**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# MİNDLİN PLAKLARIN SONLU ELEMAN METODU İLE ÇÖZÜMLENMESİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**İnş. Müh. Ümit TÜRE**

**Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ**

**Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ**

**MAYIS 2002**

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

# MİNDLİN PLAKLARIN SONLU ELEMAN METODU İLE ÇÖZÜMLENMESİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**İnş. Müh. Ümit TÜRE**

**501991192**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 Mayıs 2002**

**Tezin Savunulduğu Tarih : 30 Mayıs 2002**

**Tez Danışmanı : Doç.Dr. Tülay AKSU ÖZKUL**

**Diğer Jüri Üyeleri Prof.Dr. Metin AYDOĞAN (İ.T.Ü.)**

**Prof.Dr. Faruk YÜKSELER (Y.T.Ü.)**

**MAYIS 2002**

## ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında engin bilgisini benimle paylaşan hocam Tülay AKSU ÖZKUL'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Mayıs 2002 Ümit TÜRE

**İÇİNDEKİLER**

**TABLO LİSTESİ** vi

**ŞEKİL LİSTESİ** viii

**SEMBOL LİSTESİ** xi

**ÖZET** xii

**SUMMARY** xii

**1 GİRİŞ 1**

**1.1 Konu 1**

**1.2 Amaç 1**

**1.3 Yöntem 2**

**1.4 Literatür 2**

**2 SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ 6**

**2.1 Giriş 6**

**2.2 Sonlu elemanlar yöntemindeki adımlar 7**

**2.3 Yöntemin uygulanması 8**

**2.4 Parametre fonksiyonları 9**

**2.5 Yakınsaklık kriterleri 10**

2.5.1 Uygunluk kriteri 10

2.5.2 Bütünlük kriteri 11

**2.6 Polinomun kurulması 12**

**2.7 Matris deplasman yöntemi 12**

**2.8 Yer değiştirme fonksiyonu 13**

**2.9 Şekil fonksiyonları 14**

**2.10 Şekil değiştirmeler 14**

**2.11 Gerilmeler 15**

**2.12 Sonlu eleman karakteristikleri 15**

**3 SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNE AİT BAĞINTILARA ESAS TEŞKİL EDEN MINDLIN PLAK TEORİSİ VE ELEMAN KARAKTERİSTİKLERİ 20**

**3.1 Mindlin Plak Teorisi 20**

**3.2 Şekil fonksiyonları 22**

3.2.1 TURE12 elemanının şekil fonksiyonları ve yerel türevleri 22

3.2.2 TURE24 elemanının şekil fonksiyonları ve yerel türevleri 23

**3.3 Yer değiştirme bileşenleri 25**

**3.4 Şekil değiştirme-Yer değiştirme bağıntıları 27**

**3.5 Gerilme-Şekil değiştirme bağıntıları 28**

**3.6 Gerilme-Yer değiştirme bağıntıları 29**

**3.7 İç kuvvet-Yer değiştirme bağıntıları 29**

**3.8 Şekil değiştirme enerjisi 31**

**3.9 Kayma kilitlenmesi 33**

**3.10 Yer değiştirmeleri şekil değiştirmelere bağlayan $[B_b]$ ve $[B_s]$ matrisleri 34**

**3.11 Eleman rijitlik matrisleri, $[K_b]^e$ ve $[K_s]^e$ 36**

**3.12 İntegrasyon adımının azaltılması 38**

**3.13 Yük matrisleri 39**

**4 DENKLEM SİSTEMİNİN KURULMASI VE ÇÖZÜMÜ 43**

**4.1 Mesnet şartları 43**

**4.2 Çözüm 44**

**4.3 Art işlemler 44**

**5 BİLGİSAYAR PROGRAMI 45**

**5.1 Fortran77 dili 45**

**5.2 Programın genel yapısı 45**

**5.3 İlgili dosyalar 46**

**5.4 Programın akış diyagramları 46**

5.4.1 ANA alt programı 47

5.4.2 FORM_KMAT alt programı 47

5.4.3 FORMKBE alt programı 48

5.4.4 FORMKSE alt programı 50

5.4.5 FORM_FMAT alt programı 51

5.4.6 FORMFE alt programı 52

**5.5 Diğer alt programlar 53**

**6 SAYISAL UYGULAMALAR 55**

**6.1 Giriş 55**

**6.2 Örnek 1: Düzgün yayılı yüklü ankastre mesnetli kare plak 56**

**6.3 Örnek 2: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plak 62**

**6.4 Örnek 3: Tekil yüklü ankastre mesnetli kare plak 68**

**6.5 Örnek 4: Tekil yüklü basit mesnetli kare plak 72**

**6.6 Örnek 5: Yayılı yüklü ankastre mesnetli daire plak 76**

**6.7 Örnek 6: Yayılı yüklü basit mesnetli daire plak 79**

**6.8 Örnek 7: Yayılı yüklü, iki kenarı basit mesnetli verev plak 81**

**7 SONUÇLAR 84**

**KAYNAKLAR 85**

**EKLER 89**

**ÖZGEÇMİŞ 93**

## TABLO LİSTESİ


| | | Sayfa No |
|---|---|---|
| **Tablo 2.1.** | Sonlu eleman yöntemlerinin sınıflandırılması | 7 |
| **Tablo 3.1.** | Gauss Nümerik İntegrasyon formülündeki bazı n değerleri için koordinatlar ve ağırlık katsayıları | 38 |
| **Tablo 3.2.** | İntegrasyon adımları | 39 |
| **Tablo 6.1** | Problem sabitleri | 55 |
| **Tablo 6.2** | Yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi | 57 |
| **Tablo 6.3** | Yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi | 58 |
| **Tablo 6.4** | Yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti yakınsama testi | 59 |
| **Tablo 6.5** | Yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi | 60 |
| **Tablo 6.6** | Yayılı yüklü ankastre kare plakta plak ortası çökmesi kilitlenme testi | 61 |
| **Tablo 6.7** | Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi | 63 |
| **Tablo 6.8** | Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi | 64 |
| **Tablo 6.9** | Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti yakınsama testi | 65 |
| **Tablo 6.10** | Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi | 66 |
| **Tablo 6.11** | Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta plak ortası çökmesi kilitlenme testi | 67 |
| **Tablo 6.12** | Tekil yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi | 69 |
| **Tablo 6.13** | Tekil yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi | 70 |
| **Tablo 6.14** | Tekil yüklü ankastre kare plakta plak ortası çökmesi kilitlenme testi | 71 |
| **Tablo 6.15** | Tekil yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi | 73 |
| **Tablo 6.16** | Tekil yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi | 74 |
| **Tablo 6.17** | Tekil yüklü basit mesnetli kare plakta plak ortası çökmesi kilitlenme testi | 74 |

| | | **Sayfa No** |
|---|---|---|
| **Tablo 6.18** | Yayılı yüklü ankastre mesnetli daire plakta h/2R=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi | 77 |
| **Tablo 6.19** | Yayılı yüklü ankastre mesnetli daire plakta h/2R=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi | 78 |
| **Tablo 6.20** | Yayılı yüklü ankastre mesnetli daire plakta h/2R=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi | 78 |
| **Tablo 6.21** | Yayılı yüklü basit mesnetli daire plakta h/2R=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi | 80 |
| **Tablo 6.22** | Yayılı yüklü basit mesnetli daire plakta h/2R=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi | 81 |
| **Tablo 6.23** | Razzaque Verev Plağı'nda h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi | 82 |
| **Tablo 6.24** | Razzaque Verev Plağı'nda h/a=0.01 için plak ortası My momenti yakınsama testi | 83 |

## ŞEKİL LİSTESİ


| | | Sayfa No |
|---|---|---|
| **Şekil 2.1** | : 4 düğüm noktalı dörtgen elemanın şekil fonksiyonları | 14 |
| **Şekil 3.1** | :Kalınlık doğrultusundaki, gerçek ve farz edilen kayma deformasyonu dağılımları | 20 |
| **Şekil 3.2** | : TURE12 elemanı | 22 |
| **Şekil 3.3** | : TURE24 elemanı | 24 |
| **Şekil 3.4** | **:** x-z kesitinde yer değiştirmeler | 25 |
| **Şekil 3.5** | **:** y-z kesitinde yer değiştirmeler | 26 |
| **Şekil 3.6** | : TURE12 elemanının yer değiştirme bileşenleri | 27 |
| **Şekil 3.7** | : TURE24 elemanının yer değiştirme bileşenleri | 28 |
| **Şekil 3.8** | **:** Gerilmeler | 28 |
| **Şekil 3.9** | **:** Plakta iç kuvvetler | 30 |
| **Şekil 3.10** | : Tekil yükler | 40 |
| **Şekil 3.11** | : Yayılı yük (sadece w doğrultusunda) | 41 |
| **Şekil 5.1** | : ANA alt programının akış diyagramı | 47 |
| **Şekil 5.2** | : FORM_KMAT alt programının akış diyagramı | 48 |
| **Şekil 5.3** | : FORMKBE alt programının akış diyagramı | 50 |
| **Şekil 5.4** | : FORMKSE alt programının akış diyagramı | 51 |
| **Şekil 5.5** | : FORM_FMAT alt programının akış diyagramı | 52 |
| **Şekil 5.6** | : FORMFE alt programının akış diyagramı | 53 |
| **Şekil 6.1** | : Örnek-1 (2x2 ağ) | 56 |
| **Şekil 6.2** | : Örnek-1 (3x3 ağ) | 56 |
| **Şekil 6.3** | : Örnek-1 (4x4 ağ) | 56 |
| **Şekil 6.4** | : Örnek-1 (8x8 ağ) | 56 |
| **Şekil 6.5** | : Yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi | 57 |
| **Şekil 6.6** | : Yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi | 58 |
| **Şekil 6.7** | : Yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti yakınsama testi | 59 |
| **Şekil 6.8** | : Yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi | 60 |
| **Şekil 6.9** | : Yayılı yüklü ankastre kare plakta kilitlenmenin meydana gelişi | 61 |
| **Şekil 6.10** | : Yayılı yüklü ankastre kare plakta kilitlenmenin önlenmesi | 61 |
| **Şekil 6.11** | : Örnek-2 (2x2 ağ) | 62 |
| **Şekil 6.12** | : Örnek-2 (3x3 ağ) | 62 |

**Sayfa No**

**Şekil 6.13** : Örnek-2 (4x4 ağ) 62
**Şekil 6.14** : Örnek-2 (8x8 ağ) 62
**Şekil 6.15** : Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi 63
**Şekil 6.16** : Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi 64
**Şekil 6.17** : Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti yakınsama testi 65
**Şekil 6.18** : Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi 66
**Şekil 6.19** : Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta kilitlenmenin meydana gelişi 67
**Şekil 6.20** : Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta kilitlenmenin önlenmesi 67
**Şekil 6.21** : Örnek-4 (2x2 ağ) 68
**Şekil 6.22** : Örnek-4 (3x3 ağ) 68
**Şekil 6.23** : Örnek-4 (4x4 ağ) 68
**Şekil 6.24** : Örnek-4 (8x8 ağ) 68
**Şekil 6.25** : Tekil yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi 69
**Şekil 6.26** : Tekil yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi 70
**Şekil 6.27** : Tekil yüklü ankastre kare plakta kilitlenmenin meydana gelişi 71
**Şekil 6.28** : Tekil yüklü ankastre kare plakta kilitlenmenin önlenmesi 71
**Şekil 6.29** : Örnek-4 (2x2 ağ) 72
**Şekil 6.30** : Örnek-4 (3x3 ağ) 72
**Şekil 6.31** : Örnek-4 (4x4 ağ) 72
**Şekil 6.32** : Örnek-4 (8x8 ağ) 72
**Şekil 6.33** : Tekil yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi 73
**Şekil 6.34** : Tekil yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi 74
**Şekil 6.35** : Tekil yüklü basit mesnetli kare plakta kilitlenmenin meydana gelişi 75
**Şekil 6.36** : Tekil yüklü basit mesnetli kare plakta kilitlenmenin önlenmesi 75
**Şekil 6.37** **:** Örnek 5, 3 adet TURE12 elemanıyla bölümlenmiş 76
**Şekil 6.38** **:** Örnek 5, 12 adet TURE12 elemanıyla bölümlenmiş 76
**Şekil 6.39** **:** Örnek 5, 27 adet TURE12 elemanıyla bölümlenmiş 76
**Şekil 6.40** **:** Örnek 5, 3 adet TURE24 elemanıyla bölümlenmiş 76
**Şekil 6.41** **:** Örnek 5, 12 adet TURE24 elemanıyla bölümlenmiş 76
**Şekil 6.42** **:** Örnek 5, 27 adet TURE24 elemanıyla bölümlenmiş 76
**Şekil 6.43** : Örnek 5 için yükleme durumu ve mesnetlenme şekli 77

**Sayfa No**

**Şekil 6.44** : Yayılı yüklü ankastre mesnetli daire plakta h/2R=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi 77

**Şekil 6.45** : Yayılı yüklü ankastre mesnetli daire plakta h/2R=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi 78

**Şekil 6.46** : Yayılı yüklü ankastre mesnetli daire plakta h/2R=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi 79

**Şekil 6.47** : h/2R=0.01 için çökmenin plak yarıçapı boyunca değişimi 79

**Şekil 6.48** : Örnek 6 için yükleme durumu ve mesnetlenme şekli 80

**Şekil 6.49** : Yayılı yüklü basit mesnetli daire plakta h/2R=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi 80

**Şekil 6.50** : Yayılı yüklü basit mesnetli daire plakta h/2R=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi 81

**Şekil 6.51** : Örnek 7 için yükleme durumu ve mesnetlenme şekli (2x2 ağ) 82

**Şekil 6.52** : Razzaque Verev Plağı'nda h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi 82

**Şekil 6.53** : Razzaque Verev Plağı'nda h/a=0.01 için plak ortası My momenti yakınsama testi 83

## SEMBOL LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $u,v,w$ | : Plakta x,y,z doğrultularındaki yer değiştirmeler |
| $\varepsilon_x,\varepsilon_y$ | : Plak orta düzlemindeki birim uzamalar |
| $\gamma_{xy},\gamma_{xz},\gamma_{yz}$ | : Plak orta düzlemindeki birim kayma açıları |
| $\sigma_x,\sigma_y$ | : Eleman yüzeyine etkiyen normal gerilmeler |
| $\tau_{xy},\tau_{xz},\tau_{yz}$ | : Düzlem içi ve düzleme dik kayma gerilmeleri |
| $E$ | : Elastisite modülü |
| $G$ | : Kayma modülü |
| $\nu$ | : Poisson oranı |
| $h$ | : Plak kalınlığı |
| $M_x$, $M_y$ | : Eğilme momentleri |
| $M_{xy}$ | : Burulma momenti |
| $Q_x$, $Q_y$ | : Kesme kuvvetleri |
| $U,U_i$ | : İç kuvvetlerin şekil değiştirme enerjisi |
| $W,U_d$ | : Dış kuvvetlerin şekil değiştirme enerjisi |
| $\pi$ | : Toplam şekil değiştirme enerjisi |
| $\{\ \}$ | : Vektör gösterimi |
| $[\ ]$ | : Matris gösterimi |
| $[\ ]^T$ | : Matris transpozesi |
| $[\ ]^{-1}$ | : Matris inversi |
| $[N]$ | : Eleman şekil fonksiyonu matrisi |
| $[N_p]$ | : Yük şekil fonksiyonu matrisi |
| $[D]$ | : Elastisite matrisi |
| $[K]$ | : Rijitlik matrisi |
| $\{f\}$ | : Yük vektörü |
| $[B]$ | : Yer değiştirmeleri şekil değiştirmelere bağlayan matris |
| $\{q\}$ | : Yayılı yükler |
| $\{P\}$ | : Tekil yükler |
| $e$ | : Eleman alt indisi |
| $b$ | : Eğilme terimi alt indisi |
| $s$ | : Kayma terimi alt indisi |

## ÖZET

Bu çalışmada, minimum potansiyel enerji prensibi kullanılarak kalın sayılabilecek plakların statik çözümü için sonlu elemanlar yöntemi ile iki adet plak elemanı geliştirilmiştir. Elemanlar Serendipity ailesinden 4 ve 8 noktalı dörtgen izoparametrik karakterdedir. Düğüm noktası serbestlikleri düzleme dik çökme (w) ve dönmelerdir ($\theta_x$,$\theta_y$). Dönmeler çökmeden bağımsız bilinmeyenler olarak ele alınmıştır. Düzleme dik normal gerilme bileşeni ihmal edilmiştir. Elemanlar, $C^0$-süreklidir ve uygunluk şartını sağlamamaktadır.

İnce plak uygulamalarında kayma kilitlenmesinin önlenmesi amacıyla eleman karakteristikleri eğilme ve kayma etkilerinden olmak üzere iki terimli olarak formüle edilmiş ve integraller farklı adımlarla alınmıştır. Söz konusu integraller Gauss'un sayısal integral yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır.

Geliştirilen elemanların sayısal uygulamaları için birer bilgisayar programı hazırlanmıştır. Programlar Fortran77 dilinde yazılmış olup akış diyagramları tez metninde verilmiştir. Denklem sisteminin çözümü Gauss Eliminasyon yöntemi ile yapılmıştır. Örneklerde, ele alınan sistemlerin analitik çözüme yakınsaklığı araştırılmış, yeterli yaklaşıklık elde edildiğinde bu yakınsaklığı veren eleman ağı ile önce kayma kilitlenmesinin meydana gelişi gösterilmiş, daha sonra da kilitlenmenin önlenmesi için önerilen yöntem irdelenmiştir.

Sonuçlar literatürdeki çalışmalarla karşılaştırıldığında, geliştirilen sonlu elemanların gerek ince plak uygulamalarında (açıklık/kalınlık>20) gerekse kalın sayılabilecek plaklarda (20<açıklık/kalınlık<10) mühendislik açısından tatmin edici sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

**SUMMARY**

In this study, two plate elements are developed for static analysis of moderately thick plates by finite element method using the principal of minimum potential energy. 4- and 8-node quadrilateral isoparametric elements from Serendipity family are used in this study. Nodal degrees of freedom are transverse deflection (w) and rotations ($\theta_x$,$\theta_y$). Rotations are assumed as unknowns that are independent from deflection. Transverse normal stress is neglected. Elements are $C^0$-continuous and non-conforming.

In order to avoid from shear locking phenomenon that appears in case of thin plate applications, elements' characteristics are formulated in two terms as bending and shear, and are integrated using different schemes. The integrals mentioned here are calculated using Gauss Quadrature formula.

Two computer programs for each element are prepared for the numerical applications of the elements developed here. Programs are written in Fortran77 language and their flow charts are given in the thesis text. Solution of the system of equations is done by Gauss Elimination method. In examples, convergence of the systems in questions to analytical solution is discussed; when satisfactory approximation is obtained, using the mesh size which gives this convergence, first, appearance of shear locking phenomenon is shown, then the proposed method for prevention of shear locking is examined.

When the results are compared with the studies found in the literature, finite elements developed here shows satisfactory results in view of engineering for both thin (span/thickness>20) and moderately thick (20<span/thickness<10) plate applications.

# 1 GİRİŞ

## 1.1 Konu

Bu çalışmada kalın sayılabilecek homojen izotrop plakların statik çözümü için iki tip izoparametrik sonlu eleman formüle edilmiş ve birer bilgisayar programı geliştirilerek test edilmiştir. Söz konusu izoparametrik elemanların ana elemanları Serendipity ailesinden dörtgen elemanlardır. TURE12 olarak adlandırılan birinci eleman 4 düğüm noktalı 12 serbestlik derecelidir. Diğer eleman ise TURE24 olarak adlandırılmıştır ve 8 noktalı 24 serbestlik derecelidir. Her iki eleman tipi değişik geometrideki plaklarda denenmiş ve sonuçlar irdelenmiştir. Elde edilen elemanlar hem kalın sayılabilecek plaklarda hem de ince plaklarda denenerek kayma kilitlenmesi olayının meydana gelip gelmediği incelenmiştir.

## 1.2 Amaç

Kalın plaklardan oluşan inşaat uygulamalarının yanı sıra, Klasik Kirchhoff Teorisi ile çözüldüğünde yeterli yaklaşıklıkta sonuçlar veremeyen makine ve havacılık endüstrilerinde kullanılan ince plakların analizinde kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin göz önüne alınması zorunlu olmaktadır.

Düzgün biçimli (dörtgen ve dairesel) kalın plakların analizi üç boyutlu elastisite teorisi ile yapılabilse de, son yıllarda kullanımı daha yaygınlaşan sonlu elemanlar yöntemi tercih edilmektedir. Bu çalışmanın amacı da yukarıda bahsi geçen yapı elemanlarının analizi için bir sonlu eleman bilgisayar programı geliştirmektir.

## 1.3 Yöntem

Seçilen 4 ve 8 noktalı sonlu elemanların karakteristikleri (elastisite, gerilme, rijitlik, yük, vs. matrisleri) tanımlanmıştır. Her iki eleman tipi için birer bilgisayar programı algoritması hazırlanıp ve Fortran77 dilinde yazılmıştır. Hazırlanan bu programlar DOS tabanlı bir PC'de FTN77/486'nın 2.70 versiyonuyla derlenerek çalıştırılmış ve sonuçlar ilk önce ayrı ayrı daha sonra karşılaştırmalı olarak analiz edilmiştir.

## 1.4 Literatür

Literatürde çeşitli geometrilere, mesnetlenme şekillerine ve yükleme durumlarına sahip kalın sayılabilecek plaklar üzerine birçok makale, tez ve kitap bulunmaktadır. Bu çalışmada faydalanılan yayınlar aşağıda özetlenmiştir.

Hrabok ve Hrudey'in plak sonlu elemanlardaki gelişmeyi ve eleman tiplerini kataloglayan çalışması konu ile ilgili herkesin faydalanabileceği bir araştırmadır [1].

Reissner tarafından kalın plaklara uygulanmasından iyi sonuçlar elde edilebilen bir kesin teori ortaya konulmuştur [2]. Reissner, teorisinin uygulaması olarak dikdörtgen kesitli çubukların burulma problemi ile dairesel delikli plaklarda gerilme yoğunlaşması problemini çözmüştür.

Daha sonra Mindlin [3], Reissner teorisindeki düşünce ile lineer elastisitenin denklemlerinden hareket ederek kalın plakların titreşimi için bir çalışma yapmıştır.

Aksu, genel biçimli kalın sayılabilecek kabuklar için şekil değiştirme enerjisi ifadesine dayanarak sekiz düğüm noktalı 40 serbestlik dereceli izoparametrik dörtgen bir sonlu eleman geliştirmiştir[4].

Özaydın, Mindlin formülasyonunu kullanarak 8 noktalı 24 serbestlik dereceli dikdörtgen sonlu eleman üzerine bir çalışma yapmış ve çeşitli mesnet şartlarına sahip dörtgen ve daire plaklara uygulamıştır[5].

Kim ve Choi 8 noktalı dikdörtgen elemanla yaptıkları çalışmada elemanın kilitlenmeye yol açmadan uygulanabildiğini göstermişlerdir[6].

Çelik, 12 serbestlik dereceli dikdörtgen sonlu elemanı Mindlin modeliyle formüle etmiş ve bunu elastik zemine oturan plaklara uygulamıştır[7].

Prathap ve Viswanath'ın çalışması[8], 4 noktalı bir dikdörtgen elemanın eğilme terimlerinin 2x2 Gauss noktasıyla, kayma terimlerinin ise 1x2 ve 2x1 Gauss noktasıyla entegre edilmesi halinde 1x1 integrasyonlu modelden daha iyi sonuç verdiğini göstermiştir. Elemanda kayma kilitlenmesi oluşmamaktadır ve kalın plak uygulamalarında daha iyi sonuç vermektedir.

Liew, Wang, Xiang ve Kitipornchai'nın eserinde[9], orta kalınlıktaki plakların titreşimi için yazılmış program kodlarına yer verilmiştir. Formülasyon p-versiyon Ritz yöntemiyle yapılmıştır. Elemanlarda Mindlin yer değiştirme modeli kullanılmıştır. Mindlin plak teorisi özetlenmiş; polar, kartezyen ve eğik koordinatlarda Ritz formülasyonuyla plak analizi yapılmış ve düzlem içi gerilme, elastik zemin, üniform olmayan kalınlık, değişik mesnet ve sınır şartları ile katmanlı plaklar gibi özel konulara değinilmiştir.

Spilker ve Munir 12 noktalı kübik serendipity tipi şekil fonksiyonları kullanarak bir hibrid-gerilme elemanı geliştirmiştir[10]. Eleman rijitlik matrisinde rank hatası görülmemiş ve kayma kilitlenmesi oluşmamıştır. Bu elemandan elde edilen sonuçlar yine 12 noktalı ilk-deplasman temelli Mindlin plak elemanından elde edilenlerle karşılaştırılmıştır. Azaltılmış integrasyon adımı tekniği kullanılmıştır. Buna ek olarak; elemanın yakınsaklığı, aynı tipteki 4 ve 8 noktalı hibrid-gerilme elemanlarıyla karşılaştırılmıştır.

Yuan ve Miller 9'u çökme 12'si dönme serbestliği olmak üzere toplam 21 serbestlikli bir dikdörtgen plak sonlu elemanı geliştirmişlerdir[11]. Eleman uygunluk şartlarını sağlamaktadır ve ortotropik plaklara uygulanabilmektedir.

Yuqiu ve Fei; Adini, Clough ve Melosh tarafından geliştirilen 12 serbestlik dereceli dikdörtgen plak sonlu elemanı esas alıp kayma şekil değiştirmelerini doğrusal kabul ederek eleman kenarlarındaki uygunluk koşullarından yararlanıp ilave kayma yüzeyi bulmuşlar ve 12 serbestlik dereceli bir başka kalın plak sonlu eleman elde etmişlerdir[12].

Bhashyam ve Gallagher'ın çalışmasında[13] kayma etkilerini de içeren toplam şekil değiştirme ve yalnız eğilme etkisiyle oluşan şekil değiştirme, eleman uç şekil değiştirmelerine bağlı olarak ayrı ayrı ifade edilmiştir. Şekil değiştirme enerjisi; toplam yer değiştirme ve eğilme yer değiştirmesi terimlerine bağlı olarak ifade edilmiştir. Önerilen yöntem ayrık-Kirchoff modeline ait şekil fonksiyonları

kullanılarak üçgen plak sonlu elemanlara uygulanmış ve yakınsaklığı kontrol edilmiştir.

Hughes, Taylor ve Kanoknukulcha 4 düğüm noktalı, her iki doğrultuda çökme ve dönmelerin lineer değiştiği en basit elemanı almışlar ve tek integral noktası ile çok daha iyi sonuç verdiğini göstermişlerdir[14].

Bergan ve Wang'a ait çalışmada[15], kesme kuvveti-moment diferansiyel bağıntısından yararlanılarak kayma şekil değiştirmeleri çökmenin üçüncü türevine bağlanmış, eğrilik ifadesinde ise kalınlığın karesi ve çökmelerin dördüncü türevlerine bağlı düzeltme terimleri eklenmiştir. Genel dörtgen plak sonlu elemanlarda köşe noktalarındaki çökme ve dönmelere bağlı olarak 12 serbestlik dereceli çökme şekil fonksiyonu seçilmiştir.

Bathe ve Dvorkin bilinmeyenlerin köşe noktalarının çökme ve dönmeleri olarak seçildiği genel dörtgen plak sonlu eleman geliştirmişlerdir[16]. Bu çalışmada eğrilik ifadelerinde, Mindlin-Reissner formülasyonu kullanılırken kayma şekil değiştirmeleri köşe noktalarının çökme ve dönmelerine bağlı yaklaşık interpolasyon formülleri ile ifade edilmiştir. Bu seçimin ince plaklar hesaplanırken kayma kilitlenmesi tehlikesini ortadan kaldırdığı belirtilmektedir.

Hinton ve Huang, Mindlin formülasyonunu kullanıp integral nokta sayısını azaltılmasını belirtmişler ve kayma şekil değiştirmelerini interpolasyon formülleri ile ifade etmişlerdir[17]. [16]'da geliştirilen 4 düğüm noktalı plak elemanı 8,9,12,16 düğüm noktalı plak eleman ailesi için genelleştirmişlerdir.

Sydenstricker ve Landau'nun çalışmasında[18] ayrık-Kirchoff üçgen elemanlar kullanılarak ayrık plak modellerinin kayma kilitlenmesine getirdiği çözüm araştırılmıştır. Reissner-Mindlin teorisinin kısa bir özeti yapılmış ve ayrık karışık ve yer değiştirme alanlı plak modelleri arasındaki farklar irdelenmiştir.

Liu ve Kerh'in [19]'daki makalesinde 4 noktalı 16 serbestlik dereceli bir dörtgen sonlu eleman tanıtılmıştır ve uygulamaları yapılmıştır. Eleman, uygunluk şartlarını sağlamaktadır. Dolayısıyla $C^1$-sürekli olarak tanımlanmaktadır.

Roufaeil'in çalışması[20], 14 ve 16 serbestlik dereceli üç adet dikdörtgen plak eğilme elemanını kapsamaktadır. Elemanlar Mindlin plak teorisine göre tanımlanmış, yaklaşımı çeşitli kalınlık/açıklık oranlarıyla denemiş ve hiçbirinde kayma kilitlenmesine rastlanmamıştır.

Crisfield ise genel biçimli kalın sayılabilecek plak eğilme elemanı tanımlamak amacıyla bazı kayma serbestliklerini tutmuştur[21]. Eleman önce 6 adet serendipity tipi düzleme dik dönme serbestliği sonra 9 adet Lagrange tipi düzleme dik çökme serbestliği ile tanımlanmıştır. Kenar ortası ve eleman ortası çökme serbestliklerini ortadan kaldırmak için kayma terimleri kullanılmıştır. Bu şekilde elemanın köşe noktaları 3, kenar ortası noktaları 2 serbestlik derecesine sahip olmuştur. Elemanda kayma kilitlenmesi gözlenmediği belirtilmiştir.

# 2 SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

## 2.1 Giriş

Sonlu elemanlar yöntemi; bir sınır değer problemine ait yaklaşık çözümü, bölgeyi (yapı, zemin, akışkan, vs.) belirli sayıda alt bölgelere (elemanlara) bölüp bilinmeyen fonksiyonunun her eleman içinde yaklaşık olarak tanımlı olduğunu varsayarak hesaplamaktır. Söz konusu elemanlara ait fonksiyonların ortak düğüm noktalarında aldıkları değerler toplanarak tüm bölgeye ait çözüm elde edilmiş olur.

Sonlu elemanlar yönteminin yanı sıra başka yaklaşık yöntemler de mevcuttur. Bunlar arasında sonlu farklar yöntemi, ağırlıklı artıklar yöntemi, Rayleigh-Ritz yöntemi, Galerkin yöntemi sayılabilir. Sonlu elemanlar yöntemi ile diğerleri arasındaki en belirgin fark, yaklaşık çözümün oldukça küçük alt bölgelerde aranmasıdır. Tüm çözüm bölgesine ait sınır şartlarını sağlayacak bir fonksiyon kullanmak yerine sonlu eleman yönteminde, fonksiyonlar basit geometrilere sahip elemanlar üzerinde tanımlıdır ve sınır şartları eleman bazında dikkate alınmaz.

