{} = \lambda^2 \, \Psi( \lambda x, \lambda^2 t ) , \qquad (1.2.2a)$$

$$\Phi\hat{} = \Phi ( \lambda x, \lambda^2 t ). \qquad (1.2.2b)$$

kullanılarak, $\Psi\hat{}$ ve $\Phi\hat{}$ aşağıdaki koşul altında S-N denklemlerini sağladığı gösterilmiştir.

$$\int |\Psi|\hat{}^2 \, dV\hat{} = 1 \qquad (1.2.3 )$$

Ayrıca çözümlerin yeniden ölçeklendirilmesi, enerji özdeğerlerinin de ölçeklendirilmesine sebep olur; şöyle ki:

$$E_{yeni} = \lambda E . \qquad (1.2.4 )$$

*Penrose* [2] tarafından kullanıldığı haliyle S-N denklemleri, çok daha uzun bir süre üzerinde

çalışılmış olan Schrödinger-Poisson denklemleriyle yankıdan ilintilidir.

Şimdi denklemlere dönecek olunursa, *Moroz* ve diğerlerini [3] izleyerek, sistem için boyutsuz değişkenler denklem (1.1) de kullanılabilir:

$$i\partial S / \partial t = -\Delta S + \Phi S , \qquad (1.2)$$

$$\Delta V = |S|^2 .$$

Durağan çözüm $S(x, y, z)e^{-iEt}$ biçimini alır ve boyutsal-olmayan zamandan bağımsız S-N denklemleri aşagıdaki gibidir:

$$ES = -\Delta S + \Phi S , \qquad (1.3)$$

$$\Delta V = |S|^2 . \qquad (1.4)$$

## 2. Schrödinger – Newton denklemleri

$$\Delta^2 S = -SV\,, \qquad (2.1)$$

$$\Delta^2 V = -S^2\,. \qquad (2.2)$$

Burada, 2.1 ve 2.2 deki denklemelerde $S$ ve $V$, aşağıdaki değişmezliği sağlar,

$$(S,V,r) \rightarrow (\lambda^2 S\,, \lambda^2 V, \lambda^{-1} x, \lambda^{-2} t\,) \qquad (2.3)$$

Küresel olarak simetrik çözümleri, $S$ ve $V$ yalnızca $r$'nin fonksiyonları olacak biçimde sınırlamamız halinde, (2.1 ve 2.2)'yi aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$(rS)'' = -rSV, \qquad (2.4)$$

$$(rV)'' = -rS^2. \qquad (2.5)$$

### 2.1 Küresel Olarak Simetrik Durağan Durumlar

Durağan durumlara karşılık gelen başlangıç değerlerinin elde edilmesine yönelik çeşitli yöntemler vardır. Durağan durumları hesaplamak için, $V_0 = 1$ olduğunda, birinci durum $S_0$ 1.088'civarında seçilirse yakınsama olmaktadır. Bu yöntemi kullanarak $S_0$ için ilk 3 değeri elde edilebilir. Zamandan bağımsız S-N denklemleri:

$$(rS)_{rr} = -rSV\,, \qquad (2.1.1.a)$$

$$(rV)_{rr} = -rS^2\,. \qquad (2.1.1.b)$$

şeklinde yazılabilir;

Sınır koşulları, $r \to \infty$ için $S \to 0$ ve $r = 0$ 'da $S_r = V_r = 0$ şeklindedir. Eğer $(S, V, r)$ bir çözümse, o zaman herhangi bir sıfır olmayan $\lambda$ için $(\lambda^2 S, \lambda^2 V, r/\lambda)$'de çözümdür. Bu ölçekleme, geriye dönülerek normalleştirmeyi uygulamak için kullanılabilir. Büyük r'de (2.1.1.a ve b) denklemleri için çözümler aşağıdaki gibidir:

$$V = A - B/r, \qquad (2.1.2.a)$$

$$S = C/r\, e^{kr}. \qquad (2.1.2.b)$$

Burada

$$A = V_0 - \int x S^2 dx, \quad (0 < x < \infty) \qquad (2.1.3.a)$$

$$B = \int x^2 S^2 dx. \quad (0 < x < \infty) \qquad (2.1.3.b)$$

Burada, $V_0$, potansiyel $V$'nin başlangıç değeridir (yani $V_0 = V(0)$ ). (2.1.2.a ve b)'yi çözmek için, yukarıda da bahsettiğimiz gibi *Moroz.* [2]'ın yöntemi kullanmışdır. $U(0) = 1$ eşitliği kurulur; bu çözümü doğru şekilde normalleştirilmemiş olarak bırakan uygun $\lambda$ ile yapılabilir; daha sonra $S(0)$ değerlerini seçilir ve $r = 0$'dan uzaklaşarak integral alınır. İntegral alma, S için sonuç, $r$'nin bir değerinde ıraksama gösterinceye kadar devam eder.

## 3. Küresel olarak simetrik evrime ilişkin sayısal yöntemler

S-N Denklemlerini sonlu farklar yöntemiyle aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$(rS)_{rr} = -rSV,$$

$$(rV)_{rr} = -rS^2. \qquad (3.1)$$

Sonlu farklar yöntemi:

xi değerlerinin birbirinden h gibi bir mesafede ve bütün i değerleri için xi-xi-1 =h olacak şekilde eş aralıklarla yerleştirilmiş olduklarını kabul edelim.Böyle noktalar üzerinde etki eden bir B kaydırma operatörü

$$Bf(x)=f(x+h) \qquad (3.2.1)$$

Şeklinde tanımlanır.Yani B,x değişkenini h kadar kaydırarak fonksiyonun bu yeni noktada hesaplanmasını sağlar. B'in üsleri ise

$$Ek\ f(x) = f(x+kh) \quad k=1,2,...$$
$$E0f(x)= f(x+oh) = f(x) \qquad (3.2.2)$$

şeklinde tanımlanır.Fonksiyonun değerini h/2 kadarlık bir kaymada hesaplayan C yarım kaydırma operatörü gibi bir operatör daha vardır.Bu operatör de

$$Bf(x) = f(x+kh) \quad k=1,2,... \qquad (3.2.3)$$

şeklinde tanımlanır.

