İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOMOJEN OLMAYAN ELASTİK ZEMİNE OTURAN İNCE PLAKLARIN ZORLANMIŞ TİTREŞİMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. E. Mete ÖZTÜRK

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

AĞUSTOS 2002

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOMOJEN OLMAYAN ELASTİK ZEMİNE OTURAN İNCE PLAKLARIN ZORLANMIŞ TİTREŞİMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Emin Mete ÖZTÜRK
(Enstitü No: 501001198)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26 Temmuz 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 1 Ağustos 2002

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Hasan ENGİN

Diğer Jüri Üyeleri Prof. Dr. Yalçın AKÖZ

Prof. Dr. Turgut KOCATÜRK (Y.T.Ü.)

AĞUSTOS 2002

ÖNSÖZ

Tez çalışmam sırasında, derin bilgi ve tecrübesiyle bana her konuda yardımcı olan kıymetli hocam Prof. Dr. Hasan ENGİN ’e sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimim esnasında benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve İnşaat Mühendisi Mehmet TANRIKULU’na en içten dileklerimle teşekkür ederim.

AĞUSTOS 2002 Emin Mete ÖZTÜRK

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ
İÇİNDEKİLER **iii**
TABLO LİSTESİ **v**
ŞEKİL LİSTESİ **vi**
SEMBOL LİSTESİ **viii**
ÖZET **x**
SUMMARY **xi**

BÖLÜM 1.GİRİŞ **1**
1.1. Genel Bilgiler **1**
1.2. Konu ile İlgili Diğer Çalışmalar **3**
1.3. Çalışmanın Amaç ve Kapsamı **6**

BÖLÜM 2. TEMEL DENKLEMLER **8**
2.1. Yanal Yüklü Dairesel Plakların Simetrik Eğilmesine Ait Diferansiyel Denklem **8**
2.2. Üniform Yüklü Dairesel Plaklar **11**
2.2.1. Giriş 11
2.2.2. Kenarlarından Ankastre Dairesel Plak 12
2.2.3. Kenarlarından Basit Mesnetli Dairesel Plak 13
2.2.4. Merkezinde Dairesel Bir Delik Bulunan Dairesel Plak 15
2.2.5. Kosantrik Yüklü Dairesel Plak 17
2.3. Merkezinden Yüklü Dairesel Plaklar **19**

BÖLÜM 3. ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL PLAKLAR **21**

3.1 Elastik Zemine Oturan Dairesel Plak Denkleminin Çözümü **21**
3.1.1. Giriş 21
3.1.2. Kelvin Fonksiyonları 23
3.1.2.1. Tanım ve Özellikler 23

3.1.2.2. Bağıntılar 24
3.2. Problemin Çözümü 25
3.2.1. Zeminin Homojen Olması Hali 25
3.2.2. Zeminin Homojen Olmaması Hali 28

BÖLÜM 4. ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL PLAKLARIN ZORLANMIŞ TİTREŞİMLERİ 32
4.1. Zeminin Homojen Olması Hali 32
4.1.1. $(1-(\Omega/\omega)^2)>0$ olması hali 33
4.1.2. $(1-(\Omega/\omega)^2)<0$ olması hali 35
4.2. Zeminin Homojen Olmaması Hali 36
4.2.1. k1 / k2 > 1 olması hali 37
4.2.2. k1 / k2 < 1 olması hali 39

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA 41
5.1. Statik Yükleme Hali 41
5.1.1. Zeminin Homojen Olması Durumu 41
5.1.2. Zeminin Homojen Olmaması Durumu 42
5.2. Harmonik Yükleme Hali 45
5.2.1. Zeminin Homojen Olması Durumu 45
5.2.2. Zeminin Homojen Olmaması Durumu 46
5.2.2.1. k1 / k2 = 0,5 olması hali 46
5.2.2.2. k1 / k2 = 2 olması hali 48
5.2.2.3. k1 / k2 = 4 olması hali 49
5.2.2.4. k1 / k2 = 8 olması hali 50
5.3. Sonuçlar 54

KAYNAKLAR 55

ÖZGEÇMİŞ 57

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1. Kelvin Fonksiyonları 24

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1 Yanal yüklü dairesel plağa ait elastik eğri 8

Şekil 2.2 Dairesel bir plağa ait iç kuvvetler 9

Şekil 2.3 Merkezinde dairesel bir delik bulunan dairesel plak 15

Şekil 2.4 Merkezinde dairesel bir delik bulunan dairesel plağın iç kenarı boyunca üniform olarak yayılmış kesme kuvvetleri etkisiyle eğilmesi 16

Şekil 2.5 Kosantrik yüklü dairesel plak 17

Şekil 2.6 Kosantrik yüklü, ankastre mesnetli dairesel plak 18

Şekil 2.7 Merkezinden tekil yüklü ankastre mesnetli dairesel plak 19

Şekil 3.1 Merkezinden tekil yüklü dairesel plak 25

Şekil 3.2 Homojen olmayan elastik zemine oturan merkezinden tekil yüklü dairesel plak 28

Şekil 4.1 Ortasından tekil kuvvetle zorlanan plak 32

Şekil 4.2 Ortasından tekil yükle zorlanan ve homojen olmayan elastik zemine oturan dairesel plak 36

Şekil 5.1 Merkezinden tekil yüklü dairesel plak 41

Şekil 5.2 Homojen elastik zemine oturan merkezinden tekil yüklü dairesel plağın yarıçap boyunca çökme eğrisi 42

Şekil 5.3 Homojen olmayan elastik zemine serbest oturan merkezinden tekil yüklü dairesel plak 42

Şekil 5.4 Homojen olmayan ($k_1 = 2k_2$) elastik zemine oturan merkezinden tekil yüklü dairesel plağın yarıçap boyunca çökme eğrisi 43

Şekil 5.5 Homojen olmayan ($k_1 = 2k_2$) elastik zemine oturan merkezinden tekil yüklü dairesel plağın yarıçap boyunca kesme kuvveti değişim eğrisi 44

Şekil 5.6 Homojen olmayan ($k_1 = 2k_2$) elastik zemine oturan merkezinden tekil yüklü dairesel plağın yarıçap boyunca eğilme momenti değişim eğrisi 44

Şekil 5.7 Homojen elastik zemine serbest oturan merkezinden harmonik yüklü plak 45

Şekil 5.8 Homojen zemine oturan dairesel plağın düşey genlik değişimi 46

Şekil 5.9 Homojen olmayan elastik zemine serbest oturan merkezinden harmonik yüklü plak 46

Şekil 5.10 Homojen olmayan ($k_1 = 0{,}5k_2$) zemine oturan dairesel plağın düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi 47

Şekil 5.11 Homojen olmayan ($k_1 = 2k_2$) zemine oturan dairesel plağın düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi 49

Şekil 5.12 Homojen olmayan ($k_1 = 4k_2$) zemine oturan dairesel plağın düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi 50

Şekil 5.13 Homojen olmayan ($k_1 = 8k_2$) zemine oturan dairesel plağın düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi 51

Şekil 5.14 Homojen olmayan zemine oturan dairesel plağın ($\Omega / \omega_1 = 0{,}25$) değerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi 52

Şekil 5.15 Homojen olmayan zemine oturan dairesel plağın ($\Omega / \omega_1 = 0{,}75$) değerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi 52

Şekil 5.16 Homojen olmayan zemine oturan dairesel plağın ($\Omega / \omega_1 = 1{,}50$) değerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi 53

SEMBOL LİSTESİ

k	: Zemin Yatak katsayısı
w	: Düşey deplasman
P	: Plağa etkiyen dış yük
∇^2	: Laplace operatörü
T	: Mambran kuvveti
D	: Plak eğilme rijitliği
E	: Elastisite modülü
h	: Plak kalınlığı
v	: Poisson oranı
M_r, M_t	: Birim uzunluğa etki eden eğilme momentleri
φ	: Eğim
r	: Plak yarıçapı
Q	: Kesme kuvveti
q	: Yayılı yük
$C_1 \ldots C_2$	: İntegral sabitleri
σ	: Gerilme
l	: Plakta boyutsuz uzunluk
$B_1 \ldots B_4$	: Sabit katsayılar
J_0 , K_0	: 1. ve 2. tip Bessel fonksiyonları
ber,bei	: Kelvin fonksiyonları
ker,kei	: Kelvin fonksiyonları
Γ	: Gamma fonksiyonu
$A_1 \ldots A_4$	: Sabit katsayılar
$D_1 \ldots D_4$	: Sabit katsayılar
P_0	: Zorlama genliği
Ω	: Zorlama frekansı
ω	: Fiktif frekans
W	: Yer değiştirme genliği

$E_1...E_4$: Sabit katsayılar

$F_1...F_4$: Sabit katsayılar

$G_1...G_4$: Sabit katsayılar

$H_1...H_4$: Sabit katsayılar

$M_1...M_4$: Sabit katsayılar

$P_1...P_4$: Sabit katsayılar

ÖZET

HOMOJEN OLMAYAN ELASTİK ZEMİNE OTURAN İNCE PLAKLARIN ZORLANMIŞ TİTREŞİMLERİ

Bu çalışmada, homojen olmayan elastik zeminlere oturan ince dairesel plakların zorlanmış titreşimleri incelenmiştir. Temel dairesel plak denklemleri ele alındıktan sonra, çeşitli yükleme ve mesnet durumları için plak davranışları araştırılmıştır. Daha sonra elastik zeminlere oturan dairesel plakların genel çözümüne geçilmiştir. Elastik zemine oturan yapı problemlerinin formülasyonunda, çoğu zaman yapılan yaklaşım plak, kabuk ve kirişlerin diferansiyel denklemine zemin tepkisinin ilave edilmesi yönündedir. Elastik zemine oturan kiriş ve plak problemlerinin matematiksel bağıntılarla belirlenmesi esnasında, zeminin oldukça karmaşık ve belirsiz elastik ve plastik deformasyon yapabilme özelliğinden dolayı bazı idealleştirmeler gerekir. Bu da matematiksel çözümlerin geçerliliğini daima kısıtlar. Bu yüzden bu tür problemlerde, zeminin elastikliği çeşitli kabuller yapılarak göz önüne alınır. Zeminin fiziksel ve mekanik özelliklerini değişik araştırmacılar, değişik şekillerde modellemişlerdir.

Bu çalışmada, plak karakteristik özellikleri ve zemin yatak katsayısının değişken değerleri göz önünde bulundurularak, ince dairesel plakların çökme, dönme ve kesit tesirleri elde edilmeye çalışılmıştır. Plağın tekil yük altındaki davranışına zeminin etkisi çeşitli sayısal örneklerle gösterilmiştir. Bu çözümler aranırken, zeminin homojen olduğu ve homojen olmadığı durumlardaki sınır şartlarından faydalanarak çökme denklemi bünyesindeki sabit katsayılar elde edilmiş ve problemin ilk aşaması çözülmüştür. İkinci aşama olarak, zeminin homojen olduğu ve homojen olmadığı durumlar için elastik zemine oturan dairesel plağın harmonik yükleme altında çözümü yapılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar, grafikler üzerinde gösterilerek karşılaştırmalar yapılmıştır.

SUMMARY

FORCED VIBRATIONS OF THIN PLATES ON NON HOMOGENEOUS ELASTIC FOUNDATION

In this thesis, the forced vibrations of thin circular plates on non homogeneous elastic foundations have been studied. After the basic circular plate equations, the behaviour of the plates for various support and loading types have been investigated. Then, the general solution of the circular plates resting on elastic foundations have been explained. The mostly used approximation ın the formulation of problems about the structures on elastic foundation is adding the foundation reaction to the differential equation of the beams, plates and the shells. While determining the mathematical relations of the problems, involving plates on elastic foundation, it is a necessity to make some idealizations because of the complicated behaviour of the foundation. This idealizations limit the validity of the mathematical solutions. So, while solving this kind of problems, the elasticity of the foundation was taken up with some assumptions. Various researchers have studied on different models about the physical and mechanical properities of the elastic foundations.

In this thesis the translations, rotations and the reactions of thin circular plates for various values of the foundation modulus and plate characteristics have been investigated. The effect of the foundation on the plate's behaviour which is exposed to axial load has been explained with various numerical examples. At the phase of searching the solutions, the constant coefficients at the plate translation equation have been obtained by applying the boundary conditions in each situation of the homogeneous and non homogeneous foundation. At the second phase, the solution for the circular plates exposed to harmonical loads has been investigated in both homogeneous and non homogeneous foundation cases. The numerical results have been shown on graphics with comparisons

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Genel Bilgiler

Elastik zemine oturan yapılar ile ilgili çalışmalar, bu konunun uygulama alanının genişliği dolayısıyla oldukça fazladır. Elastik zemine oturan yapılar incelenirken, yapının davranışına, zeminin etkisinin önemi dikkate alınmalıdır. Yapının bünye bağıntılarının yanısıra, zeminin de bünye bağıntılarını ve aralarındaki etkileşimi bilmek gerekir. Elastik zemine oturan yapı problemlerinin formülasyonunda, çoğu zaman yapılan yaklaşım plak, kabuk ve kirişlerin diferansiyel denklemine zemin tepkisinin ilave edilmesi yönündedir. Elastik zemine oturan kiriş ve plak problemlerinin matematiksel bağıntılarla belirlenmesi esnasında, zeminin oldukça karmaşık ve belirsiz elastik ve plastik deformasyon yapabilme özelliğinden dolayı bazı idealleştirmeler gerekir. Bu da matematiksel çözümlerin geçerliliğini daima kısıtlar. Bu yüzden bu tür problemlerde, zeminin elastikliği çeşitli kabuller yapılarak göz önüne alınır. Zeminin fiziksel ve mekanik özelliklerini değişik araştırmacılar, değişik şekillerde modellemişlerdir.

Zeminlerin elastik davranışı ile ilgili ilk önemli çalışma Winkler [1] tarafından yapılmıştır. Winkler anılan çalışmasında, zeminin birbirine sonsuz yakın, elastik ve lineer yaylardan oluştuğunu kabul etmiştir. Bu hipotez oldukça basit olup, kiriş ve plak problemlerinde geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Buna göre $\omega(x,y)$ düşey doğrultudaki çökme olarak alınırsa, zemin tepkisi

$$p(x,y) = kw(x,y) \tag{1.1}$$

olarak alınır. Burada k, elastik yay katsayısı olup, uygulamada "yatak katsayısı" veya zemin parametresi olarak adlandırılır. Bu parametre, düşey yerdeğiştirme bir birim olduğunda, birim genişlikteki birim alana gelen tepki kuvvetini ifade eder. Winkler hipotezine göre, zeminin homojen olmamasından dolayı, yatak katsayısı noktadan noktaya değişebilir. Bu nedenle yatak katsayısı bir yatay düzlemin çeşitli

noktalarında, birbirinden farklı değerler alabileceği gibi, derinliğin artması ile de değişebilir. Diğer bir husus da, zemine etkiyen kuvvetlerin yalnız etkidiği noktada şekil değiştirme oluşturmasıdır. Yani bu durumda zemini oluşturduğu kabul edilen sonsuz yakın yayların, yalnız doğrudan yüklendiklerinde çöküp tepki gösterdikleri, ancak her yayın komşu yayların yüklenme ve çökmesinden etkilenmediği öngörülmektedir. Yani, zemin tamamen süreksiz bir ortam olarak değerlendirilmektedir.

Mühendislikte, Winkler hipotezi, bina döşemeleri ve köprü tabliyelerinin karakteristik konstrüksiyonu olan ızgara sistemlerin çözümünde, bir ve iki doğrultuda sürekli temellerinin, gemi kaburgalarının, dönel kabukların, su tankları ve betonarme silo temellerinin ve yatay yük etkisinde düşey kazıklar ve palplanşların hesabında kullanılmaktadır.

Winkler zemin modelinde, zemini karakterize eden tek bir k parametresi vardır. Bazı araştırmacılar ise, zemini gerçeğe daha yakın modelleyebilmek için, kayma gerilmelerini de içeren iki parametreli modeller geliştirmişlerdir[2]. Bunlardan bazıları şunlardır.

1. Filonenko-Borodich
2. Heteyni
3. Pasternak
4. Vlasov

Filonenko-Borodich modelinde, Winkler yaylarının yüzeyinin elastik bir zar gibi olduğu göz önüne alınmıştır. Bu modelde, sisteme yükleme yapıldığında yüzeyde gerilme meydana gelmektedir. Bu durumda, zemin tepkisi aşağıdaki gibidir.

$$p(x,y) = kw(x,y) - T\nabla^2 w(x,y) \tag{1.2}$$

Burada T, mambran kuvveti ve,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.3}$$

kartezyen koordinatlarda, Laplace operatörüdür.