Sonlu elemanlar yönteminde çözüme gidilirken ilk önce problemin formülasyonuna karar vermek gerekir. Fiziksel problemin matematik ortamına geçirilmesinde kullanılacak formülasyon, problemin türüne bağlı olmak üzere ampirik, tansörel, integral, diferansiyel veya deneysel olabilir. Daha sonra direkt veya iteratif bir yöntemle denklem sistemi çözülür.

Tablo 2.1 Sonlu eleman yöntemlerinin sınıflandırılması[1].

| **Yöntem** | | **Varyasyonel prensip** | **Eleman içi fonksiyonları** | **Elemanlar arası şart** | **Bilinmeyenler** |
|---|---|---|---|---|---|
| Yer değiştirme (Uyumlu) | | Minimum potansiyel enerji | Sürekli yer değiştime | Yer değiştime uygunluğu | Düğüm noktası yer değiştirmeleri |
| Denge | | Minimum tamamlayıcı enerji | Sürekli ve dengeleyici gerilmeler | Eşit sınır yükleri | a)Genelleştirilmiş yer değiştirmeler<br>b)Gerilme parametreleri |
| Hibrid | Hibrid gerilme yöntemi | Modifiye tamamlayıcı enerji | Sürekli ve dengeleyici gerilmeler | Öngörülmüş uyumlu yer değiştimeler | Düğüm noktası yer değiştimeleri |
| | Hibrid deplasman yöntemi (1) | Modifiye potansiyel enerji | Sürekli yer değiştime | Öngörülmüş uyumlu yer değiştimeler | Düğüm noktası yer değiştimeleri |
| | Hibrid deplasman yöntemi (2) | Modifiye potansiyel enerji | Sürekli yer değiştime | Öngörülmüş eşit sınır yükleri | Düğüm noktası yer değiştimeler ve sınır kuvvetleri |
| Karışık | Reissner prensibi | Herrman tarafından modifiye edilen Reissner prensibi | Sürekli gerilme ve yer değiştime | Sınır yükleri ve yer değiştimelerin kombinasyonu | Yer değiştime ve yüklerin kombinasyonu |
| | Genelleştirilmiş yer değiştime yöntemi | Minimum potansiyel enerji | Sürekli yer değiştime | Lagrange çarpanları (gerilmeler) | Düğüm noktası yer değiştimeleri ve Lagrange çarpanları |
| | Genelleştirilmiş denge yöntemi | Minimum tamamlayıcı enerji | Sürekli ve dengeleyici gerilmeler | Lagrange çarpanları (yer değiştimeler) | Düğüm noktası yer değiştimeleri ve Lagrange çarpanları |

## 2.2 Sonlu elemanlar yöntemindeki adımlar

Sonlu elemanlar yönteminin adımlarını şöyle sıralayabiliriz:

1. Problemin ve tanımlı olduğu bölgenin belirlenmesi: Genel koordinat sistemine (kartezyen, polar veya eğrisel) karar verilmesi.
2. Elemanlara ayırma: Eleman tipinin (şekli, düğüm noktası adedi, parametrik karakteri) ve adedinin belirlenmesi, problem bölgesinin idealizasyonu.
3. Değişkenlerin belirlenmesi: Yer değiştirmeler (yapıda), sıcaklık (ısı transferinde), hız (akışkanlar mekaniğinde).
4. Problemin formülasyonu: Fiziksel problemin bir diferansiyel denklem takımı veya bir integral denklemi (fonksiyonel) ile tanımlanması.
5. Yerel koordinat takımının seçilmesi: Gerek yaklaşım fonksiyonlarının kurulmasında, gerekse eleman bazında integrallerin alınmasında sağladığı yararlar yüzünden elemanda bir yerel koordinat takımı tanımlanır. Serendipity, uzunluk, alan ve hacim koordinatları, vb.

6. Yaklaşım fonksiyonlarının elde edilmesi: Bkz Bölüm 2.8.
7. Eleman karakteristiklerinin çıkarılması: Minimum potansiyel enerji, minimum tamamlayıcı enerji, virtüel yer değiştirme, virtüel gerilme, Reissner veya Hamilton prensiplerinden biri yardımı ile eleman rijitlik matrisi ve yük vektörü (yapı analizinde) elde edilir.
8. Koordinat dönüşümü: Yerel koordinat takımında hesaplanan eleman karakteristikleri koordinat dönüşümü işlemleriyle genel koordinat takımına çevrilir (Jakobien ve inversi).
9. Denklem takımının kurulması: Ortak düğüm noktalarına sahip elemanların karakteristikleri toplanarak problem formülasyonu, matris formunda ifade edilir (Sistem rijitlik ve yük matrisleri).
10. Sınır şartlarının uygulanması: Bu denklem takımında, problemin bilinen (veya öngörülen) değerleri yerlerine konularak denklem adedi ve bilinmeyen sayısı azaltılır; katsayılar matrisinin tekil karakteri giderilir.
11. Denklem takımının çözülmesi: Gauss eliminasyon ve Cholesky faktörizasyon yöntemleri gibi direkt yöntemlerden biri veya Gauss-Seidel ya da Jakobi iterasyonları gibi iteratif yöntemlerden biri ile denklem takımı çözülür. Lineer olmayan problemlerde Newton-Raphson iterasyonları daha uygundur.
12. Sonuçların enterpolasyonu: Tasarım kriterleriyle karşılaştırılmak üzere düğüm noktası değerleri yardımıyla problemdeki değişkenin hesap bölgesi içindeki değişimi hesaplanır. Örneğin bir plağın orta noktasının çökmesi veya mesnet momentleri bulunarak izin verilebilir sınırlar dahilinde olup olmadığı tespit edilir. Eğer kesin çözüm biliniyorsa yaklaşık çözümün hata payı hesaplanır. Gerekiyorsa şekil değiştirmeler, gerilemeler, iç kuvvetler gibi ikincil bilinmeyenler hesaplanır.

## 2.3 Yöntemin uygulanması

Bölüm 2.2'de sıralanan adımların bilgisayar ortamına uygulanmasında kullanılan programlar belli başlı 3 bölümden oluşur; ön-işlemci, işlemci, art-işlemci. Bu rutinlerin içerikleri ve görevleri şu şekilde açıklanabilir:

Ön-işlemci:

1. Kontrol parametrelerini okur.
2. Düğüm noktası koordinatlarını okur veya üretir.
3. Eleman verilerini okur veya üretir.
4. Malzeme sabitlerini okur.
5. Sınır şartlarını okur.

İşlemci:

1. Eleman şekil fonksiyonlarını üretir.
2. Eleman karakteristiklerini hesaplar.
3. Eleman karakteristiklerini genel koordinat sistemine dönüştürür.
4. Sistem denklem takımını oluşturur.
5. Sınır şartlarını uygular.
6. Denklem takımını çözer.

Art-işlemci

1. Düğüm noktası değişkenlerini dosyalar ve/veya ekranda gösterir.
2. İkincil bilinmeyenleri (gerilme, şekil değiştirme...) hesaplar ve dosyalar ve/veya ekranda gösterir.

## 2.4 Parametre fonksiyonları

Sonlu elemanlar yönteminin temeli eleman bazında yakınsamaya dayanır. Yani, karmaşık bir problemin çözümü, ilgilenilen bölgeyi alt bölgelere ayırıp her alt bölgenin çözümünü kendi içinde tanımlayan daha basit bir fonksiyonla bulunabilir. Yapı sistemlerinin yer değiştirme yöntemiyle hesabında, yapı veya cisim sonlu elemanlara bölünür ve her bir elemanın yer değiştirmesi basit bazı fonksiyonlarla yaklaşık olarak hesap edilir. Bu fonksiyonlara yapı analizinde yer değiştirme fonksiyonları (modelleri, alanları, desenleri); genel olarak da parametre fonksiyonları denir.

Parametre fonksiyonları tipik bir elemanda alan değişkenlerini (yer değiştirmeler) temsil edecek şekilde seçilirler. Bunu en iyi başaran fonksiyonlar ise polinomlardır. Polinomlar, matematik işlemlerinde ve bilgisayar uygulamalarında sağladığı kolaylık ve avantajlar sayesinde en geniş kullanım alanı bulan parametre fonksiyonlarıdır. Polinomların bir diğer pratik özelliği de dereceleri ne kadar artarsa kesin sonuca o kadar yakınsamalarıdır.

## 2.5 Yakınsaklık kriterleri

Bir problemin nümerik çözümünde, çözümün kabul edilebilir olması için analitik çözüme belirli bir hata payıyla yakınsaması gerekir. Yakınsama, iki önemli kriterin sağlanması halinde gerçekleşir; uygunluk ve bütünlük Bu şartların sağlanması demek, eleman ağının sıklaştırılması veya başka bir deyişle eleman boyutunun küçültülmesi durumunda yakınsamanın artması demektir. Yakınsaklık kriterleri şu şekilde sıralanabilir.

### 2.5.1 Uygunluk kriteri

Sonlu elemanlar yönteminde ele alınan problemler süreklilik durumlarına göre sınıflandırılırlar ve "$C^0$-sürekli problem", "$C^1$-sürekli problem",vb şeklinde adlandırılırlar. Burada C harfi sürekli tabirini, üst indisteki sayılar da parametre fonksiyonunun kaçıncı dereceden sürekli olduğunu ifade etmektedir. Örneğin $C^0$-sürekli problemde sadece parametre fonksiyonu, $C^1$-sürekli problemde ise parametre fonksiyonunun kendisine ilaveten 1. türevi eleman sınırlarında sürekli olmalıdır. Buna uygunluk kriteri denir. Burada bahsi geçen süreklilikten kasıt; komşu iki elemanın ortak düğüm noktasındaki bir parametrenin (çökme, dönme, vs.) her iki elemanda da aynı olmasıdır.

Düzlem gerilme, düzlem şekil değiştirme, dönel simetrik gerilme ve 3 boyutlu elastisite halleri $C^0$-sürekli problemlerdir. Bu problemlerin zayıf formülasyonu (enerji fonksiyoneli) en fazla 1. derece türev içerir. Plak ve kabukların eğilme problemlerinde ise eleman sınırlarında çökmeler ve dönmeler (eğimler) sürekli olmak zorundadır. Bu şekilde plağın/kabuğun bükülmeyeceği garantilenir. Bu tip problemlerin zayıf formülasyonu en fazla 2. derece türev içerir ve $C^1$-sürekli problem sınıfına girerler[22]sf.242.

Uygunluk kriteri şöyle de açıklanabilir: “Parametre fonksiyonları, {u}, eleman **içinde** sürekli olmalı; alan değişkenleri, {a}, ise birbirine komşu elemanlar **arasında** uyumlu olmalıdır.” ({u} ve {a} için Bkz. Bölüm 2.8).

Uygunluk şartının sağlanması için mekanikteki yer değiştirme modellerinden hareketle şu 3 şartın sağlanması gerektiği söylenebilir:

- Birbirine komşu elemanlarda aynı izotropik yer değiştirme modeli kullanılmalı,
- Eleman ara yüzlerindeki yer değiştirmeler sadece o ara yüzün düğüm noktası yer değiştirmelerine bağlı olmalı,
- Elemanlar arası düğüm noktası uyumu oluşturulmalıdır.

### 2.5.2 Bütünlük kriteri

Yapısal problemlerde karşılaşılan bir yer değiştirme fonksiyonunun bütünlük kriterini sağladığını söyleyebilmek için, fonksiyonun, enerji fonksiyonelindeki en yüksek dereceden türevli terimin derecesine kadar türetilebiliyor olması gerekir. Örneğin enerji fonksiyonelinde ikinci derece türev ifadesi varsa, yer değiştirme fonksiyonu mutlaka ikinci dereceden polinom terimler içermelidir. Bu şekilde fonksiyon, sabit şekil değiştirme durumunu ifade edebilir.

Diğer bir deyişle $C^0$-sürekli problemlerde parametre fonksiyonu 1 sabit terim içermeli ve tanımlı olduğu uzayın değişkenlerine göre 1. türevleri sabit terimler vermelidir. Benzer şekilde; $C^1$-sürekli problemlerde ise parametre fonksiyonu yine 1 sabit terim içermeli ve tanımlı olduğu uzayın değişkenlerine göre 1. ve 2. türevleri sabit terimler vermelidir.

Yapı sistemlerinin hesabında uygunluk kriterinin sağlanması zorunlu değildir. Sadece bütünlük kriterinin sağlanması dahi çoğu problemde yeterli olmaktadır. Zira plak/kabuk eğilme problemlerinde uygunluk kriterinin sağlatılması kolay değildir. Uyumsuz elemanların yaygınca kullanıldığı ve yakınsaklığının da oldukça iyi olduğu bilinmektedir[27]sf.56. Böyle uyumsuz elemanlar, uyumlu elemanlara nazaran genellikle biraz daha küçük rijitlik terimleri üretir, dolayısıyla kesin çözümden daha büyük yer değiştirme değerleri verirler. Yapı güvenliğini tehlikeye düşürmemesi nedeniyle uyumsuz elemanların kullanılmasında bir sakınca yoktur. Ayrıca

işlemlerinin kolay olması ve yakınsaklık hızlarının uyumlulara göre daha yüksek olması da avantajları arasındadır.

## 2.6 Polinomun kurulması

Parametre (yapı sisteminde: yer değiştirme) fonksiyonu olarak seçilecek polinomun yapısı yerel koordinat sisteminin değişiminden bağımsız olmalıdır. Bu özelliğe "geometrik izotropi", "uzaysal izotropi" veya "geometrik değişmezlik" denir. Söz konusu şart, polinom değişkenlerinin Paskal üçgeninden simetrik olarak seçilmesi ile sağlanabilir. Bu öneri iki boyutlu problemler için yapılmış olup, üç boyutlu problemlerde Paskal dörtyüzlüsü kullanılır. Bir boyutlu problemlerde ise polinom lineer olduğundan kurulmasında bir sıkıntı olmayacaktır.

Ayrıca fonksiyon, rijit yer değiştirme durumunu da yansıtabilmelidir. Bunun için fonksiyonda mutlaka bir sabit terim bulunmalıdır.

## 2.7 Matris deplasman yöntemi

Yapı sistemlerinin hesabında matris deplasman yönteminin esasında, bilinmeyen olarak yapının düğüm noktası yer değiştirmelerinin seçilmesi yatar. Sonlu elemanlar yönteminde yapı kısımları belirli sayıda alt elemana bölünerek bu elemanlar üzerinde denge ve süreklilik koşulları sağlanır. Matris deplasman yöntemi yardımıyla söz konusu sonlu elemanların düğüm noktası yer değiştirmeleri tüm yapı sistemini temsil etmek üzere tek bir denklem takımında çözülür. Elde edilen bu düğüm noktası yer değiştirmeleriyle şekil değiştirmelere ve iç kuvvetlere geçilir.

Bir *e* elemanında denge koşulu;

$$[K]^e\{a\}^e=\{f\}^e \qquad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir[22]sf 214. Burada;

$[K]^e$ : elemanın rijitlik matrisi,

$\{a\}^e$ : düğüm noktası yer değiştirmeleri (bilinmeyenler),

$\{f\}^e$ : elemana etkiyen yayılı yükü dengelemek için gerekli düğüm noktası kuvvetleri, olarak tanımlanır.

## 2.8 Yer değiştirme fonksiyonu

Bir *e* elemanının sınırları dahilindeki herhangi bir noktanın yer değiştirme bileşenlerini, düğüm noktalarının yer değiştirmeleri cinsinden ifade eden yer değiştirme fonksiyonu, sonlu elemanlar yönteminde şekil fonksiyonları yardımıyla tanımlanabilir. Şöyle ki;

$$\{u\}^e=[N]\{a\}^e \tag{2.2}$$

Burada;

$\{u\}^e$ : eleman (iç) yer değiştirme fonksiyonu

[N] : şekil fonksiyonu

$\{a\}^e$ : düğüm noktası (uç) yer değiştirmeleridir.

$\{u\}^e$ vektörü seçilen (öngörülen) düğüm noktası serbestliği kadar (n adet) terim içerir. $\{a\}^e$ vektörü ise elemanın düğüm noktası adedi kadar (m adet) alt vektörden oluşur. Bu alt vektörler de seçilen düğüm noktası serbestlikleri kadar (n adet) terim içerirler.

[N] matrisi

$$[N^i]=N_i[I] \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlı m adet alt matristen (i=1...m) oluşur. Burada m eleman düğüm noktası adedini ifade etmektedir. [I] ise nxn boyutunda birim matristir ve n düğüm noktası serbestlik derecesini göstermektedir.

Bu terimleri açıkça yazmak gerekirse:

$$\{u\}^e_{nx1} = \left[[N_i]_{n\times n},[N_j]_{n\times n},[N_k]_{n\times n},...[N_m]_{n\times n}\right]_{n\times n.m}\begin{Bmatrix}\{a_i\}_{1\times n}\\ \{a_j\}_{1\times n}\\ \{a_k\}_{1\times n}\\ M\\ \{a_m\}_{1\times n}\end{Bmatrix}_{n.mx\,1} \tag{2.4}$$

$$[N_i] = N_i[I]_{n\times n} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & O & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}_{n\times n} \tag{2.5}$$

Yukarıdaki $N_i$ terimi i düğüm noktasına ait şekil fonksiyonunu temsil etmektedir. (Bkz. Bölüm 3.2)

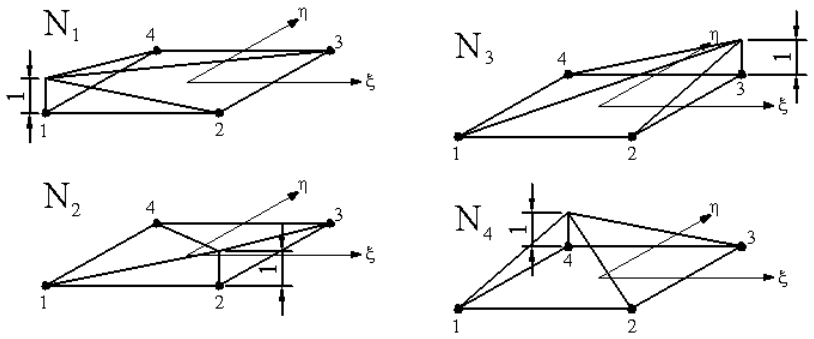
## 2.9 Şekil fonksiyonları

Şekil fonksiyonları tanımlanırken aşağıdaki kriterlerin sağlanması gerekir:

- Bir i düğüm noktasına ait $N_i$ şekil fonksiyonu bu i düğüm noktasında 1 değerini alırken, diğer tüm şekil fonksiyonları 0 değerini alır.
- Şekil fonksiyonları, ait oldukları düğüm noktası ile diğer düğüm noktaları arasında 1'den 0'a doğru azalan bir değişime sahiptir.
- Elemana ait herhangi bir noktada şekil fonksiyonlarının toplamı 1'e eşittir.

Bu tanımları matematiksel olarak yazarsak:

- $N_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$
- $\sum_{i=1}^{r} N_i(\xi, \eta) = 1$




Şekil 2.1 4 düğüm noktalı dörtgen elemanın şekil fonksiyonları

## 2.10 Şekil değiştirmeler

Yer değiştirmelerin küçük olması halinde şekil değiştirme vektörü, yer değiştirme vektörü cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\{\varepsilon\}=[\partial][u]=[\partial][N]\{a\}^e \qquad (2.6)$$

Buradaki $[\partial][N]$ terimi kısaca [B] ile gösterilir ve 'yer değiştirmeleri şekil değiştirmelere bağlayan matris' ya da 'bağ matrisi' olarak anılır. Yani:

$$[B]_{rxn.m}=[\partial]_{rxn}[N]_{nxn.m} \tag{2.7}$$

$$\{\varepsilon\}_{rx1}=[B]_{rxn.m}\{a\}^{e}_{n.mx\ 1} \tag{2.8}$$

Burada $[\partial]$ diferansiyel operatör matrisi örneğin $C^1$-sürekli plak eğilme probleminde ikinci derece türev terimleri içerecektir. Dolayısıyla şekil fonksiyonlarının lineer olması halinde [B] matrisi sadece sabit terimlerden oluşacaktır.

## 2.11 Gerilmeler

Lineer elastik bir sonlu elemanda gerilmelerle şekil değiştirmeler arasındaki bağıntı Hooke Yasası'nın genel formu gereğince;

$$\{\sigma\}^{e}_{rx1}=[D]_{rxr}[\{\varepsilon\}^{e}_{rx1}-\{\varepsilon_0\}^{e}_{rx1}]+\{\sigma_0\}^{e}_{rx1} \tag{2.9}$$

şeklinde ifade edilir. Burada;

$\{\sigma\}^e$ : elemanın şekil değiştirmeleri ile eşit sayıda ve aynı yönde gerilme bileşenlerini içeren gerilme vektörü

[D] : homojen, izotrop malzeme halinde elastisite modülü ve Poisson oranına bağlı olarak tanımlı elastisite matrisi,

$\{\varepsilon_0\}^e$ : elemanın başlangıç şekil değiştirmeleri vektörü (kristal büyümesi, büzülme, sıcaklık değişmesi gibi sebeplerden),

$\{\sigma_0\}^e$ : sistem yüklenmeden önce elemandaki mevcut başlangıç gerilmeleri vektörüdür.

## 2.12 Sonlu eleman karakteristikleri

Yapı sistemlerinin statik hesabında sonlu eleman karakteristikleri tabirinden $[K]^e$ rijitlik matrisi ile $\{f\}^e$ düğüm noktası kuvvetleri vektörünü anlamak gerekir.

Sonlu eleman karakteristiklerinin elde edilişinde literatürde bir takım yöntemler mevcuttur. Bunlara örnek olarak

- Minimum potansiyel enerji,
- Minimum tamamlayıcı enerji,
- Virtüel yer değiştirme,
- Virtüel gerilme,
- Reissner,
- Hamilton,

prensiplerini sayabiliriz. Bu çalışmada, bahsi geçen yöntemlerden 'minimum potansiyel enerji prensibi' kullanılmıştır.

Bu prensibe göre "elastik bir cisimde geometrik sınır şartlarını sağlayan bütün yer değiştirme alanları arasında, statik denge denklemlerini sağlayan yer değiştirme alanı, toplam potansiyel enerjiyi minimum yapandır". Başka bir deyişle üzerindeki yüklerle belirli bir şekil değiştirme durumunda dengede olan bir elemanın, sonsuz küçük bir yer değiştirme değişiminde dış yükler tarafından yapılan iş, elemanın şekil değiştirme enerjisi değişimine eşittir.

Toplam potansiyel enerji; iç potansiyel enerji (şekil değiştirme enerjisi) ve dış potansiyel enerjinin toplamı şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\pi=U_i+U_d \tag{2.10}$$

Ancak, konservatif yük sistemlerinde yükleme esnasında dış potansiyel enerjideki kayıp, dış yük tarafından yapılan işe eşit olduğundan

$$\pi=U_i-W \tag{2.11}$$

yazılabilir. Ya da *i* indisini kaldırarak kısaca

$$\pi=U-W \tag{2.12}$$

diyebiliriz. Minimum potansiyel enerji prensibi gereği, toplam potansiyel enerjinin birinci varyasyonu sıfıra eşit olmalı. Yani

$$\delta\pi=\delta U-\delta W=0 \tag{2.13}$$

ya da

$$\delta U=\delta W \tag{2.14}$$

Burada δU şekil değiştirme değişiminin bir sonucu olarak şekil değiştirme enerjisinin birinci varyasyonudur. İki boyutlu elastisitede

$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_{xy} \delta\varepsilon_{xy}) dV \tag{2.15}$$

tanımı yapılır. Matris formunda gösterilirse:

$$\delta U = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \tag{2.16}$$

Dış yükün potansiyel enerjisi ise

$$\delta W = \int_V (q_x \delta u + q_y \delta v) dV + \sum_{i=1}^{n} (P_{ix} \delta u + P_{iy} \delta v) \tag{2.17}$$

olup yine matris formunda;

$$\delta W = \int_V \{\delta u\}^T \{q\} dV + \sum_{i=1}^{n} \{\delta u\}^T \{P_i\} \tag{2.18}$$

olarak yazılır. Sonuç olarak 2.14 denklemi

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \{\delta u\}^T \{q\} dV + \sum_{i=1}^{n} \{\delta u\}^T \{P_i\} \tag{2.19}$$

şekline dönüşür. Lineer elastik malzeme kabulü yaparak gerilme-şekil değiştirme bağıntısı yukarıdaki denklemde yerine yazılır:

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon_0\} dV - \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma_0\} dV + \ldots.$$

$$\ldots. + \int_V \{\delta u\}^T \{q\} dV + \sum_{i=1}^{n} \{\delta u\}^T \{P_i\} \tag{2.20}$$

Böylece bünye denklemi elde edilir. Buradaki terimler sırasıyla; şekil değiştirme enerjisi değişimi, başlangıç şekil değiştirmelerinden meydana gelen şekil değiştirme enerjisi değişimi, başlangıç gerilmelerinden meydana gelen şekil değiştirme enerjisi değişimi, yayılı yükün eleman üzerinde yaptığı işin değişimi ve tekil yüklerin eleman üzerinde yaptığı işin değişimidir.

Sonlu elemanlar yönteminin özelliği gereği enerji fonksiyonelindeki integrallerin eleman bazında alınması mümkündür. Böylece her elemanın katkısı toplanarak toplam şekil değiştirme enerjisi elde edilir. Yani;

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\} dV = \sum_{e=1}^{m} \int_{V^e} \{\delta\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon\} dV^e \tag{2.21}$$

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon_0\} dV = \sum_{e=1}^{m} \int_{V^e} \{\delta\varepsilon\}^T [D]\{\varepsilon_0\} dV^e \tag{2.22}$$

$$\int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma_0\} dV = \sum_{e=1}^{m} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma_0\} dV^e$$

$$\int_V \{\delta u\}^T \{q\} dV = \sum_{e=1}^{m} \{\delta u\}^T \{q\} dV^e$$

Burada $V^e$ eleman hacmini, m ise sistemdeki toplam eleman adedini göstermektedir. Enerji fonksiyonelini eleman bazında tekrar yazarsak:

$$\int_{V^e} (\{\delta\varepsilon\}^e)^T [D]\{\varepsilon\}^e dV^e = \int_{V^e} (\{\delta\varepsilon\}^e)^T [D]\{\varepsilon_0\}^e dV^e - \int_{V^e} (\{\delta\varepsilon\}^e)^T \{\sigma_0\}^e dV^e + \ldots.$$

$$\ldots. + \int_{V^e} (\{\delta u\}^e)^T \{q\}^e dV^e + (\{\delta u\}^e)^T \{P_i\}^e \tag{2.23}$$

Şekil değiştirme bahsinde çıkarılan sonuç gereği [B] matrisi düğüm noktası yer değiştirmelerinden hiç birine bağlı değildir. Bu yüzden;

$$\{\delta\varepsilon\} = \delta([B]\{a\}^e) = [B]\{\delta a\}^e \tag{2.24}$$

ve

$$\{\delta\varepsilon\}^T = \delta([B]\{a\}^e)^T = (\{\delta a\}^e)^T [B]^T \tag{2.25}$$

olur. Benzer şekilde;

$$\{\delta u\} = \delta([N]\{a\}^e) = [N]\{\delta a\}^e \tag{2.26}$$

ve

$$\{\delta u\}^T = \delta([N]\{a\}^e)^T = (\{\delta a\}^e)^T [N]^T \tag{2.27}$$

olur. Bu sonuçları enerji fonksiyonelinde yerlerine yazıp transpoz işlemlerini yapalım ve denklemi $(\{\delta a\}^e)^T$ parantezine alalım:

$$(\{\delta a\}^e)^T \left( \int_{V^e} [B]^T [D][B]\{a\}^e dV^e - \int_{V^e} [B]^T [D]\{\varepsilon_0\} dV^e + \int_{V^e} [B]^T \{\sigma_0\} dV^e - \ldots. \right.$$

$$.... - \int_{V^e} [N]^T \{q\} dV^e - \sum_{i=1}^{n} [N]^T \{P_i\} \Bigg) = 0 \qquad (2.28)$$

Bu denklemin sıfır olması için parantez içindeki terimin sıfıra eşit olması gerekir. Çünkü $(\{\delta a\}^e)^T$ sıfır olmak zorunda değildir. Ayrıca yer değiştirmelerin varyasyonları sıfır olamaz, çünkü sınır şartlarını sağlamak zorundadır. Dolayısıyla;

$$\int_{V^e} [B]^T [D][B]\{a\}^e dV^e - \int_{V^e} [B]^T [D]\{\varepsilon_0\} dV^e + \int_{V^e} [B]^T \{\sigma_0\} dV^e - ....$$

$$.... - \int_{V^e} [N]^T \{q\} dV^e - \sum_{i=1}^{n} [N]^T \{P_i\} = 0 \qquad (2.29)$$

Burada $\{a\}^e$ integralin dışına alınabilir, çünkü koordinatlardan bağımsızdır:

$$\left( \int_{V^e} [B]^T [D][B] dV^e \right) \{a\}^e - \int_{V^e} [B]^T [D]\{\varepsilon_0\} dV^e + \int_{V^e} [B]^T \{\sigma_0\} dV^e - ....$$

$$.... - \int_{V^e} [N]^T \{p\} dV^e - \sum_{i=1}^{n} [N]^T \{R_i\} = 0 \qquad (2.30)$$

Sonuç olarak yukarıdaki denklem kısaca

$$[K]^e\{a\}^e = \{f\}^e \qquad (2.31)$$

formunda yazılabilir. Burada;

$$[K]^e = \int_{V^e} [B]^T [D][B] dV^e \qquad \text{: Rijitlik matrisi} \qquad (2.32)$$

$$\{f\}^e = \{f_{\varepsilon 0}\}^e - \{f_{\sigma 0}\}^e + \{f_q\}^e + \{f_P\}^e \qquad \text{: Yük matrisi} \qquad (2.33)$$

olup $\{f\}^e$ düğüm noktası yükleri vektörünün bileşenleri de

$$\{f_{\varepsilon_0}\}^e = \int_{V^e} [B]^T [D]\{\varepsilon_0\} dV^e \qquad (2.34)$$

$$\{f_{\sigma_0}\}^e = \int_{V^e} [B]^T \{\sigma_0\} dV^e \qquad (2.35)$$

$$\{f_q\}^e = \int_{V^e} [N]^T \{q\} dV^e \qquad (2.36)$$

$$\{f_P\}^e = [N]^T \{P\} \qquad (2.37)$$

olarak ifade edilir.