Fark operatörü olan $\Delta$ *ile*

$$\Delta f(x) = f(x+h)-f(x)$$

şeklinde yazılabilir.Buradan yola çıkarak sonlu farklar yöntemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)h^2/2! + O(h^3)$

$f(x-h) = f(x) - f'(x)h - f''(x)h^2/2! + O(h^3)$ (3.2)

$f''(x)h^2/2! + O(h^3)$ kısmı çıkarırsak,

$f'(x) = (f(x+h) - f(x))/h$ buluruz. (3.2) denklemleri taraf tarafa toplanırsa,

$f''(x) = (f(x+h) - 2f(x) + f(x-h))/h^2$ elde ederiz. (3.3)

Bu genel denklemi S-N Denklemlerine uygularsak,

$S'_i = S_{i+1} - S_i/\Delta r, \qquad S''_i = S_{i+1} - 2S_i + S_{i-1}/(\Delta r)^2$ (3.4)

(3.3) denklemini aşağıdaki şekilde açabiliriz,

$(rS)_r = S + r\,\partial S/\partial r,$

$(S + r\,\partial S/\partial r)_r = (rS)_{rr} = \partial S/\partial r + r\,\partial^2 S/\partial r^2 + \partial S/\partial r, \qquad (\Delta r = r_{i+1} - r_i)$

Yerlerine yazarsak,

$2(S_{i+1} - S_i/\Delta r) + r_i(S_{i+1} - 2S_i + S_{i-1}/(\Delta r)^2) = -r_i S_i V_i$ (3.5)

$2(U_{i+1} - U_i/\Delta r) + r_i(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}/(\Delta r)^2) = -r_i U_i^2$ (3.6)

$r_i U_{i+2}/(\Delta r)^2 + [((2/\Delta r) - (2r_i/(\Delta r)^2)]\,U_{r+1}$

$+ [(r_i/(\Delta r)^2) - (2/\Delta r)]u_i = -r_i S_i^2$ (3.7)

$(r_i/(\Delta r)^2)[(r_{i+2}/(\Delta r)^2)(S_{i+4} - 2S_{i+3} + S_{i+2})$

$+ 2/\Delta r(S_{i+3} - S_{i+2})](-1/r_{i+2}S_{i+2})$

$+ (2/\Delta r) - (2r_i/(\Delta r)^2))[(r_{i+1}/(\Delta r)^2)(S_{i+3} - 2S_{i+2} + S_{i+1})$

$+( 2/\Delta r )( S_{i+2} - S_{i+1} ) ]( -1/ r_{i+2} S_{i+2} )$

$+ (r_i /( \Delta r)^2 - ( 2 / \Delta r ) )[ r_i /( \Delta r)^2 ( S_{i+2} - 2S_{i+1} + S_i )$

$+( 2 / \Delta r )( S_{i+1} - S_i )] ( -1 / r_i S_i ) = - r_i S_i^{\,2}$

$S_i$'*in katyasına* $k_1$, *sabit* değerlere ise $k_2$ dersek,

$S_i^{\,3} + k_1 S_i + k_2 = 0$ denklemi elde ederiz.

$k_1 = ( -1 / ( r_i + 2S_i + 2( \Delta r )^2 ) )[ r_{i+2} ( S_{i+4} - 2S_{i+3} + S_{i+2} )$

$+( 2 / ( \Delta r )^{\,2} )( S_{i+3} - S_{i+2} )]$

$+(2 / r_{i+1} S_{i+1} )( ( 1 / ( \Delta r )^2 ) - ( 1 / (r_i \Delta r ))[ ( r_{i+1} /( \Delta r )^2 )(S_{i+3} - 2S_{i+2} + S_{i+1} )$

$+(2 / \Delta r)( S_{i+2} - S_{i+1} )]- (1 / r_i^2)(r_i /( \Delta r)^2 -( 2 / \Delta r))^2$

$k_2 = ( -1 / r_i )^2 ( r_i^2 / ( \Delta r )^2 - ( 2 / \Delta r ) )[ ( r_i /( \Delta r )^2 )( S_{i+2} - 2S_{i+1} )+( 2/\Delta r)S_{i+1}$

Bu denklemin köklerini bularak *S* değerleri için değişimler incelenebilir.
( $S = 0$, $V =$ sabit ) $S_0 = S$ (0) ve $V_0 = V$ (0) şeklinde yazarak, aşağıdaki integral denklemlerine ilişkin denk bir sistem elde etmek üzere, *r* değerine ilişkin olarak (2.4,5)'in iki kez integral alındığında,

$$S(r) = S_0 - \int x ( 1-( x / r )) S(x) V(x) \, dx \quad (0<x<r \text{ için}) \qquad (3.8)$$

$$V(r)= V_0 - \int x( 1-( x / r )) S(x)^2 \, dx \qquad (3.9)$$

$$V'(r) =( -1 / r^2 ) \int x^{\,2} S^{\,2} \, dx \qquad (3.10)$$

denklemleri elde edilir.

Picard ardışık yaklaşım yöntemi ile

$$S_{n+1} = S_0 - \int x\,(1-(x/r))\,S_n V_n\,dx \quad (0<x<r \text{ için}) \qquad (3.11)$$

$$V_{n+1} = V_0 - \int x(1-(x/r))\,S_n^2\,dx$$

bağıntıları elde edilir.

*Sn* ve *Vn* denklemlerinin ilk üç değerleri için yukarıdaki 3.10 denklemi kullanılarak r boyunca belirli aralıklar için değişimleri elde edilir. $S_0$ 1,089 için

$n = 1, n = 2, n = 3$ vererek ( $0<r<1, 0<r<2, 0<r<3$ için) $S_1, S_2, S_3$ ve $V_1, V_2, V_3$ değerleri hesaplanabilir.

## 4. $S_n$ ve $V_n$ Denklemleri için grafik çizimleri

Tüm grafiklerde yatay eksen adım sayılarını göstermektedir.

### 4.1 n = 1 için 0 < r < 1 ralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği:

*n = 1 için,*

$S_0 = 1{,}089$ olsun.