Heteyni modelinde ise, Winkler yaylarının üzerinde iki boyutlu problemler için bir plak ve tek boyutlu problemler için bir kiriş olduğu kabul edilir. Bu modelde zemin tepkisi şu şekildedir.

$$p(x,y) = kw(x,y) + D\nabla^2\nabla^2 w(x,y) \tag{1.4}$$

Burada D plağın eğilme rijitliğidir ve,

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \tag{1.5}$$

olarak ifade edilir. Bu ifadede,

E= Elastisite modülü

h= Plak kalınlığı

ν = Poisson oranı ‘ dır.

Pasternak modelinde ise, yay elemanları üzerinde sadece düşey deplasman yapabilen ve sıkışmayan elemanlardan oluşan bir kayma tabakası göz önüne alınmıştır. Kayma tabakası, (x,y) düzleminde izotropik olarak kabul edilmiştir.

Vlasov modelinde diğer zeminlerden farklı olarak, elastik zemin parametrelerinin hesabı için yaklaşım metodu temel alınmış ve virtüel iş prensibi kullanılmıştır.

1.2. Konu İle İlgili Diğer Çalışmalar

Winkler tarafından geliştirilen, birçok etkene ve özellikle zeminin elastik karakteristikleri ile yüklü alanın boyutlarına bağlı olan yatak katsayısının ne alınacağı konusunda birçok araştırma yapılmıştır. Zimmerman [3], yatak katsayısını, bütün uzunlukları boyunca balast üzerine oturan demiryolu traversleri hesabında kullanarak, kendi özel uygulamalarında belirli türdeki zeminler için bulduğu ve kullandığı k değerlerini vermiştir.

Mühendislik problemlerinin çözümü için gerekli olan k yatak katsayılarının sayısal değeri, yayınlanmış gözlemlere dayanılarak yaklaşık benzeşimle veya yapının inşa edileceği zeminde yapılacak arazi deneyleri sonuçlarından elde edilebilir. Daha sonra yapılan araştırmalarda, bir noktadaki çökmenin belirlenmesinde bütün noktalardaki yüklerin etkisi göz önüne alınmıştır. Bu durumda çökme bilinmeyen taban basıncına

bağlı olarak bir entegral formunda belirtilmektedir. Entegral ifadesinin çekirdek fonksiyonu, elastik ortam olarak varsayılan zemin modellemesine göre değişmektedir.

Winkler zemin tipi üzerinde, 1946 'da Heteyni [4] çalışmıştır. Heteyni, daha çok kesin çözümlerle ilgilenmiştir. Kesin çözümler büyük bir zaman kaybına sebep olduğu için, birçok araştırmacı bu zaman kaybından kurtulmak amacıyla daha hızlı ve genel olan çeşitli metotları geliştirerek problemleri çözmeye çalışmışlardır.

Dodge [5] de elastik zemin üzerine oturan yarı sonsuz ve sonlu uzunlukta kirişlerin davranışı ile ilgili tesir fonksiyonları ve buna ait eğriler hazırlamıştır.

Donalt [6] ise elastik zemine oturan kirişlerin, orta noktadan tekil yük ve eğilme momenti etkimesi durumundaki davranışlarını incelemiştir.

Miranda ve Nair [7], sonlu uzunluktaki elastik zemin üzerine oturan kirişlerin diferansiyel denkleminin özel fonksiyonlarla çözümünü yapmış ve bununla ilgili sayısal örnekler vermişlerdir.

Durelli ve Parks [8] tarafından elastik zemin üzerine oturan sonlu ve sonsuz uzunlukta olan kirişlerin fotoelastik çalışması yapılmıştır. Bu kirişler bir ve iki noktadan yüklenerek, davranışları incelenmiş ve bulunan sonuçlar teorik çözümlerle karşılaştırılmıştır.

Elastik çözümlerin yanısıra plastik çözümler de yapılmıştır. Severn [9], hem zemini, hem de kirişi plastik, zemini plastik, kirişi elastik veya tam tersini alarak çalışmalar yapmıştır.

Munther [10] de sonlu ve sonsuz uzunluktaki kirişlerin davranışlarını sonlu elemanlar yöntemi ile incelemiş ve bulunan sonuçları fotoelastik çalışmadan sonra elde edilen sonuçlarla birlikte çizilen eğriler üzerinde vermiştir.

Weitsman [11], yalnız basınca çalışan Winkler ve Reissner zemin modelini kullanarak yaptığı çalışmada, tekil ve yayılı yüklerle yüklü kiriş ve plaklarda ayrılma noktası, sürekli temas ve süreksiz temas durumlarını incelemiştir. Ayrıca tekil yükün yukarı doğru olması durumu için de çözüm yapmıştır.

Ting [12], Winkler zemini üzerindeki elastik mesnetli sonlu kirişin diferansiyel denkleminin bir çözümünü ortaya koymuştur. Bu çözüm farklı sınır şartlarına sahip elastik temeller üzerindeki kirişlere benzetilerek kullanılabilir.

Özgen [13] ise çalışmasında, elastik zemine oturan sonsuz uzun plastik kirişi rijit ve tam plastik alarak, etkiyen düşey yükün limit değerini araştırmıştır.

Zhaohua ve Cook [14], araştırmalarında sonlu elemanların iki çeşidini bir veya iki parametreli kirişleri analiz edebilmek için formüle etmişlerdir. Modeller, Winkler, Filonenko-Borodich, Pasternak ve Vlasov zeminlerini içermektedir. İki elemandan biri mutlak yerdeğiştirme fonksiyonuna, diğeri kübik yerdeğiştirme fonksiyonuna dayanmaktadır. Sonuçlar mutlak yerdeğiştirme fonksiyonuna dayanan elemanların mutlak nümerik sonuçlar verdiğini göstermiştir.

Katsikadelis ve Armenakas [15], araştırmalarında sınır entegral denklemlerinin nümerik değerlendirilmesiyle, sınır entegral denklem metodunu, elastik zemine oturan herhangi bir şekildeki basit destekli plakların analizinde uygulamışlardır. Elde edilen sayısal sonuçlar, analitik çözümlerden elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında, sınır entegral denklem metodunun daha avantajlı olduğu ispatlanmıştır.

Ting ve Mockry [16], düzlem çerçeve analizi için tekil yük, tekil moment ve lineer olarak yayılı kuvvetlere bağlı olarak elastik zemin üzerindeki bir kiriş için yük eleman vektörleri ve sonlu eleman rijitlik matrisi geliştirmiş ve bu rijitlik matris elemanlarının bilinen deplasman metoduna kolayca uygulanabileceğini belirtmiştir.

Lin ve Adams [17], çekme gerilmesi almayan Winkler zeminine oturan, ağırlıklı, üzerinde bir çift yük etkisindeki sonsuz uzunluktaki bir kirişin davranışını incelemiştir. Tekil yüklerin aralıklarına, hızlarına ve zeminden ayrılma noktalarına bağlı olarak sonuçlar elde edilmiştir. Demiryolu sistemlerindeki ilgili parametreler için örnek hesaplar ayrılma etkisinin önemli olduğunu göstermektedir.

Celep, Malaika ve Hussein [18] de çekmeye çalışmayan Winkler zeminine oturan sonlu kirişin zorlanmış titreşimlerini Galerkin yöntemini kullanarak incelemişlerdir ve çeşitli yükleme durumları ve parametreler için ayrılma noktasının değişimi ile çeşitli yerdeğiştirmelerin zamanla değişimini incelemişlerdir.

Elmas [19], elastik zemine oturan sonlu uzunluktaki ahşap ve betonarme kirişlerin davranışını incelemiştir. Bu çalışmasında, orta noktadan etkiyen tekil yükün limit değerini artırarak, kirişlerin davranışını farklı malzeme ve boyutların etkisinde incelenmiştir.

Celep[20], bir Winkler zemini üzerinde dikdörtgensel elastik plakların davranışını analiz etmiştir. Galerkin metodunu kullanarak problem cebirsel denklem sisteminin çözümüne indirgenmiştir.

Rosa [21] ise Winkler zeminine oturan kirişlerin çeşitli mesnetleme koşulları altında, eksenel kuvvetlerin etkisini de dikkate alarak Hamilton ilkesi yardımıyla titreşimini ve stabilitesini incelemiştir. Bütün bu çalışmalarda zeminin iki yönlü olarak çekme ve basınca çalıştığı kabul edilmiştir.

Engin [22], elastik-plastik zemine oturan ağırlıksız kiriş ve ince dairesel plakların tekil yük altında davranışını incelemiştir. Zeminin yalnız basınç gerilmesi aktardığı ve belirli bir yerdeğiştirmede plastikleştiği kabul edilmiştir. Çözümün sonunda plastik-elastik ve yapının zeminden ayrıldığı sınırın tekil yükün şiddeti ve plağın yarıçapı ile değişimi gözlenmiştir.

Özdoğan [23], yalnız basınç aktaran iki parametreli elastik bir Pasternak zeminine oturan, ağırlıksız dairesel bir plağın tekil, yayılı ve şerit düşey yükler etkisindeki davranışını incelemiştir. Yükleme durumuna göre ortaya çıkan bölgeler dikkate alınarak yönetici denklemler elde edilmiş ve çözümler karmaşık argümanlı Bessel fonksiyonları ile ve plağın, yarıçapına göre tam batma ve batmama durumları için incelenmiştir.

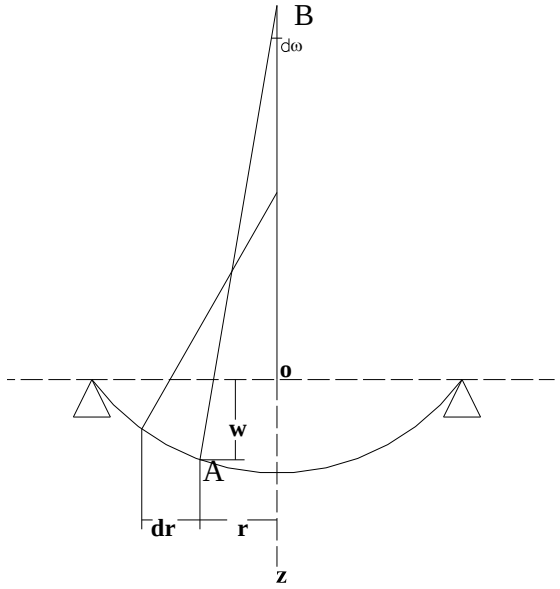
1.3. Çalışmanın Amaç ve Kapsamı

Bu çalışmada, homojen olmayan elastik zeminlere oturan ince dairesel plakların zorlanmış titreşimleri incelenmiştir. Temel dairesel plak denklemleri ele alındıktan sonra, çeşitli yükleme ve mesnet durumları için plak davranışları araştırılmıştır. Daha sonra elastik zeminlere oturan dairesel plakların genel çözümüne geçilmiştir. Bu çözümlerde Kelvin fonksiyonları kullanılarak, çeşitli mesnet koşulları için plak çökme, dönme ve kesit tesirleri araştırılmıştır. Kelvin fonksiyonları cinsinden yazılan plak denklemi, Excel programı yardımıyla formüle edilerek, plak ve zemin

parametrelerinin değişik sayısal değerleri için çözümler bulunmuştur. Zeminin homojen olduğu ve homojen olmadığı durumlar için sınır şartlarından faydalanılarak plak çökme, dönme ve kesit tesirlerine ulaşılmıştır.

BÖLÜM 2. TEMEL DENKLEMLER

2.1. Yanal Yüklü Dairesel Plakların Simetrik Eğilmesine Ait Diferansiyel Denklem



Şekil 2.1. Sabit mesnetli, yanal yüklü dairesel plağa ait elastik eğri

Şekil. 2.1'de görülen (r,z) düzlemindeki bir plak sisteminde, r uzaklıklarına karşı gelen aşağı yönlü sehimler, w ile gösterilsin.

Herhangi bir A noktasındaki radyal doğrultudaki eğim, $-dw/dr$ ' dir.

Küçük plaklar için plak ortalama yüzeyinin *rz* diyametral kesitindeki eğriliği şuna eşittir.

$$\frac{1}{r_n} = \frac{-d^2w}{dr^2} = \frac{d\varphi}{dr} \tag{2.1}$$

ve r_t ikinci asal eğrilik $|AB|$ olmak üzere ,

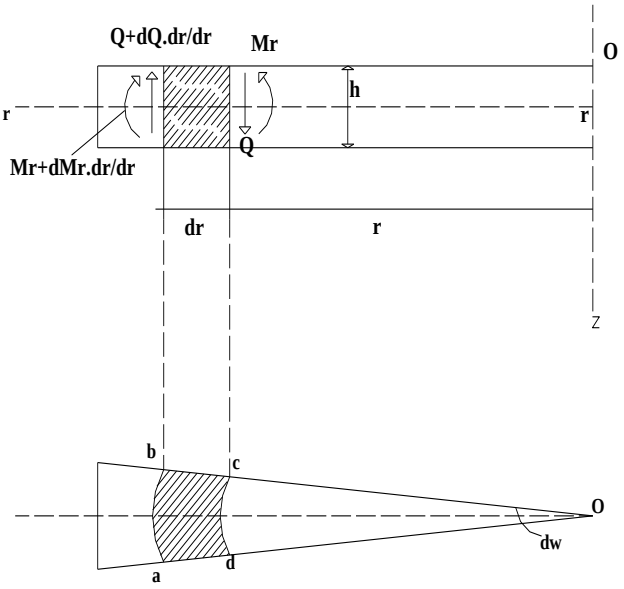
$$\frac{1}{r_t} = \frac{-1}{r}\frac{dw}{dr} = \frac{\varphi}{r} \tag{2.2}$$

M_r ve M_t, birim uzunluğa etki eden eğilme momentleri olmak üzere,

$$M_r = -D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right) = D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r}\varphi\right) \tag{2.3}$$

$$M_t = -D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + \nu\frac{d^2w}{dr^2}\right) = D\left(\frac{\nu}{r} + \nu\frac{d\varphi}{dr}\right) \tag{2.4}$$

şeklindedir.



Şekil 2.2. Dairesel plağa ait iç kuvvetler

Şekil 2.2 ‘ de gösterilen elemanın,

cd yüzüne $M_r\, r d\theta$ kuvvet çifti etki eder.

ab yüzüne ise $\left(M_r + \frac{dM_r}{dr}dr\right)(r+dr)\,d\theta$ etkir.

Bu kuvvet çiftlerinden her biri, $M_t dr$ olup, bunlar *roz* düzleminde $M_t dr d\theta$ ’ ya eşit bileşke kuvvet çiftini verirler.

cd yüzüne etkiyen toplam kesme kuvveti $Q\, r d\theta$,

ab yüzüne etkiyen toplam kesme kuvveti ise $\left(Q + \frac{dQ}{dr}dr\right)(r+dr)d\theta$ ’ dır.

Bu kuvvetlerin *rz* düzleminde, $Q_r\, d\theta\, dr$ ' ye eşit bir kuvvet çifti verdiği görülebilir. Dış yük momenti ihmal edilerek denge yazılırsa,

$$\left(M_r + \frac{dM_r}{dr}dr\right)(r+dr)d\theta - M_r r\, d\theta - M_t dr\, d\theta + Q_r d\theta\, dr = 0 \tag{2.5}$$

elde edilir. Yüksek mertebeden küçük bir miktarı ihmal ederek,

$$M_r + \frac{dM_r}{dr}r - M_t + Q_r = 0 \tag{2.6}$$

denklemine ulaşabiliriz.

(2.3) ve (2.4) denklemlerini, (2.6) ifadesinde yerlerine koyarsak,

$$D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r}\varphi\right) + \frac{d\left(D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r}\varphi\right)\right)}{dr}r - D\left(\frac{\varphi}{r} + \nu\frac{d\varphi}{dr}\right) + Q_r = 0 \tag{2.7}$$

buradan da,

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = \frac{-Q}{D} \tag{2.8}$$

veya,

$$\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr} = \frac{Q}{D} \tag{2.9}$$

denklemleri elde edilir.