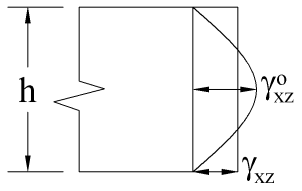
# 3 SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNE AİT BAĞINTILARA ESAS TEŞKİL EDEN MINDLIN PLAK TEORİSİ VE ELEMAN KARAKTERİSTİKLERİ

## 3.1 Mindlin Plak Teorisi

İnce plakların çözümünde iyi bir yaklaşıklıkla kullanılan Kirchhoff teorisinde aşağıdaki kabuller söz konusudur:

- Plak homojen ve izotroptur
- Çökmeler plak kalınlığına göre küçüktür
- Gerilme-şekil değiştirme bağıntılarında Hooke kanunu geçerlidir
- Orta düzleme dik normal gerilmeler ve şekil değiştirmeler ihmal edilir
- Şekil değiştirmeden önce doğrusal ve orta düzleme dik olan normaller şekil değiştirmeden sonra da doğrusal ve orta düzleme dik kalır (Bernoulli-Navier hipotezi[28]sf.231)

Yukarıda sıralanan kabuller arasından sonuncusu, düzleme dik kayma deformasyonunun etkisini ihmal etmektedir. Ancak plak kalınlığı arttıkça (mesela L/h<20)[11]sf.1 söz konusu etkinin hesaba katılması zorunlu olmaktadır. Bu yönde yapılan çalışmaların başında Reissner'in 1945'de yayınladığı makalesi [2] yer almaktadır. Bilindiği üzere, kalınlık doğrultusundaki kayma gerilmesi dağılımı paraboliktir. Hesaplarda basitleştirme sağlaması bakımından bu gerilme dağılımı üniform kabul edilmektedir. Bu kabulün sonucu olarak parabolik dağılımın üniforma çevrilmesi için bir $\kappa$ (bazı kaynaklarda $\kappa^2$) "kayma düzeltme katsayısı" kullanılır.




Şekil 3.1 Kalınlık doğrultusundaki, gerçek ve farz edilen kayma şekil değiştirmesi dağılımları

Genelde kabul görmüş tanımıyla; $\kappa^2$ bir kesitteki ortalama kayma şekil değiştirmesinin, kesit ağırlık merkezindeki kayma şekil değiştirmesine oranıdır.

$$\kappa^2=\gamma_{xz} / \gamma^o_{xz} \tag{3.1}$$

Mindlin, makalesinde [3] bu katsayıyı Poisson oranına bağlı olarak $\nu=0$ için $\kappa^2=0.76$ ve $\nu=0.5$ için $\kappa^2=0.91$ şeklinde tanımlamıştır. Mindlin'in makalesinde izlediği yolu yani üç boyutlu teorideki kalınlık-kayma titreşiminin ilk anti-simetrik açısal frekansını kendi teorisindeki frekansa eşitleme yolunu kullanırsak aşağıdaki kübik denkleme ulaşılır[9]sf.24:

$$(\kappa^2)^3 - 8(\kappa^2)^2 + \frac{8(2-\nu)\kappa^2}{1-\nu} - \frac{8}{1-\nu} = 0 \tag{3.2}$$

Mindlin hesaplarında bu katsayıyı $\kappa^2=\pi^2/12$ olarak kullanmıştır. Reissner'in teorisinde [2] kayma düzeltme katsayısı

$$\kappa^2=5/6 \tag{3.3}$$

olarak geçmektedir[9]sf.24. 1987 yılında Wittrick'in basit mesnetli, izotrop, dikdörtgen plakların titreşimlerinin analitik çözümü üzerine yaptığı çalışmada [24] ise bu katsayı Poisson oranına bağlı

$$\kappa^2=5/(6-\nu) \tag{3.4}$$

bağıntısıyla ifade edilmektedir. Cowper'in çalışmasında [26] bu katsayı

$$\kappa^2=10(1+\nu)/(12+11\nu) \tag{3.6}$$

şeklinde verilmiştir. Bu çalışmada ise kayma düzeltme katsayısı 5/6 değeriyle kullanılmıştır.

Mindlin plak teorisinde plak elemanlar $C^0$-süreklidir; yani sadece çökme sürekliliği şartının sağlanması yeterli olmakta, eğim sürekliliği şartı aranmamaktadır. Dönmeler ($\theta_X$ ve $\theta_Y$) çökmenin (w) türevi yardımıyla tanımlanamamakta; bağımsız değişkenler olarak ele alınmaktadır. Bu bağlamda Mindlin plak elemanlar, $C^1$-süreklilik gerektiren Kirchhoff plak elemanlara nazaran oluşturulması ve hesaplanması daha kolay elemanlardır. Basitliğinin yanı sıra oldukça iyi yaklaşıklık veren Mindlin elemanlarda tek sorun kayma kilitlenmesidir. (Bkz. Bölüm 3.9)

## 3.2 Şekil fonksiyonları

### 3.2.1 TURE12 elemanının şekil fonksiyonları ve yerel türevleri

4 noktalı elemanın (TURE12) şekil fonksiyonları;

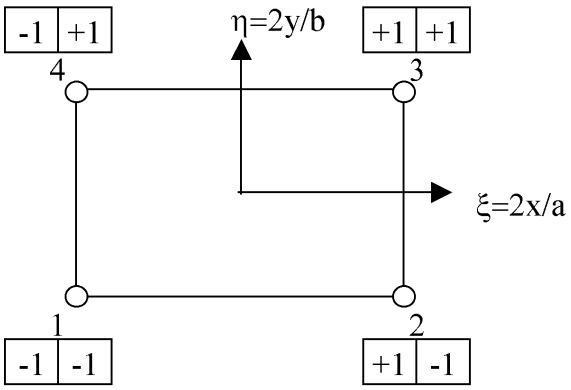
$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \tag{3.7}$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \tag{3.8}$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \tag{3.9}$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \tag{3.10}$$

olarak sıralanır[27]sf.70.




Şekil 3.2 TURE12 elemanı

Kutular içindeki sayılar eleman noktalarının yerel koordinatlarıdır.

Bu fonksiyonların yerel eksen takımına göre türevleri ise şu şekildedir:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1-\eta) \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1-\eta) \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1+\eta) \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1+\eta) \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1-\xi) \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1+\xi) \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1+\xi) \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1-\xi) \tag{3.18}$$

### 3.2.2 TURE24 elemanının şekil fonksiyonları ve yerel türevleri

8 noktalı elemanın (TURE24) şekil fonksiyonları aşağıda verilmiştir:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1) \tag{3.19}$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \tag{3.20}$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \tag{3.21}$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \tag{3.22}$$

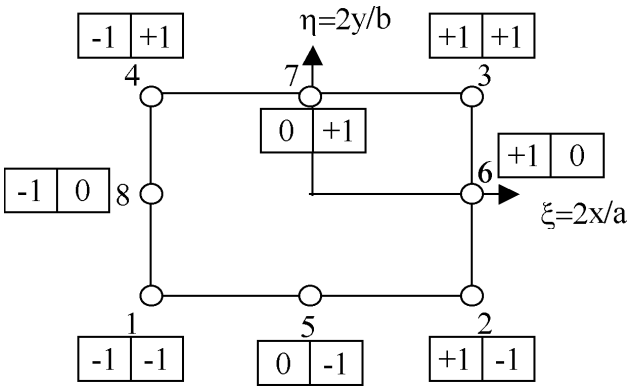
$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \tag{3.23}$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \tag{3.24}$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \tag{3.25}$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \tag{3.26}$$

(Kaynak: [27]sf.70)




Şekil 3.3 TURE24 elemanı

Türevleri ise;

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = (1-\eta)(2\xi+\eta)/4 \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = (1-\eta)(2\xi-\eta)/4 \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = (1+\eta)(2\xi+\eta)/4 \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = (1-\eta)(2\xi-\eta)/4 \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = -\xi(1-\eta) \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = (1-\eta^2)/2 \tag{3.32}$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \xi} = -\xi(1+\eta) \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \xi} = (-1+\eta^2)/2 \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = (1-\xi)(2\eta+\xi)/4 \tag{3.35}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = (1+\xi)(2\eta-\xi)/4 \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = (1+\xi)(2\eta+\xi)/4 \tag{3.37}$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = (1-\xi)(2\eta-\xi)/4 \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \eta} = (-1+\xi^2)/2 \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \eta} = -\eta(\xi+1) \tag{3.40}$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \eta} = (1-\xi^2)/2 \tag{3.41}$$

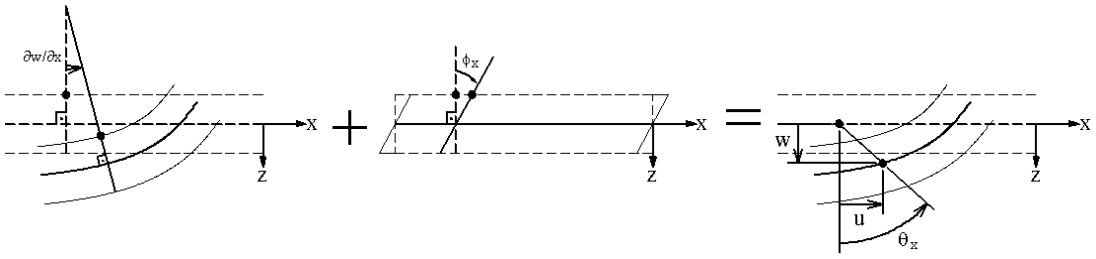
$$\frac{\partial N_8}{\partial \eta} = \eta(\xi-1) \tag{3.42}$$

şeklinde hesaplanır.

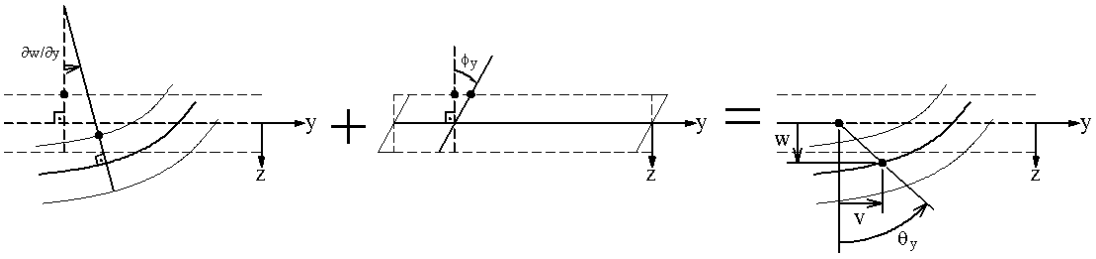
Elemanların $\xi$ ve $\eta$ doğrultularındaki boyutları sırasıyla a ve b'dir. Normalize edilmiş koordinatlarda bu boyutlar 2 olmuştur; yani köşe koordinatları (-1,+1) değerlerini almaktadır.

### 3.3 Yer değiştirme bileşenleri

Şekil 3.4 ve 3.5'de kalın sayılabilecek plaklarda toplam yer değiştirmenin eğilme ve kayma yer değiştirmelerinin toplamı şeklinde nasıl ifade edildiği gösterilmiştir. Şekillerde kesikli çizgiler şekil değiştirmeden önceki durumu temsil etmektedir. Z ekseninin plak orta düzleminden başladığına ve aşağı doğru olduğuna dikkat edilmelidir.




Şekil 3.4 x-z kesitinde yer değiştirmeler




Şekil 3.5 y-z kesitinde yer değiştirmeler

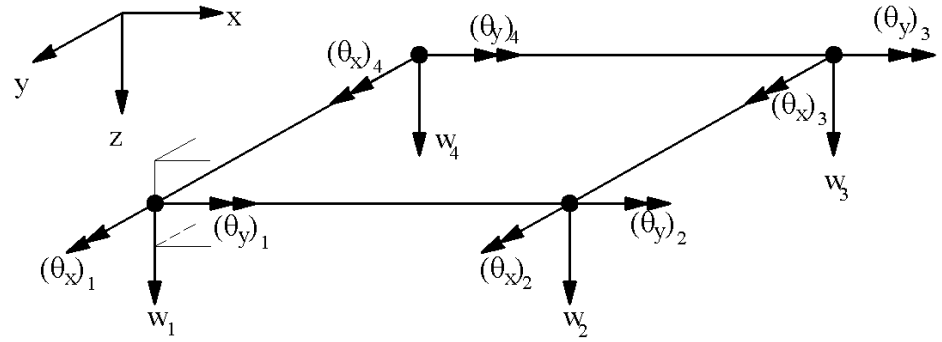
y ekseni etrafındaki dönmeye $\theta_x$, x ekseni etrafındaki dönmeye $\theta_y$ dersek x,y,z doğrultularındaki u,v,w yer değiştirme alanı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\{\theta\} \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\theta_x \\ z\theta_y \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \phi_x) \\ z(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \phi_y) \\ w \end{Bmatrix} \tag{3.43}$$

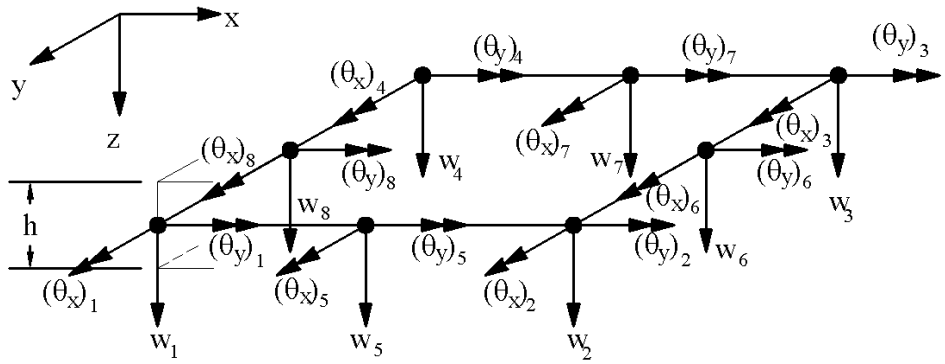
Burada $\{\theta\}$vektörü

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \end{Bmatrix} \tag{3.44}$$

şeklinde tanımlıdır. $\partial w/\partial x$ ve $\partial w/\partial y$ terimleri eğilme dönmeleri, $\phi_x$ ve $\phi_y$ terimleri de kayma dönmeleridir. Yer değiştirme bileşenleri Şekil 3.6 ve 3.7'de görülmektedir.




Şekil 3.6 TURE12 elemanının yer değiştirme bileşenleri




Şekil 3.7 TURE24 elemanının yer değiştirme bileşenleri

### 3.4 Şekil değiştirme-Yer değiştirme bağıntıları

Eleman birim şekil değiştirme vektörü, eğilme terimlerini ve kayma terimlerini içeren olmak üzere iki ayrı vektör olarak ifade edilmiştir. Böylece eğilme ve kayma rijitlik matrisleri ayrılmış ve integrallerin birbirinden bağımsız olarak alınması sağlanmıştır. Eğilme etkilerini içeren birim şekil değiştirme matrisi

$$\{\varepsilon_b\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\partial_b]\{u\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ z\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ z\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right) \end{Bmatrix} \tag{3.45}$$

, kayma etkilerini içeren birim şekil değiştirme matrisi ise

$$\{\varepsilon_s\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [\partial_s]\{u\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix} \tag{3.46}$$

bağıntısıyla verilir[28]sf.46. Burada, fark edileceği üzere; b alt indisi eğilme etkilerini, s alt indisi de kayma etkilerini belirtmektedir.

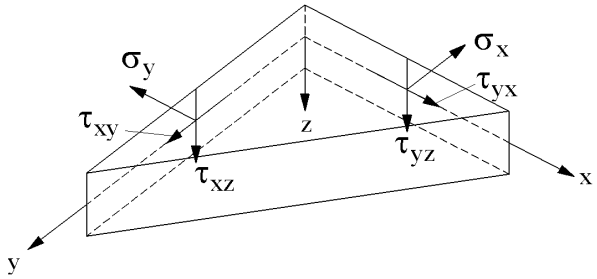
Yukarıdaki ifadede $\varepsilon_z$'nin sıfır olması nedeniyle dikkate alınmadığı gözden kaçmamalıdır.

## 3.5 Gerilme-Şekil değiştirme bağıntıları

Genelleştirilmiş Hooke yasası gereğince izotrop plak elemanda gerilme ifadeleri şekil değiştirmelere bağlı olarak aşağıdaki gibi tanımlanır[28]sf.54 :

$$\{\sigma_b\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon_b\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x + \nu\varepsilon_y \\ \varepsilon_y + \nu\varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.49}$$

$$\{\sigma_s\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = [G]\{\varepsilon_s\} = G \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{3.50}$$




Şekil 3.8 Gerilmeler

Tıpkı şekil değiştirme-yer değiştirme bağıntılarında olduğu gibi gerilmeler de iki kısımda ele alınmıştır. Yukarıda görülen terimler:

$\sigma_x$,$\sigma_y$ : Sırasıyla x-z ve y-z düzlemlerindeki normal gerilmeler

$\tau_{xy}$,$\tau_{yx}$ : Düzlem içi kayma gerilmeleri

$\tau_{xz}$,$\tau_{yz}$ : Düzleme dik kayma gerilmeleri

E :Elastisite modülü,

$\nu$ :Poisson oranı

$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ : Kayma modülü (3.51)

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ : Eğilme malzeme matrisi} \tag{3.52}$$

$$[G] = G\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{Kayma malzeme matrisidir.} \tag{3.53}$$

## 3.6 Gerilme-Yer değiştirme bağıntıları

Bölüm 3.4'deki bağıntılar, bölüm 3.5'deki gerilme bağıntılarında yerine yazılarak gerilme-yer değiştirme bağıntılarına ulaşılır:

$$\{\sigma_b\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D][\partial_b]\{u\} = \frac{Ez}{1-\nu^2}\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial\theta_x}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial\theta_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\theta_y}{\partial y} + \nu\dfrac{\partial\theta_x}{\partial x} \\ \left(\dfrac{\partial\theta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)\dfrac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} \tag{3.54}$$

$$\{\sigma_s\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = [G][\partial_s]\{u\} = G\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix} \tag{3.55}$$

## 3.7 İç kuvvet-Yer değiştirme bağıntıları

Plak düğüm noktası yer değiştirmeleri bulunduktan sonra elemanların yer değiştirmelerinden iç kuvvetlere geçilir.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{3.56}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.57}$$

olmak üzere:

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz = \frac{-E}{1-\nu^2}\int_{-h/2}^{+h/2}\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)z^2 dz = -D\left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right) \tag{3.58}$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz = \frac{-E}{1-\nu^2}\int_{-h/2}^{+h/2}\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y} + \nu\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)z^2 dz = -D\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y} + \nu\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right) \tag{3.59}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} z dz = G \int_{-h/2}^{+h/2} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) z^2 dz = \frac{-D(1-\nu)}{2} \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \quad (3.60)$$

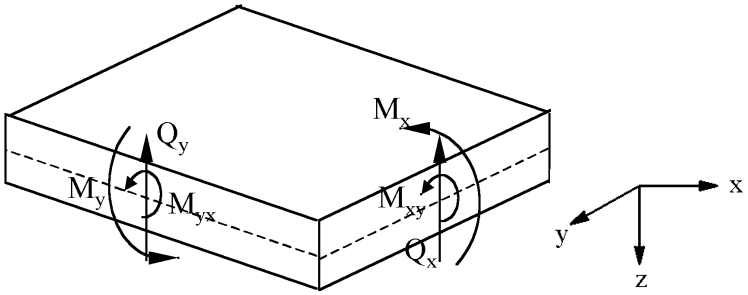
$$Q_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} dz = G \int_{-h/2}^{+h/2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) dz = Gh \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \quad (3.61)$$

$$Q_y = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{yz} dz = G \int_{-h/2}^{+h/2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) dz = Gh \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) \quad (3.62)$$

Bu denklemler matris formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$[M] = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = [D_b][B_b]\{u\}^e \quad (3.63)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = [D_s][B_s]\{u\}^e \quad (3.64)$$




Şekil 3.9 Plakta iç kuvvetler

Yukarıda görülen terimler:

Mx : Plağın y doğrultusundaki birim uzunluğuna düşen x doğrultusundaki eğilme momenti

My : Plağın x doğrultusundaki birim uzunluğuna düşen y doğrultusundaki eğilme momenti

Mxy : Plağın y doğrultusundaki birim uzunluğuna düşen x ekseni etrafındaki burulma momenti

Myx : Plağın x doğrultusundaki birim uzunluğuna düşen y ekseni etrafındaki burulma momenti

Qx : Plağın y doğrultusundaki birim uzunluğuna düşen z doğrultusundaki kesme kuvveti

Qy : Plağın x doğrultusundaki birim uzunluğuna düşen z doğrultusundaki kesme kuvveti

$$[D_b] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{: Eğilme elastisite matrisi} \tag{3.64}$$

$$[D_s] = \frac{Eh\kappa^2}{2(1+\nu)}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{: Kayma elastisite matrisi} \tag{3.65}$$

h: Eleman kalınlığı

$\kappa^2$ : Kayma düzeltme katsayısıdır. ($\kappa^2$=5/6)

### 3.8 Şekil değiştirme enerjisi

$$U = U_b + U_s \tag{3.66}$$

$$U_b = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon_b\}^T \{\sigma_b\} dV \tag{3.67}$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \left( \varepsilon_x \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) + \varepsilon_y \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) + G\gamma_{xy}^2 \right) dV \tag{3.68}$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \left( \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_x^2 + \frac{2E\nu}{1-\nu^2}\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_y^2 + G\gamma_{xy}^2 \right) dV \tag{3.69}$$

Yukarıdaki integrali bileşenlerine ayırarak alalım.

$$U_b = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \tag{3.70}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_V \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_x^2 dV = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz \int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)^2 dA$$

$$= \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)^2 dA \tag{3.71}$$

$$I_2 = \int_V \frac{E\nu}{1-\nu^2}\varepsilon_x\varepsilon_y dV = \frac{E\nu}{1-\nu^2}\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz \int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right) dA$$

$$= \frac{E\nu h^3}{12(1-\nu^2)}\int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right) dA \qquad (3.72)$$

$$I_3 = \frac{1}{2}\int_V \frac{E}{1-\nu^2}\varepsilon_y^2 dV = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz \int_A \left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)^2 dA$$

$$= \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\int_A \left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)^2 dA \qquad (3.73)$$

$$I_4 = \frac{1}{2}\int_V G\gamma_{xy}^2 dV = \frac{G}{2}\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz \int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)^2 dA = \frac{Gh^3}{24}\int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)^2 dA \qquad (3.74)$$

$$U_b = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\left[\int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)^2 dA + 2\nu\int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right) dA + \int_A \left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)^2 dA\right] + ....$$

$$.... + \frac{Gh^3}{24}\int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)^2 dA \qquad (3.75)$$

$$= \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}\left[\int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)^2 dA + 2\nu\int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right) dA + \int_A \left(\frac{\partial\theta_y}{\partial y}\right)^2 dA + ....\right.$$

$$\left. .... + \frac{1-\nu}{2}\int_A \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial y} + \frac{\partial\theta_y}{\partial x}\right)^2 dA\right] \qquad (3.76)$$

Kayma terimlerinden oluşan şekil değiştirme enerjisi ise:

$$U_s = \frac{1}{2}\int_V \{\varepsilon_s\}^T \{\sigma_s\} dV \qquad (3.77)$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \left(G\gamma_{xz}^2 + G\gamma_{yz}^2\right) dV \qquad (3.78)$$

$U_s$ integralini alırken de yine benzer şekilde bileşenlerine ayırma yolunu kullanalım:

$$U_s = I_5 + I_6 \qquad (3.79)$$

$$I_5 = \frac{G}{2}\int_V \gamma_{xz}^2 dV = \frac{G}{2}\int_V (\kappa\gamma_{xz}^0)^2 dV = \frac{G\kappa^2}{2}\int_{-h/2}^{+h/2} dz \int_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x\right)^2 dA$$

$$= \frac{Gh\kappa^2}{2}\int_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x\right)^2 dA \tag{3.80}$$

$$I_6 = \frac{G}{2}\int_V \gamma_{yz}^2 dV = \frac{G}{2}\int_V (\kappa\gamma_{yz}^0)^2 dV = \frac{G\kappa^2}{2}\int_{-h/2}^{+h/2} dz \int_A \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y\right)^2 dA$$

$$= \frac{Gh\kappa^2}{2}\int_A \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y\right)^2 dA \tag{3.81}$$

Burada $\gamma_{xz}^0$ ve $\gamma_{yz}^0$ plak orta düzlemindeki (parabol tepe noktasındaki) kayma şekil değiştirmesidir.

$$U_s = \frac{Gh\kappa^2}{2}\left[\int_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x\right)^2 dA + \int_A \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y\right)^2 dA\right] \tag{3.82}$$

## 3.9 Kayma kilitlenmesi

Literatürde kayma kilitlenmesi olarak anılan olay Mindlin plak elemanlarında plak kalınlığı azaldıkça (ince plak sınırına yaklaşıldıkça) ortaya çıkmaktadır. Zira kalınlık azaldıkça eğilme etkilerinin yanında kayma etkileri baskın olmakta ve plak gerçekte olduğundan daha rijit davranmaktadır. Diğer bir deyişle, kayma rijitlik katsayılarının eğilme rijitlik katsayılarına oranı $1/h^2$ mertebesinde olduğundan, kalınlık azaldıkça kayma rijitliği genel rijitlikte baskın olmaktadır. Bunun sonucu olarak eğilme enerjisi terimleri sıfır hesaplanmaktadır. Bu olayın matematiksel gösterimi aşağıdaki şekilde verilir [29]:

$$\frac{U_s}{U_b} = \frac{12\kappa^2}{h^2}\frac{\int_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x\right)^2 dA + \int_A \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y\right)^2 dA}{\int_A \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right)^2 dA - 2\nu\int_A \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right) dA + \int_A \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y}\right)^2 dA + \frac{1-\nu}{2}\int_A \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} - \frac{\partial \theta_y}{\partial x}\right)^2 dA} \tag{3.83}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{U_s}{U_b} \to \infty \tag{3.84}$$

### 3.10 Yer değiştirmeleri şekil değiştirmelere bağlayan [$B_b$] ve [$B_s$] matrisleri

Bilindiği gibi elastik bir cisimde eğrilikler $\{\chi\}$, yer değiştirmelere $\{u\}$ bağlı olarak

$$\{\chi\} = [\partial]\{u\} \tag{3.85}$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca [B] matrisi

$$[B]=[\partial][N] \tag{3.86}$$

eşitliğiyle verilmektedir. Dolayısıyla birinci ifadeden $[\partial]$ operatör matrisi tespit edildiğinde [B] matrisi de ikinci ifadeden hesaplanabilir. (3.85)'in bileşenlerini eğilme terimleri için yazarsak:

$$\begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{3.87}$$

$$[\partial] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & j & k \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \tag{3.89}$$

Burada $[\partial]\{u\}$ çarpımı yapıldığında bilinmeyenleri a,b,...,k olan aşağıdaki üç denkleme ulaşılır:

$$aw + b\theta_x + c\theta_y = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \tag{3.90}$$

$$dw + e\theta_x + f\theta_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \tag{3.91}$$

$$gw + j\theta_x + k\theta_y = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \tag{3.92}$$

Bu denklemlerin sağ ve sol taraflarındaki terimler karşılaştırılarak a,b,...,k bulunur:

a=c=d=e=g=0

$$b = k = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$f = j = \frac{\partial}{\partial y}$$

Dolayısıyla i. düğüm noktasına ait $[B_b]_i$ matrisi

$$[B_b]_i = [\partial_b][N_i] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{3.94}$$

olup elemana ait $[B_b]$ matrisi de

$$[B_b] = \begin{bmatrix} [B_b]_1 & [B_b]_2 & .... & [B_b]_{EDN} \end{bmatrix} \tag{3.95}$$

şeklinde kurulur. Burada EDN indisi eleman düğüm noktası adedini göstermekte olup, bu çalışmada 12 ve 24 serbestlik dereceli elemanlar için sırasıyla 4 ve 8 değerlerini alacaktır.

Aynı yolla kayma terimlerinden oluşan $[B_s]$ matrisi de hesaplanır:

$$\begin{Bmatrix} \chi_{xz} \\ \chi_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m & n & p \\ q & r & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \tag{3.96}$$

$$mw + n\theta_x + p\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \tag{3.97}$$

$$qw + r\theta_x + s\theta_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \tag{3.98}$$

$$m = \frac{\partial}{\partial x}$$

n=s=1

p=r=0

$$q = \frac{\partial}{\partial y}$$

$$[B_s]_i = [\partial_s][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \tag{3.99}$$

$$[B_s] = \begin{bmatrix} [B_s]_1 & [B_s]_2 & .... & [B_s]_{EDN} \end{bmatrix} \tag{3.100}$$

Görüldüğü gibi $[B_b]_i$ ve $[B_s]_i$ matrisleri şekil fonksiyonlarının x ve y genel eksen takımındaki türevlerini içermektedir. Şekil fonksiyonları ξ ve η yerel eksen takımına göre tanımlı olduğu için türevlerin genel eksen takımına dönüştürülmesi gerekmektedir. Bu işlem aşağıdaki matris çarpımıyla yapılabilir:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & .... & \frac{\partial N_{EDN}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & .... & \frac{\partial N_{EDN}}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & .... & \frac{\partial N_{EDN}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & .... & \frac{\partial N_{EDN}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.101}$$

[J] için bkz. Bölüm 3.11.

### 3.11 Eleman rijitlik matrisleri, $[K_b]^e$ ve $[K_s]^e$

$$[K_b]^e = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [B_b]^T [D_b][B_b] dx dy \tag{3.102}$$

Yukarıdaki denklemde $[B_b]$ matrisi genel (x,y) koordinat sisteminde tanımlıdır. Oysa [B] matrislerini yerel koordinatlarda tanımlı [N] şekil fonksiyonlarından oluşmuştur. Bu yüzden bir koordinat dönüşümü gereklidir. Yani $[B_b]$ matrisi (ξ,η) yerel koordinat takımında tanımlı olmak üzere:

$$[K_b]^e = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [B_b]^T [D_b][B_b] J d\xi d\eta \tag{3.103}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada J, Jakobien olarak adlandırılır ve aşağıda tanımı yapılan Jakobien matrisinin determinantıdır.

$$[J]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix} \tag{3.104}$$

Bilindiği gibi sonlu elemanlar yönteminde eleman içindeki herhangi bir noktanın koordinatları, köşe noktalarının koordinatları ve şekil fonksiyonları yardımıyla belirlenebilmektedir. Yani

$$x=\sum_{i=1}^{EDN} N_i x_i \tag{3.105}$$

$$y=\sum_{i=1}^{EDN} N_i y_i \tag{3.106}$$

şeklinde ifade edilir. Burada EDN, daha önce de belirtildiği gibi eleman düğüm noktası adedidir. Bu durumda Jakobien matrisi şöyle yazılabilir:

$$[J]=\begin{bmatrix}\displaystyle\sum_{i=1}^{EDN}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}x_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{EDN}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}y_i\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{EDN}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}x_i & \displaystyle\sum_{i=1}^{EDN}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}y_i\end{bmatrix} \tag{3.107}$$

Dolayısıyla Jakobien matrisi aşağıda verildiği üzere, iki matrisin çarpımından ibarettir:

$$[J]=[\partial N][XY] \tag{3.108}$$

$$[\partial N]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial \xi} & \dfrac{\partial N_2}{\partial \xi} & .... & \dfrac{\partial N_{EDN}}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial N_1}{\partial \eta} & \dfrac{\partial N_2}{\partial \eta} & .... & \dfrac{\partial N_{EDN}}{\partial \eta}\end{bmatrix} \tag{3.109}$$

$$[XY]=\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\\ M & M\\ x_{EDN} & y_{EDN}\end{bmatrix} \tag{3.110}$$

[K] ve [f] matrislerindeki integraller Gauss Nümerik İntegrasyon formülü ile hesaplanacaktır. Bilgisayarla hesaba çok yatkın olduğundan bu yöntem seçilmiştir. Tablo 3.1'deki Gauss formülü $[K_b]^e$ hesabına uygulanırsa

$$[K_b]^e = \sum_{i=1}^{GEG}\sum_{j=1}^{GEG}[B_b(\xi_i,\eta_j)]^T[D_b][B_b(\xi_i,\eta_j)]J(\xi_i,\eta_j)W_iW_j \quad (3.111)$$

Bu formülde;

GEG: Eğilme terimleri için seçilen Gauss integral nokta adedini,

$\xi_i$, $\eta_j$: Gauss integral nokta koordinatlarını,

$W_i$ ve $W_j$: Gauss ağırlık katsayılarını

göstermektedir. [B] ve J terimlerindeki şekil fonksiyonlarının Gauss integral noktalarındaki değerleri ile çalışıldığına dikkat edilmelidir.