$S_1 = S_0 - \int x\,(1-(x/r))\,S_0\,dx \quad (0<x<r \text{ için})$

$$S_1 = S_0 - S_0\,r^2/6 \qquad (4.1)$$

$S_1$




**Şekil 1** *$R_0$=0,05 ve 20 adım ile 0<r<1*

**4.2 n = 1 , 0 < r < 2 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği:**

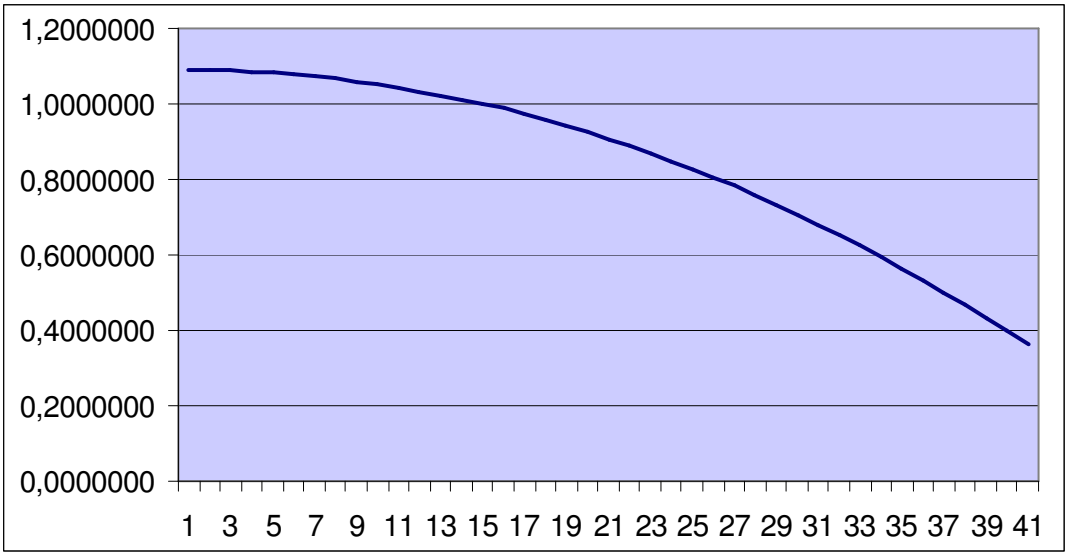
*n = 1,*

$S_0 = 1{,}089.$

$S_1 = S_0 - \int x\,(\,1-(\,x / r\,))\,S_0\,dx \quad (0<x<r \text{ için})$

$S_1 = S_0 - S_0\, r^{\,2} / 6$

$S_1$




**Şekil 2** *$R_0$=0,05 ve 40 adım ile 0< r<2*

**4.3 n = 1 , 0 < r < 3 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği:**

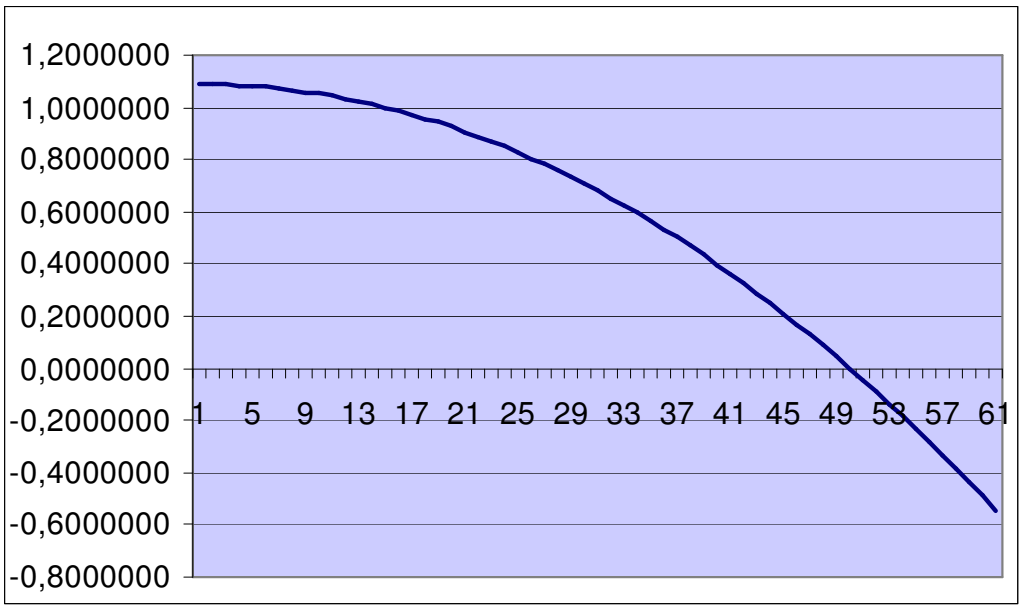
*n = 1,*

$S_0 = 1{,}089.$

$S_1 = S_0 - \int x\,(1-(x/r))\,S_0\,dx \quad (0<x<r \text{ için})$

$S_1 = S_0 - S_0\,r^2/6$

$S_1$




**Şekil 3** *$R_0$=0,05 ve 60 adım ile 0< r<3*

**4.4 n = 1 , 0 < r < 1 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği:**

*n = 1,*

$S_0 = 1{,}089.$

$V_1 = 1 - \int x\,(\,1-(\,x / r\,))\,S_0^{\,2}\,dx$ *(0<x<r için)*

$$V_1 = 1 - S_0^{\,2}\, r^{\,2} / 6 \qquad (4.2)$$

$V_1$




**Şekil 4** *$R_0$=0,05 ve 20 adım ile 0<r<1*

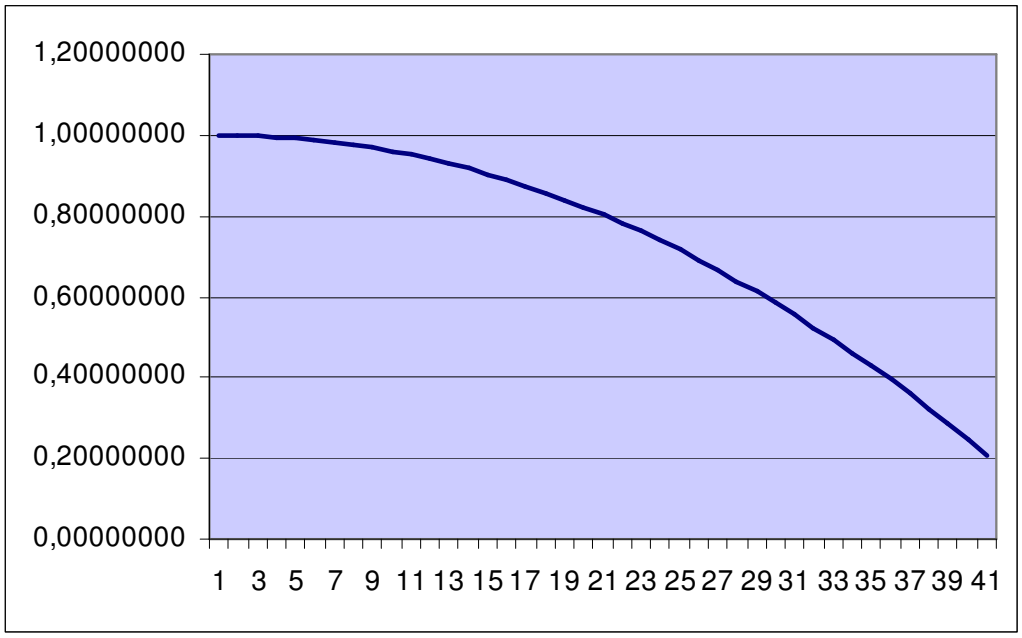
**4.5 n = 1, 0 < r < 2 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği:**

$S_0 = 1{,}089$ olsun.