Bu denklemler aşağıdaki formlarıyla ifade edilirse,

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\varphi)\right] = \frac{-Q}{D} \tag{2.10}$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = \frac{Q}{D} \tag{2.11}$$

Q, r ‘ nin bir fonksiyonu olarak gösterilirse, her özel halde bu denklemler kolayca çözülebilir. $\frac{Q}{D}$ ifadesini plak üzerine yayılmış olan yükün q şiddetinin fonksiyonu olarak gösterirsek,

$$Q2\pi r = \int_0^r q\, 2\pi\, \rho\, d\rho \tag{2.12}$$

$$r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = \frac{1}{D}\int_0^r q\rho\, d\rho \tag{2.13}$$

denklemlerini elde ederiz. (2.13) denkleminin her iki tarafının r’ye göre türevi alınıp, r ‘ye bölünürse, genel dairesel plak denklemi şu şekilde bulunur.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\} = \frac{q}{D} \tag{2.14}$$

2.2. Üniform Yüklü Dairesel Plaklar

2.2.1. Giriş

a yarıçaplı dairesel bir plak, bütün yüzeyine üniform olarak yayılmış q şiddetinde bir yük taşırsa plağın merkezinden r uzaklığındaki Q kesme kuvveti şu şekilde bulunur.

$$2\pi r Q = \pi r^2 q$$

$$Q = \frac{qr}{2} \tag{2.15}$$

Bu Q ifadesini, (2.11) ‘de yerine koyarsak,

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = \frac{qr}{2D}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) = \frac{qr^2}{4D} + C_1$$

denklemin her iki tarafını r ile çarpıp bir kez daha entegre edersek,

$$r\frac{dw}{dr} = \frac{qr^4}{16D} + \frac{C_1 r^2}{2} + C_2$$

$\frac{dw}{dr} = \frac{qr^3}{16D} + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}$ elde edilir.

Son bir entegrasyonla, üniform yüklü dairesel bir plak için çökme ifadesini buluruz.

$$w = \frac{qr^4}{64D} + \frac{C_1 r^2}{4} + C_2 \log\frac{r}{a} + C_3 \tag{2.16}$$

2.2.2. Kenarlarından Ankastre Dairesel Plak

r=0 ve r=a için elastik yüzeyin radyal doğrultudaki eğiminin 0 olması lazımdır.

Eğim = $\frac{-dw}{dr} = \varphi$

$$\frac{dw}{dr} = \left(\frac{qr^3}{16D} + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}\right)_{\substack{r=0 \\ r=a}} = 0 \tag{2.17}$$

r=0 için $\frac{dw}{dr} = 0$ denirse, buradan, $C_2 = 0$ bulunur.

r=a için $\frac{dw}{dr} = 0$ denirse,

$\frac{qa^3}{16D} + \frac{C_1 a}{2} = 0$, $C_1 = -\frac{qa^2}{8D}$ bulunur.

$\frac{dw}{dr} = \left(\frac{qr^3}{16D} - \frac{qa^2 r}{16D}\right)$ ve $\varphi = -\frac{dw}{dr} = \frac{qr}{16D}\left(a^2 - r^2\right)$

Bu denklemi bir kere daha entegre edersek, kenarlarından ankastre bir plak için çökme ifadesi elde edilmiş olur.

$$w = \frac{qr^4}{64D} - \frac{qa^2 r^2}{32D} + C_3 \tag{2.18}$$

Plak kenarında çökme sıfır olacağından,

$$\frac{qa^4}{64D} - \frac{qa^4}{32D} + C_3 = 0$$

ve buradan da,

$C_3 = \frac{qa^4}{64D}$ bulunur. Bu halde,

$$w = \frac{qr^4}{64D} - \frac{qa^2r^2}{32D} + \frac{qa^4}{64D} = \frac{q}{64D}\left(a^2 - r^2\right)^2 \tag{2.19}$$

r=0 için, plak merkezinde çökme maksimum değerinde sahip olacaktır.

$$w_{\max} = \frac{qa^4}{64D} \tag{2.20}$$

Şimdi de, M_r ve M_t ifadelerini bulalım.

$$M_r = D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r}\varphi\right)$$

$$M_r = \frac{q}{16}\left[a^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)\right] \tag{2.21}$$

$$M_t = D\left(\frac{\varphi}{r} + \frac{d\varphi}{dr}\nu\right)$$

$$M_t = \frac{q}{16}\left[a^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)\right] \tag{2.22}$$

r=a denirse, plağın çevresindeki eğilme momentleri bulunabilir.

$$(M_r)_{r=a} = \frac{-qa^2}{8} \text{ ve } (M_t)_{r=a} = \frac{-\nu qa^2}{8} \tag{2.23}$$

Maksimum gerilme plağın çevresindedir ve,

$$(\sigma_r)_{\max} = \frac{-6M_r}{h^2} = \frac{3}{4}\frac{qa^2}{h^2} \tag{2.24}$$

şeklindedir.

2.2.3. Kenarlarından Basit Mesnetli Dairesel Plak

Bu hale ait çökmeleri bulmak için süperpozisyon yöntemi kullanılır. Kenarların ankastre olması halinde, kenar boyunca $M_r = -qa^2/8$ eğilme momentinin etkidiğini biliyoruz. Bu hal, basit eğilme hali ile birleştirilirse, kenardaki M_r eğilme momenti yok edilmiş olur ve, kenarından basit mesnetli dairesel plak için eğilme ifadesi elde edilir. Basit eğilme halinde, $M_r = -qa^2/8$ momentlerinden doğan çökme,

$w = \frac{qa^2}{16D(1+\nu)}\left(a^2 - r^2\right)$ olarak biliniyor.

Bunu, ankastre plağa ait çökme ifadesine ilave edersek, kenarlarından basit mesnetli dairesel plağa ait çökme denklemini bulabiliriz.

$$w = \frac{qa^2}{16D(1+\nu)}\left(a^2 - r^2\right) + \frac{q}{64D}\left(a^2 - r^2\right)^2$$

$$w = \frac{q\left(a^2 - r^2\right)}{64D}\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}a^2 - r^2\right) \tag{2.25}$$

r=0 için , plak merkezindeki çökme,

$$w_{\max} = \frac{(5+\nu)qa^4}{64D(1+\nu)} \tag{2.26}$$

M_r ve M_t momentleri ise aşağıdaki gibidir.

$$M_r = \frac{q}{16}(3+\nu)\left(a^2 - r^2\right) \tag{2.27}$$

$$M_t = \frac{q}{16}\left[a^2(3+\nu) - r\ (1+3\nu)\right] \tag{2.28}$$

maksimum eğilme, plak merkezindedir ve,

$$M_r = M_t = \frac{3+\nu}{16}qa^2 \tag{2.29}$$

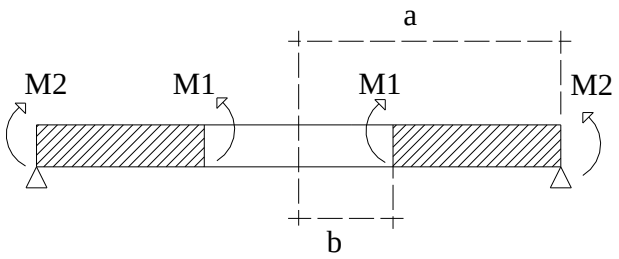
şeklindedir.

Buna denk gelen gerilme ise aşağıda (2.30) denklemi ile verilmiştir.

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_t)_{\max} = \frac{6M_r}{h^2} = \frac{3(3+\nu)qa^2}{8h^2} \tag{2.30}$$

Merkezden herhangi bir r uzaklığındaki maksimum gerilmeyi elde etmek için ankastre kenarlı plak için hesaplanan gerilmeye, $\frac{6}{h^2}\frac{qa^2}{8}$ ifadesi eklenmelidir.

2.2.4. Merkezinde Dairesel Bir Delik Bulunan Dairesel Plak



Şekil 2.3. Merkezinde dairesel bir delik bulunan dairesel plak

Şekil 2.3 ‘ te görüldüğü gibi dairesel bir plak için, merkezi, a yarıçaplı plak merkeziyle çakışan b yarıçaplı dairesel bir boşluk düşünelim.

$$Q = 0\,,\ \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = 0$$

Bu denklem iki kere entegre edilerek,

$$w = \frac{-C_1 r^2}{4} - C_2 \log\frac{r}{a} + C_3 \tag{2.31}$$

şeklinde çökme denklemi elde edilir. Eğilme momenti ise aşağıdaki gibidir.

$$M_r = D\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\nu}{r}\varphi\right) = D\left[\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} + \frac{\nu}{r}\left(\frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r}\right)\right] \tag{2.32}$$

Şekil 3 ‘ te, r=a için $M_r = M_1$ ve r=b için $M_r = M_2$ olarak gösterilmektedir.

$$M_1 = D\left[\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{b^2} + \frac{\nu}{b}\left(\frac{C_1 b}{2} + \frac{C_2}{b}\right)\right] \tag{2.33}$$

$$M_2 = D\left[\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{a^2} + \frac{\nu}{a}\left(\frac{C_1 a}{2} + \frac{C_2}{a}\right)\right] \tag{2.34}$$

(2.33) ve (2.34) denklemlerinden hareketle,

$C_1 = \dfrac{2\left(a^2 M_2 - b^2 M_1\right)}{(1+\nu)\left(a^2 - b^2\right)D}$ ve $C_2 = \dfrac{a^2 b^2 \left(M_2 - M_1\right)}{(1-\nu)\left(a^2 - b^2\right)D}$ olarak bulunurlar.

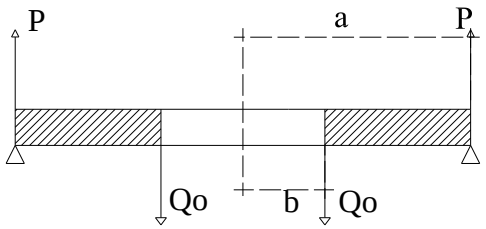
r=a için, w=0 olacağından,

$$\frac{2\left(a^2M_2-b^2M_1\right)}{(1+\nu)\left(a^2-b^2\right)D}\frac{a^2}{4}-\frac{a^2b^2\left(M_2-M_1\right)}{(1-\nu)\left(a^2-b^2\right)D}\log 1+C_3=0 \text{ ve,}$$

$$C_3=\frac{a^2\left(a^2M_2-b^2M_1\right)}{2(1+\nu)\left(a^2-b^2\right)D}$$

olarak elde edilir.

İkinci olarak, plağın iç kenarı boyunca üniform olarak yayılmış Q_0 kesme kuvvetleri etkisiyle eğilmesi durumunu ele alalım. Bu durum Şekil 2.4 ‘ te gösterilmektedir.



Şekil 2.4. Merkezinde dairesel bir delik bulunan dairesel plağın iç kenarı boyunca üniform olarak yayılmış kesme kuvvetleri etkisiyle eğilmesi

$$Q=\frac{Q_0b}{r}=\frac{P}{2\pi r} \quad \Rightarrow P=2\pi Q_0\,b \text{ (plağın iç kenarına tatbik edilen toplam yük)} \quad (2.35)$$

$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]=\frac{Q}{D}$ olduğunu biliyoruz. (2.11)

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]=\frac{P}{2\pi r} \quad (2.36)$$

(2.36) ifadesi çözülerek, çökme denklemi kolayca bulunabilir.

$$w=\frac{\mathrm{Pr}^2}{8\pi D}\left(\log\frac{r}{a}-1\right)-\frac{C_1r^2}{4}-C_2\log\frac{r}{a}+C_3 \quad (2.37)$$

Sınır şartları uygulanırsa,

$(w)_{r=a}=0$ ve $(w)_{r=b}=0$

$$C_1 = \frac{P}{4\pi D}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu} - \frac{2b^2}{a^2-b^2}\log\frac{b}{a}\right)$$

$$C_2 = -\frac{P(1+\nu)}{(1-\nu)4\pi D}\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\log\frac{b}{a}$$

ve $C_3 = \frac{Pb}{8\pi D}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1-\nu}{1+\nu} - \frac{b^2}{a^2}\log\frac{b}{a}\right)$ olarak elde edilir.

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = \frac{Pb}{8\pi D}\left[2\log\frac{b}{a} - 1 - \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{2b^2}{a^2-b^2}\log\frac{b}{a}\left(1-\frac{a^2}{b^2}\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\right)\right] \qquad (2.38)$$

b 'nin sonsuz küçük olduğu limit halde, $b^2\log\frac{b}{a}$ sıfıra gideceğinden,

$$C_1 = \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{P}{4\pi D} \quad , \quad C_2 = 0 \quad , \quad C_3 = \frac{Pa^2}{8\pi D}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1-\nu}{1+\nu}\right) \text{ olur.}$$

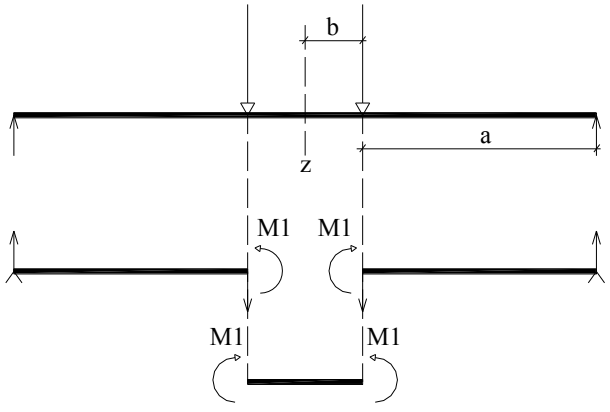
Bu durumda çökme,

$$w = \frac{P}{8\pi D}\left[\frac{3+\nu}{2(1+\nu)}\left(a^2-b^2\right) + r^2\log\frac{r}{a}\right] \qquad (2.39)$$

olur.

(2.39) ifadesi merkezinden yüklü dairesel bir plağın çökme ifadesiyle aynıdır. Bu da göstermektedir ki, merkezindeki küçük bir delik, plak çökmelerine etki etmez.

2.2.5. Kosantrik Yüklü Dairesel Plak



Şekil 2.5. Kosantrik yüklü dairesel plak

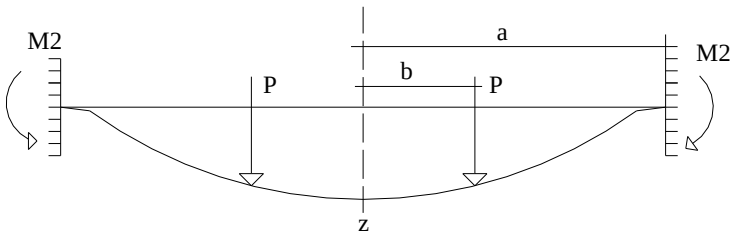
Şekil 2.5 ‘te gösterildiği gibi, üzerine b yarıçaplı daire boyunca üniform olarak yayılı bir yükün tesir ettiği, basit mesnetli bir plak halini ele alırsak, toplam yük P olmak üzere,

$$Q_1 = \frac{P}{2\pi b}$$

$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = -\frac{M_1 b}{D(1+\nu)}$ ve buradan da,

$$M_1 = \frac{(1-\nu)P(a^2-b^2)}{8\pi a^2} - \frac{(1+\nu)P\log\frac{b}{a}}{4\pi} \tag{2.40}$$

olarak bulunur.



Şekil 2.6. Kosantrik yüklü, ankastre mesnetli dairesel plak

Öte yandan, plak dış kenarları Şekil 2.6 ‘ da gösterildiği gibi ankastre mesnetli olursa, M_2 momenti şu şekilde bulunur.

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = \frac{-P}{4\pi D}\frac{1}{1+\nu}\frac{(a^2-b^2)}{a} \tag{2.41}$$

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = \frac{M_2 a}{D(1+\nu)} \tag{2.42}$$

Bu iki ifade birbirine eşitlenirse, M_2 momenti,

$$M_2 = \frac{P}{4\pi}\frac{(a^2-b^2)}{a^2} \tag{2.43}$$

olarak bulunur.

2.3. Merkezinden Yüklü Dairesel Plaklar

Basit mesnetli bir plağın merkezindeki maksimum çökme,

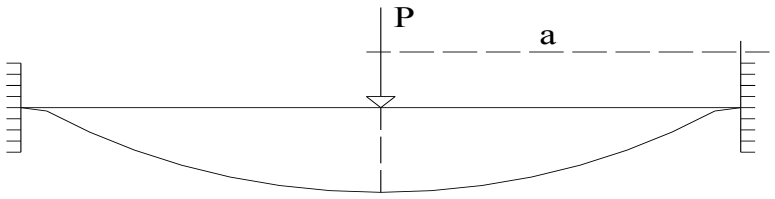
$$w_{\max} = \frac{(3+\nu)Pa^2}{16\pi D(1+\nu)} \text{'dir.} \tag{2.44}$$

$b = 0$ olmak üzere,

$$w = \frac{P}{16\pi D}\left[\frac{3+\nu}{1+\nu}\left(a^2 - b^2\right) + 2r^2 \log\frac{r}{a}\right] \text{ ve,}$$

$$M_r = \frac{P}{4\pi}(1+\nu)\log\frac{r}{a} \text{ ve } M_t = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\log\frac{r}{a} + 1 - \nu\right] \text{ ' dir.}$$

$$\varphi = -\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=a} = \frac{Pa}{4(1+\nu)\pi D}$$



Şekil 2.7. Merkezinden tekil yüklü ankastre mesnetli dairesel plak

Şekil 2.7 'de gösterildiği gibi, ankastre kenar boyunca üniform olarak yayılmış olan M_2 eğilme momentleri, plağı, yarıçapı $\frac{1}{r_x} = \frac{1}{r_y} = \frac{M}{D(1+\nu)}$ ile verilen küresel bir yüzey şeklinde eğerler.