Tablo 3.1 Gauss Nümerik İntegrasyon formülündeki bazı n değerleri için koordinatlar ve ağırlık katsayıları[31]sf.173.

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} W_iW_jf(\xi_i,\eta_j)$$

| n | i | ξ,η | W |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0.00000 00000 00000 | 2.00000 00000 00000 |
| 2 | 1 | 0.57735 02691 89626 | 1.00000 00000 00000 |
| | 2 | -0.57735 02691 89626 | 1.00000 00000 00000 |
| 3 | 1 | 0.77459 66692 41483 | 0.55555 55555 55556 |
| | 2 | 0.00000 00000 00000 | 0.88888 88888 88889 |
| | 3 | -0.77459 66692 41483 | 0.55555 55555 55556 |
| 4 | 1 | 0.86113 63115 94053 | 0.34785 48451 37454 |
| | 2 | -0.86113 63115 94053 | 0.34785 48451 37454 |
| | 3 | 0.33998 10435 84856 | 0.65214 51548 62546 |
| | 4 | -0.33998 10435 84856 | 0.65214 51548 62546 |

Benzer şekilde, kayma terimlerinden oluşan rijitlik matrisi de hesaplanabilir:

$$[K_s]^e = \sum_{i=1}^{GKA}\sum_{j=1}^{GKA}[B_s(\xi_i,\eta_j)]^T[D_s][B_s(\xi_i,\eta_j)]J(\xi_i,\eta_j)W_iW_j \quad (3.112)$$

Bu formülde GKA; kayma terimleri için seçilen Gauss integral nokta adedini göstermektedir.

### 3.12 İntegrasyon adımının azaltılması

Kayma terimlerinden oluşan eleman rijitlik matrisinin hesabında Gauss integral nokta adetlerinin azaltılması fikri ilk olarak Zienkiewicz ve arkadaşları[33] ile

Pawsen-Clough[34] tarafından ortaya atıldı. Bu teknikle eğilme terimleri örneğin 2x2 şemasıyla (her iki eksen yönünde ikişer adım) entegre edilirken, kayma terimleri için 1x1 şeması kullanılmaktadır. Yapılan araştırmalar 4 noktalı elemanda 1x1 şemasının [Ks] matrisi için daha iyi sonuçlar verdiğini göstermektedir[35]sf.72 ve [36]sf.420. Her ne kadar; daha fazla integrasyon adımının kesin çözüme daha yakın sonuç vereceği düşünülse de, sonlu elemanlar yönteminin bir özelliği sebebiyle bu durum değişmektedir. Zira sonlu elemanlar yönteminde rijitlik matrisleri fazla rijittir. Yani yer değiştirmeler beklenenden az çıkar. Dolayısıyla kayma rijitlik matrisinin 1x1 gibi kaba bir şemayla entegre edilmesi onun daha küçük, yani gerçek haline daha yakın terimler içermesini sağlar.

Sonuç olarak integrasyon adımları her iki eleman tipinde Tablo 3.2'de listelendiği şekilde alınmıştır.

Tablo 3.2 İntegrasyon adımları

| | Kalın plak | | İnce plak | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | P (h/a 0.05) | | (h/a<0.05) | | | |
| | Tam integrasyon | | Azaltılmış integrasyon | | Seçilerek azaltılmış | |
| | $[K_b]$ | $[K_s]$ | $[K_b]$ | $[K_s]$ | $[K_b]$ | $[K_s]$ |
| TURE12 | 2x2 | 2x2 | 1x1 | 1x1 | 2x2 | 1x1 |
| TURE24 | 3x3 | 3x3 | 2x2 | 2x2 | 3x3 | 2x2 |

## 3.13 Yük matrisleri

Potansiyel enerjinin minimum olması prensibinden hareketle eleman yüzeyinde yayılı yükler

$$\{f_q\}^e = \int_{V^e} [N]^T \{q\} dV^e \tag{3.113}$$

ve eleman düğüm noktası yükleri

$$\{f_P\}^e = [N]^T \{P_i\} \tag{3.114}$$

şeklinde daha önce ifade edilmişti. Burada

{q}: Yayılı yüklerin eleman üzerindeki herhangi bir noktadaki değerlerini gösteren yük fonksiyonu,

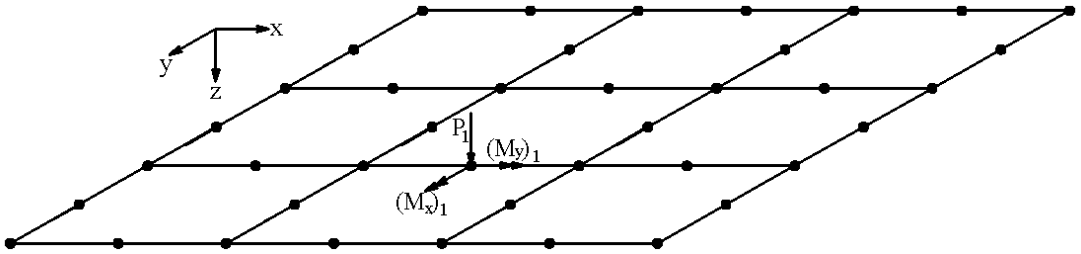
$\{P_i\}$: i düğüm noktasının düşey tekil yüklerini ve tekil momentler,

$\{f_q\}^e$ , $\{f_P\}^e$: Bu yüklerin eleman düğüm noktalarındaki eşdeğerlerini gösteren yük matrisleridir.

$$\{P_i\} = \{P_i \quad Mx_i \quad My_i\}^T \tag{3.115}$$

$$\{f_p\}^e = \{ \quad P_1 \quad Mx_1 \quad My_1 \quad .... \quad P_{EDN} \quad Mx_{EDN} \quad My_{EDN} \}^T \tag{3.116}$$

Genel halde tekil yükler eleman içinde herhangi bir noktada bulunabilirler. 3.114 denklemiyle bu yüklerin eleman düğüm noktalarındaki değerleri hesaplanır. Fakat bu çalışmada tekil yükler eleman bazında değil, sistem bazında ele alınacaktır. (Bkz. Şekil 3.10) Dolayısıyla 3.114 denklemindeki çarpım işlemine gerek yoktur. Düğüm noktası yükleri direkt olarak sistem yük matrisine eklenecektir.




Şekil 3.10 Tekil yükler

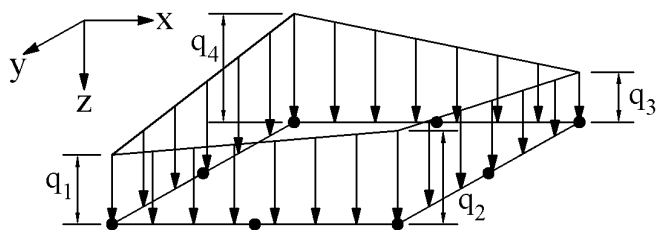
Sonlu elemanlar yönteminin yapısı gereği, eleman yüzeyinde yayılı yükün eleman üzerindeki herhangi bir noktada aldığı değer, bu yükün eleman köşe noktalarındaki değerlerinin bilinmesi halinde, şekil fonksiyonları yardımıyla ifade edilebilmektedir. Yani

$$\{q\}=[N_p]\{q\}^e \tag{3.117}$$

olup, $[N_p]$ matrisi 4 köşe noktalı elemana ait şekil fonksiyonlarını içeren matristir (bkz. Bölüm 3.2.1) ve "yük şekil fonksiyonu" olarak anılacaktır. Gerek TURE12 elemanında gerekse TURE24 elemanında aynı $[N_p]$ kullanılacaktır. $\{q\}^e$ ise Şekil 3.11'de görüldüğü gibi, yayılı yükün eleman köşe noktalarındaki ordinatları olup

$$\{q\}^e = \{q_1 \quad 0 \quad 0 \quad q_2 \quad 0 \quad 0 \quad q_3 \quad 0 \quad 0 \quad q_4 \quad 0 \quad 0\}^T \tag{3.118}$$

şeklinde ifade edilir. TURE12 ve TURE24 elemanı için aynıdır. Burada yayılı yük sadece düşey serbestlik doğrultusunda alınmıştır; yayılı moment göz önüne alınmamıştır.




Şekil 3.11 Yayılı yük (sadece w doğrultusunda)

Dolayısıyla 3.113 denklemi

$$\{f_q\}^e = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [N]^T [N_p] \{q\}^e \, dxdy \tag{3.119}$$

halini alır. Yukarıdaki terimleri açarak yazarsak:

$$\{f_q\}^e = \begin{Bmatrix} p_{q1} & 0 & 0 & p_{q2} & 0 & 0 & p_{q3} & 0 & 0 & p_{q4} & 0 & 0 \end{Bmatrix}^T \tag{3.120}$$

$$[N]^T = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 \\ N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 \\ M & M & M \\ N_{EDN} & 0 & 0 \\ 0 & N_{EDN} & 0 \\ 0 & 0 & N_{EDN} \end{bmatrix} \tag{3.121}$$

$$[N_p] = \begin{bmatrix} N_{p1} & 0 & 0 & N_{p2} & 0 & 0 & N_{p3} & 0 & 0 & N_{p4} & 0 & 0 \\ 0 & N_{p1} & 0 & 0 & N_{p2} & 0 & 0 & N_{p3} & 0 & 0 & N_{p4} & 0 \\ 0 & 0 & N_{p1} & 0 & 0 & N_{p2} & 0 & 0 & N_{p3} & 0 & 0 & N_{p4} \end{bmatrix} \tag{3.122}$$

Düzgün yayılı yük halinde $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q$ olacağından $p_{q1} = p_{q2} = p_{q3} = p_{q4} = q.A/4$ olur. A, elemanın alanıdır.

Yük matrisinin sayısal integrasyonunda rijitlik matrislerindekine benzer bir yol izlenir.

$$[f]^e = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}[N(\xi_i,\eta_j)]^T[N_P(\xi_i,\eta_j)]\{q\}^e J(\xi_i,\eta_j)W_i W_j \qquad (3.123)$$

Burada integral adımının her iki doğrultuda da 4 alındığına dikkat edilmelidir.

# 4 DENKLEM SİSTEMİNİN KURULMASI VE ÇÖZÜMÜ

## 4.1 Mesnet şartları

[K] sistem rijitlik matrisi tekil (singüler) karakterdedir, inversi hesaplanamaz. Ancak sınır (mesnet) şartlarının uygulanmasından sonra denklem sisteminin çözümüne geçilebilir. Çeşitli mesnet şartları aşağıda listelenmiştir:

Basit mesnet: $w=0$ , $\theta_x=0$ veya $\theta_y=0$

Ankastre mesnet: $w=0$ , $\theta_x=0$ , $\theta_y=0$

Mesnet şartlarının uygulanmasında β yöntemi ([22]sf.60) kullanılmıştır. Bu yöntemde değeri bilinen bir $\delta_p$ yer değiştirmesine rijitlik matrisinde karşılık gelen köşegen terimi ile çok büyük bir β sayısı toplanır. Aynı anda, yük matrisinin ilgili satırındaki terim de bilinen bu $\delta_p$ değerinin β katıyla değiştirilir.

Örnek olarak

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & .... & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & .... & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & .... & k_{3n} \\ M & M & M & & M \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & .... & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ M \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ M \\ f_n \end{Bmatrix} \tag{4.1}$$

denklem takımında $\delta_2$'nin değerinin bilindiğini ve $\delta_2=\delta_p$ olduğunu (mesela sıfır) varsayalım. Bu durumda denklem takımı

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & .... & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22}+\beta & k_{23} & .... & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & .... & k_{3n} \\ M & M & M & & M \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & .... & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ M \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \beta\delta_p \\ f_3 \\ M \\ f_n \end{Bmatrix} \tag{4.2}$$

şeklini alacaktır. Burada β, rijitlik matrisindeki en büyük terimin $10^6$ ila $10^{12}$ katı mertebesinde olmalıdır. Bu çalışmada $10^{12}$ katı esas alınmıştır.

## 4.2 Çözüm

Denklem takımının çözümü için Gauss Eliminasyon yöntemi kullanılmıştır. Bant matris tipindeki sistemlerde hızlı sonuç verdiği için bu yöntem tercih edilmiştir.

## 4.3 Art işlemler

Yer değiştirmeler bulunduktan sonra iç kuvvetler Bölüm 3.14'de anlatıldığı gibi hesaplanmıştır.

# 5 BİLGİSAYAR PROGRAMI

Bu çalışmada yapılan hesapları kontrol edebilmek için Fortran 77 programlama dilinde yazılmış bir bilgisayar programı hazırlanmıştır.

## 5.1 Fortran77 dili

Fortran programlama dilinin mühendislik, vb. hesaplamalı programcılık alanında çok büyük bir kullanım alanı bulduğu açıktır. Ancak bu dili diğer (BASIC, PASCAL, C) üst düzey dillerden ayıran bazı avantajları vardır. Bunlara kısaca değinmek gerekirse:

- Bilgi giriş ve çıkışındaki esneklik. Fortran'ın FORMAT deyimi, diğer dillere hakim olanlar açısından başlangıçta karmaşık gelebilir. Fakat bir dosyadan veri okurken boşluk karakterinin göz ardı edilmesi, rakamların direkt olarak sayı formatında algılanması gibi bazı özellikler diğerlerinde yoktur.
- Fortran programları direkt olarak EXE formatında derlenir. Yani çalıştırılabilir bir program dosyasıdır.

## 5.2 Programın genel yapısı

Program modüler olarak hazırlanmıştır. Her görev (matris çarpımı, eleman matrisleri, vs.) ayrı bir alt program tarafından yerine getirilmektedir. Bu şekilde programın anlaşılması daha kolay olduğu gibi dosya boyutu da küçülmektedir.

Önce TURE12 elemanı için bir program hazırlanmış, daha sonra bu program TURE24 elemanı için yeniden düzenlenerek bir program daha oluşturulmuştur. Böyle her iki eleman için ayrı birer program oluşturulması hem kod yazımı bakımından hem de programların icrası bakımından daha pratik görülmüştür.

## 5.3 İlgili dosyalar

Problem verilerinin programa girilmesi oldukça basitleştirilmiştir. Şöyle ki: Problem verileri .IN uzantılı bir metin dosyasında tanıtılır. Örnek bir veri dosyası (PLAK1.IN) EK-1'de verilmiştir. Bu dosyanın adı programa parametre olarak girilirse program bu verileri işler ve .OUT uzantılı bir metin dosyasına düğüm noktası yer değiştirmelerini ve eleman bazında iç kuvvetleri listeler. Ayrıca .EKO uzantılı bir dosyada da veri girişinin kontrol edilmesi amacıyla bir liste oluşturur. .IN uzantılı veri dosyasının adı ne ise .OUT ve .EKO uzantılı dosyaların adları da o olur.

Eğer program parametresiz çalıştırılırsa ilk önce mevcut dizinde UMIT4.DAT isimli (TURE24 programı için UMIT8.DAT) bir metin dosyasını arar. Örnek bir UMIT4.DAT dosyası EK-2'de verilmiştir. Bu dosyada .IN uzantılı veri dosyalarının adlarını içeren bir liste olmalıdır. Bu durumda bu dosyalar sırayla işlenecektir. Böylelikle bir seferde birden fazla sistem çözdürülebilir. UMIT4.OUT isimli (TURE24 programı için UMIT8.OUT) bir dosyada her sistemin en büyük yer değiştirmesi verilir. Eğer mevcut klasörde UMIT*.DAT adlı bir dosya yoksa program mevcut klasördeki .IN dosyalarının adlarını içeren bir diyalog kutusu görüntüler.

Elastisite modülü E, Poisson oranı $\nu$ ve kayma düzeltme katsayısı $\kappa^2$'nin girilmesi de iki yolla yapılmaktadır. Bu büyüklüklerin .IN dosyasında 0 girilmesi halinde, program SABITLER.DAT isimli bir metin dosyası arar. Örnek bir SABITLER.DAT dosyası EK-3'de verilmiştir. Bu dosya söz konusu değerleri içermektedir. E, $\nu$ ve $\kappa^2$ değerleri .IN dosyasında 0'dan farklı ise bunlar kullanılır.

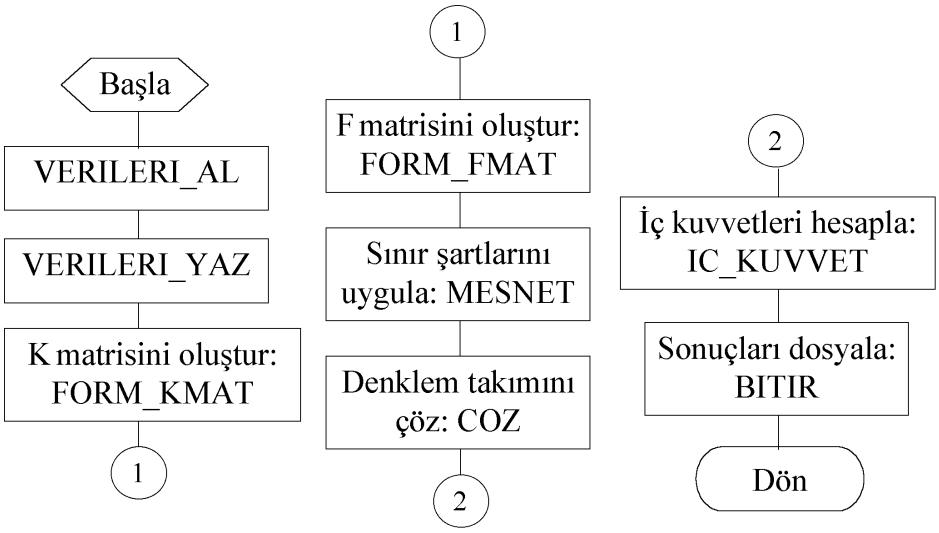
Verilerin bu şekilde girilmesi fikri çözülecek problem sayısının çokluğundan ortaya çıkmıştır. Zira Bölüm 6'da verilen test sonuçları 200'den fazla dosyanın işlenmesini gerekli kılmıştır.

## 5.4 Programın akış diyagramları

Burada programın genel akış diyagramı ve önemli birkaç alt programa ait akış diyagramları üzerinde durulmuştur. Diğer alt programlarla ilgili açıklamalar Bölüm 5.5'de yapılmıştır.

### 5.4.1 ANA alt programı

Ana kontrol programıdır. Her bir veri dosyası için bir kez çağırılır. Diğer alt programlar ANA tarafından çağırılır. Akış diyagramı Şekil 5.1'de verilmiştir.




Şekil 5.1 ANA alt programının akış diyagramı

### 5.4.2 FORM_KMAT alt programı

Sistem rijitlik matrisini hesaplayan alt programdır. Önce eğilme sonra da kayma terimlerine ait eleman rijitlik matrisleri hesaplanır. Ancak, bu hesaplama "her eleman" için değil "her eleman tipi" için yapılır. Yani bütün elemanların tip numarası 1 ise sadece bir eleman rijitlik matrisi hesaplanır. Bu yöntem hesaplarda hız sağlar.

Hesaplanan bu eleman rijitlik matrisi, sisteme ait toplam rijitlik matrisinde yerine yerleştirilir. Yani "birleştirme" işlemi de burada yapılır.

Giriş değişkenleri:

TEL: Toplam eleman adedi

ITIP: Elemanın tip numarasını içeren dizi

ISD: Eleman serbestlik derecesi (12 veya 24)

TH: Eleman kalınlıklarını içeren dizi

E: Elastisite modülü

PR: Poisson oranı

K2: Kayma düzeltme katsayısı (Bkz Bölüm 3.1)

DENKNO: Elemanın i. serbestliğinin sistemdeki karşılığı

Geçici değişkenler:

DB: $[D_b]$ matrisi

DS: $[D_s]$ matrisi

ITIP1: Toplam eleman tip adedi (1 ila TEL arası)

SMAT: Her tipe ait eleman rijitlik matrisini içeren dizi

ELNO: Eleman numarası

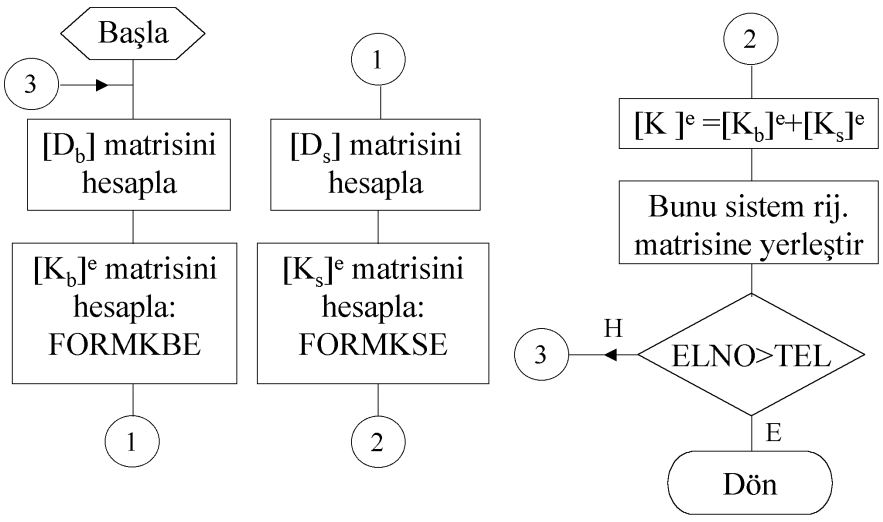
h: Eleman kalınlığı

KB: $[K_b]$ matrisi

KS: $[K_s]$ matrisi

Sonuç değişkenleri:

KMAT: Sistem rijitlik matrisi [K]




Şekil 5.2 FORM_KMAT alt programının akış diyagramı

### 5.4.3 FORMKBE alt programı

Elemana ait -eğilme terimlerini içeren- rijitlik matrisi burada hesaplanır. Sayısal integrasyon bu alt programda devreye girer.

Giriş değişkenleri:

ISD: Eleman serbestlik derecesi (12 veya 24)

GEG: Her iki doğrultu için integrasyon adımı

MN: Eleman düğüm nokta adedi (4 veya 8)

DB: $[D_b]$ matrisi

Geçici değişkenler:

LX,LY: Birbirine dik iki doğrultudaki Gauss integral noktalarının Tablo 3.1'deki numarası (tablodaki i değeri)

KSI,ITA: Birbirine dik iki doğrultudaki Gauss integral noktalarının Tablo 3.1'deki koordinatları (tablodaki $\xi$ ve $\eta$ değeri)

BB: $[B_b]$ matrisi

BBT: $[B_b]^T$ matrisi

AJI: $[J]^{-1}$ matrisi

DET: Jakobienin determinantı

DN: $[\partial N]$ matrisi (şekil fonksiyonlarının yerel koordinatlardaki türevleri)

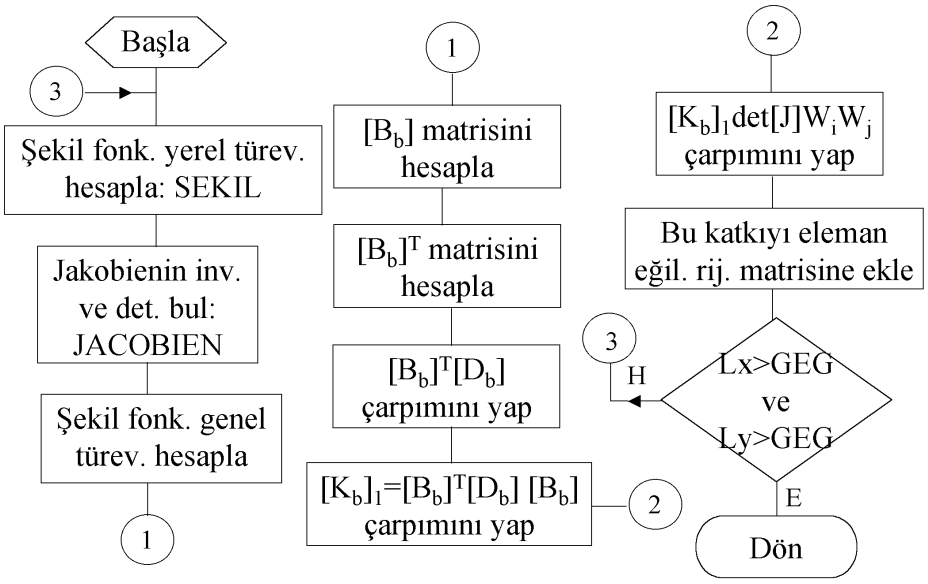
DNG: $[\partial N]$ matrisi (şekil fonksiyonlarının genel koordinatlardaki türevleri)

CARPIM: $[B_b]^T[D_b]$ çarpım matrisi

KB1: 1. integrasyon adımına ait $[K_b]^e$ matrisi

Çıkış değişkenleri:

KB: $[K_b]^e$ matrisi




Şekil 5.3 FORMKBE alt programının akış diyagramı

### 5.4.4 FORMKSE alt programı

Elemana ait -kayma terimlerini içeren- rijitlik matrisi burada hesaplanır.

Giriş değişkenleri:

GKA: Her iki doğrultu için integrasyon adımı

DS: $[D_s]$ matrisi

Geçici değişkenler:

BS: $[B_s]$ matrisi

BST: $[B_s]^T$ matrisi

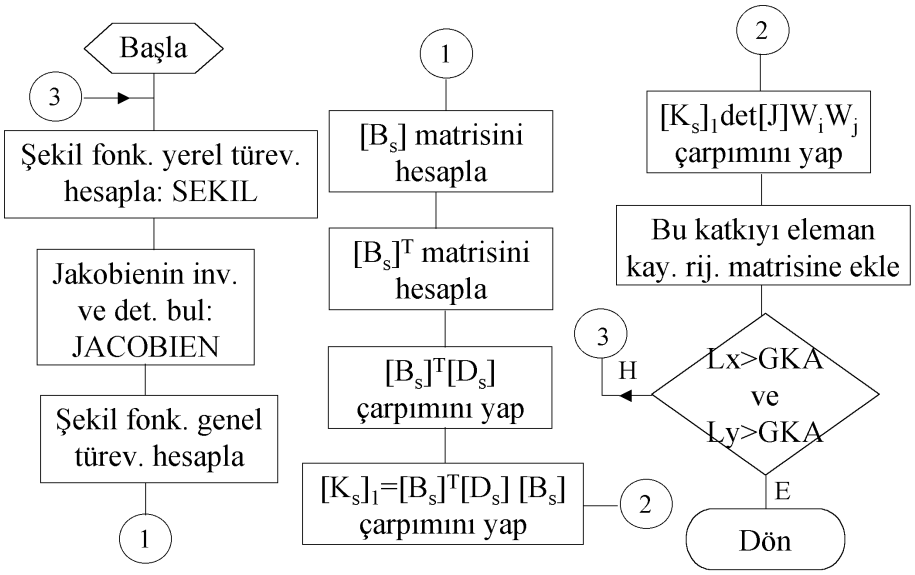
CARPIM: $[B_s]^T[D_s]$ çarpım matrisi

KS1: 1. integrasyon adımına ait $[K_s]^e$ matrisi

Çıkış değişkenleri:

KS: $[K_s]^e$ matrisi

Diğer değişkenler Bölüm 5.4.3'dekilerle aynıdır.




Şekil 5.4 FORMKSE alt programının akış diyagramı

### 5.4.5 FORM_FMAT alt programı

Sistem yük matrisi burada hesaplanır.

Giriş değişkenleri

MAXSD: Öngörülen en fazla serbestlik derecesi. Her alt programdaki PARAMETER deyiminde sabitlenmiştir. Büyük sistemler için bu sayı büyütülmelidir.

ITY: Üzerinde yayılı yük bulunan toplam eleman adedi

YUKp: tekil yükler (Bkz. Şekil 3.10)

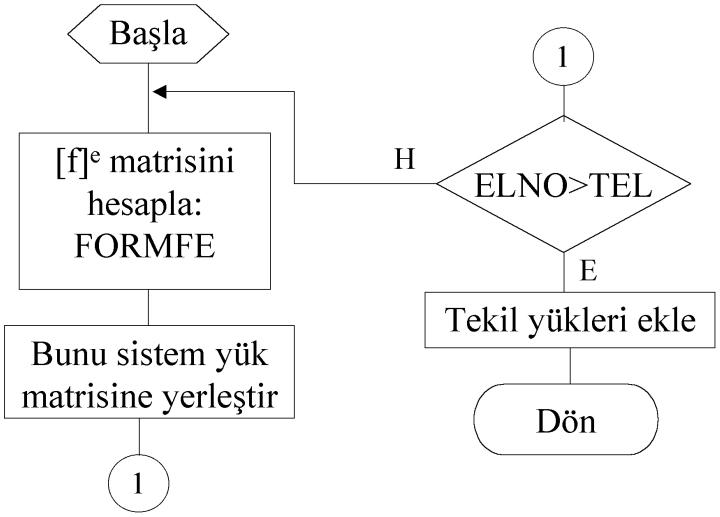
Geçici değişkenler:

YUKfq : Yayılı yükler (Bkz. Şekil 3.11)

Sonuç değişkenleri:

FMAT: Sistem yük matrisi [f]

Diğer değişkenler Bölüm 5.4.2'dekilerle aynıdır.




Şekil 5.5 FORM_FMAT alt programının akış diyagramı

### 5.4.6 FORMFE alt programı

Eleman yayılı yüklerinden gelen eşdeğer düğüm noktası yükleri burada hesaplanır.