$V_1 = 1 - \int x\,(\,1-(\,x / r\,))\,S_0^{\,2}\,dx \quad (0<x<r \text{ için})$

$V_1 = 1 - S_0^{\,2}\,r^{\,2} / 6$

$V_1$




**Şekil 5** *$R_0$=0,05 ve 40 adım ile 0< r<2*

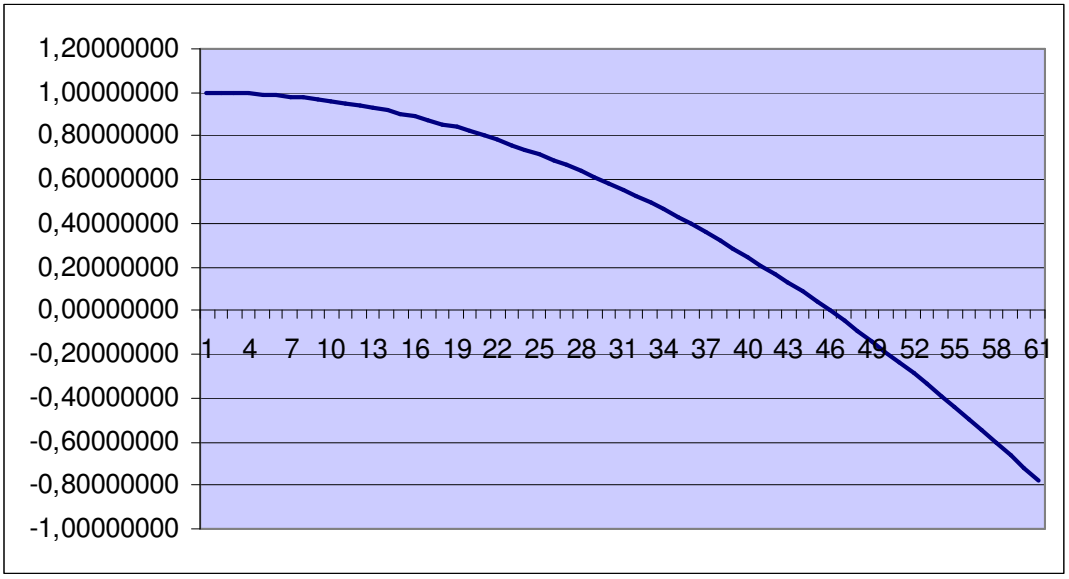
**4.6 n = 1 , 0 < r < 3 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği:**

$S_0 = 1{,}089$ olsun.

$V_1 = 1 - \int x\,(\,1-(\,x / r\,))\,S_0^{\,2}\,dx \quad (0<x<r \text{ için})$

$V_1 = 1 - S_0^{\,2}\, r^{\,2} / 6$

$V_1$




**Şekil 6** *$R_0$=0,05 ve 60 adım ile r<3*

**4.7 n = 2 , 0 < r < 1 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği:**

$S_0 = 1{,}089$ olsun.

$$S_2 = S_0 - (S_0 (-6 + r^2)(-6 + S_0 r^2) r^2)/216 \qquad (4.3)$$



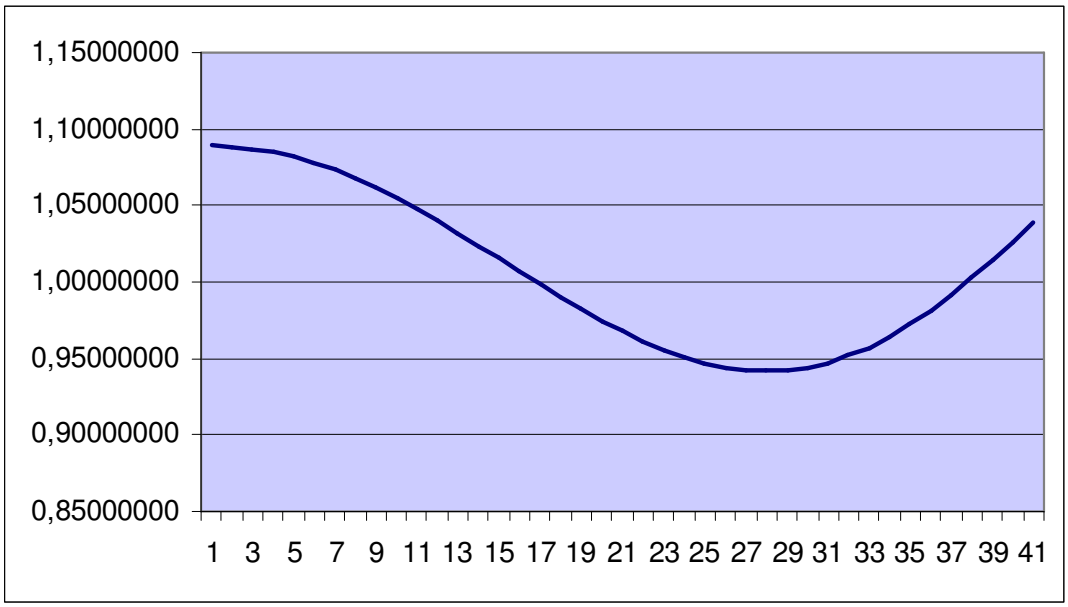

**Şekil 7** *$R_0$=0,05 ve 20 adım ile 0<r<1*

**4.8 n = 2 , 0 < r < 2 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği:**

$S_0 = 1,089$ olsun.

$S_2 = S_0 - ( S_0 (-6 + r^2)(-6 + S_0 r^2) r^2) / 216$

$S_2$



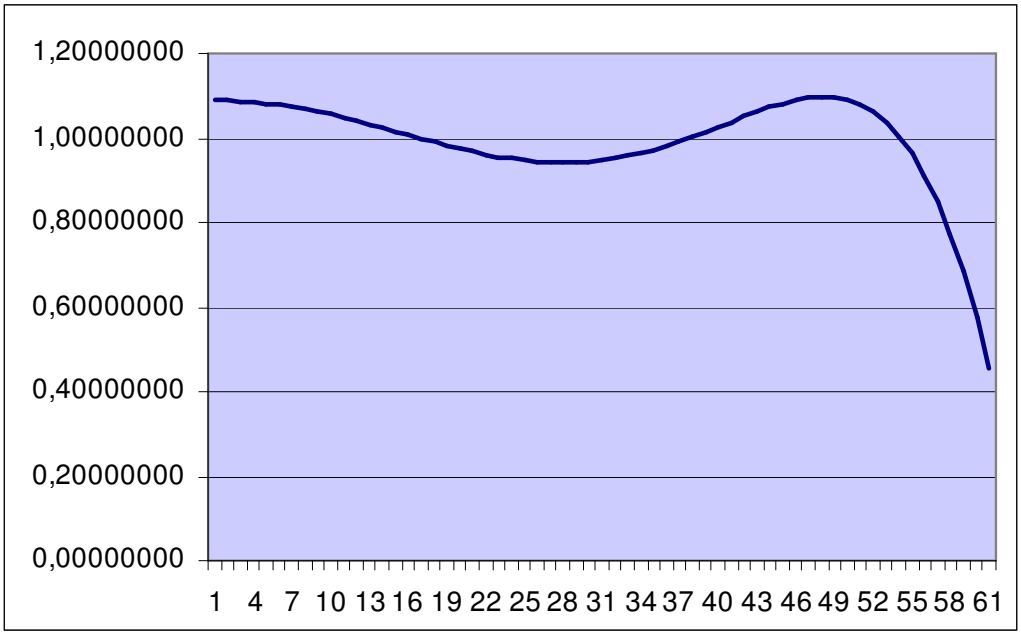

**Şekil 8** *$R_0$=0,05 ve 40 adım ile 0<r<2*

**4.9 n = 2 , 0 < r < 3 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği:**

$S_0 = 1,089$ olsun.