Bu durumda,

$$\varphi = -\frac{M_2 a}{(1+\nu)D} \text{ olur.}$$

$(M_r)_{r=a} = M_2 = -\frac{P}{4\pi}$ ve M_2 momentlerinden doğan çökmeler, $\frac{P(r^2 - a^2)}{8\pi D}$ olarak bulunur. Bu ifade, basit mesnetli plak çözümündeki çökmelere süperpoze edilirse, bu hal için çökme denklemi aşağıdaki şekliyle elde edilmiş olur.

$$w = \frac{\mathrm{Pr}^2}{8\pi D}\log\frac{r}{a} + \frac{P}{16\pi D}\left(a^2 - r^2\right) \tag{2.45}$$

BÖLÜM 3. ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL PLAKLAR

3.1. Elastik Zemine Oturan Dairesel Plak Denkleminin Çözümü

3.1.1. Giriş

Merkezinden yüklenmiş dairesel bir plağı göz önüne alalım. Plak denklemi (2.14) aşağıdaki gibidir.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\}=\frac{q}{D}$$

Plağın oturduğu zemin Winkler zemini olarak kabul edilmiştir. (2.14) denklemine –kw yükünü eklemek gerekir. Bu halde,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\}=\frac{q-kw}{D} \tag{3.1}$$

denklemi elde edilir. Denklem, düzenlendiğinde,

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)=\frac{q-kw}{D} \tag{3.2}$$

halini alır.

Plak, merkezinden bir P yükü ile yüklenirse, q, plağın merkezi civarındaki yüzey haricinde 0 olur.

q=0 ve $l=\sqrt[4]{\frac{D}{k}}$ olmak üzere,

$$l^4\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)+w=0 \tag{3.3}$$

ifadesi elde edilir.

$\frac{w}{l}=z$ ve $\frac{r}{l}=x$ boyutsuzlaştırmaları yapılırsa, aşağıdaki (3.4) denklemine ulaşılır.

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right)+z=0 \tag{3.4}$$

$\Delta=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}$ denirse,

$$\Delta\Delta z+z=0 \tag{3.5}$$

denklemine ulaşılır. Bu denklemin genel çözümü Bessel fonksiyonları yardımıyla bulunabilir.

$\xi=x\sqrt{i}$ olmak üzere,

$\Delta'=\frac{d^2}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}$ denirse,

$$\Delta'\Delta' z-z=0 \tag{3.6}$$

denklemi elde edilir. Bu denklem aşağıdaki gibi düzenlenirse,

$\Delta'(\Delta' z+z)-(\Delta' z+z)=0$ veya,

$\Delta'(\Delta' z-z)+(\Delta' z-z)=0$ yazılarak,

$\Delta' z+z=\frac{d^2}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dz}{d\xi}+z=0$ veya,

$$\Delta' z-z=\frac{d^2z}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dz}{d\xi}-z=0$$

ifadeleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümü,

$$z=B_1J_0\left(x\sqrt{i}\right)+B_2J_0\left(xi\sqrt{i}\right)+B_3K_0\left(x\sqrt{i}\right)+B_4K_0\left(xi\sqrt{i}\right) \tag{3.7}$$

şeklindedir.

J_0 ve K_0 fonksiyonları 1. ve 2. tip Bessel fonksiyonlarıdır. Kompleks argümanlar nedeniyle bu fonksiyonlar Kelvin fonksiyonları ile aşağıdaki gibi tanımlanırlar.

$$J_0\left(x\sqrt{\pm i}\right)=ber(x)\pm bei(x)$$
$$K_0\left(x\sqrt{\pm i}\right)=\ker(x)\pm kei(x)$$

Bu durumda (3.7) çözümü

$$z = A_1 berx + A_2 beix + A_3 \ker x + A_4 keix \tag{3.8}$$

olarak elde edilir.

3.1.2. Kelvin fonksiyonları

3.1.2.1. Tanım ve Özellikler

m gerçel, x gerçel ve pozitif ve n de pozitif tamsayı veya sıfır olmak üzere, ber, bei, ker ve kei fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır. [25]

$$ber_m x = \left(\frac{1}{2}x\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left\{\left(\frac{3}{4}m + \frac{k}{2}\right)\pi\right\}}{k!\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{1}{4}x^2\right)^k \tag{3.9}$$

$$bei_m x = \left(\frac{1}{2}x\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left\{\left(\frac{3}{4}m + \frac{k}{2}\right)\pi\right\}}{k!\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{1}{4}x^2\right)^k \tag{3.10}$$

$$\ker_n x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \cos\left\{\left(\frac{3}{4}n + \frac{k}{2}\right)\pi\right\} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{1}{4}x^2\right)^k - \ln\left(\frac{x}{2}\right) ber_n x + \frac{\pi}{4} bei_n x$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \cos\left\{\left(\frac{3}{4}n + \frac{k}{2}\right)\pi\right\} \frac{\{\Psi(k+1) + \Psi(n+k+1)\}}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{4}\right)^k \tag{3.11}$$

$$kei_n x = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \sin\left\{\left(\frac{3}{4}n + \frac{k}{2}\right)\pi\right\} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{1}{4}x^2\right)^k - \ln\left(\frac{x}{2}\right) bei_n x - \frac{\pi}{4} ber_n x$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \sin\left\{\left(\frac{3}{4}n + \frac{k}{2}\right)\pi\right\} \frac{\{\Psi(k+1) + \Psi(n+k+1)\}}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{4}\right)^k \tag{3.12}$$

olarak tanımlanırlar. Burada Ψ_n aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\Psi_{(n)} = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1} \qquad (n \geq 2) \quad \text{ve} \quad \gamma = 0{,}5772156649$$

3.1.2.2. Bağıntılar

Tablo1. Kelvin fonksiyonları

f_m	$ber_m x$	$bei_m x$	$\ker_m x$	$kei_m x$
g_m	$bei_m x$	$-ber_m x$	$kei_m x$	$-\ker_m x$

Tablo 1 de verilen, Kelvin fonksiyonlarının f ve g fonksiyonlarıyla ilgili varyasyonları için aşağıdaki bağıntıları kullanmak mümkündür. [25]

$$f_{m+1} + f_{m-1} = -\frac{m\sqrt{2}}{x}(f_x - g_x) \tag{3.13}$$

$$f'_m = \frac{1}{2\sqrt{2}}(f_{m+1} + g_{m+1} - f_{m-1} - g_{m-1}) \tag{3.14}$$

$$f'_m - \frac{m}{2} f_m = \frac{1}{\sqrt{2}}(f_{m+1} + g_{m+1}) \tag{3.15}$$

$$f'_m + \frac{m}{2} f_m = \frac{-1}{\sqrt{2}}(f_{m-1} + g_{m-1}) \tag{3.16}$$

Kelvin fonksiyonları ve türevleri Excel programı yardımıyla sayısal çözümler için formüle edilip, tablolar halinde verilmiştir. Değişken parametrelerin sayısal değerleri formüllerde yerlerine koyularak, (3.8) bağıntısının kendisi ve türevleri elde edilebilir. Sayısal çözüm için öncelikle sınır şartları belirlenerek A katsayıları bulunmalıdır.

(3.8) ifadesinde (3.14) bağıntısı kullanılırsa,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{A_1\sqrt{2}}{2}(ber_1 x + bei_1 x) + \frac{A_2\sqrt{2}}{2}(bei_1 x - ber_1 x) + \frac{A_3\sqrt{2}}{2}(\ker_1 x + kei_1 x) + \frac{A_4\sqrt{2}}{2}(kei_1 x - \ker_1 x)$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{A_1}{2}(bei_2 x - beix) + \frac{A_2}{2}(berx - ber_2 x) + \frac{A_3}{2}(kei_2 x - keix) + \frac{A_4}{2}(\ker x - \ker_2 x)$$

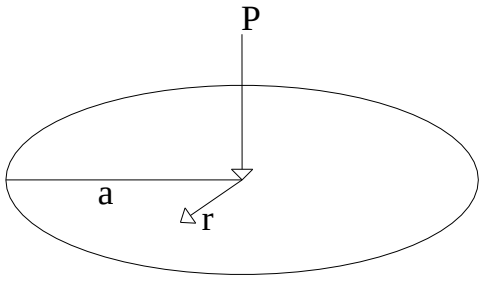
$$\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{A_1\sqrt{2}}{8}\left(bei_3x - ber_3x - 3bei_1x + 3ber_1x\right)$$
$$+ \frac{A_2\sqrt{2}}{8}\left(3ber_1x + 3bei_1x - ber_3x - bei_3x\right)$$
$$+ \frac{A_3\sqrt{2}}{8}\left(kei_3x - \ker_3 x - 3kei_1x + 3\ker_1 x\right)$$
$$+ \frac{A_4\sqrt{2}}{8}\left(3\ker_1 x + 3kei_1x - \ker_3 x - kei_3x\right)$$

ifadeleri elde edilir. Bu türev ifadeleri, sayısal çözüm için sınır şartlarının belirlenmesi aşamasında kullanılacaktır.

3.2. Problemin Çözümü

3.2.1. Zeminin Homojen Olması Hali

Şekil 3.1'de gösterilen elastik zemine serbest oturan, ortasından tekil yüklü bir plağı göz önüne alalım. Yukarıdaki açıklamalara göre çözüm aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 3.1. Merkezinden tekil yüklü dairesel plak

$$z = A_1 berx + A_2 beix + A_3 \ker x + A_4 keix$$

Sınır şartlarını yazarsak,

1-) $r = a \rightarrow M_r = 0$

2-) $r = 0 \rightarrow Q_r = \frac{P}{2\pi r}$

3-) $r = a \rightarrow Q_r = 0$

4-) r' in her değeri için w sonlu olacağından $A_3 = 0$

$$Q_r = D\left[\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right] \tag{3.17}$$

$x = \frac{r}{l}$ ve $z = \frac{w}{l}$ olduğundan,

$$Q_r = D\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) = D\frac{1}{l^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right) \tag{3.18}$$

$$\frac{dz}{dx} = A_1(berx)' + A_2(beix)' + A_4(keix)' \tag{3.19}$$

ve,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = A_1(berx)'' + A_2(beix)'' + A_4(keix)'' \tag{3.20}$$

O halde,

$$Q_r = D\frac{1}{l^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx}\right)$$

$$Q_r = D\frac{1}{l^2}\frac{d}{dx}\left(A_1(-beix)) + A_2(berz) + A_4(\ker x)\right) \tag{3.21}$$

2 numaralı sınır şartına göre,

$$P = 2\pi\rho\varepsilon Q \ (\varepsilon \to 0)$$

(3.22)

$Q_r = D\frac{1}{l^2}\left(A_1(-beix)' + A_2(berx)' + A_4(\ker x)'\right)$ yazılırsa,

$$Q_r = D\frac{1}{l^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-A_1(bei_1x - ber_1x) + A_2(ber_1x + bei_1x) + A_4(\ker_1 x + kei_1x)\right]$$

denklemi elde edilir.

$$P = 2\pi\varepsilon Q$$

$$= 2\pi \frac{D}{l^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[- A_1 (\varepsilon bei_1 \varepsilon - \varepsilon ber_1 \varepsilon) + A_2 (\varepsilon ber_1 \varepsilon + \varepsilon bei_1 \varepsilon) + A_4 (\varepsilon \ker_1 \varepsilon + \varepsilon kei_1 \varepsilon) \right]$$

$(\varepsilon \to 0)$

$$= 2\pi \frac{D}{l^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[- A \ * 0 + A_2 * 0 + A_4 (-\sqrt{2}) \right] \tag{3.23}$$

O halde aşağıdaki denklemi yazmak mümkündür.

$$A_4 = -P \frac{l^2}{2\pi D} \tag{3.24}$$

3 numaralı sınır şartına göre,

$x = a/l$ için, $Q_r = 0$

Buradan,

$$- A_1 (bei_1 x - ber_1 x) + A_2 (ber_1 x + bei_1 x) + A_4 (\ker_1 x + kei_1 x) \perp_{\left(x = \frac{a}{l}\right)} = 0 \tag{3.25}$$

Son olarak 1 numaralı sınır şartından,

$x = a/l$ için $M_r = 0$

Buradan da,

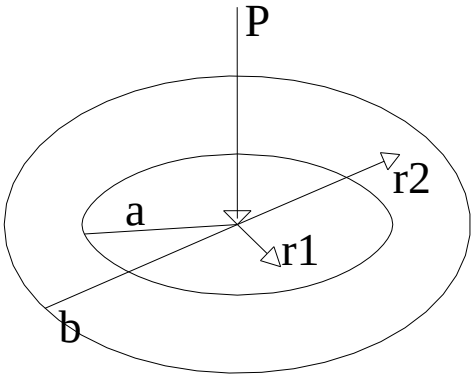
$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -\frac{D}{l} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{\nu}{x} \frac{dz}{dx} \right) \tag{3.26}$$

$$A_1 \left(ber_1 x + bei_1 x - \sqrt{2} \frac{beix}{(\nu - 1)} \right) + A_2 \left(bei_1 x - ber_1 x + \sqrt{2} \frac{berx}{(\nu - 1)} \right) +$$

$$A_4 \left(kei_1 x - \ker_1 x + \sqrt{2} \frac{\ker x}{(\nu - 1)} \right) \perp_{\left(x = \frac{a}{l}\right)} = 0 \tag{3.27}$$

eşitliği elde edilir. (3.25) ve (3.27) bağıntıları kullanılarak A_1 *ve* A_2 sabitleri hesaplanabilir.

3.2.2. Zeminin Homojen Olmaması Hali



Şekil 3.2. Homojen olmayan elastik zemine oturan merkezinden tekil yüklü dairesel plak

Bu kısımda zemin yatak katsayısının ani olarak değişmesi incelenecektir.

Şekil 3.2 'de gösterilen plak halinde, 0<r<a için zemin yatak katsayısı k_1 ve a<r<b için zemin yatak katsayısı k_2 olsun. Bu durumda plak denklemleri şu şekilde olacaktır.

$x_1 = \frac{r_1}{l_1}$, $x_2 = \frac{r_2}{l_2}$, $z_1 = \frac{w_1}{l_1}$, $z_2 = \frac{w_2}{l_2}$, $l_1^4 = \frac{D}{k_1}$ ve $l_2^4 = \frac{D}{k_2}$ olmak üzere,

$0<x<\frac{a}{l_1}$ için $z_1 = A_1 ber x_1 + A_2 bei x_1 + A_3 \ker x_1 + A_4 kei x_1$

$\frac{a}{l_1}<x<\frac{b}{l_2}$ için $z_2 = D_1 ber x_2 + D_2 bei x_2 + D_3 \ker x_2 + D_4 kei x_2$

Sınır şartları yazılırsa,

1-) $r_1 \to 0$ *iken* $w_1 \to$ *sonlu*

2-) $r_1 = 0 \to Q_{r1} = P/2\pi\rho \ \ (\rho \to 0)$

3-) $r_1 = r_2 = a \to w_1 = w_2$

4-) $r_1 = r_2 = a \to w_1' = w_2'$

5-) $r_1 = r_2 = a \to M_{r1} = M_{r2} \Leftrightarrow w_1'' = w_2''$

6-) $r_1 = r_2 = a \to Q_{r1} = Q_{r2} \Leftrightarrow w_1''' = w_2'''$

7-) $r_2 = b \to Q_{r2} = 0$

8-) $r_2 = b \rightarrow M_{r2} = 0$

2 numaralı sınır şartından, $A_4 = -P\dfrac{{l_1}^2}{2\pi D}$ ve *1 numaralı sınır şartından* x 'in her değeri için sonlu bir w değeri olması için, $A_3 = 0$ olduğu bilinmektedir.