Giriş değişkenleri:

YUKq: Bütün elemanların yayılı yükleri (Bkz. Şekil 3.11)

Geçici değişkenler:

YUKqe: Elemanın yayılı yükleri

NT: $[N]^T$ matrisi

NP: $[N_P]$ matrisi

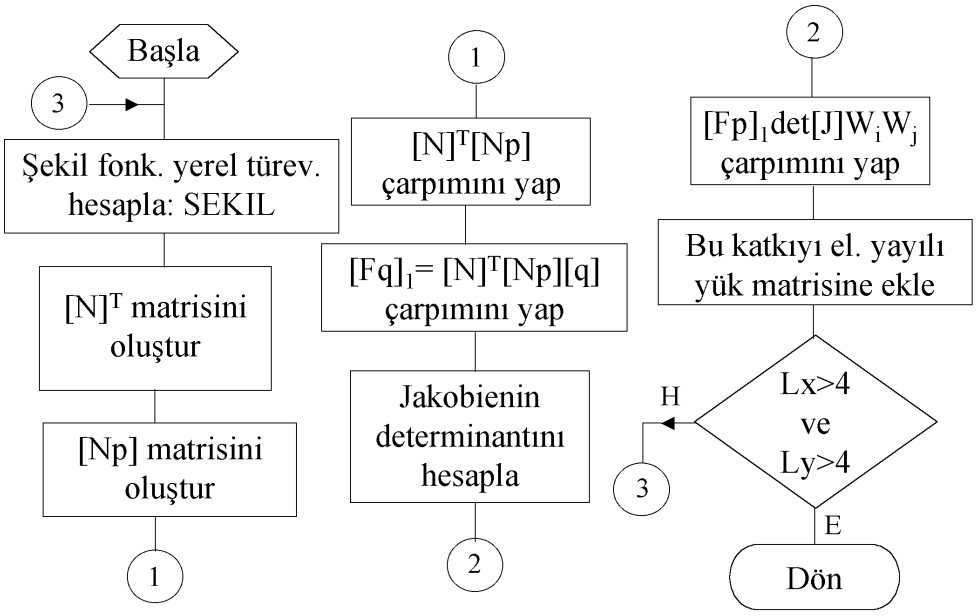
CARPIM: $[N]^T[N_P]$ çarpım matrisi

YUKfq1: 1. integrasyon adımına ait $\{f_q\}^e$ matrisi

Çıkış değişkenleri:

YUKfq:Eleman yayılı yüklerinden gelen eşdeğer düğüm noktası yükleri $\{f_q\}^e$

Diğer değişkenler Bölüm 5.4.3'dekilerle aynıdır.




Şekil 5.6 FORMFE alt programının akış diyagramı

## 5.5 Diğer alt programlar

HAZIRLA: Gerekli dosyaları açar; başlık,tarih,vs. bilgilerini oku/yazar.

VERILERI_AL: .IN uzantılı veri dosyasından problem verilerini okur.

VERILERI_YAZ: Okunan verileri doğrulama amacıyla .EKO uzantılı dosyaya yazar.

MESNET: Katsayılar matrisi [KMAT] ve sabitler matrisi [FMAT] ile verilen denklem sistemine β yöntemini kullanarak yer değiştirme sınır şartlarını uygular. COZ: Katsayılar matrisi [KMAT] ve sabitler matrisi [FMAT] ile verilen denklem sistemini Gauss Eliminasyon Yöntemi ile çözer ve sonuçları [XMAT] dizisine atar KAYNAK:[37]sf.193.

IC_KUVVET: İç kuvvetleri (birim boydaki momentler ve kesme kuvvetleri) hesaplar ve .OUT dosyasına listeler.

BITIR: Yer değiştirmeleri .OUT dosyasına listeler.

SATIR_ATLA(DOSYANO,SATIR): DOSYANO numarasıyla açık durumda bulunan dosyadan SATIR adet satırı okur. Bu işlem, veri içermeyen satırların atlanmasına yarar.

MTRANS(MAT1,I1,I2,MAT2): I1xI2 boyutlu MAT1 matrisinin transpozesini alır,

sonucu I2xI1 boyutlu MAT2 matrisiyle gönderir.

MCARP(MAT1,I11,I12,MAT2,I21,I22,MAT3): I11xI12 boyutlu MAT1 matrisiyle I21xI22 boyutlu MAT2 matrisini çarpar, sonucu I11xI22 boyutlu MAT3 matrisiyle gönderir.

MTOPLA(MAT1,MAT2,I1,I2): I1xI2 boyutlu MAT1 matrisiyle yine I1xI2 boyutlu MAT2 matrisini toplar, sonucu yine MAT1 matrisiyle gönderir.

MCARP2(MAT,SBT,I1,I2): I1xI2 boyutlu MAT matrisinin her elemanını SBT sabitiyle çarpar, sonucu yine MAT matrisiyle gönderir.

SEKIL(KSI,ITA): Eleman şekil fonksiyonlarının ve yerel türevlerinin KSI,ITA koordinatındaki değerlerini hesaplar.

SEKIL2(KSI,ITA): Yük sekil fonksiyonlarının ve yerel türevlerinin KSI,ITA koordinatındaki değerlerini hesaplar.

SIFIRLA2(I1,I2,DIZI): I1xI2 boyutlu DIZI dizisini her elemanını 0 yapar.

JACOBIEN(ELNO): ELNO numaralı elemana ait Jakobien matrisin determinantını ve inversini hesaplar.

# 6 SAYISAL UYGULAMALAR

## 6.1 Giriş

Geliştirilen bilgisayar programlarının analitik çözümler ve diğer araştırmacıların çözümleriyle karşılaştırılması amacıyla belli başlı birkaç örnekte sayısal uygulamalar yapılmıştır.

Plak ortası çökme ve momenti bakımından yakınsaklık hataları incelenmiş, kilitlenme olayının meydana gelişi ve integrasyon adımının azaltılması yoluyla önlenmesi gösterilmiştir.

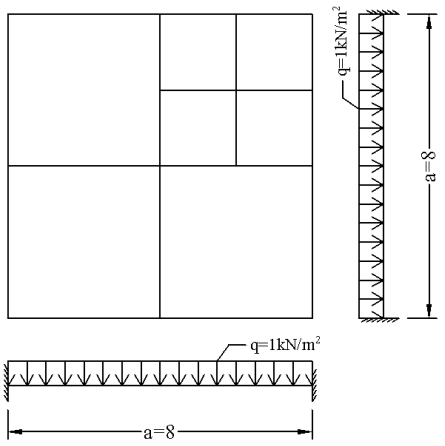
Yakınsaklık testleri kalın sayılabilecek plaklarda kalınlık/açıklık oranı 0.1 değeri için, ince plaklarda ise 0.01 için yapılmıştır. Plak sistemi şekillerde görüldüğü gibi sağ üst çeyreğinde incelenmiştir. Dolayısıyla yakınsaklık tablolarında belirtilen eleman ağları plağın dörtte birinin idealizasyonunu ifade etmektedir.

Plak açıklığı 8 metre alınmıştır. Diğer sabitler Tablo 6.1'de verildiği gibidir.

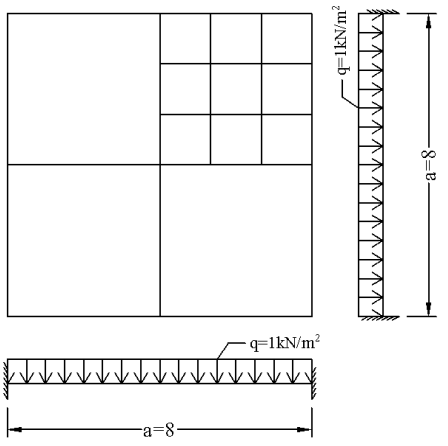
Tablo 6.1 Problem sabitleri

| | |
|---|---|
| E | 1E+06 $kN/m^2$ |
| $\nu$ | 0.3 |
| $\kappa^2$ | 5/6 |
| q | 1 $kN/m^2$ |
| P | 1 kN |

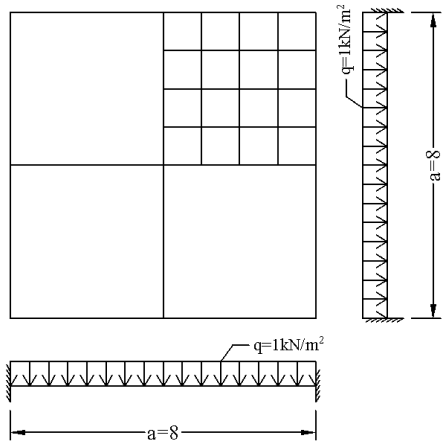
## 6.2 Örnek 1: Düzgün yayılı yüklü ankastre mesnetli kare plak



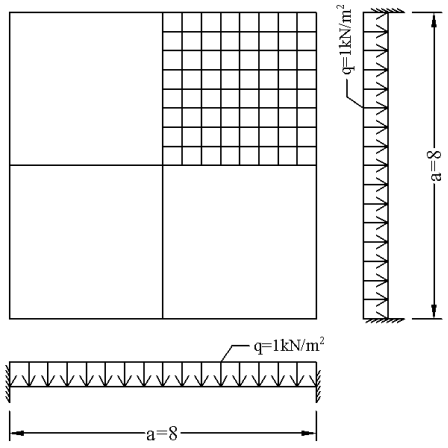

Şekil 6.1 Örnek-1 (2x2 ağ)




Şekil 6.2 Örnek-1 (3x3 ağ)




Şekil 6.3 Örnek-1 (4x4 ağ)

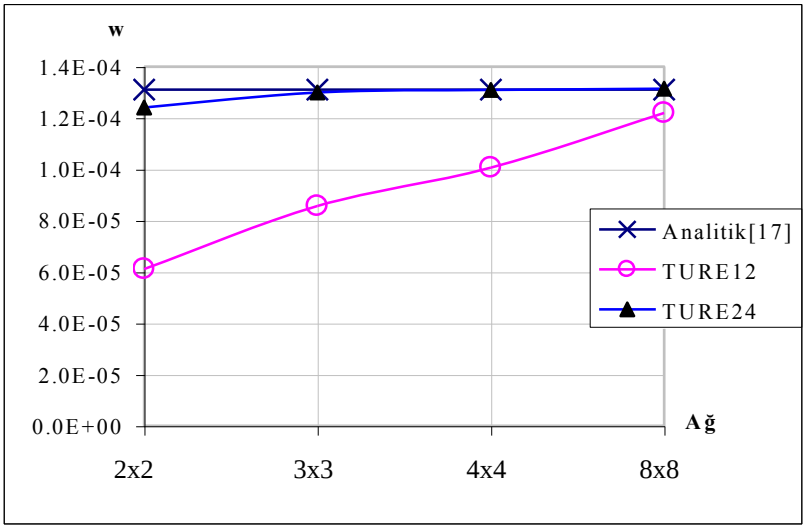



Şekil 6.4 Örnek-1 (8x8 ağ)

Kalın sayılabilecek plak uygulamasında analitik çözüme yakınsama göz önüne alındığında her iki eleman tipinin de oldukça iyi sonuçlar verdiği görülmektedir (Bkz. Tablo 6.2). Listedeki makalelerden sadece [39] numaralı çalışmanın TURE24'den daha hızlı yakınsadığı dikkate değer bir husustur. TURE24'ün, TURE12'ye göre çok daha hızlı yakınsaması beklenen bir durumdur. TURE12 elemanı en iyi çözümü %6.9 hata ile 8x8 ağ kullanımında vermiştir. Bu sistemin rijitlik matrisi 243x243 boyutundadır. Buna karşın TURE24'ün 2x2 ağdaki hata payı bile TURE12'ninkinden az olup, bu durumdaki sistem rijitlik matrisi 63x63 boyutundadır.

Tablo 6.2 Yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

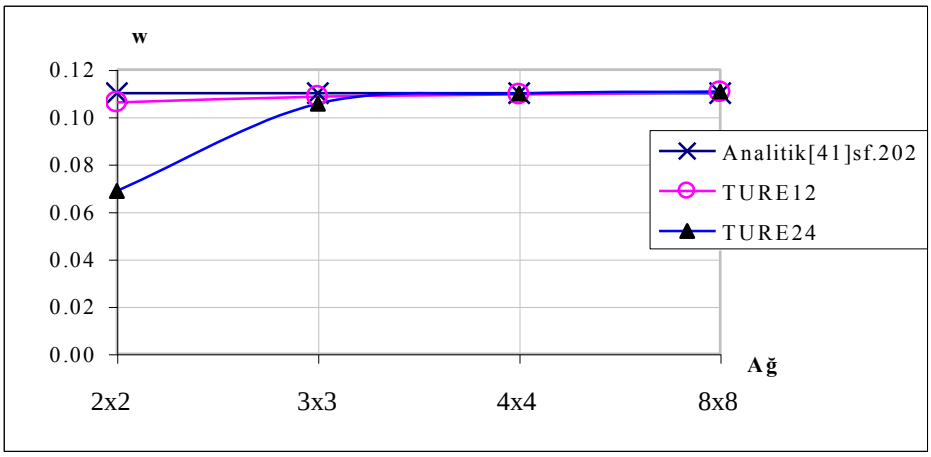
| Eleman ağı | **2x2** | **3x3** | **4x4** | **8x8** |
|---|---|---|---|---|
| Analitik[17] | 0.000131 | | | |
| TURE12 | 0.000061 | 0.000086 | 0.000101 | 0.000122 |
| Hata(%) | -53.4% | -34.6% | -23.2% | -6.9% |
| TURE24 | 0.000124 | 0.000130 | 0.000131 | 0.000131 |
| Hata(%) | -5.3% | -0.8% | -0.1% | 0.3% |
| [38] | 0.000147 | | 0.000135 | 0.000132 |
| [20] | 0.000143 | 0.000137 | 0.000135 | |
| [39] | 0.000132 | 0.000132 | | |
| [8] | 0.000106 | | | |
| [40] | 0.000121 | | | |
| [12] | | | | 0.000133 |
| [11] | 0.000118 | 0.000132 | 0.000138 | |
| [17] | 0.000125 | 0.000129 | 0.000130 | |




Şekil 6.5 Yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

Tablo 6.3 Yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

| | **2x2** | **3x3** | **4x4** | **8x8** |
|---|---|---|---|---|
| Analitik[41]sf.202 | 0.110075 | | | |
| TURE12 | 0.106040 | 0.108512 | 0.109488 | 0.110441 |
| Hata(%) | -3.7% | -1.4% | -0.5% | 0.3% |
| TURE24 | 0.068710 | 0.105600 | 0.109927 | 0.110753 |
| Hata(%) | -37.6% | -4.1% | -0.1% | 0.6% |
| [38] | 0.127722 | | 0.115491 | 0.111909 |
| [20] | 0.103086 | 0.110599 | 0.11287 | |
| [39] | 0.111735 | 0.110948 | | |
| [8] | 0.110075 | | | |
| [40] | 0.111822 | | | |
| [12] | | | | 0.112958 |
| [30]sf.192 | 0.122567 | | 0.113919 | 0.111385 |
| [11] | 0.094437 | 0.109026 | 0.114268 | |
| [17] | 0.105969 | 0.108502 | 0.109463 | |

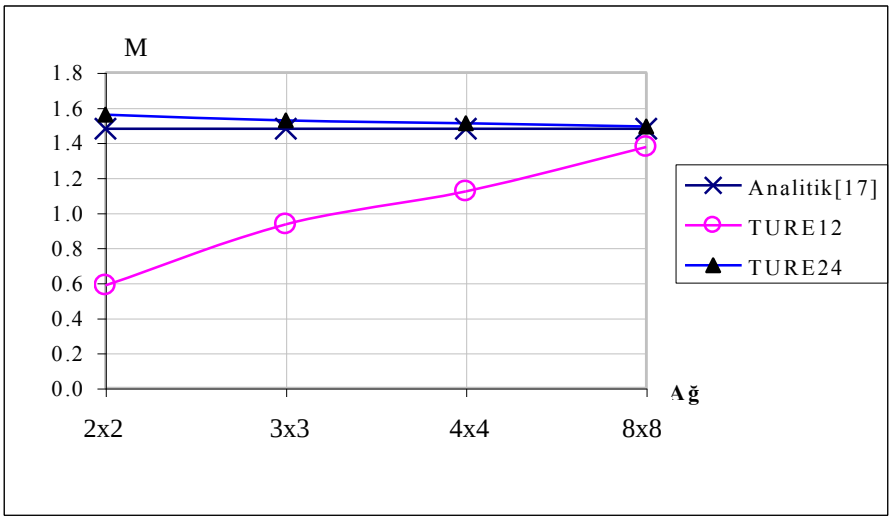



Şekil 6.6 Yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

İnce plak uygulamasında (Bkz. Tablo 6.3) da benzer sonuçlar gözlenmektedir. Ancak TURE12'nin ince plakta daha etkin olarak kullanılabileceği ortaya çıkmıştır.

Tablo 6.4 Yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti yakınsama testi

| | 2x2 | 3x3 | 4x4 | 8x8 |
|---|---|---|---|---|
| Analitik[17] | 1.4784 | | | |
| TURE12 | 0.5858 | 0.9328 | 1.1207 | 1.3755 |
| Hata(%) | -60.4% | -36.9% | -24.2% | -7.0% |
| TURE24 | 1.5585 | 1.5265 | 1.5104 | 1.4916 |
| Hata(%) | 5.4% | 3.3% | 2.2% | 0.9% |
| [20] | 1.7779 | 1.5872 | 1.4326 | |
| [40] | 1.4592 | | | |
| [17] | 1.5104 | 1.5168 | 1.4976 | |

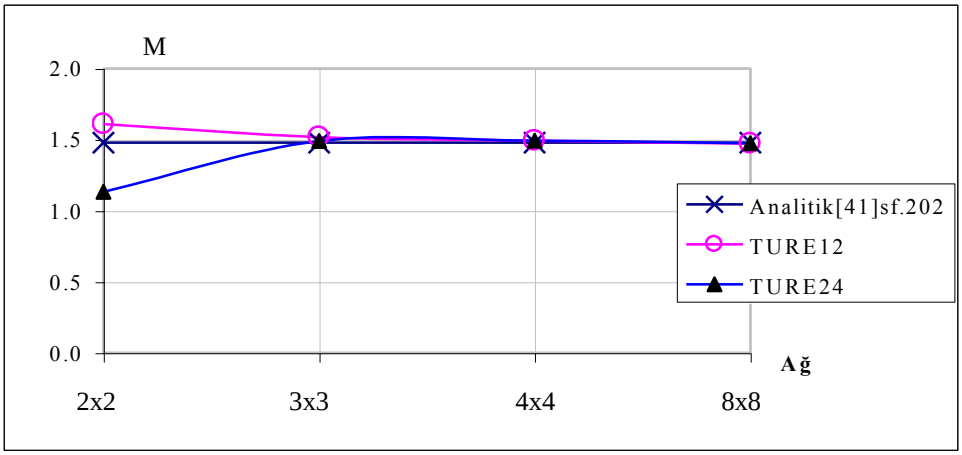



Şekil 6.7 Yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti yakınsama testi

İç kuvvetlerin yakınsama hızı ise beklendiği gibi daha düşüktür; eleman adedinin arttırılmasına karşı daha az hassastır (Bkz. Tablo 6.4 ve 6.5).

Tablo 6.5 Yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi

| | 2x2 | 3x3 | 4x4 | 8x8 |
|---|---|---|---|---|
| Analitik[41]sf.202 | 1.4784 | | | |
| TURE12 | 1.6087 | 1.5164 | 1.4905 | 1.4720 |
| Hata(%) | 8.8% | 2.6% | 0.8% | -0.4% |
| TURE24 | 1.1320 | 1.4900 | 1.4911 | 1.4729 |
| Hata(%) | -23.4% | 0.8% | 0.9% | -0.4% |
| [20] | 1.5520 | 1.5392 | 1.5386 | |
| [40] | 1.4528 | | | |
| [17] | 1.6128 | 1.5168 | 1.4912 | |



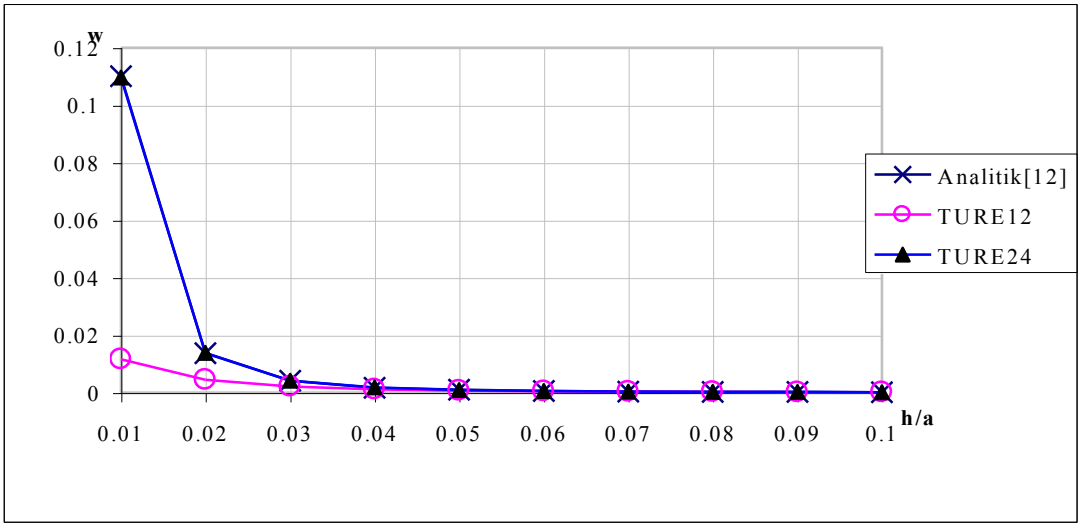

Şekil 6.8 Yayılı yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi

TURE12 elemanında ince plak sınırından itibaren (h/a<0.05) kayma kilitlenmesi gözlenmiştir (Bkz. Tablo 6.6). Tabloda koyu puntolarla yazılmış değerler, analitik çözüme en yakın sonuçlardır. Tablonun ortasından geçen yatay çift çizgi ince plak sınırını ifade etmektedir. Analitik çözüm hesaplanırken, bu çift çizginin üzerindeki değerlerde ince plak formülü, altındakilerde ise kalın plak formülü kullanılmıştır. İnce plak uygulamasında TURE24 elemanının tam integrasyonunun, azaltılmış integrasyonla elde edilen değerden daha yaklaşık sonuç verdiği görülmüştür. Ancak bu değerle diğerleri arasında dikkati çekecek bir fark yoktur. Her iki eleman tipinin de kalın plakların (h/a>0.1) hesabı için kullanılmasının pek uygun olmadığı ortaya çıkmıştır. Zira hata yüzdeleri 40'ın üzerindedir. Şekil 6.10, Tablo 6.6'da koyu puntolarla yazılmış değerlerle çizilmiştir.

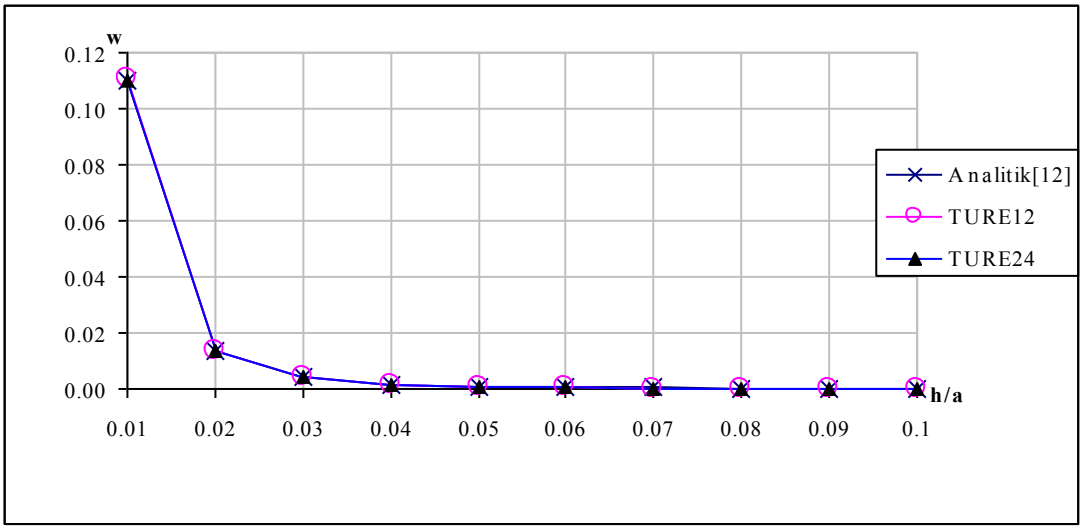
Tablo 6.6 Yayılı yüklü ankastre kare plakta plak ortası çökmesi kilitlenme testi

| | | TURE12 | | | | TURE24 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h/a | Analitik[12] | T | A | S | Hata | T | A | S | Hata |
| 0.01 | 0.110074 | 0.011554 | 0.110894 | **0.110441** | 0.3% | **0.109673** | 0.110755 | 0.110753 | 0.4% |
| 0.02 | 0.013759 | 0.004432 | 0.013945 | **0.013888** | 0.9% | **0.013857** | 0.013928 | 0.013927 | 0.7% |
| 0.03 | 0.004077 | 0.002139 | 0.004172 | **0.004156** | 1.9% | **0.004155** | 0.004167 | 0.004167 | 1.9% |
| 0.04 | 0.001720 | 0.001165 | 0.001784 | **0.001777** | 3.3% | **0.001779** | 0.001782 | 0.001782 | 3.4% |
| 0.05 | 0.001048 | 0.000694 | **0.000929** | 0.000925 | 11.3% | 0.000927 | **0.000928** | 0.000928 | 11.5% |
| 0.06 | 0.000606 | 0.000445 | **0.000548** | 0.000546 | 9.6% | 0.000547 | **0.000548** | 0.000548 | 9.7% |
| 0.07 | 0.000382 | 0.000302 | **0.000353** | 0.000352 | 7.5% | 0.000353 | **0.000353** | 0.000353 | 7.6% |
| 0.08 | 0.000256 | 0.000215 | **0.000243** | 0.000242 | 5.1% | 0.000242 | **0.000242** | 0.000242 | 5.2% |
| 0.09 | 0.000180 | 0.000159 | **0.000175** | 0.000175 | 2.4% | 0.000175 | **0.000175** | 0.000175 | 2.6% |
| 0.1 | 0.000131 | 0.000122 | 0.000132 | **0.000131** | 0.2% | **0.000131** | 0.000131 | 0.000131 | 0.3% |
| 0.2 | 0.000016 | **0.000023** | 0.000024 | 0.000024 | 42.7% | **0.000024** | 0.000024 | 0.000024 | 44.9% |

T: Tam integrasyon
A: Azaltılmış integrasyon
S: Seçilerek azaltılmış integrasyon

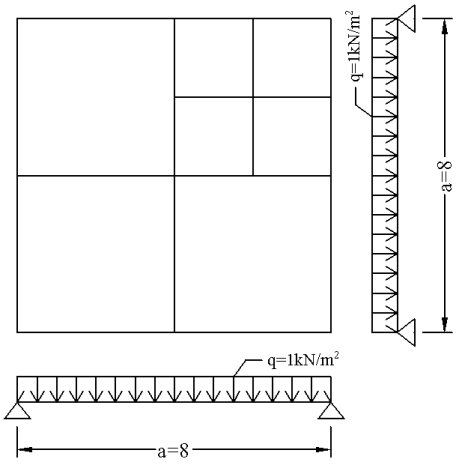



Şekil 6.9 Yayılı yüklü ankastre kare plakta kilitlenmenin meydana gelişi

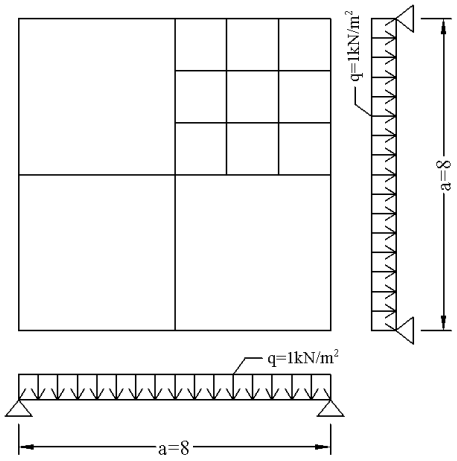



Şekil 6.10 Yayılı yüklü ankastre kare plakta kilitlenmenin önlenmesi

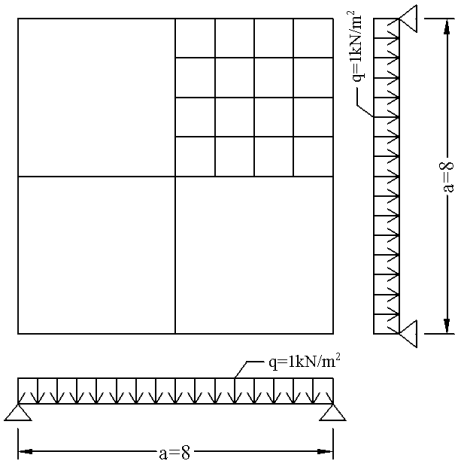
## 6.3 Örnek 2: Düzgün yayılı yüklü basit mesnetli kare plak



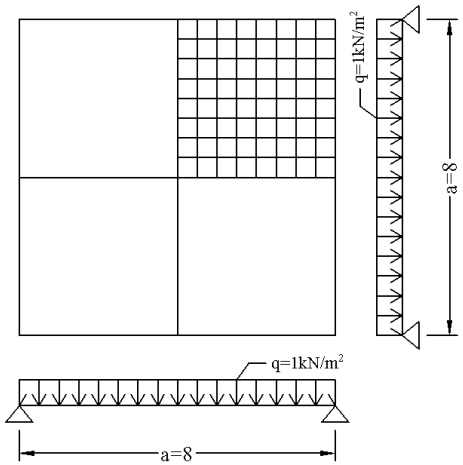

Şekil 6.11 Örnek-2 (2x2 ağ)




Şekil 6.12 Örnek-2 (3x3 ağ)




Şekil 6.13 Örnek-2 (4x4 ağ)

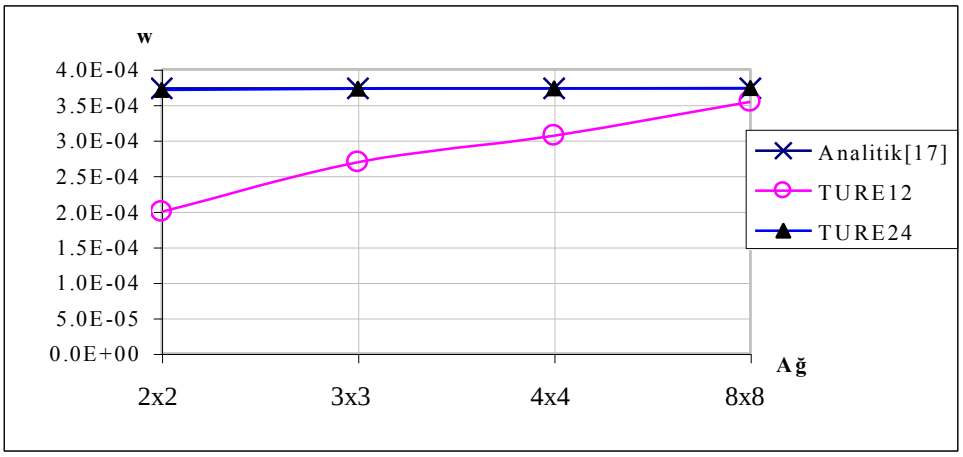



Şekil 6.14 Örnek-2 (8x8 ağ)

Bu örnekte elde edilen sonuçlar, Örnek-1'dekilerle benzer bir tablo sergilemektedir. TURE12'deki kilitlenme eğilimi, TURE24'dekine göre daha yüksektir.