$S_2 = S_0 - (S_0 (-6 + r^2)(-6 + S_0 r^2) r^2)/216$

$S_2$

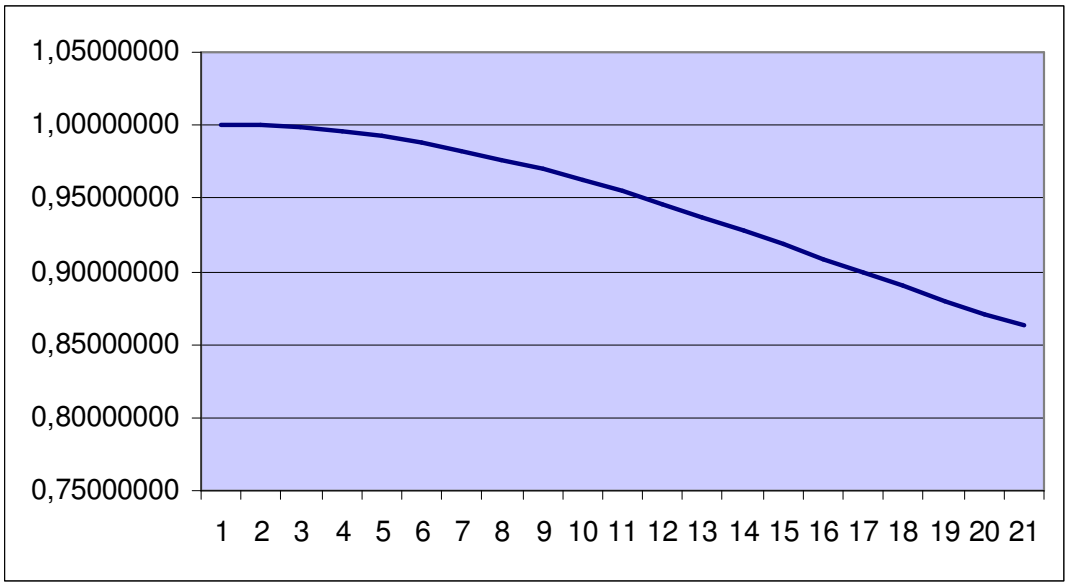



**Şekil 9** *$R_0$=0,05 ve 60 adım ile 0<r<3*

**4.10 n = 2 , 0 < r < 1 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği:**

$S_0 = 1,089$ olsun.

$$V_2 = 1 - (S_0^{\,2}(-6 + r^2)^{\,2} r^2)/216 \qquad (4.4)$$

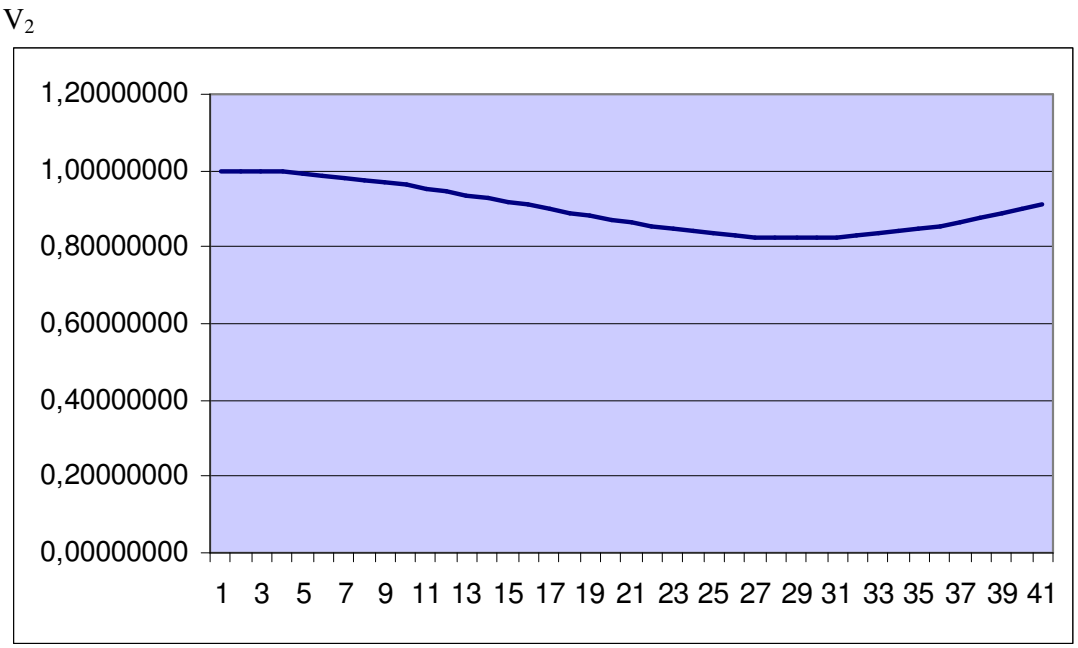



**Şekil 10** *$R_0$=0,05 ve 20 adım ile 0<r<1*

**4.11 n = 2 , 0 < r < 2 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği:**

$S_0 = 1,089$ olsun.