$s_1 = \dfrac{a}{l_1}$, $s_2 = \dfrac{b}{l_2}$ ve $s_3 = \dfrac{a}{l_2}$ tanımlamaları yapılırsa,

7 numaralı sınır şartından,

$$-D_1\left(bei_1(s_2) - ber_1(s_2)\right) + D_2\left(ber_1(s_2) + bei_1(s_2)\right)$$
$$-D_3\left(kei_1(s_2) - \ker_1(s_2)\right) + D_4\left(\ker_1(s_2) + kei_1(s_2)\right) = 0 \qquad (3.28)$$

8 numaralı sınır şartından,

$$D_1\left(ber_1(s_2) + bei_1(s_2) - \sqrt{2}\,\frac{bei(s_2)}{(\nu - 1)}\right) + D_2\left(bei_1(s_2) - ber_1(s_2) + \sqrt{2}\,\frac{ber(s_2)}{(\nu - 1)}\right)$$
$$+ D_3\left(\ker_1(s_2) + kei_1(s_2) - \sqrt{2}\,\frac{kei(s_2)}{(\nu - 1)}\right) + D_4\left(kei_1(s_2) - \ker_1(s_2) + \sqrt{2}\,\frac{\ker(s_2)}{(\nu - 1)}\right) = 0 \qquad (3.29)$$

3 numaralı sınır şartından,

$w_{1(s_1)} = w_{2(s_3)}$

$l_1 * z_1 = l_2 * z_2$ ve buradan da,

$$z_1 = \frac{l_2}{l_1} z_2 \qquad (3.30)$$

elde edilir. Yani,

$$A_1 ber(s_1) + A_2 bei(s_1) + A_4 kei(s_1) = \frac{l_2}{l_1}\left[D_1 ber(s_3) + D_2 bei(s_3) + D_3 \ker(s_3) + D_4 kei(s_{3)}\right]$$

(3.31)

4 numaralı sınır şartından,

$$\frac{dw_1}{dr_1}_{(r_1 = a)} = \frac{dw_2}{dr_2}_{(r_2 = a)}$$

$$\frac{l_1}{l_1}\frac{dz_1}{dx_1}_{(s_1)} = \frac{l_2}{l_2}\frac{dz_2}{dx_2}_{(s_3)}$$ ve buradan da,

$$z_1' = z_2' \qquad (3.32)$$

elde edilir. Yani,

$$A_1(ber_1(s_1)+bei_1(s_1))+A_2(bei_1(s_1)-ber_1(s_1))+A_4(kei_1(s_1)-\ker_1(s_1))=$$
$$D_1(ber_1(s_3)+bei_1(s_3))+D_2(bei_1(s_3)-ber_1(s_3))+D_3(\ker_1(s_3)+kei_1(s_3))+$$
$$D_4(kei_1(s_3)-\ker_1(s_3)) \qquad (3.33)$$

5 numaralı sınır şartından,

$$M_{r1}=-D\left(\frac{d^2w_1}{dr_1^{\,2}}+\frac{\nu}{r_1}\frac{dw_1}{dr_1}\right)=-D\frac{l_1}{l_1^{\,2}}\left(\frac{d^2z_1}{dx_1^{\,2}}+\frac{\nu}{x_1}\frac{dz_1}{dx_1}\right)$$

$$M_{r2}=-D\left(\frac{d^2w_2}{dr_2^{\,2}}+\frac{\nu}{r_2}\frac{dw_2}{dr_2}\right)=-D\frac{l_2}{l_2^{\,2}}\left(\frac{d^2z_2}{dx_2^{\,2}}+\frac{\nu}{x_2}\frac{dz_2}{dx_2}\right)$$

$$\frac{d^2w_1}{dr_1^{\,2}}_{(r_1=a)}=\frac{d^2w_2}{dr_2^{\,2}}_{(r_2=a)}$$

$$\frac{l_1}{l_1^{\,2}}\frac{d^2z_1}{dx_1^{\,2}}_{(s_1)}=\frac{l_2}{l_2^{\,2}}\frac{d^2z_2}{dx_2^{\,2}}_{(s_3)}$$ ve buradan da,

$$z_1''=\frac{l_1}{l_2}z_2'' \qquad (3.34)$$

elde edilir. Yani,

$$A_1(bei_2(s_1)-bei(s_2))+A_2(ber(s_1)-ber_2(s_1))+A_4(\ker(s_1)-\ker_2(s_1))=$$
$$\frac{l_1}{l_2}\left[\begin{array}{l}D_1(bei_2(s_3)-bei(s_3))+D_2(ber(s_3)-ber_2(s_3))+D_3(kei_2(s_3)-kei(s_3))+\\ D_4(\ker(s_3)-\ker_2(s_3))\end{array}\right] \qquad (3.35)$$

6 numaralı sınır şartından,

$$Q_{r1}=D\frac{l_1}{l_1^{\,3}}\frac{d}{dx_1}\left(\frac{d^2z_1}{dx_1^{\,2}}+\frac{1}{x_1}\frac{dz_1}{dx_1}\right)$$

$$Q_{r2}=D\frac{l_2}{l_2^{\,3}}\frac{d}{dx_2}\left(\frac{d^2z_2}{dx_2^{\,2}}+\frac{1}{x_2}\frac{dz_2}{dx_2}\right)$$

$$\frac{d^3w_1}{dr_1^{\,3}}_{(r_1=a)}=\frac{d^3w_2}{dr_2^{\,3}}_{(r_2=a)}$$

$$\frac{l_1}{l_1^{\,3}}\frac{d^3z_1}{dz_1^{\,3}}_{(s_1)}=\frac{l_2}{l_2^{\,3}}\frac{d^3z_2}{dz_2^{\,3}}_{(s_3)}$$ ve buradan da,

$$z_1''' = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 z_2''' \tag{3.36}$$

elde edilir. Yani,

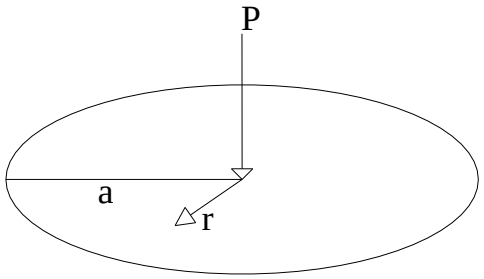
$$\begin{aligned}
&A_1\left(bei_3(s_1) - ber_3(s_1) - 3bei_1(s_1) + 3ber_1(s_1)\right) + \\
&A_2\left(3ber_1(s_1) + 3bei_1(s_1) - ber_3(s_1) - bei_3(s_1)\right) + \\
&A_4\left(3\ker_1(s_1) + 3kei_1(s_1) - \ker_3(s_1) - kei_3(s_1)\right) \\
&= \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 * \\
&(D_1\left(bei_3(s_3) - ber_3(s_3) - 3bei_1(s_3) + 3ber_1(s_3)\right) + \\
&D_2\left(3ber_1(s_3) + 3bei_1(s_3) - ber_3(s_3) - bei_3(s_3)\right) + \\
&D_3\left(kei_3(s_3) - \ker_3(s_3) - 3kei_1(s_3) + 3\ker_1(s_3)\right) + \\
&D_4\left(3\ker_1(s_3) + 3kei_1(s_3) - \ker_3(s_3) - kei_3(s_3)\right))
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Bu 8 denklem yardımıyla A_n ve D_n katsayıları bulunabilir

BÖLÜM 4. ELASTİK ZEMİNE OTURAN DAİRESEL PLAKLARIN ZORLANMIŞ TİTREŞİMLERİ

4.1. Zeminin Homojen Olması Hali

Bu bölümde, Şekil 4.1' de gösterilen, ortasından tekil kuvvet ile harmonik olarak zorlanan plak problemi göz önüne alınmıştır.



Şekil 4.1. Ortasından tekil kuvvetle zorlanan plak

Zorlamayı $P = P_0 e^{i\Omega t}$ olarak göz önüne alalım. Burada P_0 zorlama genliğini, Ω ise zorlama frekansını göstermektedir. Bu durumda (3.1) yönetici denkleminde $q = -\rho h \frac{d^2 w}{dt^2}$ olarak alınırsa probleme ait hareket denklemi

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{d^2 w}{dt^2} + kw = 0 \tag{4.1}$$

olarak elde edilir. Lineer teori kullanıldığına göre, ortamın yer değiştirmesi zorlamaya paralel olarak göz önüne alınabilir.

$$w(r,t) = W(r) e^{i\Omega t} \tag{4.2}$$

Bu durumda (4.1) hareket denklemi,

$$D\nabla^4 W + \left(k - \rho h \Omega^2\right) W = 0 \tag{4.3}$$

olarak elde edilir.

Bu denklemin çözümü için aşağıdaki boyutsuzlaştırmaları yapmak gerekir.

$$\underline{W} = \frac{W}{l_1}\ ,\ x = \frac{r}{l_1}\ ,\ l_1 = \sqrt[4]{\frac{D}{k}}$$

Bu halde denklem aşağıdaki halini almış olur.

$$\nabla^4 \underline{W}\, l_1 + \left(k\frac{l_1^{\,4}}{D} - \rho h \Omega^2 \frac{l_1^{\,4}}{D} \right) \underline{W}\, l_1 = 0 \qquad (4.4)$$

Ω, zorlama frekansı ve ω, fiktif frekans olmak üzere

Eğer, $\rho h \dfrac{l_1^{\,4}}{D} = \dfrac{1}{\omega^2}$ denirse, (4.4) denklemi,

$$\nabla^4 \underline{W} + \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2 \right) \underline{W} = 0 \qquad (4.5)$$

olarak yazılabilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü $(\Omega/\omega)^2$ ifadesinin değerinin 1'den küçük veya büyük olmasına göre değişir.

4.1.1. (1-(Ω/ω)^2) > 0 olması hali

$\beta_1^{\,4} = 1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega} \right)^2$ denirse, (4.5) denklemi,

$$\nabla^4 \underline{W} + \beta_1^{\,4} \underline{W} = 0 \qquad (4.6)$$

halini alır. Bu denklem, $\left(\nabla^2 + i\beta_1^{\,2}\right)\left(\nabla^2 - i\beta_1^{\,2}\right)\underline{W} = 0$ şeklinde yazılabilir. Şimdi W ifadesini, $W = W_{1a} + W_{1b}$ olarak yazalım. Öyle ki, $\left(\nabla^2 + i\beta_1^{\,2}\right)\underline{W_{1a}} = 0$ ve $\left(\nabla^2 - i\beta_1^{\,2}\right)\underline{W_{1b}} = 0$ bağıntıları sağlansın. Bu durumda (4.6) denklemi yerine

$$\frac{d^2 W_{1a}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dW_{1a}}{dx} + i\beta_1^{\,2} W_{1a} = 0 \text{ ve,}$$

$$\frac{d^2 W_{1b}}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dW_{1b}}{dx} - i\beta_1^{\,2} W_{1b} = 0$$

denklemleri elde edilir.

$\xi^2 = \dfrac{x^2 \beta_1^{\,2}}{i}$ tanımlaması yapılırsa,

$x^2 = \dfrac{\xi^2 i}{\beta_1^{\,2}}$ ve $2xdx = 2i\xi\, d\xi / \beta_1^{\,2}$ olarak elde edilir.

$\dfrac{dx}{d\xi} = \dfrac{i\xi}{\beta_1^{\,2}}$ ve $\dfrac{dx^2}{d\xi^2} = \dfrac{i}{\beta_1^{\,2}}$ yazılırsa,

$\beta_1^{\,2} \dfrac{d^2 W_{1a}}{i d\xi^2} + \dfrac{\beta_1^{\,2}}{i\xi} \dfrac{dW_{1a}}{d\xi} + i\beta_1^{\,2} W_{1a} = 0$ ve buradan da,

$$\frac{d^2 W_{1a}}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dW_{1a}}{d\xi} - W_{1a} = 0 \tag{4.7}$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü $W_{1a}(\xi) = A_1 I_0(\xi) + A_2 K_0(\xi)$ şeklindedir. O halde, ξ yerine eşitini yazarak,

$$W_{1a}(x) = A_1 I_0\left(x\beta_1 / \sqrt{i}\right) + A_2 K_0\left(x\beta_1 / \sqrt{i}\right) \tag{4.8}$$

sonucunu yazabiliriz.

$\sqrt{i} = e^{i\pi/4}$ olduğu bilindiğine göre,

$W_{1a}(x) = A_1 I_0(x\beta_1 e^{-i\pi/4}) + A_2 K_0(x\beta_1 e^{-i\pi/4})$

eşitliği yazılabilir. Modifiye Bessel Fonksiyonları olarak tanımlanan I_0 *ve* K_0 fonksiyonları Kelvin fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi tarif edilmiştir.

$$I_0(x\beta_1 e^{-i\pi/4}) = ber(x\beta_1) - ibei(x\beta_1)$$
$$K_0(x\beta_1 e^{-i\pi/4}) = \ker(x\beta_1) - ikei(x\beta_1) \tag{4.9}$$

Bu durumda,

$$W_{1a} = \gamma_1 ber(x\beta_1) + \gamma_2 bei(x\beta_1) + \gamma_3 \ker(x\beta_1) + \gamma_4 kei(x\beta_1) \tag{4.10}$$

Aynı şekilde,

$\nabla^2 W_{1b} - i\beta_1^{\,2} W_{1b} = 0$

$$\frac{d^2W_{1b}}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dW_{1b}}{dx}-i\beta_1{}^2W_{1b}=0 \text{ ve,}$$

$$\frac{d^2W_{1b}}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dW_{1b}}{d\xi}+W_{1b}=0$$

$$W_{1b}(\xi)=B_1J_0(\xi)+B_2Y_0(\xi) \text{ ve}$$

$$W_{1b}(x)=B_1J_0(x\beta_1e^{-i\pi/4})+B_2Y_0(x\beta_1e^{-i\pi/4})$$

denklemleri yazılabildiğine göre,

$$W_{1b}=\phi_1 ber(x\beta_1)+\phi_2 bei(x\beta_1)+\phi_3\ker(x\beta_1)+\phi_4 kei(x\beta_1) \tag{4.11}$$

şeklinde çözüme ulaşılabilir.

O halde sonuç olarak şu söylenebilir ki,

$1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2>0$ olması halinde çözüm

$$\underline{W}=E_1ber(x\beta_1)+E_2bei(x\beta_1)+E_3\ker(x\beta_1)+E_4kei(x\beta_1) \tag{4.12}$$

şeklindedir.

4.1.2. (1-(Ω/ω)^2) < 0 olması hali

$\beta_2{}^4=-\left(1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)$ olmak üzere,

$$\nabla^4\underline{W}-\beta_2{}^4\underline{W}=0 \tag{4.13}$$

Bu ifadeyi de iki çarpan halinde yazarsak,

$\nabla^2 W_{1c}+\beta_2{}^2 W_{1c}=0$ ve,

$\nabla^2 W_{1d}-\beta_2{}^2 W_{1d}=0$

$$W_{1c}=F_1I_0(x\beta_2)+F_2K_0(x\beta_2)$$

$$W_{1d}=F_3J_0(x\beta_2)+F_4Y_0(x\beta_2)$$

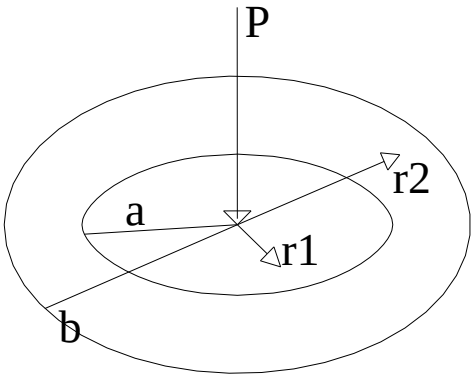
O halde,

$1-\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 < 0$ olması halinde çözüm,

$$\underline{W} = F_1 I_0(x\beta_2) + F_2 K_0(x\beta_2) + F_3 J_0(x\beta_2) + F_4 Y_0(x\beta_2) \tag{4.14}$$

şeklindedir. Bu denklemdeki sabit F_n katsayıları problemin sınır koşullarından bulunabilir. Bu sınır koşulları statik yükleme durumundakilerle yani (3.2.1)' de verilenlerle aynıdır.