Tablo 6.7 Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

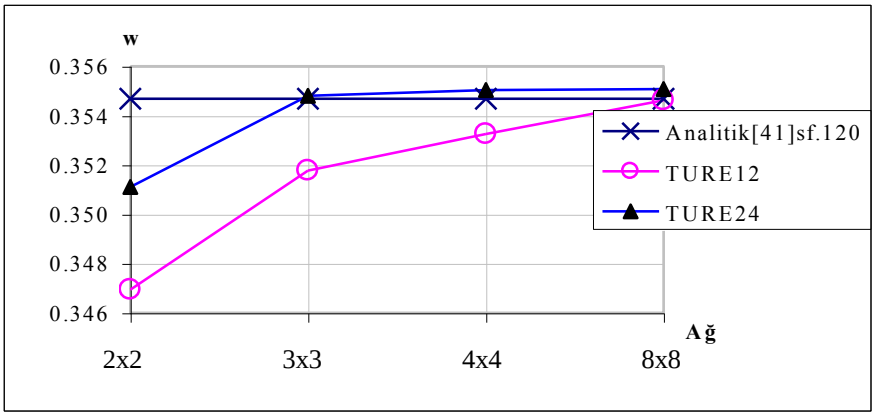
| | **2x2** | **3x3** | **4x4** | **8x8** |
|---|---|---|---|---|
| Analitik[17] | 0.000373 | | | |
| TURE12 | 0.000199 | 0.000269 | 0.000307 | 0.000354 |
| Hata(%) | -46.5% | -27.8% | -17.8% | -5.1% |
| TURE24 | 0.000371 | 0.000373 | 0.000373 | 0.000373 |
| Hata(%) | -0.6% | -0.1% | 0.0% | 0.1% |
| [38] | 0.000369 | | 0.000372 | 0.000373 |
| [20] | 0.000384 | 0.000372 | 0.000367 | |
| [39] | 0.000373 | 0.000374 | | |
| [8] | 0.000347 | | | |
| [40] | 0.000391 | | | |
| [12] | | | | 0.000371 |
| [11] | 0.000422 | 0.000432 | 0.000436 | |
| [13] | 0.000416 | 0.000416 | 0.000416 | |
| [17] | 0.000366 | 0.000370 | 0.000371 | |
| [42] | 0.00035496 | | | |
| [19] | | | 0.000371 | |
| [43] | 0.000373 | | 0.000373 | 0.000373 |
| [35]sf.96 | 0.000425 | | 0.000374 | 0.000373 |
| [15] | | 0.000370 | | |




Şekil 6.15 Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

Tablo 6.8 Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

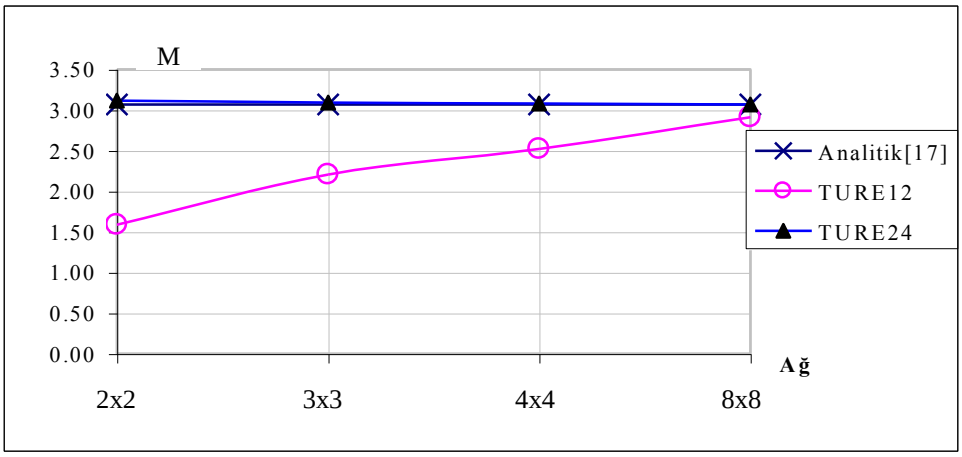
| | **2x2** | **3x3** | **4x4** | **8x8** |
|---|---|---|---|---|
| Analitik[41]sf.120 | 0.354685 | | | |
| TURE12 | 0.346939 | 0.351764 | 0.353247 | 0.354623 |
| Hata(%) | -2.2% | -0.8% | -0.4% | 0.0% |
| TURE24 | 0.351104 | 0.354808 | 0.355035 | 0.35507 |
| Hata(%) | -1.0% | 0.0% | 0.1% | 0.1% |
| [38] | 0.353549 | | 0.35486 | 0.354947 |
| [20] | 0.374254 | 0.361499 | 0.3608 | |
| [39] | 0.355559 | 0.354685 | | |
| [8] | 0.346735 | | | |
| [40] | 0.365168 | | | |
| [12] | | | | 0.353375 |
| [30]sf.192 | 0.344114 | | 0.352326 | 0.354336 |
| [11] | 0.380194 | 0.384999 | 0.386572 | |
| [13] | 0.387008 | 0.390503 | 0.390503 | |
| [17] | 0.346823 | 0.351191 | 0.352938 | |
| [42] | 0.370560 | | | |
| [44] | 0.373129 | | | |
| [19] | | | 0.354685 | |
| [43] | 0.352746 | | 0.354735 | 0.355004 |
| [35]sf.96 | 0.354528 | | 0.355305 | 0.355200 |
| [15] | | 0.346823 | | |




Şekil 6.16 Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

Tablo 6.9 Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti yakınsama testi

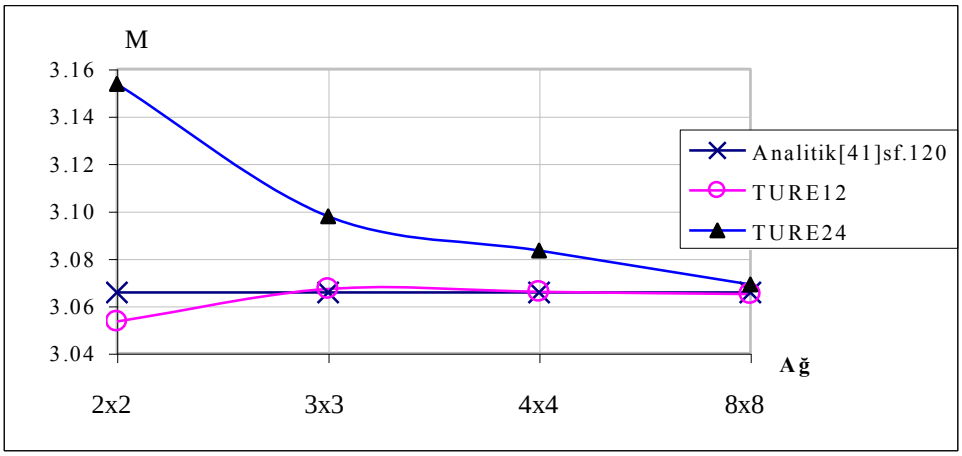
| | **2x2** | **3x3** | **4x4** | **8x8** |
|---|---|---|---|---|
| Analitik[17] | 3.0656 | | | |
| TURE12 | 1.5864 | 2.2033 | 2.5206 | 2.9105 |
| Hata(%) | -48.3% | -28.1% | -17.8% | -5.1% |
| TURE24 | 3.1159 | 3.0916 | 3.0804 | 3.0688 |
| Hata(%) | 1.6% | 0.8% | 0.5% | 0.1% |
| [20] | 3.6051 | 3.3261 | 3.2154 | |
| [40] | 3.2192 | | | |
| [17] | 3.0528 | 3.0656 | 3.0656 | |
| [15] | | 3.0720 | | |
| [43] | 3.0184 | | 3.0549 | 3.0624 |
| [19] | | | 3.0720 | |
| [42] | 3.0656 | | | |
| [39] | 3.1552 | 3.0976 | | |
| [11] | 3.1520 | 3.2122 | 3.2346 | |
| [38] | 3.3427 | | 3.1622 | 3.0938 |




Şekil 6.17 Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için açıklık momenti yakınsama testi

Tablo 6.10 Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi

| | **2x2** | **3x3** | **4x4** | **8x8** |
|---|---|---|---|---|
| Analitik[41]sf.120 | 3.0656 | | | |
| TURE12 | 3.0534 | 3.0672 | 3.0659 | 3.0649 |
| Hata(%) | -0.4% | 0.1% | 0.0% | 0.0% |
| TURE24 | 3.1536 | 3.0978 | 3.0833 | 3.0690 |
| Hata(%) | 2.9% | 1.1% | 0.6% | 0.1% |
| [20] | 3.2422 | 3.1827 | 3.1302 | |
| [40] | 3.2704 | | | |
| [17] | 3.0528 | 3.0656 | 3.0656 | |
| [15] | | 3.0016 | | |
| [43] | 3.0160 | | 3.0548 | 3.0624 |
| [19] | | | 3.0016 | |
| [42] | 3.0656 | | | |
| [39] | 3.1552 | 3.0976 | | |
| [11] | 2.9952 | 3.0406 | 3.0541 | |
| [38] | 3.2077 | | 3.0989 | 3.0746 |

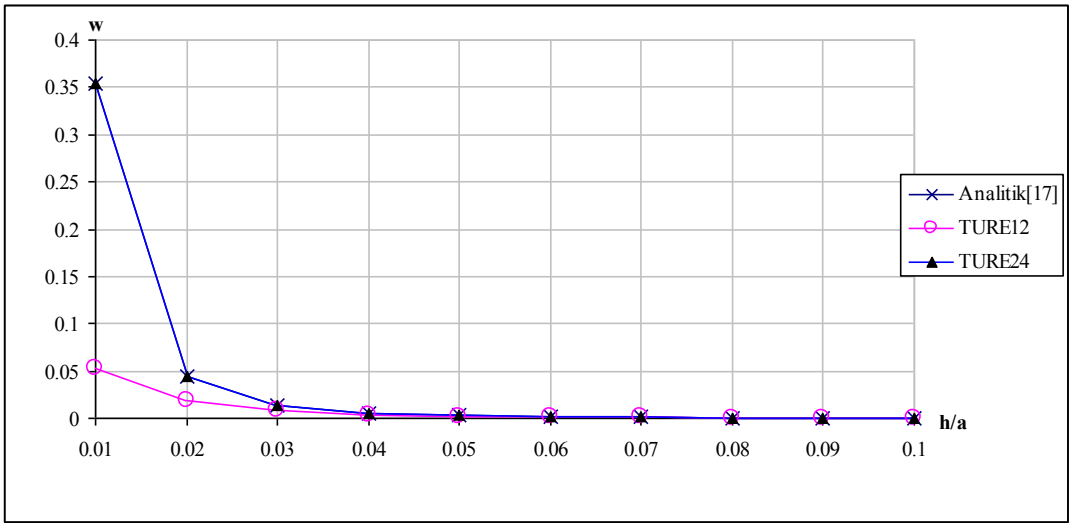



Şekil 6.18 Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi

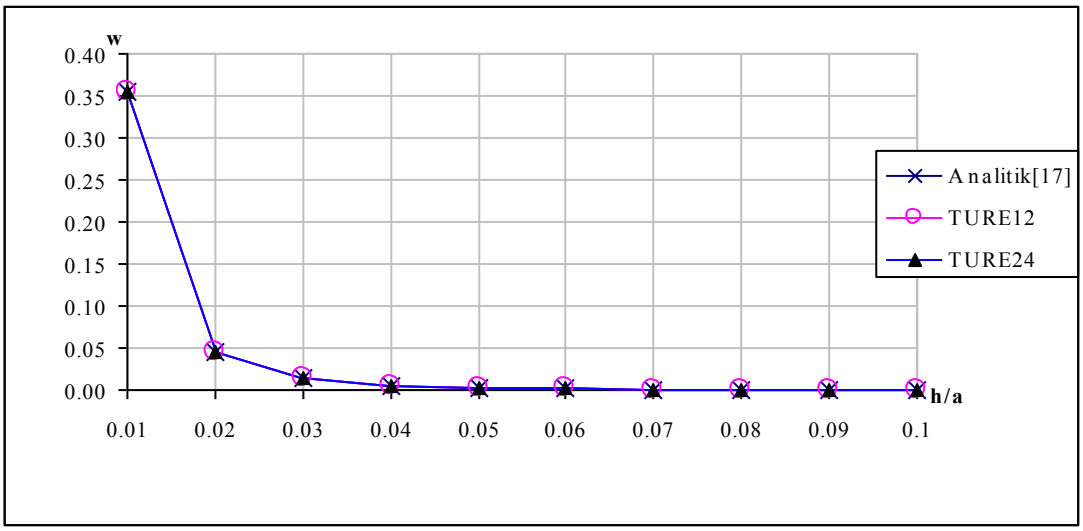
Tablo6.11 Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta plak ortası çökmesi kilitlenme testi

| | | TURE12 | | | | TURE24 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h/a | Analitik[17] | T | A | S | Hata | T | A | S | Hata |
| 0.01 | 0.354682 | 0.053518 | 0.355388 | **0.354623** | 0.0% | **0.354780** | 0.355070 | 0.355070 | 0.0% |
| 0.02 | 0.044335 | 0.018479 | 0.044493 | **0.044397** | 0.1% | **0.044434** | 0.044453 | 0.044453 | 0.2% |
| 0.03 | 0.013136 | 0.008136 | 0.013217 | **0.013189** | 0.4% | **0.013202** | 0.013205 | 0.013205 | 0.5% |
| 0.04 | 0.005542 | 0.004143 | 0.005596 | **0.005584** | 0.8% | **0.005590** | 0.005591 | 0.005591 | 0.9% |
| 0.05 | 0.002984 | 0.002352 | **0.002879** | 0.002873 | 3.5% | 0.002876 | **0.002876** | 0.002876 | 3.6% |
| 0.06 | 0.001727 | 0.001450 | **0.001675** | 0.001672 | 3.0% | 0.001674 | **0.001674** | 0.001674 | 3.1% |
| 0.07 | 0.001088 | 0.000953 | **0.001062** | 0.001060 | 2.3% | 0.001061 | **0.001061** | 0.001061 | 2.4% |
| 0.08 | 0.000729 | 0.000659 | **0.000717** | 0.000715 | 1.6% | 0.000716 | **0.000716** | 0.000716 | 1.7% |
| 0.09 | 0.000512 | 0.000475 | **0.000508** | 0.000507 | 0.8% | 0.000507 | **0.000507** | 0.000507 | 0.9% |
| 0.1 | 0.000373 | 0.000354 | 0.000374 | **0.000373** | 0.0% | **0.000373** | 0.000373 | 0.000373 | 0.1% |
| 0.2 | 0.000047 | **0.000053** | 0.000054 | 0.000054 | 13.5% | **0.000054** | 0.000054 | 0.000054 | 14.9% |

T: Tam integrasyon
A: Azaltılmış integrasyon
S: Seçilerek azaltılmış integrasyon

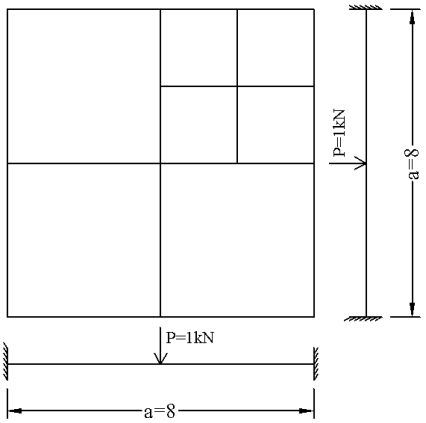



Şekil 6.19 Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta kilitlenmenin meydana gelişi

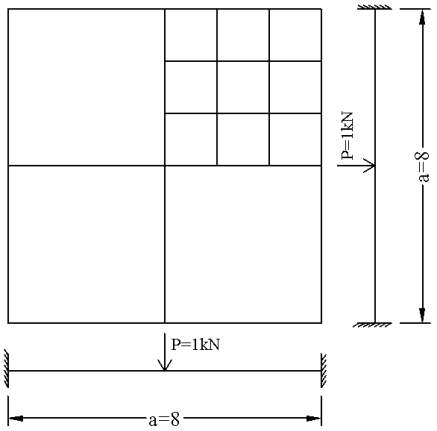



Şekil 6.20 Yayılı yüklü basit mesnetli kare plakta kilitlenmenin önlenmesi

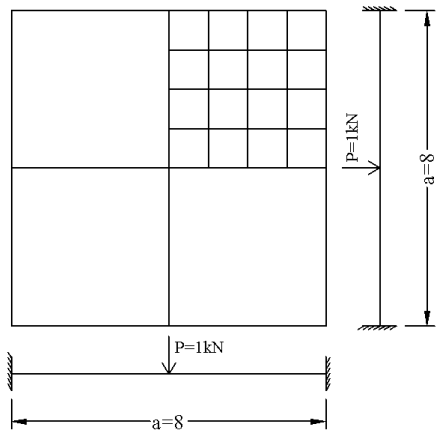
## 6.4 Örnek 3: Tekil yüklü ankastre mesnetli kare plak



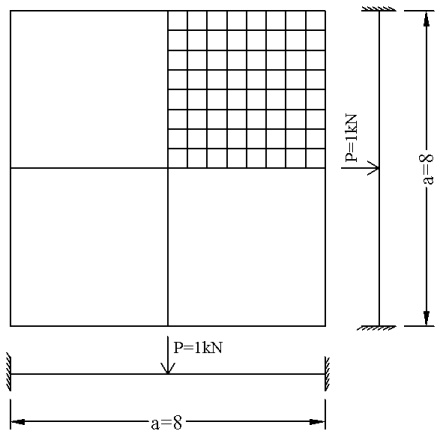

Şekil 6.21 Örnek-3 (2x2 ağ)




Şekil 6.22 Örnek-3 (3x3 ağ)




Şekil 6.23 Örnek-3 (4x4 ağ)

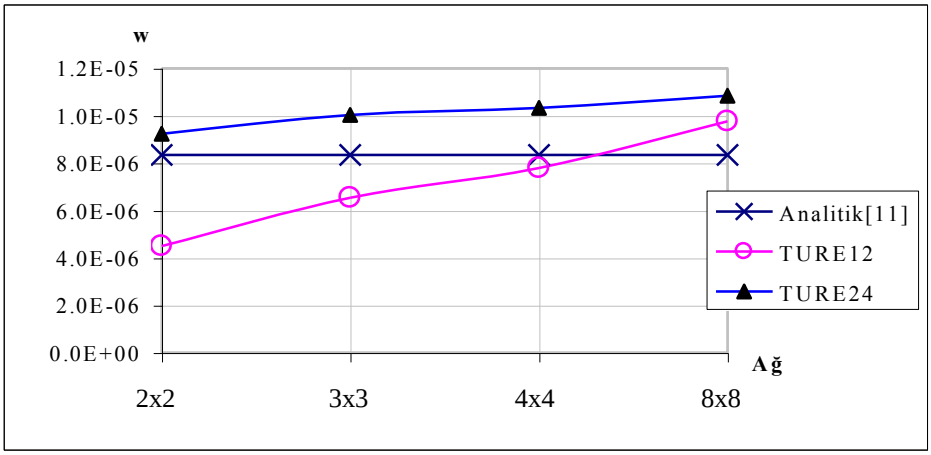



Şekil 6.24 Örnek-3 (8x8 ağ)

Bu örnekte tekil yüklü, ankastre mesnetli, kalın sayılabilecek ve ince kare plaklar merkez çökmesinin yakınsaması bakımından incelenmiştir. 8x8 eleman ağıyla oluşturulan sistemde rijitlik matrisinin tam integrasyonunun kayma kilitlenmesine yol açtığı ve bu olayın azaltılmış (hem eğilme terimlerinin hem de kayma terimlerinin integrasyon adımının bir adım azaltılması) ve seçilerek azaltılmış (sadece kayma terimlerinin integrasyon adımının bir adım azaltılması) integrasyonla ne oranda çözülebileceği araştırılmıştır (Bkz Tablo 6.14, Şekil 6.27 ve 6.28).

Tablo 6.12 Tekil yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

| | 2x2 | 3x3 | 4x4 | 8x8 |
|---|---|---|---|---|
| Analitik[11] | 8.34E-06 | | | |
| TURE12 | 4.50E-06 | 6.54E-06 | 7.79E-06 | 9.76E-06 |
| Hata(%) | -46.1% | -21.6% | -6.5% | 17.0% |
| TURE24 | 9.23E-06 | 1.00E-05 | 1.03E-05 | 1.08E-05 |
| Hata(%) | 10.7% | 20.3% | 23.8% | 29.9% |
| [11] | 8.74E-06 | 1.03E-05 | 1.09E-05 | |
| [13] | 1.15E-05 | | | |

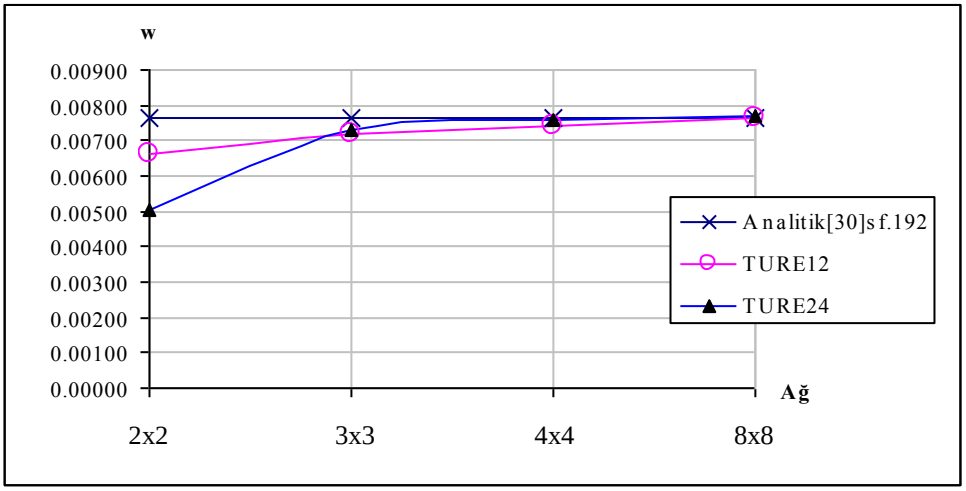



Şekil 6.25 Tekil yüklü ankastre kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

Kalın sayılabilecek, tekil yüklü, ankastre plakta, TURE24 elemanının, ağ sıklaştırılması durumunda analitik çözümden uzaklaştığı görülmektedir (Bkz. Tablo 6.12). Aynı durum ince plak uygulamasında söz konusu değildir (Bkz. Tablo 6.13).

Tablo 6.13 Tekil yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

| | **2x2** | **3x3** | **4x4** | **8x8** |
|---|---|---|---|---|
| Analitik[30]sf.192 | 7.66E-03 | | | |
| TURE12 | 6.64E-03 | 7.20E-03 | 7.41E-03 | 7.63E-03 |
| Hata(%) | -13.3% | -6.0% | -3.2% | -0.4% |
| TURE24 | 5.01E-03 | 7.32E-03 | 7.60E-03 | 7.68E-03 |
| Hata(%) | -34.6% | -4.4% | -0.8% | 0.3% |
| [30]sf.192 | 8.37E-03 | | 7.92E-03 | 7.74E-03 |
| [11] | 5.92E-03 | 7.15E-03 | 7.64E-03 | |
| [6] | 7.69E-03 | | 7.63E-03 | 7.68E-03 |

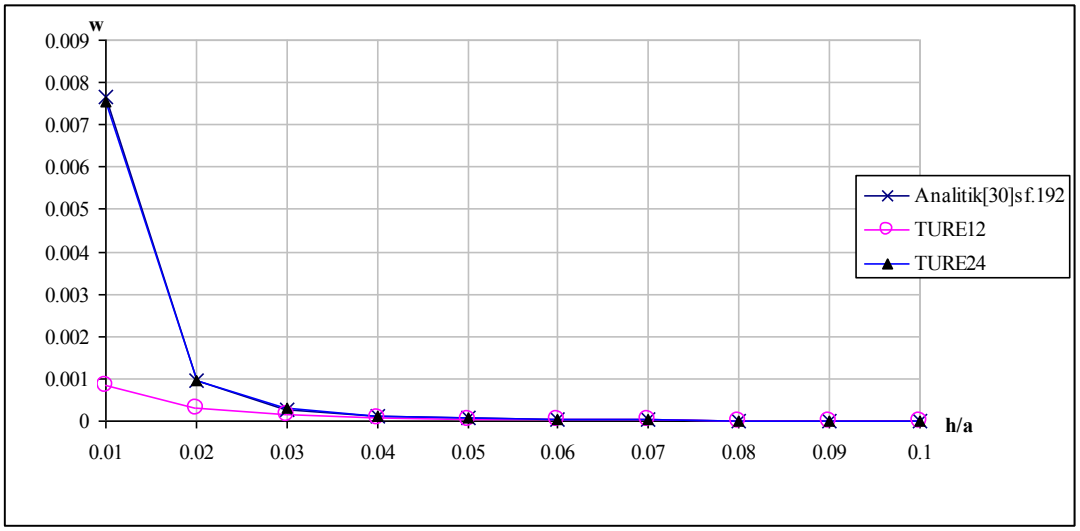



Şekil 6.26 Tekil yüklü ankastre kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

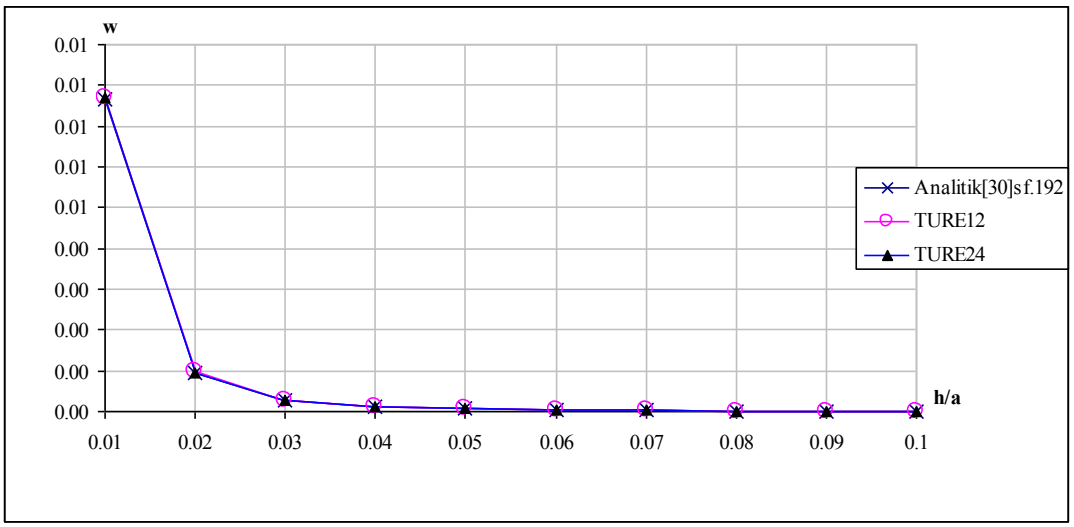
Tablo 6.14 Tekil yüklü ankastre kare plakta plak ortası çökmesi kilitlenme testi

| | | TURE12 | | | | TURE24 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h/a | Analitik[30]sf.192 | T | A | S | Hata | T | A | S | Hata |
| 0.01 | 7.658E-03 | 8.250E-04 | **7.682E-03** | 7.626E-03 | 0.3% | 7.543E-03 | 7.684E-03 | **7.683E-03** | 0.3% |
| 0.02 | 9.572E-04 | 3.164E-04 | 9.769E-04 | **9.698E-04** | 1.3% | **9.639E-04** | 9.729E-04 | 9.728E-04 | 0.7% |
| 0.03 | 2.836E-04 | 1.533E-04 | 2.976E-04 | **2.955E-04** | 4.2% | **2.927E-04** | 2.943E-04 | 2.943E-04 | 3.2% |
| 0.04 | 1.197E-04 | 8.412E-05 | 1.303E-04 | **1.295E-04** | 8.2% | **1.273E-04** | 1.277E-04 | 1.277E-04 | 6.4% |
| 0.05 | 6.672E-05 | 5.074E-05 | 6.989E-05 | **6.945E-05** | 4.1% | **6.752E-05** | 6.774E-05 | 6.773E-05 | 1.2% |
| 0.06 | 3.861E-05 | 3.299E-05 | 4.267E-05 | **4.242E-05** | 9.9% | **4.073E-05** | 4.085E-05 | 4.084E-05 | 5.5% |
| 0.07 | 2.432E-05 | **2.279E-05** | 2.853E-05 | 2.837E-05 | 6.3% | **2.686E-05** | 2.695E-05 | 2.694E-05 | 10.5% |
| 0.08 | 1.629E-05 | **1.654E-05** | 2.039E-05 | 2.028E-05 | 1.5% | **1.893E-05** | 1.900E-05 | 1.899E-05 | 16.2% |
| 0.09 | 1.144E-05 | **1.249E-05** | 1.533E-05 | 1.526E-05 | 9.2% | **1.403E-05** | 1.409E-05 | 1.409E-05 | 22.7% |
| 0.1 | 8.340E-06 | **9.760E-06** | 1.200E-05 | 1.195E-05 | 17.0% | **1.083E-05** | 1.088E-05 | 1.088E-05 | 29.9% |
| 0.2 | 1.043E-06 | **2.298E-06** | 3.112E-06 | 3.106E-06 | 120.4% | **2.525E-06** | 2.546E-06 | 2.546E-06 | 142.2% |

T: Tam integrasyon
A: Azaltılmış integrasyon
S: Seçilerek azaltılmış integrasyon

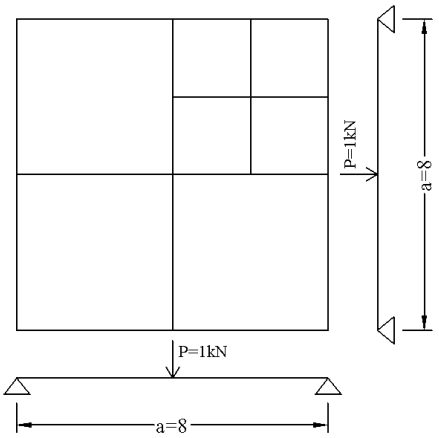



Şekil 6.27 Tekil yüklü ankastre kare plakta kilitlenmenin meydana gelişi

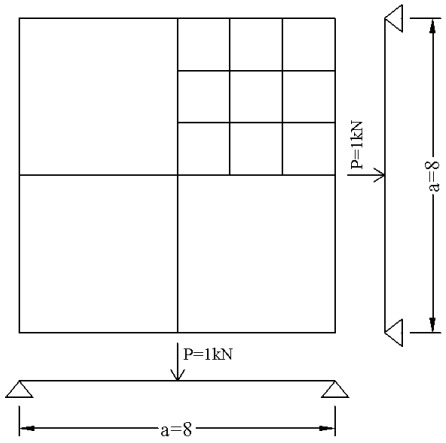



Şekil 6.28 Tekil yüklü ankastre kare plakta kilitlenmenin önlenmesi

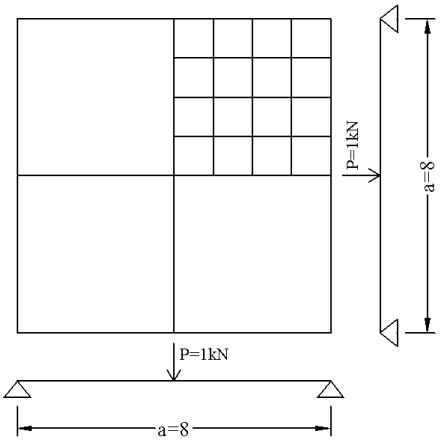
## 6.5 Örnek 4: Tekil yüklü basit mesnetli kare plak



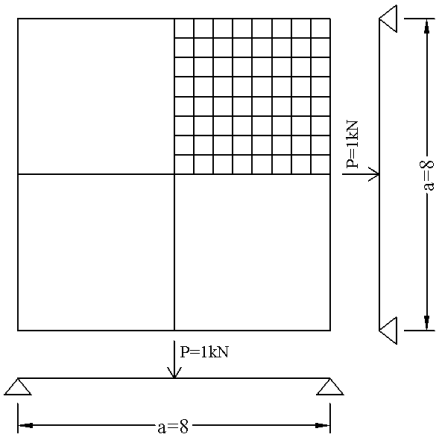

Şekil 6.29 Örnek-4 (2x2 ağ)




Şekil 6.30 Örnek-4 (3x3 ağ)




Şekil 6.31 Örnek-4 (4x4 ağ)

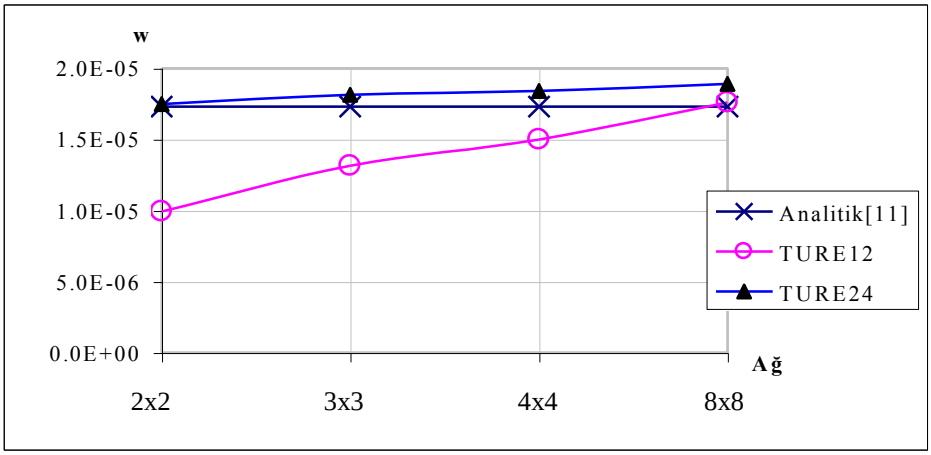



Şekil 6.32 Örnek-4 (8x8 ağ)

Bu örnekte basit mesnetli kare plak, tekil yük altında çözülmüş ve hem kalın sayılabilecek hem de ince plaklar, plak ortası çökmesi açısından yakınsama testine tabi tutulmuştur. Ayrıca kilitlenme olayı da incelenmiştir.