$V_2 = 1 - (S_0^{\,2}\,(-6 + r^2)^{\,2}\,r^2)/216$

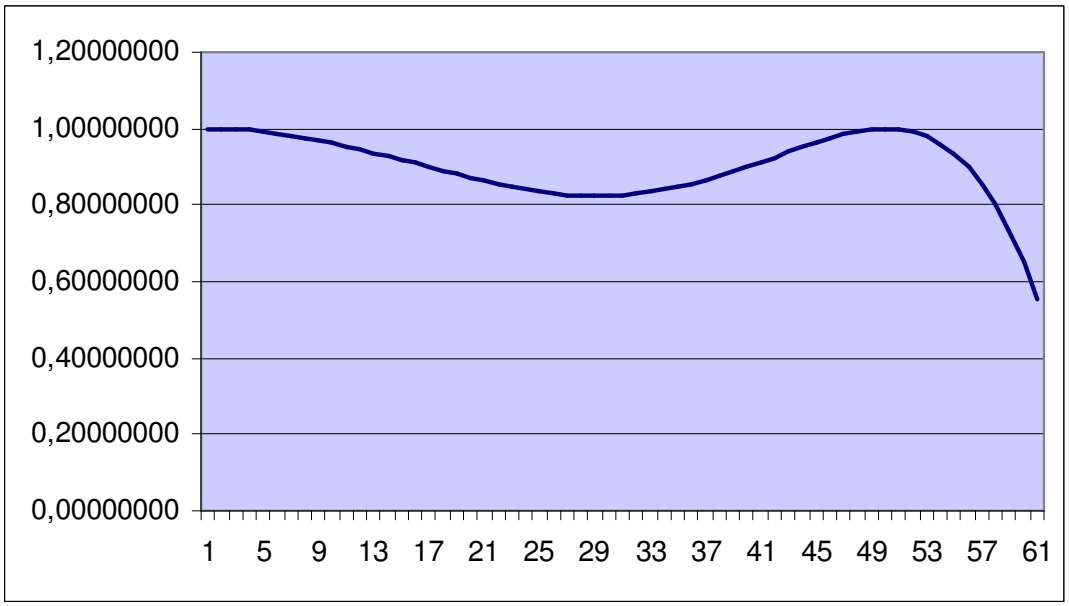



**Şekil 11** *$R_0$=0,05 ve 40 adım ile 0<r<2*

**4.12 n = 2 , 0 < r < 3 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği:**

$S_0 = 1,089$ olsun.

$V_2 = 1 - (S_0^{\,2}\,(-6 + r^2)^{\,2}\,r^2)/216$




**Şekil 12** *$R_0$=0,05 ve 60 adım ile 0<r<3*

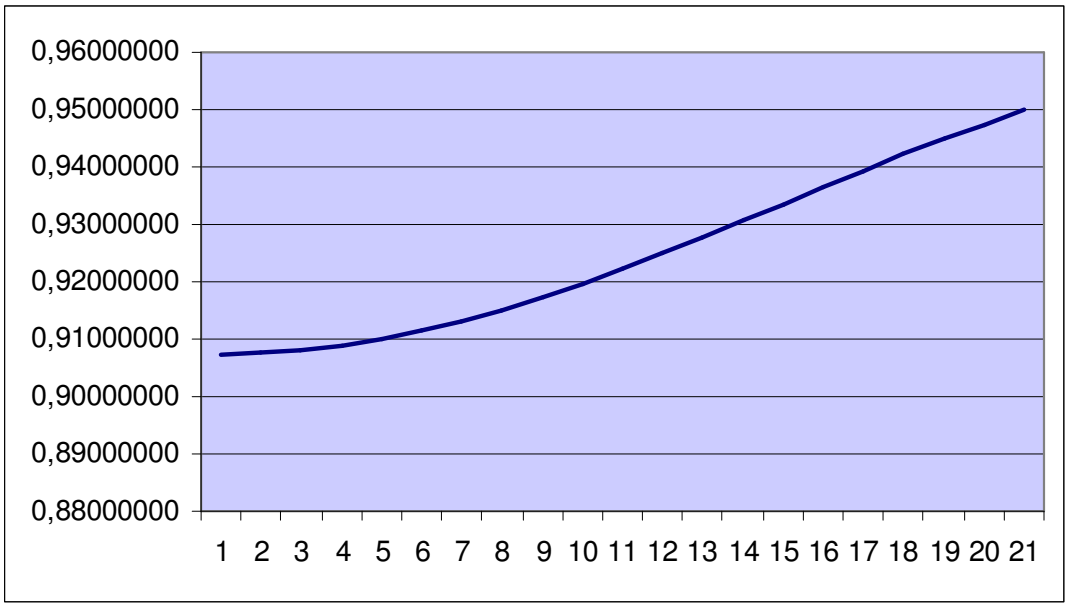
**4.13 n = 3 , 0 < r < 1 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği:**

$S_0 = 1,089$ olsun.

$$S_3 = S_0 - ( S_0 ( -216 + 36r^2 - 6r^4 S_0^2 - 6r^4 + r^6 S_0^2 )$$

$$(-216+36S_0^2r^2-12r^4S_0^2)\, r^2 )/ 279936 \qquad (4.5)$$

$S_3$




**Şekil 13** *$R_0$=0,05 ve 20 adım ile 0<r<1*

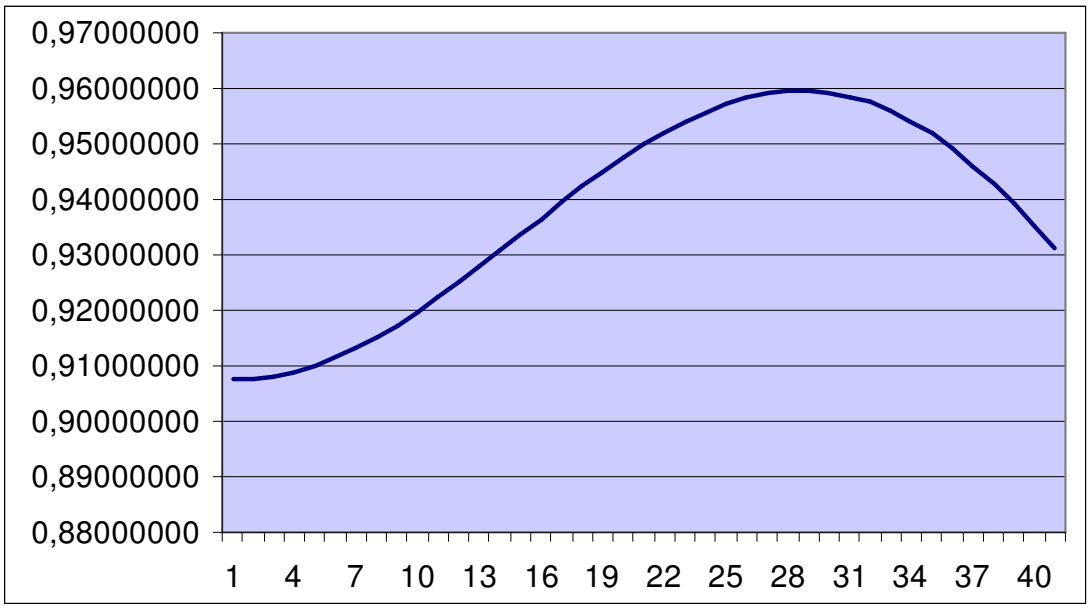
**4.14 n = 3 , 0 < r < 2 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği:**

$S_0 = 1,089$ olsun.