4.2. Zeminin Homojen Olmaması Hali



Şekil 4.2. Ortasından tekil yükle zorlanan ve homojen olmayan elastik zemine oturan dairesel plak

$$P = P_0 e^{i\Omega t}$$

Şekil 4.2' de gösterilen plak hali için,

$$w_1(r,t) = W_1(r) e^{i\Omega t}$$

$$w_2(r,t) = W_2(r) e^{i\Omega t}$$

$$\underline{W_1} = \frac{W_1}{l_1}\ ,\ x_1 = \frac{r}{l_1}\ ,\ l_1 = \sqrt[4]{\frac{D}{k_1}}$$

$$\underline{W_2} = \frac{W_2}{l_2}\ ,\ x_2 = \frac{r}{l_2}\ ,\ l_1 = \sqrt[4]{\frac{D}{k_2}}$$

boyutsuzlaştırmaları ile çözüme gidilirse,

$$D\nabla^4 W_1 + \left(k_1 - \rho\, h\Omega^2\right) W_1 = 0 \tag{4.15}$$

$$D\nabla^4 W_2 + \left(k_2 - \rho h\Omega^2\right)W_2 = 0 \tag{4.16}$$

$$\nabla^4 \underline{W_1}\, l_1 + \left(k_1 \frac{l_1^{\,4}}{D} - \rho h\Omega^2 \frac{l_1^{\,4}}{D} \right)\underline{W_1}\, l_1 = 0 \tag{4.17}$$

$$\nabla^4 \underline{W_2}\, l_1 + \left(k_2 \frac{l_1^{\,4}}{D} - \rho h\Omega^2 \frac{l_2^{\,4}}{D} \right)\underline{W_2}\, l_2 = 0 \tag{4.18}$$

$\rho h \dfrac{l_1^{\,4}}{D} = \dfrac{1}{\omega_1^{\,2}} = \dfrac{\rho h}{k_1}$ ve $\rho h \dfrac{l_2^{\,4}}{D} = \dfrac{1}{\omega_2^{\,2}} = \dfrac{\rho h}{k_2}$ olmak üzere,

$$\nabla^4 \underline{W_1} + \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 \right)\underline{W_1} = 0 \tag{4.19}$$

$$\nabla^4 \underline{W_2} + \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_2} \right)^2 \right)\underline{W_2} = 0 \tag{4.20}$$

olduğu açıkça görülebilmektedir.

Eğer, $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{k_1}{\rho h}\dfrac{\rho h}{k_2} = \dfrac{k_1}{k_2}$ olarak yazılırsa,

$$\nabla^4 \underline{W_1} + \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 \right)\underline{W_1} = 0 \tag{4.21}$$

ve,

$$\nabla^4 \underline{W_2} + \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\left(\frac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 \right)\underline{W_2} = 0 \tag{4.22}$$

olarak elde edilir.

Bu durumda çözümler, $\dfrac{k_1}{k_2}$ ve $\dfrac{\Omega}{\omega_1}$ değerlerine bağlı olarak değişmektedir.

$\beta_3^{\,4} = 1 - \left(\dfrac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 = \alpha_1$ ve $\beta_4^{\,4} = 1 - \dfrac{k_1}{k_2}\left(\dfrac{\Omega}{\omega_1} \right)^2 = \alpha_2$ olmak üzere aşağıda verilen koşullar altında çözümler aranabilir.

4.2.1. k1/k2 > 1 olması hali

Bu halde, Ω/ω_1 'in değerine bağlı olarak 3 farklı durum söz konusudur.

a) $\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2 < \frac{k_2}{k_1} < 1$ olması durumu

Bu durumda, $\alpha_1 > 0$ ve $\alpha_2 > 0$

O halde,

$$\nabla^4 \underline{W_1} + \beta_3{}^4 \underline{W_1} = 0 \quad \text{ve} \tag{4.23}$$

$$\underline{W_1} = G_1 ber(x_1\beta_3) + G_2 bei(x_1\beta_3) + G_3 \ker(x_1\beta_3) + G_4 kei(x_1\beta_3) \tag{4.24}$$

çözümü geçerlidir.

Aynı şekilde,

$$\nabla^4 \underline{W_2} + \beta_4{}^4 \underline{W_2} = 0 \quad \text{ve}$$

$$\underline{W_2} = H_1 ber(x_2\beta_4) + H_2 bei(x_2\beta_4) + H_3 \ker(x_2\beta_4) + H_4 kei(x_2\beta_4) \tag{4.25}$$

çözümü geçerlidir

b) $\frac{k_2}{k_1} < \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2 < 1$ olması durumu

Bu durumda, $\alpha_1 > 0$ ve $\alpha_2 < 0$

O halde,

$$\nabla^4 \underline{W_1} + \beta_3{}^4 \underline{W_1} = 0 \quad \text{ve}$$

$$\underline{W_1} = G_1 ber(x_1\beta_3) + G_2 bei(x_1\beta_3) + G_3 \ker(x_1\beta_3) + G_4 kei(x_1\beta_3)$$

çözümü geçerli olacaktır.

Diğer yandan,

$$\nabla^4 \underline{W_2} - \beta_4{}^4 \underline{W_2} = 0 \quad \text{olduğu için,}$$

$$\underline{W_2} = M_1 I_0(x_2\beta_4) + M_2 K_0(x_2\beta_4) + M_3 J_0(x_2\beta_4) + M_4 Y_0(x_2\beta_4) \tag{4.26}$$

çözümü geçerlidir.

c) $\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2 > 1$ olması durumu

Bu durumda, $\alpha_1 < 0$ ve $\alpha_2 < 0$

O halde,

$\nabla^4 \underline{W_1} - \beta_3{}^4 \underline{W_1} = 0$ olduğu için,

$$\underline{W_1} = P_1 I_0(x_1\beta_3) + P_2 K_0(x_1\beta_3) + P_3 J_0(x_1\beta_3) + P_4 Y_0(x_1\beta_3) \tag{4.27}$$

çözümü geçerlidir.

Aynı şekilde,

$\nabla^4 \underline{W_2} - \beta_4{}^4 \underline{W_2} = 0$ olduğu için,

$$\underline{W_2} = M_1 I_0(x_2\beta_4) + M_2 K_0(x_2\beta_4) + M_3 J_0(x_2\beta_4) + M_4 Y_0(x_2\beta_4) \tag{4.28}$$

çözümü geçerlidir.

4.2.2. k1/k2 < 1 olması hali

Bu halde de, Ω/ω_1 'in değerine bağlı olarak 3 farklı durum söz konusudur.

a) $\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2 < 1 < \frac{k_2}{k_1}$ olması durumu

Bu durumda, $\alpha_1 > 0$ ve $\alpha_2 > 0$

O halde,

$\nabla^4 \underline{W_1} + \beta_3{}^4 \underline{W_1} = 0$ ve

$$\underline{W_1} = G_1 ber(x_1\beta_3) + G_2 bei(x_1\beta_3) + G_3 \ker(x_1\beta_3) + G_4 kei(x_1\beta_3) \tag{4.29}$$

çözümü geçerli olacaktır.

Aynı şekilde

$\nabla^4 \underline{W_2} + \beta_4{}^4 \underline{W_2} = 0$ ve

$$\underline{W_2} = H_1 ber(x_2\beta_4) + H_2 bei(x_2\beta_4) + H_3 \ker(x_2\beta_4) + H_4 kei(x_2\beta_4) \tag{4.30}$$

çözümü geçerlidir.

b) $1 < \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2 < \frac{k_2}{k_1}$ olması durumu

Bu durumda, $\alpha_1 < 0$ ve $\alpha_2 > 0$

O halde,

$\nabla^4 \underline{W_1} - \beta_3{}^4 \underline{W_1} = 0$ olduğu için,

$$\underline{W_1} = P_1 I_0(x_1\beta_3) + P_2 K_0(x_1\beta_3) + P_3 J_0(x_1\beta_3) + P_4 Y_0(x_1\beta_3) \tag{4.31}$$

çözümü geçerlidir.

Diğer yandan,

$\nabla^4 \underline{W_2} + \beta_4{}^4 \underline{W_2} = 0$ olduğundan,

$$\underline{W_2} = H_1 ber(x_2\beta_4) + H_2 bei(x_2\beta_4) + H_3 \ker(x_2\beta_4) + H_4 kei(x_2\beta_4) \tag{4.32}$$

çözümü geçerli olacaktır.

c) $1 < \dfrac{k_2}{k_1} < \left(\dfrac{\Omega}{\omega_1}\right)^2$

Bu durumda, $\alpha_1 < 0$ ve $\alpha_2 < 0$

O halde,

$\nabla^4 \underline{W_1} - \beta_3{}^4 \underline{W_1} = 0$ olduğu için,

$$\underline{W_1} = P_1 I_0(x_1\beta_3) + P_2 K_0(x_1\beta_3) + P_3 J_0(x_1\beta_3) + P_4 Y_0(x_1\beta_3) \tag{4.33}$$

çözümü geçerlidir.

Aynı şekilde,

$\nabla^4 \underline{W_2} - \beta_4{}^4 \underline{W_2} = 0$ olduğu için,

$$\underline{W_2} = M_1 I_0(x_2\beta_4) + M_2 K_0(x_2\beta_4) + M_3 J_0(x_2\beta_4) + M_4 Y_0(x_2\beta_4) \tag{4.34}$$

çözümü geçerlidir.

Denklemlerdeki sabit katsayılara sınır şartlarının plak denklemlerine uygulanması ile ulaşılabilir. Bu sınır şartları statik yükleme hali için geçerli olan sınır şartlarıyla aynıdır.

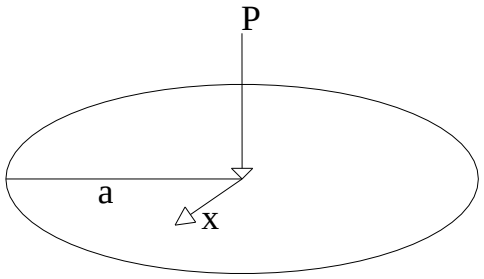
BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, bölüm 3 ve bölüm 4 içinde yer alan bazı problemlere ait sayısal sonuçlar gösterilmiştir.

5.1. Statik Yükleme Hali

5.1.1. Zeminin homojen olması durumu

Şekil 5.1 de gösterilen, homojen elastik zemine serbest oturan, merkezinden tekil yüklü plağı göz önüne alalım.



Şekil 5.1. Merkezinden tekil yüklü dairesel plak

0<x<a için $z_1 = A_1 ber x_1 + A_2 bei x_1 + A_3 \ker x_1 + A_4 kei x_1$

$w_1 = l_1 z_1$

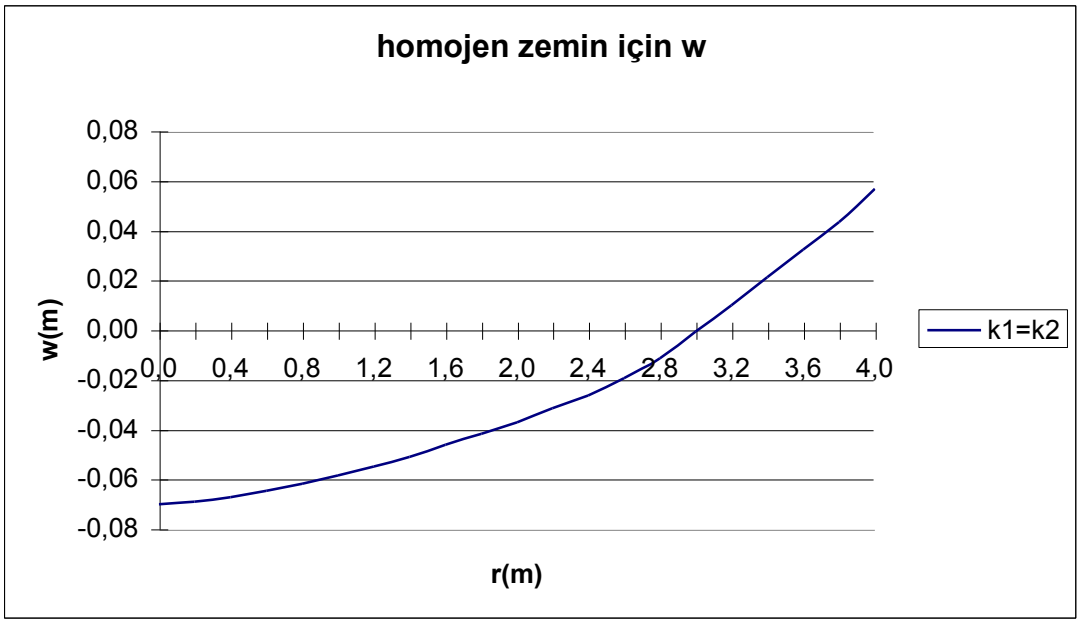
a=4m , $k_1 = 5000000\, N/m^2$

h (plak kalınlığı)=0,05m

$E = 2.10^{11}\, N/m^2$

$\nu = 0{,}25$ için

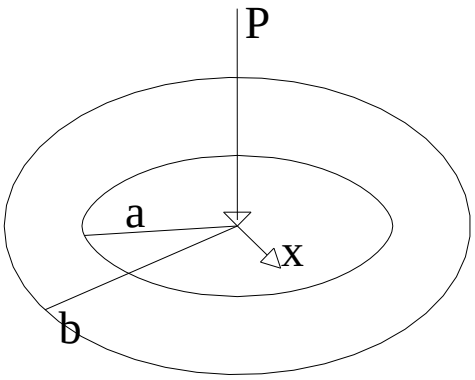
$P = 100000N$ olması halinde plağın yarıçapı boyunca çökme diyagramı şekil 5.2' de gösterilmiştir



Şekil 5.2. Homojen elastik zemine oturan merkezinden tekil yüklü dairesel plağın yarıçap boyunca çökme eğrisi

5.1.2 Zeminin homojen olmaması durumu

Şekil 5.3 de gösterilen, homojen olmayan elastik zemine serbest oturan, merkezinden tekil yüklü plağı göz önüne alalım.



Şekil 5.3. Homojen olmayan elastik zemine serbest oturan, merkezinden tekil yüklü plak

$0<x<a/l_1$ için $z_1 = A_1 ber x_1 + A_2 bei x_1 + A_3 \ker x_1 + A_4 kei x_1 \quad (w_1, k_1)$

$a/l_2 <x< b/l_2$ için $z_2 = D_1 ber x_2 + D_2 bei x_2 + D_3 \ker x_2 + D_4 kei x_2 \quad (w_2, k_2)$

$w_1 = l_1 z_1$

$w_2 = l_2 z_2$

a=2m , b=4m , $k_1 = 5000000\, N/m^2$, $k_2 = 2500000\, N/m^2$ $(k_1 / k_2 = 2)$

h (plak kalınlığı)=0,05m

$E = 2.10^{11}\, N/m^2$

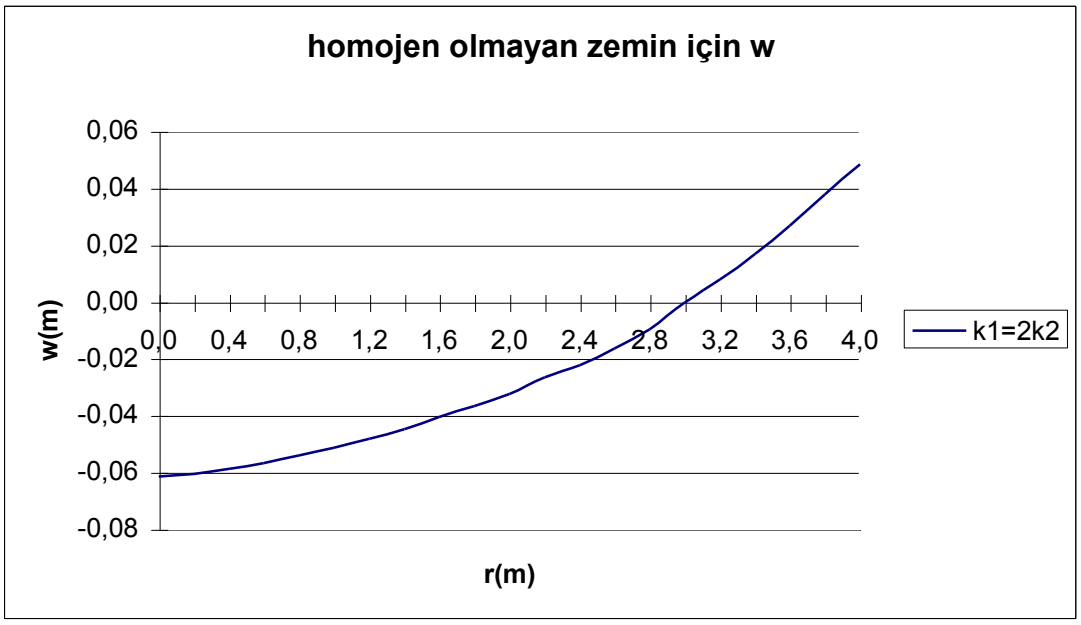
$\nu = 0{,}25$ için

$P = 100000N$ olması halinde plağın yarıçapı boyunca çökme, kesme kuvveti ve eğilme momenti diyagramları şekil 5.4, 5.5 ve 5.6' da gösterilmiştir.