Tablo 6.15 Tekil yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

| | 2x2 | 3x3 | 4x4 | 8x8 |
|---|---|---|---|---|
| Analitik[11] | 1.73E-05 | | | |
| TURE12 | 9.92E-06 | 1.31E-05 | 1.50E-05 | 1.76E-05 |
| Hata(%) | -42.6% | -24.0% | -13.4% | 1.7% |
| TURE24 | 1.75E-05 | 1.81E-05 | 1.84E-05 | 1.89E-05 |
| Hata(%) | 1.0% | 4.8% | 6.4% | 9.3% |
| [11] | 1.89E-05 | 2.02E-05 | 2.09E-05 | |
| [13] | 2.01E-05 | | | |



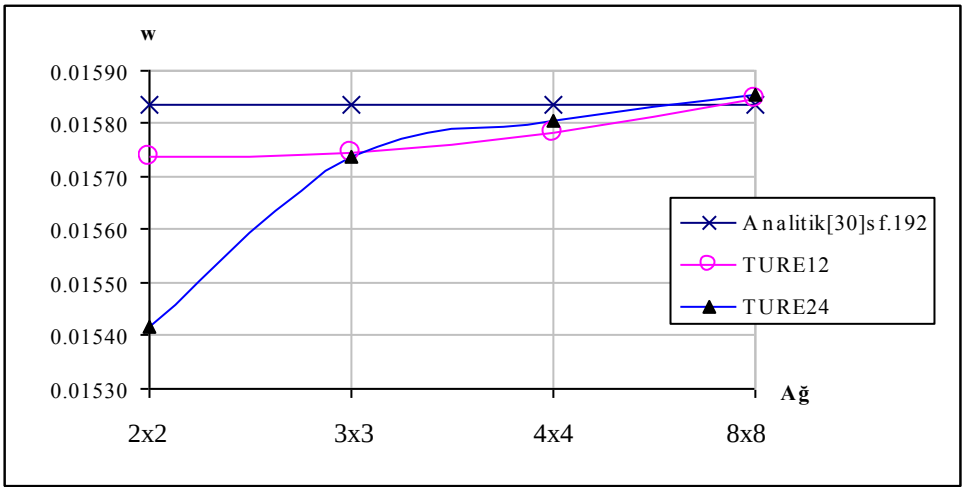

Şekil 6.33 Tekil yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

TURE24 elemanı, Örnek 3'de de gözlendiği gibi, analitik çözümden uzaklaşma eğilimi sergilemektedir (Bkz. Şekil 6.33 ve 6.34). Fakat burada hata yüzdeleri daha küçüktür.

Tekil yüklü plaklarda TURE24 elemanının kalın sayılabilecek uygulamada analitik çözümden uzaklaşması, yükleme durumunun bir özelliği olarak açıklanabilir.

Tablo 6.16 Tekil yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

| | **2x2** | **3x3** | **4x4** | **8x8** |
|---|---|---|---|---|
| Analitik[30]sf.192 | 1.58E-02 | | | |
| TURE12 | 1.57E-02 | 1.57E-02 | 1.58E-02 | 1.58E-02 |
| Hata(%) | -0.6% | -0.6% | -0.3% | 0.1% |
| TURE24 | 1.54E-02 | 1.57E-02 | 1.58E-02 | 1.59E-02 |
| Hata(%) | -2.6% | -0.6% | -0.2% | 0.1% |
| [30]sf.192 | 1.68E-02 | | 1.61E-02 | 1.59E-02 |
| [11] | 1.54E-02 | 1.63E-02 | 1.67E-02 | |
| [6] | 1.58E-02 | | 1.59E-02 | 1.58E-02 |

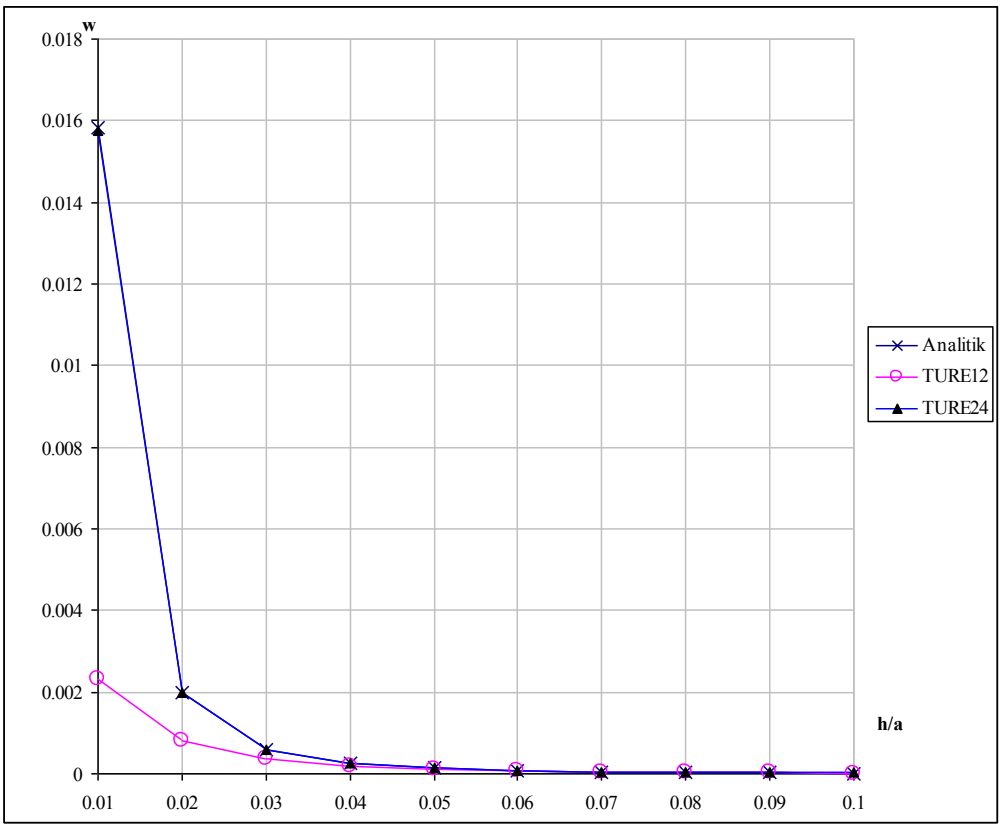



Şekil 6.34 Tekil yüklü basit mesnetli kare plakta h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

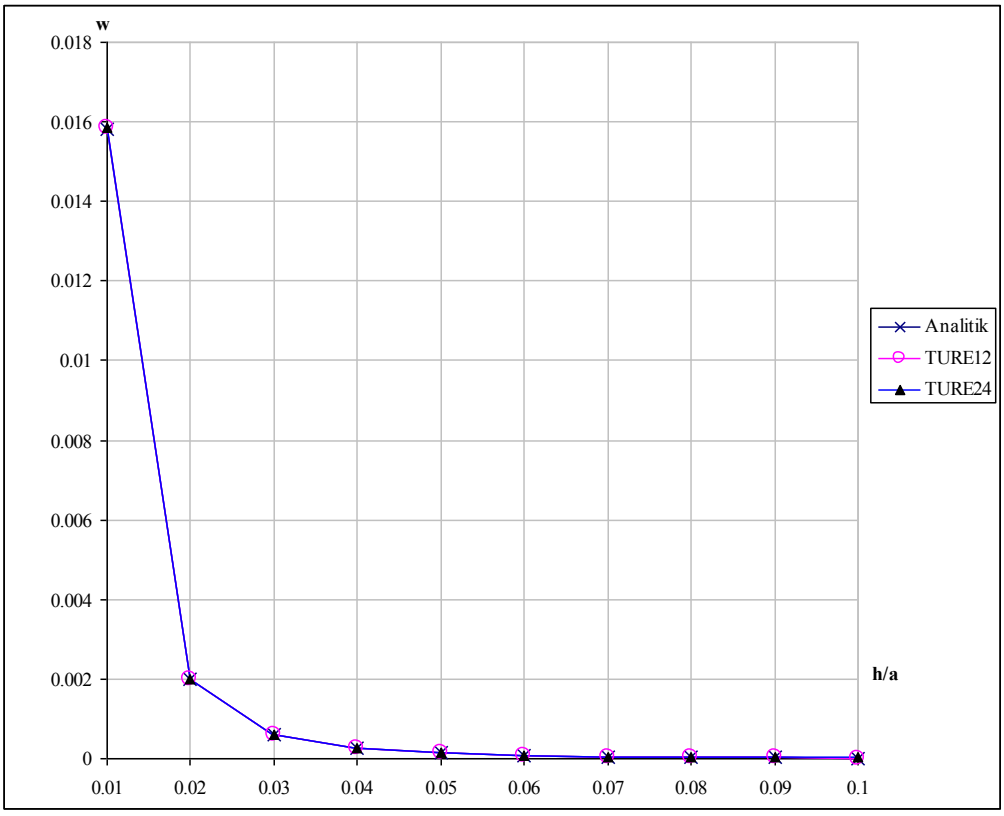
Tablo 6.17 Tekil yüklü basit mesnetli kare plakta plak ortası çökmesi kilitlenme testi

| | | TURE12 | | | | TURE24 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h/a | Analitik | T | A | S | Hata | T | A | S | Hata |
| 0.01 | 1.583E-02 | 2.306E-03 | 1.591E-02 | **1.585E-02** | 0.1% | 1.574E-02 | 1.586E-02 | **1.586E-02** | 0.1% |
| 0.02 | 1.979E-03 | 8.069E-04 | 2.005E-03 | **1.997E-03** | 0.9% | **1.986E-03** | 1.994E-03 | 1.994E-03 | 0.4% |
| 0.03 | 5.864E-04 | 3.606E-04 | 6.019E-04 | **5.995E-04** | 2.2% | **5.953E-04** | 5.966E-04 | 5.966E-04 | 1.5% |
| 0.04 | 2.474E-04 | 1.863E-04 | 2.586E-04 | **2.576E-04** | 4.1% | **2.547E-04** | 2.551E-04 | 2.551E-04 | 2.9% |
| 0.05 | 1.384E-04 | 1.073E-04 | **1.355E-04** | 1.350E-04 | 2.1% | 1.327E-04 | **1.329E-04** | 1.328E-04 | 4.0% |
| 0.06 | 8.007E-05 | 6.718E-05 | 8.056E-05 | **8.026E-05** | 0.2% | 7.836E-05 | **7.847E-05** | 7.847E-05 | 2.0% |
| 0.07 | 5.042E-05 | 4.488E-05 | 5.234E-05 | **5.216E-05** | 3.4% | **5.052E-05** | 5.060E-05 | 5.060E-05 | 0.2% |
| 0.08 | 3.378E-05 | **3.158E-05** | 3.631E-05 | 3.619E-05 | 6.5% | **3.475E-05** | 3.481E-05 | 3.481E-05 | 2.9% |
| 0.09 | 2.372E-05 | **2.317E-05** | 2.650E-05 | 2.641E-05 | 2.3% | **2.512E-05** | 2.518E-05 | 2.517E-05 | 5.9% |
| 0.1 | 1.729E-05 | **1.760E-05** | 2.012E-05 | 2.006E-05 | 1.7% | **1.890E-05** | 1.895E-05 | 1.894E-05 | 9.3% |
| 0.2 | 2.162E-06 | **3.289E-06** | 4.112E-06 | 4.104E-06 | 52.1% | **3.516E-06** | 3.537E-06 | 3.537E-06 | 62.7% |

T: Tam integrasyon
A: Azaltılmış integrasyon
S: Seçilerek azaltılmış integrasyon



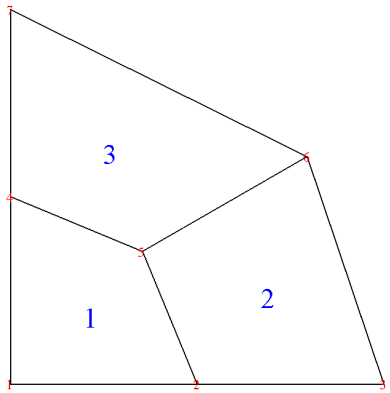

Şekil 6.35 Tekil yüklü basit mesnetli kare plakta kilitlenmenin meydana gelişi



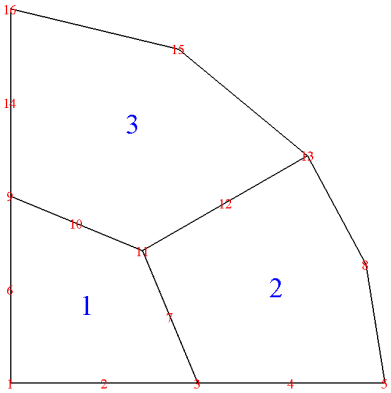

Şekil 6.36 Tekil yüklü basit mesnetli kare plakta kilitlenmenin önlenmesi

## 6.6 Örnek 5: Yayılı yüklü ankastre mesnetli daire plak

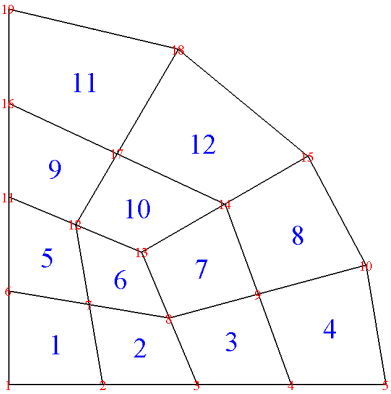
Dairesel plakların analizi için üç ayrı eleman adedi ile test yapılmıştır (Bkz. Şekil 6.37-6.42). İnce plaklarda merkez çökmesi ve açıklık momenti; kalın sayılabilecek plaklarda ise sadece çökme yakınsaması incelenmiştir.



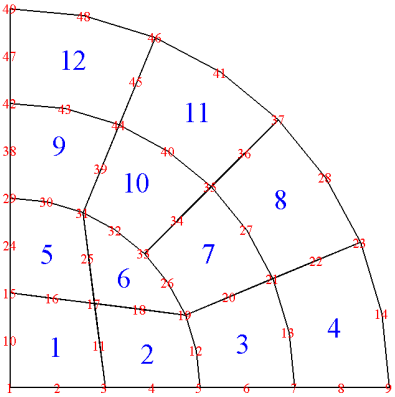

Şekil 6.37 Örnek 5, 3 adet TURE12 elemanıyla bölümlenmiş



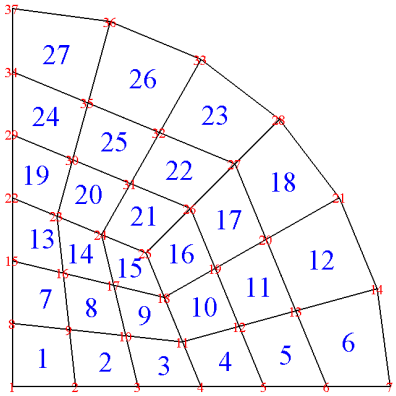

Şekil 6.40 Örnek 5, 3 adet TURE24 elemanıyla bölümlenmiş



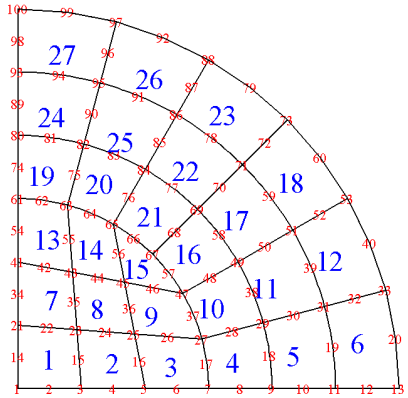

Şekil 6.38 Örnek 5, 12 adet TURE12 elemanıyla bölümlenmiş



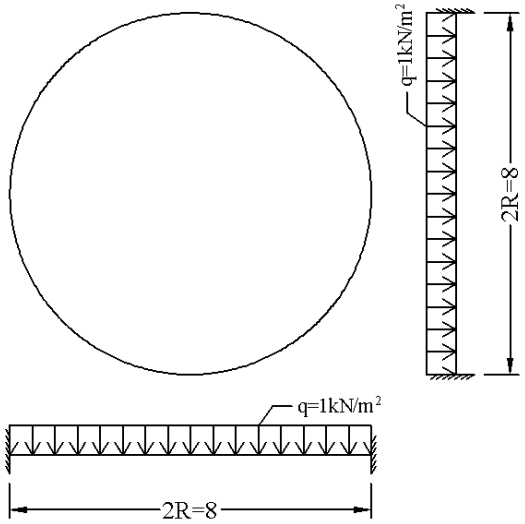

Şekil 6.41 Örnek 5, 12 adet TURE24 elemanıyla bölümlenmiş




Şekil 6.39 Örnek 5, 27 adet TURE12 elemanıyla bölümlenmiş



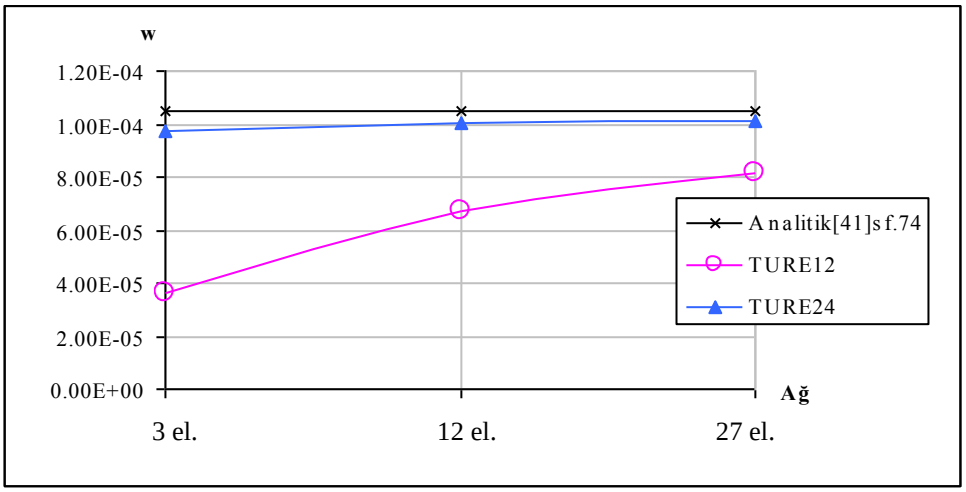

Şekil 6.42 Örnek 5, 27 adet TURE24 elemanıyla bölümlenmiş




Şekil 6.43 Örnek 5 için yükleme durumu ve mesnetlenme şekli

Tablo 6.18 Yayılı yüklü ankastre mesnetli daire plakta h/2R=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

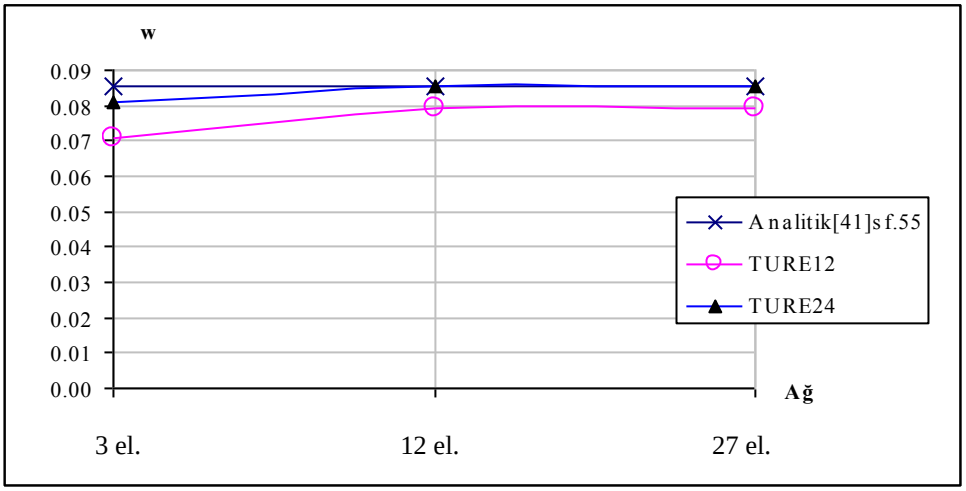
| | **3 eleman** | **12 eleman** | **27 eleman** |
|---|---|---|---|
| Analitik[41]sf.74 | 1.05E-04 | | |
| TURE12 | 3.59E-05 | 6.69E-05 | 8.12E-05 |
| Hata(%) | -65.7% | -36.2% | -22.5% |
| TURE24 | 9.74E-05 | 1.01E-04 | 1.01E-04 |
| Hata(%) | -7.1% | -3.9% | -3.8% |
| [17] | 7.77E-06 | 8.37E-06 | |




Şekil 6.44 Yayılı yüklü ankastre mesnetli daire plakta h/2R=0.1 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

Tablo 6.19 Yayılı yüklü ankastre mesnetli daire plakta h/2R=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

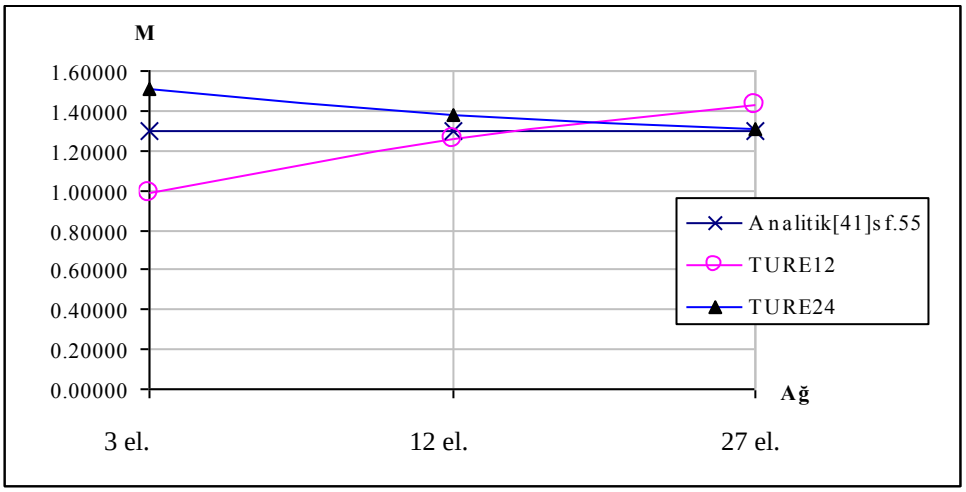
| | 3 eleman | 12 eleman | 27 eleman |
|---|---|---|---|
| Analitik[41]sf.55 | 0.08531 | | |
| TURE12 | 0.07102 | 0.07899 | 0.07903 |
| Hata(%) | -16.8% | -7.4% | -7.4% |
| TURE24 | 0.08109 | 0.08561 | 0.08546 |
| Hata(%) | -5.0% | 0.3% | 0.2% |
| [17] | 0.08277 | 0.08490 | |
| [38] | | 0.08600 | |
| Sap2000 | 0.10027 | 0.08790 | 0.08529 |



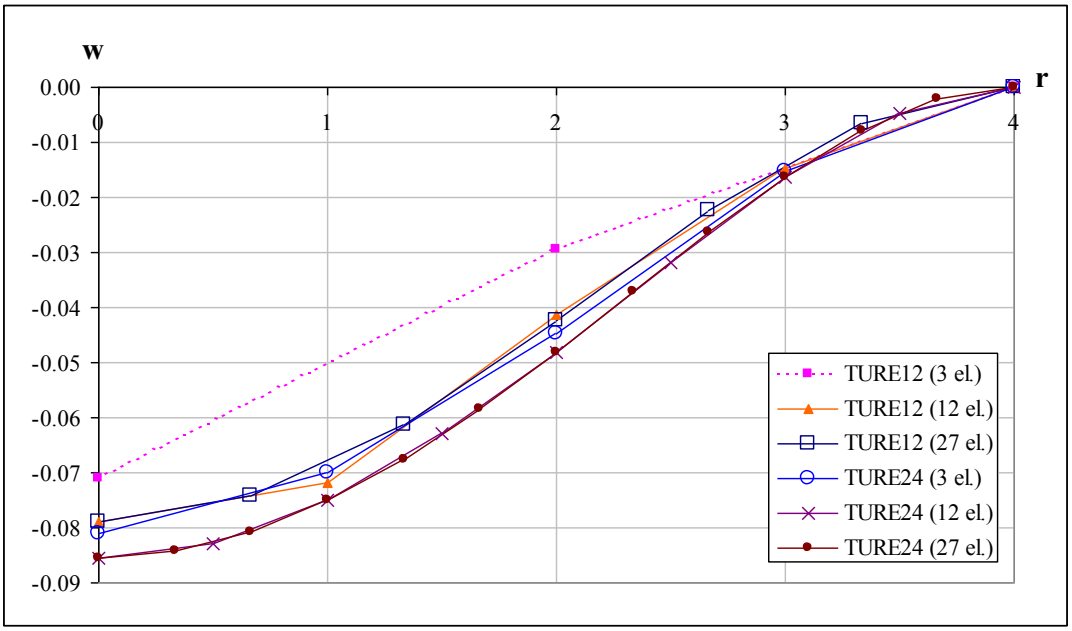

Şekil 6.45 Yayılı yüklü ankastre mesnetli daire plakta h/2R=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

Tablo 6.20 Yayılı yüklü ankastre mesnetli daire plakta h/2R=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi

| | 3 eleman | 12 eleman | 27 eleman |
|---|---|---|---|
| Analitik[41]sf.55 | 1.30000 | | |
| TURE12 | 0.98594 | 1.25388 | 1.42966 |
| Hata(%) | -24.2% | -3.5% | 10.0% |
| TURE24 | 1.51098 | 1.38059 | 1.31303 |
| Hata(%) | 16.2% | 6.2% | 1.0% |
| [17] | 1.39200 | 1.25440 | |
| Sap2000 | 2.25400 | 1.42570 | 1.32480 |




Şekil 6.46 Yayılı yüklü ankastre mesnetli daire plakta h/2R=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi

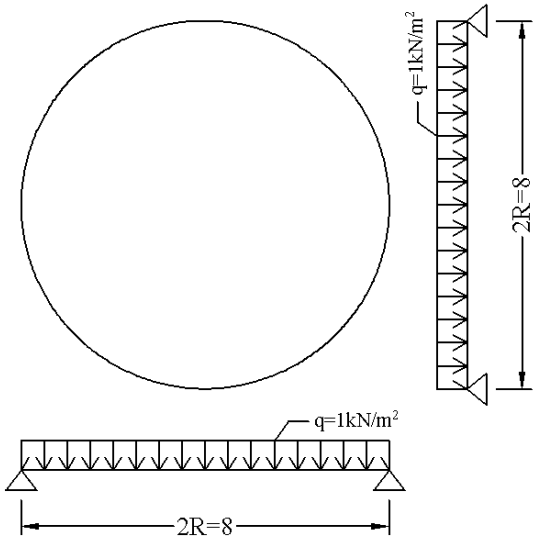



Şekil 6.47 h/2R=0.01 için çökmenin plak yarıçapı boyunca değişimi

Gerek çökme gerekse moment değerleri, kabul edilebilecek hata paylarıyla analitik çözüme yakındır ve literatürdeki çalışmalarla uyum içindedir.