$$S_3 = S_0 - ( S_0 ( -216 + 36r^2 - 6r^4 S_0^2 - 6r^4 + r^6 S_0^2 )$$

$$(-216+36 S_0^2 r^2 - 12 r^4 S_0^2) r^2 ) / 279936$$

$S_3$




**Şekil 14** *$R_0$=0,05 ve 40 adım ile 0<r<2*

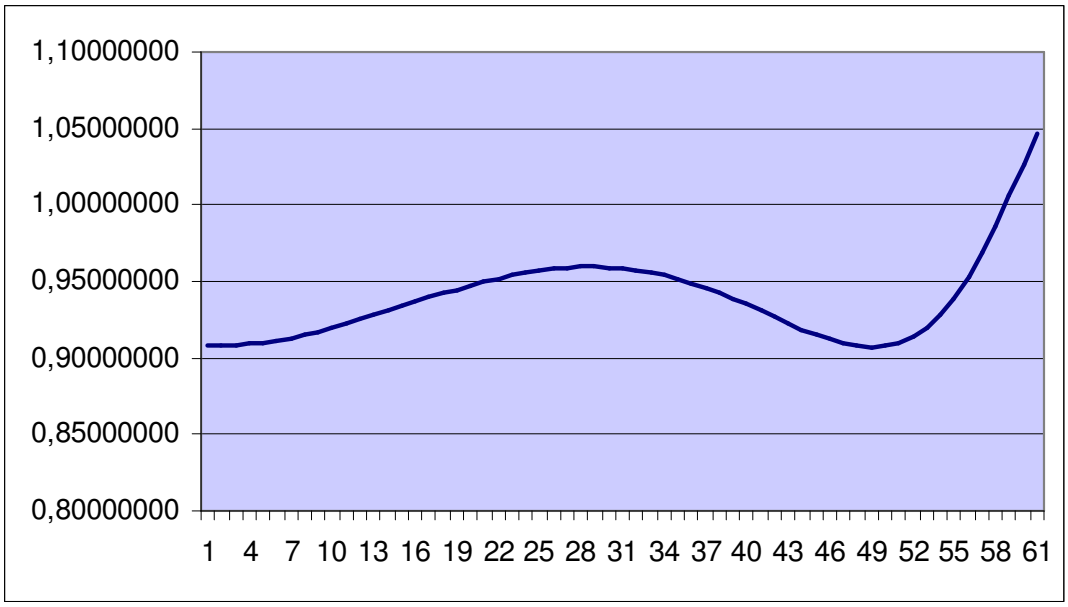
**4.15 n = 3 , 0 < r < 3 aralığındaki $S_n$ Denklemi ve Grafiği:**

$S_0 = 1,089$ olsun.

$$S_3 = S_0 - ( S_0 ( -216 + 36r^2 - 6r^4 S_0^2 - 6r^4 + r^6 S_0^2 )$$

$$(-216+36 S_0^2 r^2 - 12 r^4 S_0^2) r^2 ) / 279936$$

$S_3$

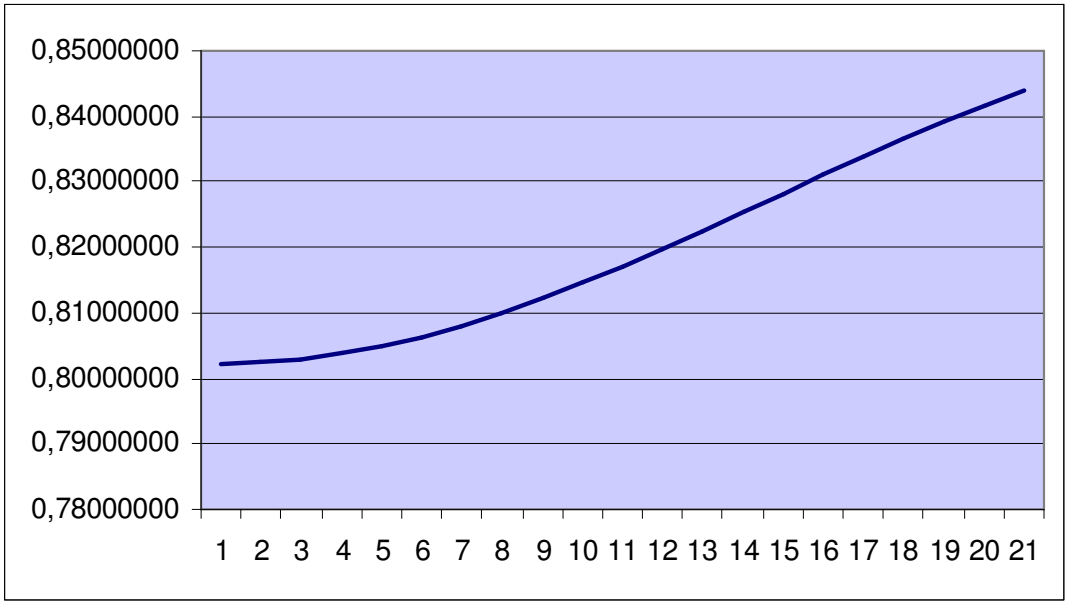



**Şekil 15** *$R_0$=0,05 ve 60 adım ile 0<r<3*

**4.16 n = 3 , 0 < r < 1 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği:**

$S_0 = 1,089$ olsun.

$$V_3 = 1 - (S_0^2 (-216 + 36r^2 - 6r^4 S_0^2 - 6r^4 + r^6 S_0^2)^2 r^2) / 279936 \qquad (4.6)$$



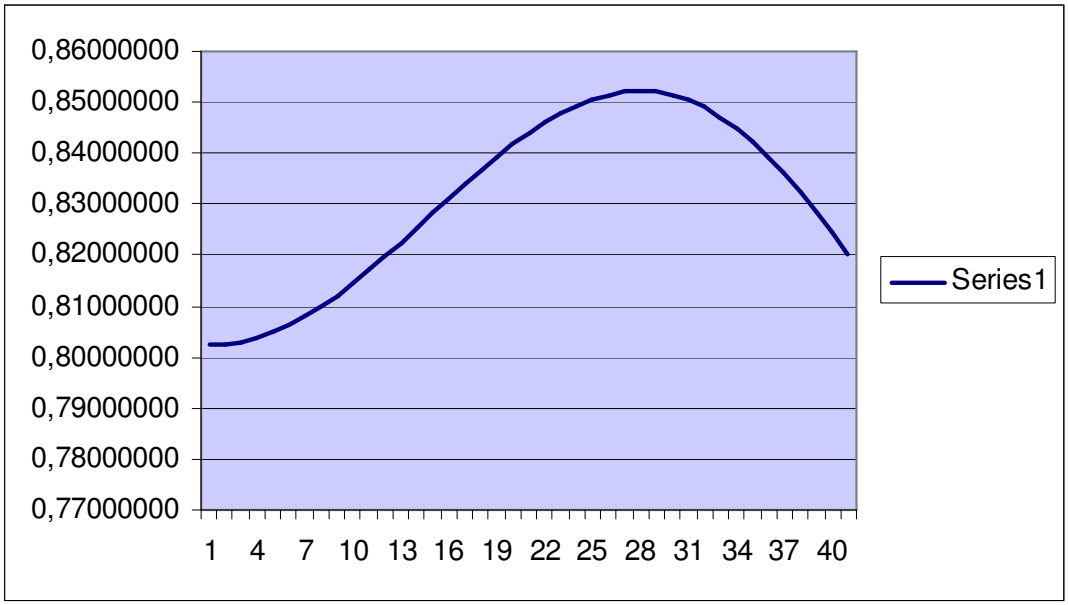

**Şekil 16** *$R_0$=0,05 ve 20 adım ile 0<r<1*

**4.17 n = 3 , 0 < r < 2 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği:**

$S_0 = 1,089$ olsun.