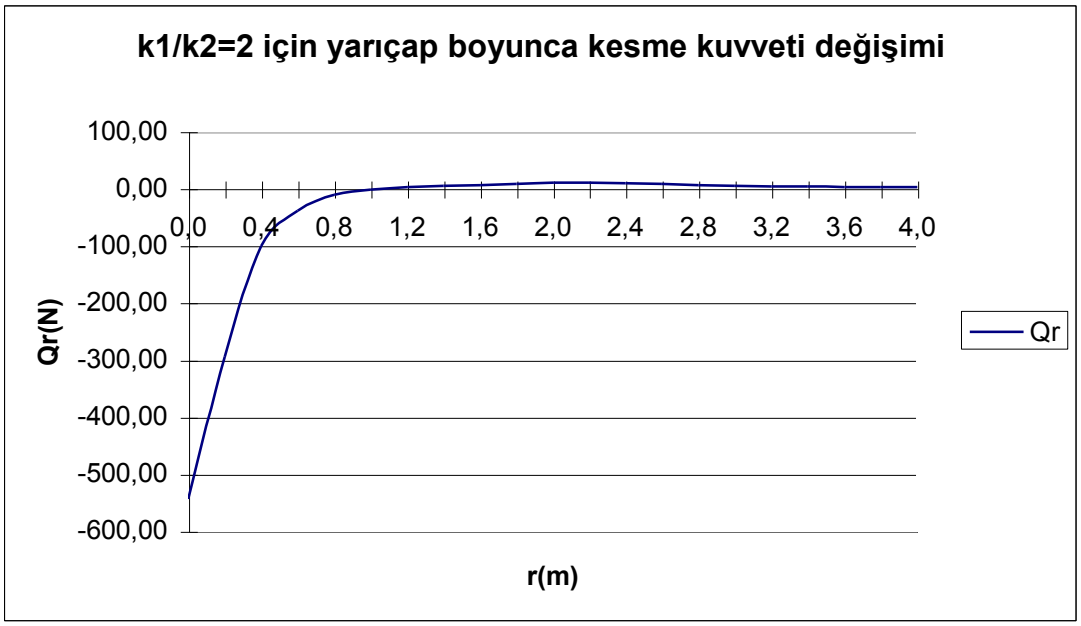
$$\frac{k_1}{D} = \frac{1}{l_1^{\,4}}, \quad \frac{k_2}{D} = \frac{1}{l_2^{\,4}}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} = 2222222{,}2222Nm$$

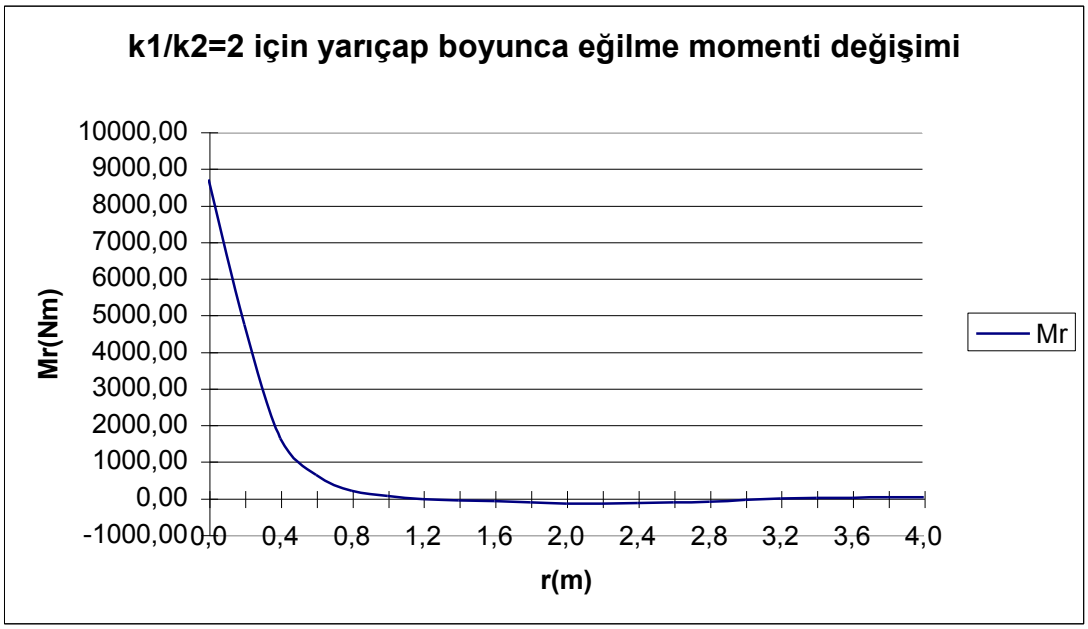
$$s_1 = \frac{a}{l_1}, \quad s_2 = \frac{b}{l_2}, \quad s_3 = \frac{a}{l_2}$$



Şekil 5.4. Homojen olmayan $\left(k_1 = 2k_2\right)$ elastik zemine oturan merkezinden tekil yüklü dairesel plağın yarıçap boyunca çökme eğrisi



Şekil 5.5. Homojen olmayan elastik zemine oturan merkezinden tekil yüklü dairesel plağın yarıçap boyunca kesme kuvveti değişimi eğrisi

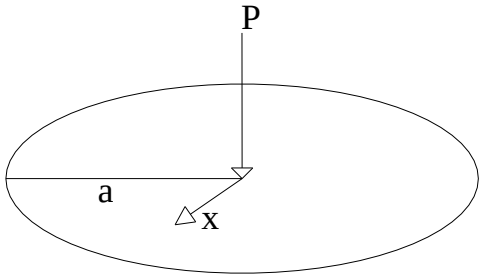


Şekil 5.6. Homojen olmayan elastik zemine oturan merkezinden tekil yüklü dairesel plağın yarıçap boyunca eğilme momenti değişimi eğrisi

5.2. Harmonik Yükleme Hali

5.2.1 Zeminin homojen olması durumu

Şekil 5.1' de gösterilen plak halini bu kez harmonik zorlama etkisi altında göz önüne alalım.



Şekil 5.7. Homojen elastik zemine serbest oturan, merkezinden harmonik yüklü plak

$P = P_0 e^{i\Omega t}$ olmak üzere, (Ω/ω_1) değerinin 0-2 aralığında değişimi ile plak merkezi ve plak dış kenarlarındaki yer değiştirme genliklerinin alacağı değerler şekil 5.8'de gösterilmiştir.

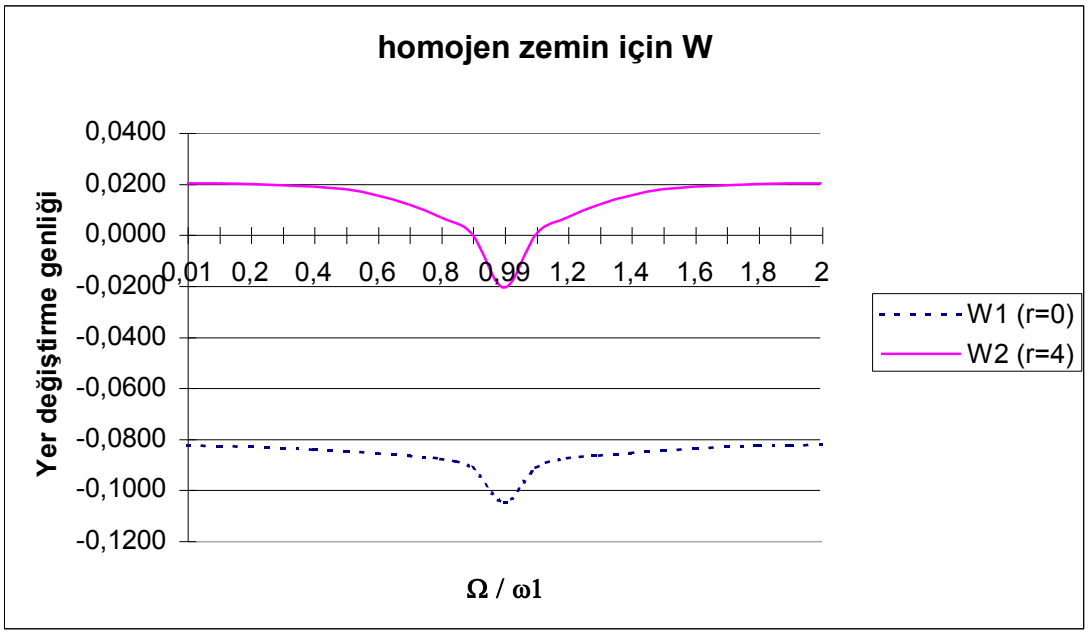
Bu problem için,

a=4m, $k_1 = 5000000\, N/m^2$

h (plak kalınlığı)=0,05m

$E = 2.10^{11}\, N/m^2$

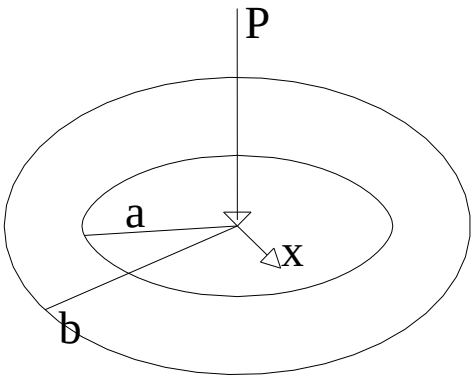
$\nu = 0{,}25$ olarak alınmıştır.



Şekil 5.8. Homojen zemine oturan dairesel plağın (Ω/ω_1) değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi

5.2.2. Zeminin homojen olmaması durumu

Şekil 5.3' de gösterilen plak halini bu kez harmonik zorlama etkisi altında göz önüne alalım.



Şekil 5.9. Homojen olmayan elastik zemine serbest oturan, merkezinden harmonik yüklü plak

$$P = P_0 e^{i\Omega t}$$

5.2.2.1 k1/k2=0,5 olması hali

$$o < x < \frac{a}{l_1} \text{ için } (w_1, k_1) \quad \underline{W_1} = \frac{W_1}{l_1}$$

$$\frac{a}{l_2} < x < \frac{b}{l_2} \quad \text{için } (w_2, k_2)\ \underline{W_2} = \frac{W_2}{l_2}$$

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \frac{k_1}{k_2} = 0{,}5$$

$$\nabla^4 \underline{W_1} + \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right)\underline{W_1} = 0$$

$$\nabla^4 \underline{W_2} + \left(1 - 0{,}5\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right)\underline{W_2} = 0$$

$P = P_0 e^{i\Omega t}$ olmak üzere, (Ω/ω_1) değerinin 0-2 aralığında değişimi ile plak merkezi ve plak dış kenarlarındaki düşey yer değiştirme genliklerinin alacağı değerler şekil 5.10'da gösterilmiştir.

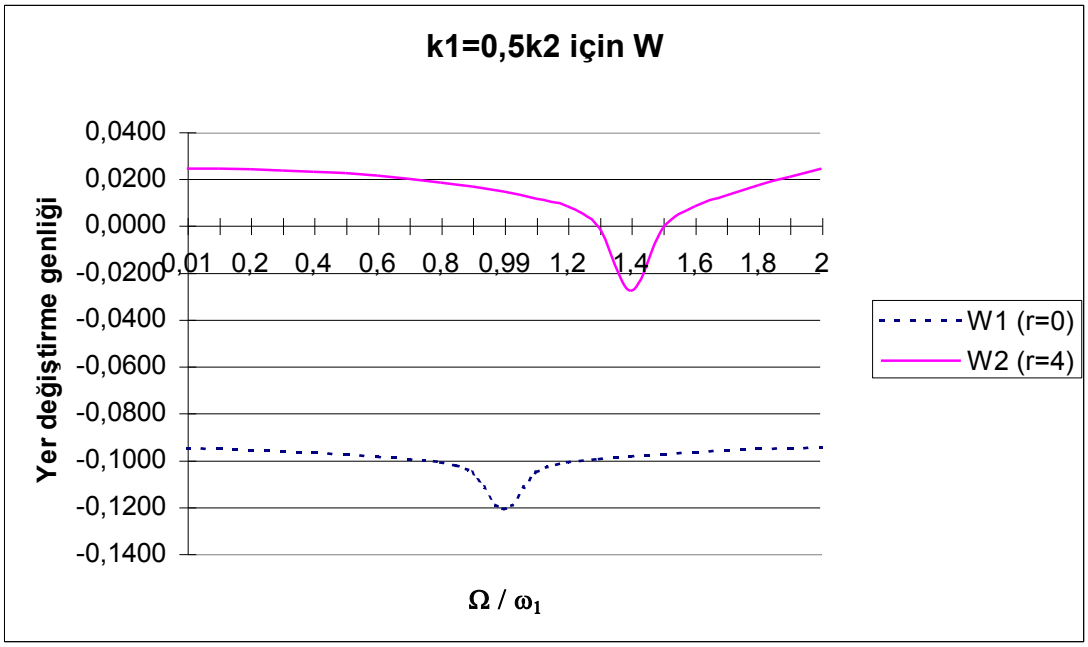
Bu problem için,

a=2m , b=4m , $k_1 = 2500000\, N/m^2$, $k_2 = 5000000\, N/m^2$ $(k_1 / k_2 = 0{,}5)$

h (plak kalınlığı)=0,05m

$E = 2*10E+11 N/m^2$

$\nu = 0{,}25$ olarak alınmıştır.



Şekil 5.10. Homojen olmayan $(k_1 = 0{,}5k_2)$ zemine oturan dairesel plağın (Ω/ω_1) değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi

5.2.2.2. k1/k2=2 olması hali

$o < x < a$ için (w_1, k_1) $\underline{W_1} = \dfrac{W_1}{l_1}$

$a < x < b$ için (w_2, k_2) $\underline{W_2} = \dfrac{W_2}{l_2}$

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \frac{k_1}{k_2} = 2$$

$$\nabla^4 \underline{W_1} + \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right)\underline{W_1} = 0$$

$$\nabla^4 \underline{W_2} + \left(1 - 2\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right)\underline{W_2} = 0$$

$P = P_0 e^{i\Omega t}$ olmak üzere, (Ω/ω_1) değerinin 0-2 aralığında değişimi ile plak merkezi ve plak dış kenarlarındaki düşey yer değiştirme genliklerinin alacağı değerler şekil 5.11'de gösterilmiştir.

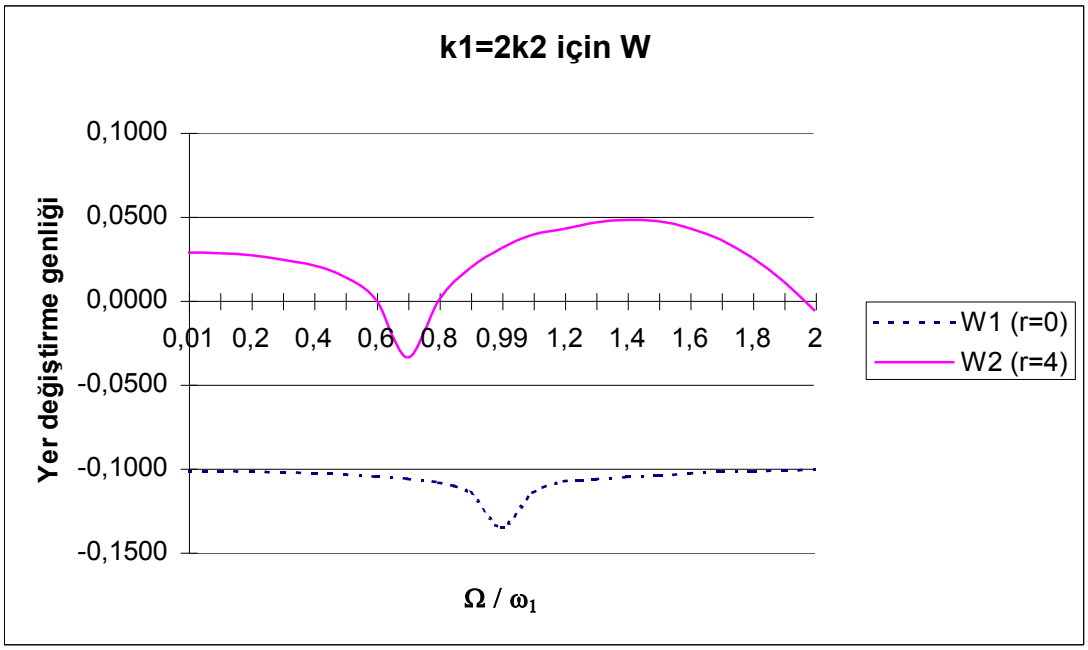
Bu problem için,

a=2m , b=4m , $k_1 = 5000000\, N/m^2$, $k_2 = 2500000\, N/m^2$ $(k_1 / k_2 = 2)$

h (plak kalınlığı)=0,05m

$E = 2.10^{11}\, N/m^2$

$\nu = 0{,}25$ olarak alınmıştır.