## 6.7 Örnek 6: Yayılı yüklü basit mesnetli daire plak

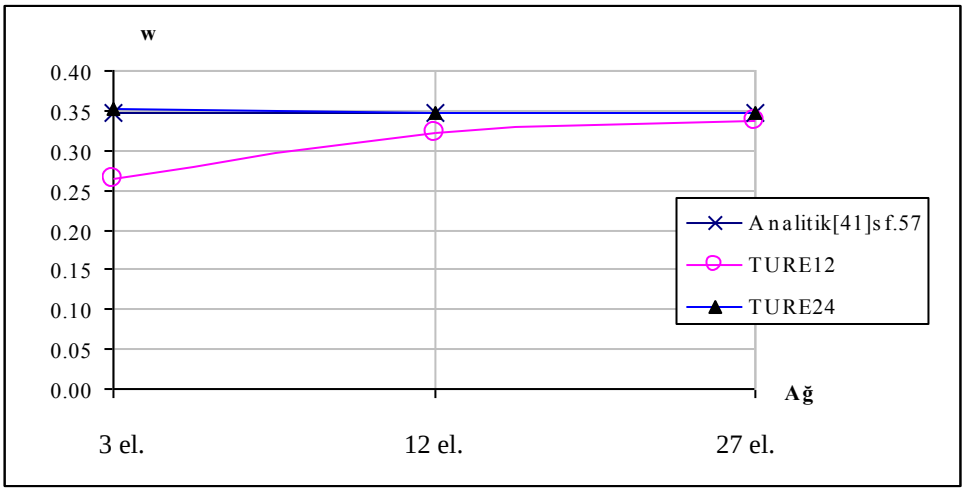
Örnek 5'de analizi yapılan sistem, basit mesnetli haliyle incelenmiştir (Bkz. Bölüm 6.6). Mesnetlenme şekli her iki yönde de dönmelerin serbest, çökmenin tutulu olduğu haldir.




Şekil 6.48 Örnek 6 için yükleme durumu ve mesnetlenme şekli

Tablo 6.21 Yayılı yüklü basit mesnetli daire plakta h/2R=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

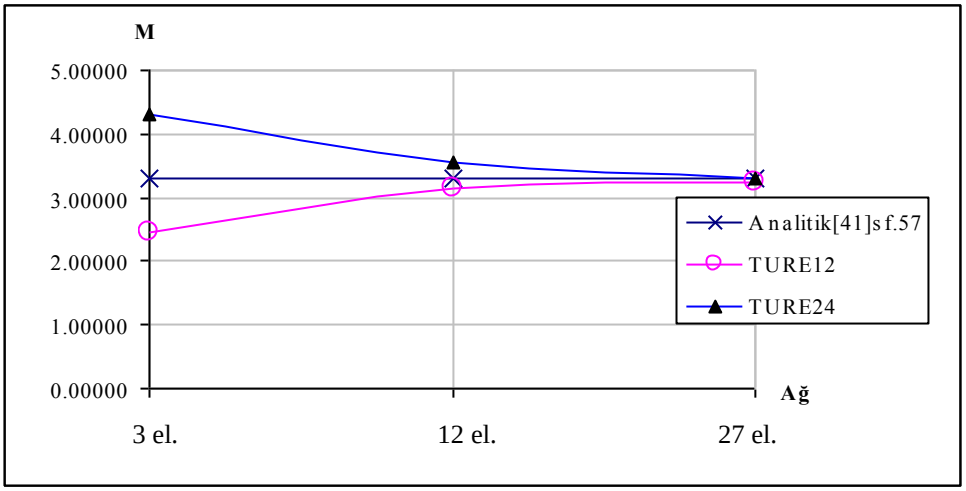
| | **3 eleman** | **12 eleman** | **27 eleman** |
|---|---|---|---|
| Analitik[41]sf.57 | | 0.34782 | |
| TURE12 | 0.26340 | 0.32324 | 0.33738 |
| Hata(%) | -24.3% | -7.1% | -3.0% |
| TURE24 | 0.35142 | 0.34798 | 0.34787 |
| Hata(%) | 1.0% | 0.05% | 0.01% |
| [38] | | 0.34430 | |
| Sap2000 | 0.27527 | 0.34493 | 0.34671 |




Şekil 6.49 Yayılı yüklü basit mesnetli daire plakta h/2R=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

Tablo 6.22 Yayılı yüklü basit mesnetli daire plakta h/2R=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi

| | 3 eleman | 12 eleman | 27 eleman |
|---|---|---|---|
| Analitik[41]sf.57 | 3.30000 | | |
| TURE12 | 2.44466 | 3.15621 | 3.24147 |
| Hata(%) | -25.9% | -4.4% | -1.8% |
| TURE24 | 4.29275 | 3.55370 | 3.30461 |
| Hata(%) | 30.1% | 7.7% | 0.1% |
| Sap2000 | 3.59000 | 3.38500 | 3.31700 |

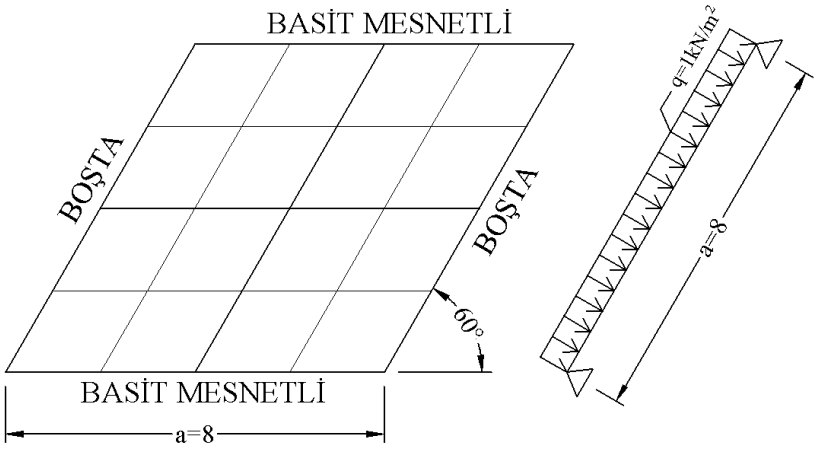



Şekil 6.50 Yayılı yüklü basit mesnetli daire plakta h/2R=0.01 için açıklık momenti yakınsama testi

Örnek 6'nın yakınsama karakteri Örnek 5'inkine benzemektedir. Her iki örnekte de TURE24 elemanı açıklık momentine üstten yaklaşmaktadır. Diğer yakınsamalar alttan gerçekleşmiştir.

## 6.8 Örnek 7: Yayılı yüklü, iki kenarı basit mesnetli verev plak

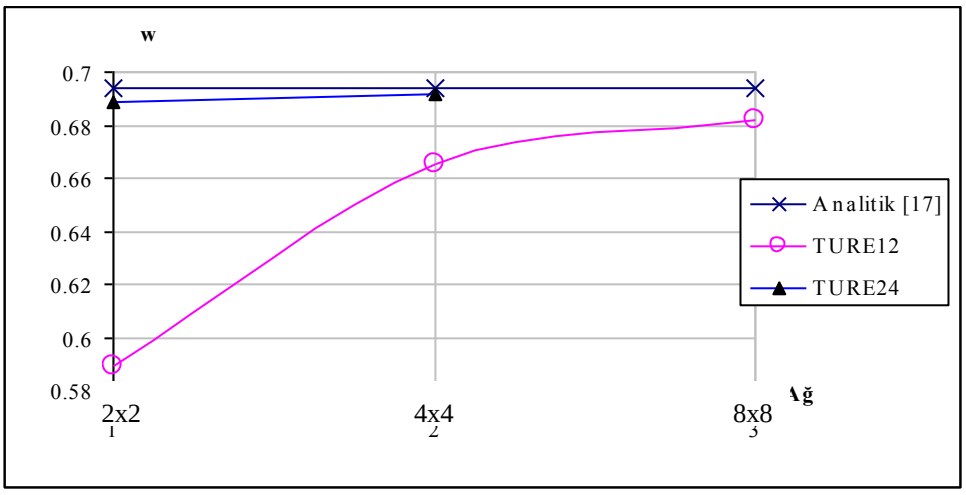
Literatürde Razzaque Verev Plağı olarak anılan; düz kenarları basit mesnetli, açılı kenarları serbest olan, düzgün yayılı yüke maruz verev plak incelenmiştir. Kenar açısı 60 derecedir. Her ne kadar, açılı-kenar ortası çökmeleri, plak ortası çökmesinden büyük olsa da (Bkz. [41]sf. 320), diğer kaynaklarda plak ortası çökmesi incelendiği için bu çalışmada da merkezi çökme ele alınmıştır. Moment için de aynı durum söz konusudur.




Şekil 6.51 Örnek 7 için yükleme durumu ve mesnetlenme şekli (2x2 ağ)

Tablo 6.23 Razzaque Verev Plağı'nda h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

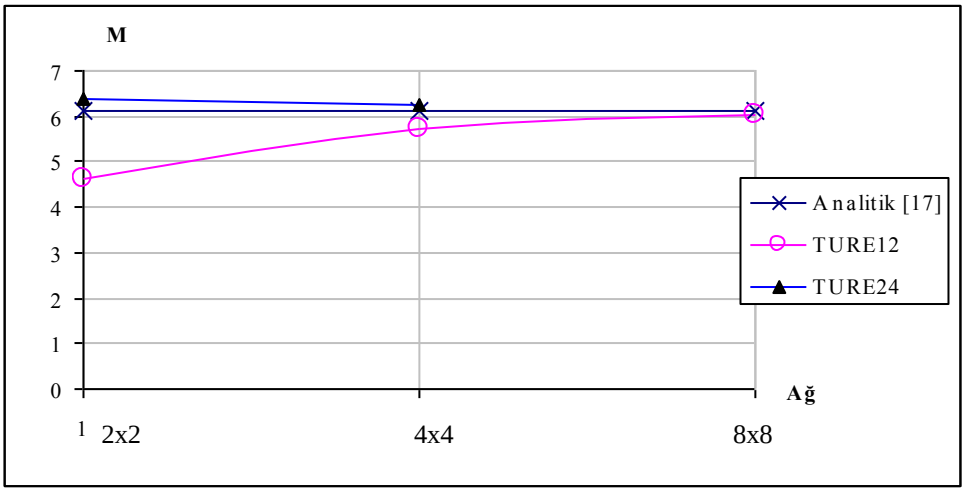
| | **2x2** | **4x4** | **8x8** |
|---|---|---|---|
| Analitik [17] | 0.6940752 | | |
| TURE12 | 0.58900 | 0.66520 | 0.68210 |
| Hata(%) | -15.1% | -4.2% | -1.7% |
| TURE24 | 0.68900 | 0.69200 | |
| Hata(%) | -0.7% | -0.3% | |
| [17] | 0.68713 | 0.69373 | |
| [38] | 0.58234 | 0.67189 | 0.68805 |
| Sap2000 | 0.67054 | 0.68618 | 0.68987 |




Şekil 6.52 Razzaque Verev Plağı'nda h/a=0.01 için plak ortası çökmesi yakınsama testi

Tablo 6.24 Razzaque Verev Plağı'nda h/a=0.01 için plak ortası My momenti yakınsama testi

| | 2x2 | 4x4 | 8x8 |
|---|---|---|---|
| Analitik [17] | 6.13696 | | |
| TURE12 | 4.62100 | 5.72500 | 6.03900 |
| Hata(%) | -24.7% | -6.7% | -1.6% |
| TURE24 | 6.37600 | 6.23200 | |
| Hata(%) | 3.9% | 1.5% | |
| [17] | 6.25970 | 6.19833 | |
| [38] | 5.91744 | 6.14400 | 6.15040 |
| Sap2000 | 6.13000 | 6.14000 | 6.14500 |




Şekil 6.53 Razzaque Verev Plağı'nda h/a=0.01 için plak ortası My momenti yakınsama testi

Görüldüğü gibi TURE24 elemanı 4x4, hatta 2x2 karelajda oldukça iyi bir yaklaşıklık sergilerken; TURE12 elemanı için yakınsaklığın yeterli olduğunu söyleyebilmek için 8x8'lık bir ağ kullanmak gerekli olmuştur. Her iki elemanın da hem çökme hem de iç kuvvet yakınsaması yeterli bulunmuştur.

# 7 SONUÇLAR

Bu çalışmada geliştirilen sonlu elemanların sayısal uygulamalarından elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Beklendiği gibi TURE24 elemanı, TURE12'den daha iyi sonuç vermektedir. Buna sebep olarak serbestlik derecesinin iki kat fazla olması gösterilebilir.

İç kuvvetlerin yakınsaması, eleman adedinin artımından –yer değiştirmelere nazaran– daha az etkilenmektedir. Örneğin ankastre mesnetli, yayılı yüke maruz kare plakta eleman ağı 2x2'den 3x3'e çıkarıldığında yer değiştirmelerdeki hata %5.3'den %0.8'e düşerken momentlerdeki hata %5.4'den %3.3'e düşmektedir (Bkz. Tablo 6.2 ve 6.4). Çünkü iç kuvvetlerin hesabında yer değiştirmelerin türevleri kullanılmaktadır.

Kayma kilitlenmesi olayının incelenmesi bakımından kare plaklar hem TURE12 hem de TURE24 ile h/a=0.01'den h/a=0.2'ye kadar değişen kalınlıklarda çözülmüştür. Ayrıca her çözüm "Tam integrasyon", "Azaltılmış integrasyon" ve "Seçilerek azaltılmış integrasyon" başlıkları altında 3 kez hesaplanmıştır. İntegral adımları Tablo 3.2'de açıklanmıştır. Genel olarak, TURE12 elemanında kayma kilitlenmesinin TURE24'e göre daha çabuk ortaya çıktığı gözlenmiştir. Hatta TURE24'ün, ince plaklarda sadece 2x2 eleman ağı için kayma kilitlenmesi gösterdiğini, diğerlerinde kilitlenme sergilemediğini söylemek mümkündür.

Sonuç olarak; bu çalışmada geliştirilen 12 ve 24 serbestlik dereceli izoparametrik elemanların, gerek kalın sayılabilecek plak uygulamalarında, gerekse ince plaklarda, mühendislik analizleri bakımından yeterli yaklaşıklıkta çözümler verdiği belirlenmiştir.

## KAYNAKLAR


[1] **Hrabok, M. M. and Hrudey, T. M.**, 1984. A review and catalogue of plate bending finite elements, *Computers and Structures*, **19,** 479-495.

[2] **Reissner, E.**, 1945. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **12**, 69-77.

[3] **Mindlin, R. D.,** 1951. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, **18**, 31-38.

[4] **Aksu, T.,** 1993. Genel biçimli kabuklar için bir sonlu eleman formülasyonu, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[5] **Özaydın, T.,** 2000. Kalın sayılabilecek plaklar için bir sonlu eleman formülasyonu, *Yüksek Lisans Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[6] **Kim, S. and Choi, C.,** 1992. Improvement of quadratic finite element for Mindlin plate bending, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **34**, 197-208.

[7] **Çelik, M.,** 1996. Plak sonlu elemanlarda kayma şekil değiştirmelerinin gözönüne alınması ve iki parametreli zemine oturan plakların hesabı için bir yöntem, *Doktora Tezi*, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

[8] **Prathap, G. and Viswanath, S.,** 1983. An optimally integrated four-node quadrilateral plate bending element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **19**, 831-840.

[9] **Liew, K. M., Wang, C. M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S.,** 1998. Vibration of Mindlin plates - *Programming the p-version Ritz method*, Elsevier, New York.

[10] **Spilker, R. L., Munir, N. I.,** 1980. A serendipity cubic-displacement hybrid-stress element for thin and moderately thick plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **15**, 1261-1278.

[11] **Yuan, F. and Miller, R. E.** "A rectangular finite element for moderately thick flat plates" Computers and Structures, 1988, Cilt 30, No. 4, 1375-1387

[12] **Yuqiu, L. and Fei, X.,** 1992. A universal method for including shear deformation in thin plate elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **34**, 171-177.

[13] **Bhashyam, G. R. and Gallagher, R. H.,** 1984. An approach to the inclusion of transverse shear deformation in finite element plate bending analysis, *Computers and Structures*, **19**, 35-40.

[14] **Hughes, T., Taylor, R. L. and Kanoknukulchai, W.,** 1977. A simple and efficient finite element for plate bending, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **11**, 1529-1543.

[15] **Bergan, P. G. and Wang, X.,** 1984. Quadrilateral plate bending elements with shear deformations, *Computers and Structures*, **19**, 25-34.

[16] **Bathe, K. and Dvorkin, E. N.,** 1985. Short Communication: A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and mixed interpolation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **21**, 367-383.

[17] **Hinton, E. and Huang, H. C.,** 1985. A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields, *Computers and Structures*, **23**, 409-431.

[18] **Sydenstricker, R. M. and Landau L.,** 2000. A study of some triangular discrete Reissner-Mindlin plate and shell elements, *Computers and Structures*, **78**, 21-33.

[19] **Liu, I., Kerh, T. and Lin, C.,** 1995. A conforming quadrilateral plate bending element with shear deformations, *Computers and Structures*, **56**, 93-100.

[20] **Roufaeil, O. L.,** 1992. New rectangular plate bending elements and their perfomance, *Computers and Structures*, **50**, 59-65.

[21] **Crisfield, M. A.,** 1984. A quadratic Mindlin element using shear constraints, *Computers and Structures*, **18**, 833-852.

[22] **Stasa, F. L**., 1985. Applied finite element analysis for engineers, Holt, Rinehart and Winston, New York.

[23] **Lim, S. P., Lee, K. H., Chow, S. T. and Senthilnathan, N. R.**, 1988. Linear and nonlinear bending of shear-deformable plates, *Computers and Structures*, **30**, 945-952.

[24] **Wittrick, W. H.**, 1987. Analytical, three-dimensional elasticity solutions to some plate problems and some observations on Mindlin's plate theory, *International Journal of Solids and Structures*, **23**, 441-464.

[25] **Kardestuncer, H.**, 1987. Finite element handbook, McGraw-Hill, New York.

[26] **Cowper, G. R**., 1966. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *Journal of Applied Mechanics*, **33**, 335-340.

[27] **Kurtay, T.**, 1980. Sonlu elemanlar yöntemine giriş : ders notu , İTÜ, İstanbul.

[28] **İnan, M**., 1996. Cisimlerin mukavemeti, İTÜ, İstanbul.

[29] **Sydenstricker, R. and Landau, L.**, 1998. Discrete Reissner-Mindlin plate and shell elements, in *Advances in finite element procedures and techniques*, pp. 63-71, ed. B.H.V. Topping , Civil-Comp, Edinburgh.

[30] **Zienkiewicz, O. C.,** 1971. The finite element method in engineering science, , London.

[31] **Zienkiewicz, O. C. and Taylor R. L**., 1989. The finite element method - Volume 1. Basic formulation and linear problems, McGraw-Hill, London.

[32] **Briassoulis, D.**, 1989. On the basics of the shear locking problem of $C^0$ isoparametric plate elements, *Computers and Structures*, **33**, 169-185.

[33] **Zienkiewicz, O. C., Taylor R. C. and Too, J. M.**, Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **3**, 275-290.

[34] **Pawsen, S. E. and Clough, R. W.**, Improved numerical integration of thick shell finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **3**, 575-586.

[35] **Zienkiewicz, O. C. and Taylor R. L**., 1991. The finite element method - Volume 2. Solid and fluid mechanics dynamics and non-linearity, McGraw-Hill, London.

[36] **Meek, J. L**., 1991. Computer methods in structural analysis, E & FN Spon, London.

[37] **James, M. L., Smith, G. M. and Wolford, J. C**., 1967. Applied numerical methods for digital computation with Fortran, International Textbook Co., Scranton.

[38] **Soh, A.-K.**, 2000. A new 12 dof quadrilateral element for analysis of thick and thin plates, *European Journal of Mechanics*, 20, 299-326.

[39] **Dong, Y. F., Wu, C. C. And Teixeira de Freitas, J. A.**, 1993. The hybrid stress model for Mindlin-Reissner plates based on a stress optimization condition, *Computers and Structures*, **46**, 877-897.

[40] **Owen, D. R. J. and Zienkiewicz O. C.**, 1982. A refined higher-order $C^o$ plate bending element, *Computers and Structures*, **15**, 177-183.

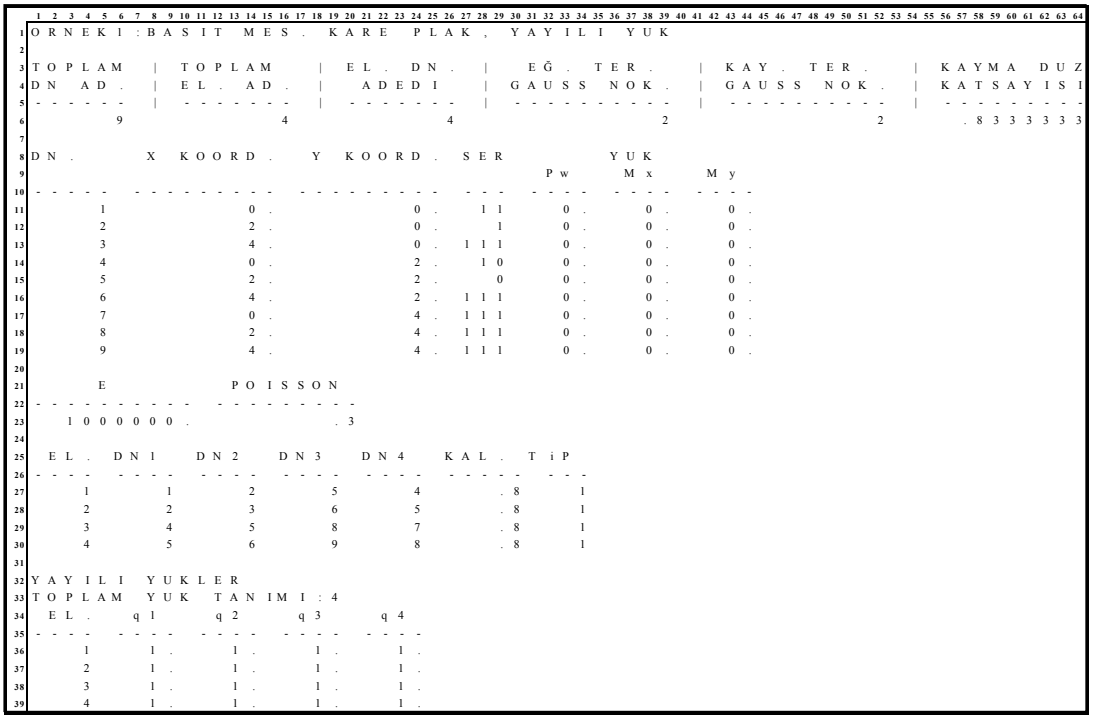
[41] **Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S.**, 1959. Theory of plates and shells, McGraw-Hill, Singapore.

[42] **Salerno, V. L. and Goldberg, M. A.**,1960. Effect of shear deformations on the bending of recangular plates, *Transactions of the ASME (Journal of Applied Mechanics)*, **27**, 54-58.

[43] **Jirousek, J., Wroblewski, A. and Szybinski B.**, 1995. A new 12 DOF quadrilateral element for analysis of thick and thin plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **38**, 2619-2638.

[44] **Levinson, M. and Cooke, D. W.**, 1983. Thick rectangular plates-I: The generalized Navier solution, *International Journal of Mechanical Sciences*, **25**, 199-205.

EK-1 Örnek veri dosyası (PLAK1.IN)



```
ORNEK1:BASIT MES. KARE PLAK, YAYILI YUK

TOPLAM | TOPLAM | EL. DN. | EĞ. TER. | KAY. TER. | KAYMA DUZ
DN AD. | EL. AD. | ADEDI | GAUSS NOK. | GAUSS NOK. | KATSAYISI
------ | -------- | -------- | ---------- | ---------- | ---------
     9 |        4 |        4 |          2 |          2 | .8333333

DN.      X KOORD.  Y KOORD.  SER        YUK
                                      Pw      Mx      My
------ ---------- ---------- --- ----- ----- -----
     1         0.         0.  11     0.      0.      0.
     2         2.         0.   1     0.      0.      0.
     3         4.         0. 111     0.      0.      0.
     4         0.         2.  10     0.      0.      0.
     5         2.         2.   0     0.      0.      0.
     6         4.         2. 111     0.      0.      0.
     7         0.         4. 111     0.      0.      0.
     8         2.         4. 111     0.      0.      0.
     9         4.         4. 111     0.      0.      0.

       E          POISSON
---------- ----------
 10000000.         .3

 EL. DN1  DN2  DN3  DN4  KAL. TiP
---- ---- ---- ---- ---- ---- ---
   1    1    2    5    4   .8   1
   2    2    3    6    5   .8   1
   3    4    5    8    7   .8   1
   4    5    6    9    8   .8   1

YAYILI YUKLER
TOPLAM YUK TANIMI:4
 EL.   q1   q2   q3   q4
---- ---- ---- ---- ----
   1   1.   1.   1.   1.
   2   1.   1.   1.   1.
   3   1.   1.   1.   1.
   4   1.   1.   1.   1.
```

İlk satırdaki sayılar sütun numaralarını, ilk sütundaki sayılar da satır numaralarını göstermektedir.

2, 3-5, 7-10, 20-22, 24-26, 31-35 numaralı satırlar değiştirilmemeli ve silinmemelidir. Verilerin girileceği sütunlar tire "-" ile belirtilmiştir. Sayılar bu sınırlar içine sağa dayalı olarak girilmelidir. 0 ila 1 arasındaki gerçel sayılar 0 ile başlamak zorunda değildir; direkt "." ile başlayabilir. Aynı şekilde ondalık basamaklarının hepsi sıfır olan gerçel sayılarda "." dan sonrası girilmek zorunda değildir. Tamsayılarda "." bulunmaz, gerçel sayılarda bulunmalıdır. Tamsayılarda boşluk karakteri sıfır yerine geçer.

Problem verileri sırasıyla açıklanacak olursa:

Satır 1: Problemin başlığı (programdaki karşılığı: BASLIK)

Satır 6: Sisteme ait veriler

Sütun 1-5 : Sistemdeki toplam düğüm noktası adedi (programdaki karşılığı: TDN)

Sütun 9-16 : Sistemdeki toplam eleman adedi (programdaki karşılığı: TEL)

Sütun 20-26 : Eleman tipini ifade eden, eleman düğüm noktası adedi; 4 veya 8 olabilir. (programdaki karşılığı: EDN)

Sütun 30-39 : Eğilme terimlerinin integrasyonunda kullanılacak Gauss nokta adedi; 1-4 arası değer alabilir (programdaki karşılığı: GEG)

Sütun 43-52 : Kayma terimlerinin integrasyonunda kullanılacak Gauss nokta adedi; 1-4 arası değer alabilir (programdaki karşılığı: GKA)

Sütun 56-64 : Kayma düzeltme katsayısı $\kappa^2$ ; 0. girilirse SABITLER.DAT 'dan alınır (programdaki karşılığı: K2)

Satır 11-19: Burada TDN adet satır olmalıdır. (örnekte 9 adet)

Sütun 1-5 : Düğüm noktasının numarası (programdaki karşılığı: DN)

Sütun 7-15 : Düğüm noktası koordinatının x bileşeni (programdaki karşılığı: XX dizisi)

Sütun 17-25 : Düğüm noktası koordinatının y bileşeni (programdaki karşılığı: YY dizisi)

Sütun 27-29 : Düğüm noktası serbestlikleri; 1. sayı w'nin, 2. sayı θx'in, 3. sayı θy'nin serbestliğini ifade eder. Bu serbestlikler tutulmuşsa 1, tutulmamışsa 0 (veya boşluk) girilmelidir. w, θx ve θy için bkz. Şekil 3.6. (programdaki karşılığı: TUT dizisi)

Sütun 31-34 : Düğüm noktasında etkiyen düşey tekil yük (Bkz. Şekil 3.10); sıfır ise boş geçilebilir. (programdaki karşılığı: YUKr dizisi)

Sütun 36-39 : Düğüm noktasında etkiyen Mx momenti (Bkz. Şekil 3.10); sıfır ise boş geçilebilir. (programdaki karşılığı: YUKr dizisi)

Sütun 41-44 : Düğüm noktasında etkiyen My momenti (Bkz. Şekil 3.10); sıfır ise boş geçilebilir. (programdaki karşılığı: YUKr dizisi)

Satır 23 : Buradaki değerler 0. girilirse SABITLER.DAT 'dan alınır.

Sütun 1-10 : Elastisite modülü (programdaki karşılığı: E)

Sütun 12-20 : Poisson oranı (programdaki karşılığı: PR)

Satır 27-30 : Burada TEL adet satır olmalıdır. (örnekte 4 adet)

Sütun 1-4 : Eleman numarası (programdaki karşılığı: ELNO)

Sütun 6-24 : Elemanın Şekil 3.6'daki sıraya göre birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü düğüm noktasının sistemdeki kaç numaralı noktaya karşı geldiği; bu örnek TURE12 elemanı için olup, TURE24 elemanında (Bkz. Şekil 3.7) burada 5,6,7 ve 8'inci noktaları temsilen 4 adet daha 5'li sütun grubu olmalıdır. (programdaki karşılığı: NOD dizisi)

Sütun 26-30 : Eleman kalınlıkları (programdaki karşılığı: TH dizisi)

Sütun 31-34 : Elemanın tip numarası; bu sayı 1'den başlar ve sırayla artarak en fazla TEL olabilir. Elemanın tipi; şekline ve kalınlığına bağlıdır. Dolayısıyla bu özelliklerinden en az biri farklı olan bir elemana farklı bir tip numarası verilmelidir. Kolaylık olması bakımından; bu değerin 0 girilmesi durumunda program bu elemana yeni bir tip numarası atayacaktır. Dolayısıyla bütün elemanların tipi de 0 girilebilir. Bu durumda her eleman için rijitlik matrisi hesaplanacağı için çözüm süresi biraz artacaktır. (programdaki karşılığı: ITIP dizisi)

Satır 33 (Sütun 19-21) : Yayılı tük taşıyan eleman sayısı; 0 ila TEL arası bir değer alabilir. 0 girilirse ya da boş bırakılırsa 36'dan sonraki satırlar okunmaz. (programdaki karşılığı: ITY)

Satır 36-39 : Buraya sadece üzerinde yayılı yük olan elemanlar girilir.

Sütun 1-4 : Eleman numarası (programdaki karşılığı: ELNO)

Sütun 6-24 : Eleman üzerindeki yayılı yükü tanımlayan yük ordinatları (Bkz. Şekil 3.11) (programdaki karşılığı: YUKq dizisi)

Ek-2 Örnek UMIT4.DAT dosyası

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | P | L | A | K | 1 |
| 2 | P | L | A | K | 2 |
| 3 | P | L | A | K | 3 |
| 4 | P | L | A | K | 4 |
| 5 | P | L | A | K | 5 |
| 6 | P | L | A | K | 6 |
| 7 | P | L | A | K | 7 |

İlk satırdaki sayılar sütun numaralarını, ilk sütundaki sayılar da satır numaralarını göstermektedir.

.IN uzantılarını yazmaya gerek yoktur (yazılabilir de).

## ÖZGEÇMİŞ

Ümit Türe 1977 yılında Ankara'da doğmuş, lise öğrenimini Adana Çukurova Elektrik Anadolu Meslek Lisesi Bilgisayar Donanım Bölümü'nde tamamlamıştır.

1999 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden mezun olduktan sonra aynı yıl İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Bölümü Yapı Mühendisliği Programında yüksek lisans öğrenimine başlamıştır.

Türe, halen Om Mühendislik Mümessillik Tic. Ltd. Şti.'nde proje geliştirme görevini sürdürmektedir.