$$V_3 = 1 - (S_0^2 (-216 + 36r^2 - 6r^4 S_0^2 - 6r^4 + r^6 S_0^2)^2 r^2) / 279936$$

$V_3$



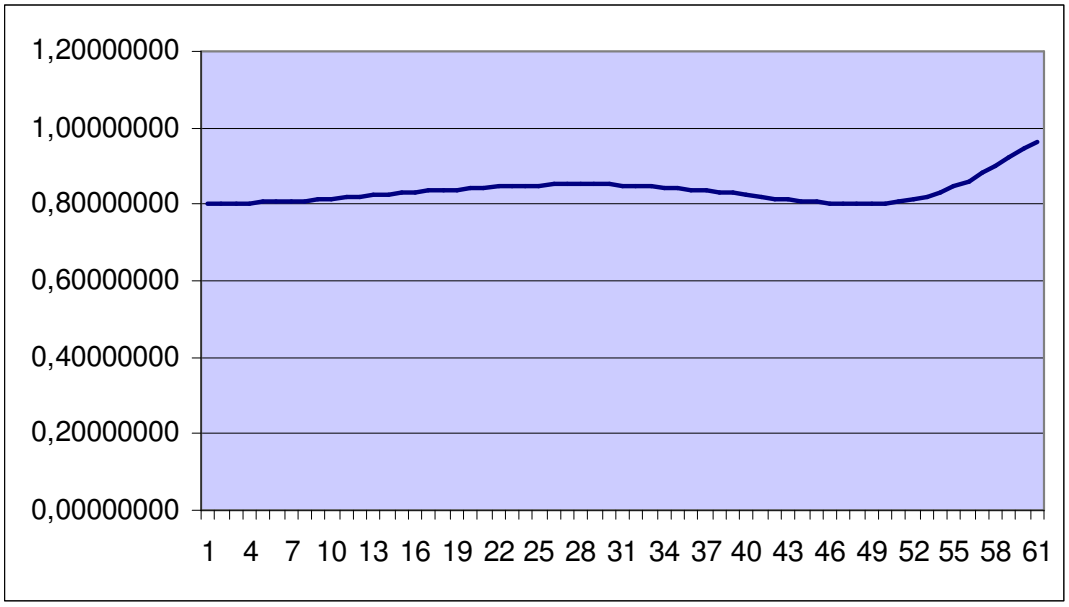

**Şekil 17** *$R_0$=0,05 ve 40 adım ile 0<r<2*

**4.18 n = 3 , 0 < r < 3 aralığındaki $V_n$ Denklemi ve Grafiği:**

$S_0 = 1{,}089$ olsun.

$$V_3 = 1 - (S_0^{\,2}(-216 + 36r^{\,2} - 6r^{\,4}S_0^{\,2} - 6r^{\,4} + r^{\,6}S_0^{\,2})^{\,2}\, r^{\,2}) / 279936$$

$V_3$




**Şekil 18** *$R_0$=0,05 ve 60 adım ile 0<r<3*

## 5. Sonuçlar

İlk olarak S-N denklemlerinin sonlu farklar yöntemiyle sayısal çözümleri ele alınmıştır. Ortaya çıkan denklemin köklerini bularak denklemin değişimini ölçmek amacıyla belirli uzaklıklar için grafikler elde edilmiştir.

$0<r<1$ aralığı,$0<r<2$ aralığı ve $0<r<3$ aralığındaki bu değerler birbirleriyle kıyaslanırsa başlangıçtaki değerleriyle de uyumlu olduğu görülmektedir. Aynı şekilde $V_1$, $V_2$ , $V_3$ değerlerinin grafikleri ise kendi aralarında uyumludur. Sonuç olarak, Picard yöntemiyle S-N denklemlerinin ilk üç S ve V değerleri için çizdirdiğimiz grafiklerin aralarında yaptığımız karşılaştırma sonucu S-N denklemlerinin bu yöntemle de çözülmesinin olası olduğu saptanmıştır.

Bunun sonucunda ise grafiklerden de anlaşılacağı gibi başlangıç değerinden belirli bir r uzaklığı arasında S denklemleri için azalan bir grafik ortaya çıkmıştır.

**KAYNAKLAR**


[1] **R. Ruffini, S. Bonazzola**, 1969. Systems of Self-Gravitating Particles in General Relativity and the concept of an Equation of State. Phys. Rev., 187, 1767.

[2] **R. Penrose,** 1998. Quantum computation entanglament and state reduction. Phil. Trans. R. Soc. A 356, 1927-1939.

[3] **I.M.Moroz, R.Penrose, K.P.Tod**, 1998. Spherically-symmetric solutions of the Schrödinger-Newton equations. Class Quantum Grav., 15, 2733-2742.

[4] **I.M.Moroz, K.P.Tod**, 1999. An Analytical Approach to the Schrödinger-Newton equations. Nonlinearity, 12, 201-16.

[5] **D. H. Bernstein, E. Giladi, K.R. W Jones,** 1998. Eigenstate of the Gravitational Schrödinger Equation, Modern Physics Letters A13, 2327-2336.

[6] **R. Harrison,** 2001. A numerical study of the Schrödinger-Newton equations, St.Peter's College, University of Oxford. Doctor of Philosophy thesis,UK.

[7] **R. Illner, PF Zwiefel, H. Lange,** 1994. Global existence, uniqueness and asymptotic behaviour of solutions of the Wigner-Poisson and Schrödinger-Poisson systems. Math Meth in Appl. Sci., 17, 349-376

## ÖZGEÇMİŞ

Özsev Kaçan 1980 İstanbul doğumludur.İstanbul Fatih Vatan Lisesi'nden 1997 yılında mezun olmuş 1998 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi'nde lisans eğitimine başlamıştır. 2002 yılında lisans derecesini aldıktan sonra, 2004 yılında İTÜ FBE Matematik Mühendisliği yüksek lisans programına girmiştir. Eğitim hayatıyla eş zamanlı çeşitli özel şirketlerde Yazılım Mühendisliği ve Yazılım uzmanı olarak çalışma hayatına devam etmiştir.Şu anda Telekominikasyon sektörüne mensup özel bir şirkette Raporlama Analiz Ve Geliştirme Uzmanı olarak görev yapmaktadır.