Şekil 5.11. Homojen olmayan $(k_1 = 2k_2)$ zemine oturan dairesel plağın (Ω/ω_1) değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi

5.2.2.3. k1/k2=4 olması hali

$o < x < a$ için (w_1, k_1) $\underline{W_1} = \dfrac{W_1}{l_1}$

$a < x < b$ için (w_2, k_2) $\underline{W_2} = \dfrac{W_2}{l_2}$

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \frac{k_1}{k_2} = 4$$

$$\nabla^4 \underline{W_1} + \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right)\underline{W_1} = 0$$

$$\nabla^4 \underline{W_2} + \left(1 - 4\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right)\underline{W_2} = 0$$

$P = P_0 e^{i\Omega t}$ olmak üzere, (Ω/ω_1) değerinin 0-2 aralığında değişimi ile plak merkezi ve plak dış kenarlarındaki düşey yer değiştirme genliklerinin alacağı değerler şekil 5.12'de gösterilmiştir.

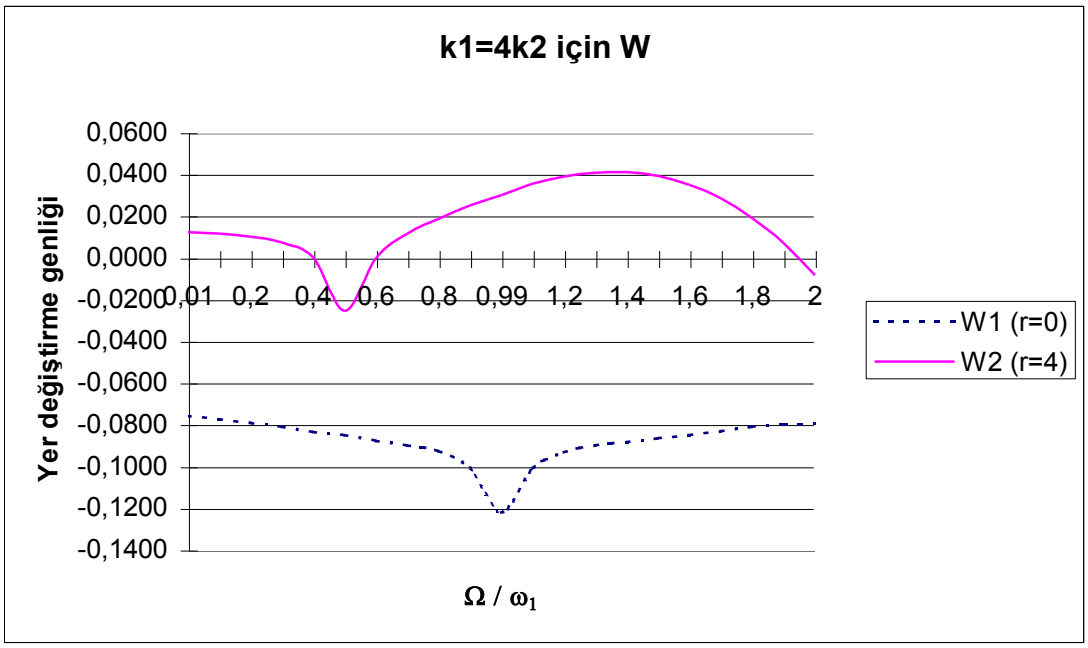
Bu problem için,

a=2m , b=4m , $k_1 = 5000000\, N/m^2$, $k_2 = 1250000\, N/m^2$ $(k_1/k_2 = 4)$

h (plak kalınlığı)=0,05m

$E = 2.10^{11}\ N/m^2$

$\nu = 0{,}25$ olarak alınmıştır.



Şekil 5.12. Homojen olmayan $(k_1 = 4k_2)$ zemine oturan dairesel plağın (Ω/ω_1) değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi

5.2.2.4. k1/k2=8 olması hali

$o < x < a$ için (w_1, k_1) $\underline{W_1} = \dfrac{W_1}{l_1}$

$a < x < b$ için (w_2, k_2) $\underline{W_2} = \dfrac{W_2}{l_2}$

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 = \frac{k_1}{k_2} = 8$$

$$\nabla^4 \underline{W_1} + \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right)\underline{W_1} = 0$$

$$\nabla^4 \underline{W_2} + \left(1 - 8\left(\frac{\Omega}{\omega_1}\right)^2\right)\underline{W_2} = 0$$

$P = P_0 e^{i\Omega t}$ olmak üzere, (Ω/ω_1) değerinin 0-2 aralığında değişimi ile plak merkezi ve plak dış kenarlarındaki düşey yer değiştirme genliklerinin alacağı değerler şekil 5.13'te gösterilmiştir.

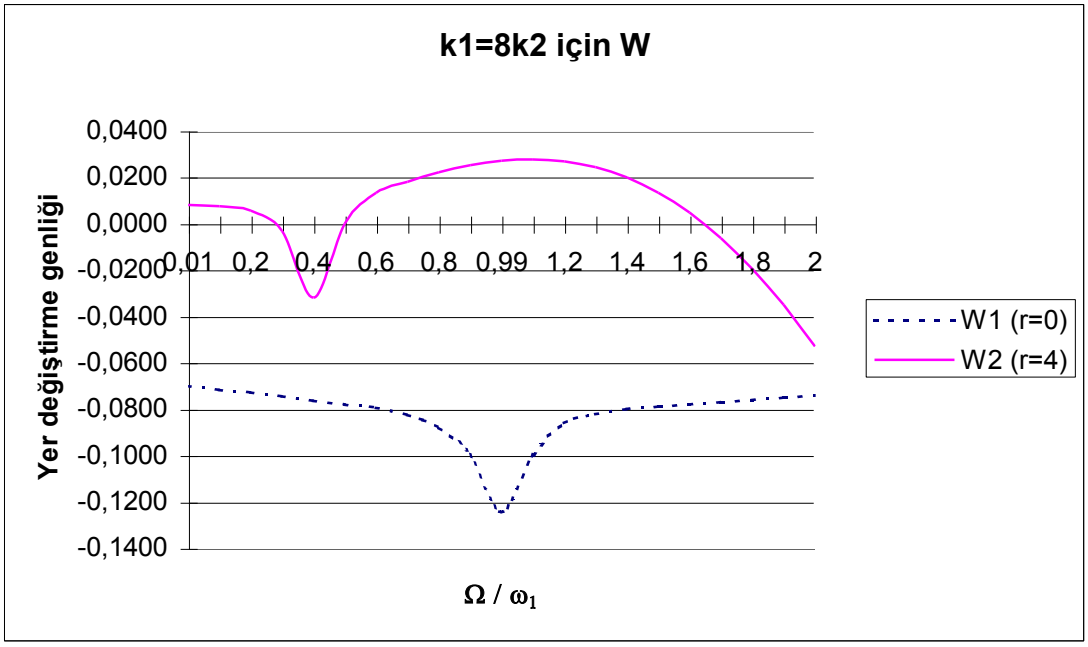
Bu problem için,

a=2m , b=4m , $k_1 = 5000000\, N/m^2$, $k_2 = 625000\, N/m^2$ $(k_1 / k_2 = 8)$

h (plak kalınlığı)=0,05m

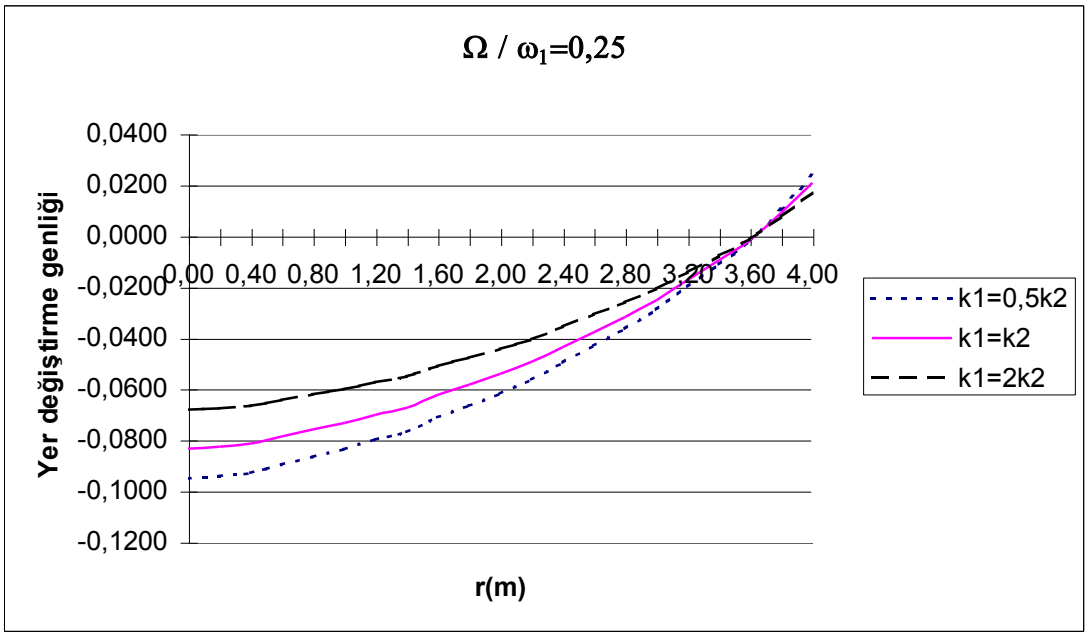
$E = 2.10^{11}\, N/m^2$

$\nu = 0{,}25$ olarak alınmıştır.

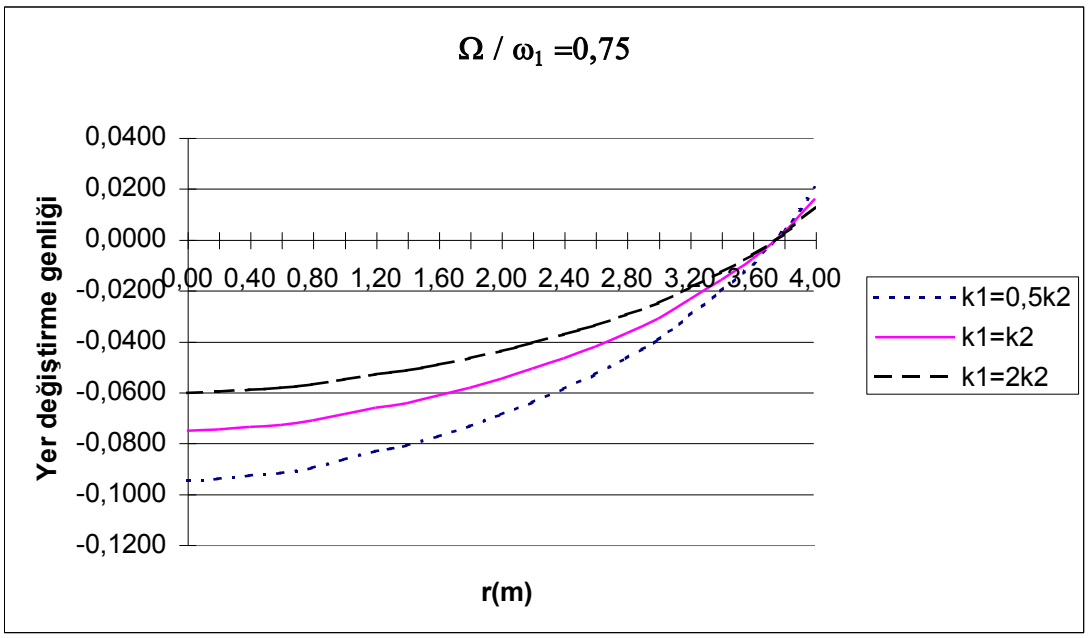


Şekil 5.13. Homojen olmayan $(k_1 = 8k_2)$ zemine oturan dairesel plağın (Ω/ω_1) değerlerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi

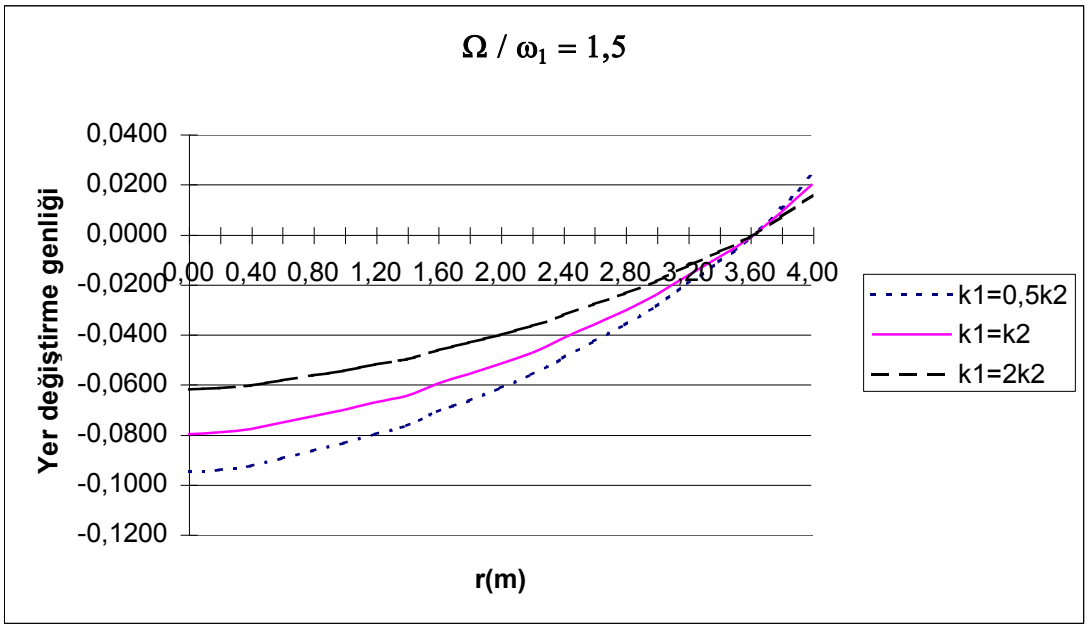
Şekil 5.14, 5.15 ve 5.16' da ise, $k_1 = 0{,}5k_2$, $k_1 = k_2$ ve $k_1 = 2k_2$ durumları için belli Ω/ω_1 oranları altında plağın yarıçapı boyunca değişen düşey yer değiştirme genlik değerlerinin değişimleri gösterilmektedir.



Şekil 5.14. Homojen olmayan zemine oturan dairesel plağın $(\Omega/\omega_1 = 0{,}25)$ değerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi



Şekil 5.15. Homojen olmayan zemine oturan dairesel plağın $(\Omega/\omega_1 = 0{,}75)$ değerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi



Şekil 5.16. Homojen olmayan zemine oturan dairesel plağın $(\Omega/\omega_1 = 1{,}5)$ değerine karşılık gelen düşey yer değiştirme genliklerinin değişimi

5.3. Sonuçlar

Bu çalışmada elastik zemine oturan ince dairesel plak problemi incelenmiştir. Plak merkezinden tekil yükle yüklenerek, statik ve harmonik zorlama halleri olmak üzere iki durum için çözülmüştür.

Her iki halde de önce zemin yatak katsayısı homojen olarak alınmıştır. Daha sonra yatak katsayısının plağın ortasında aniden değiştiği hal için çözüm yapılmıştır. Yatak katsayısı iç bölgede k_1 ve dış bölgede k_2 olarak alınmıştır. $k_1 > k_2$ halinde iç bölgede daha sert zemin, dış bölgede ise daha zayıf zemin hali söz konusudur. $k_1 < k_2$ halinde ise bu durum tam tersidir.

Statik ve dinamik haller için homojen zemin ile homojen olmayan zemin durumlarında plak yarıçapı boyunca çökme, eğilme momenti ve kesme kuvvetinin değişimi incelenmiştir. Yer değiştirmenin aksine, kesme kuvveti ve momentin plağın merkezine yakın bölgelerde daha etkili olduğu görülmüştür.

Dinamik halde, plak orta ve uç noktalarında yer değiştirme genliklerinin frekans oranlarına göre değişimi incelenmiştir. Homojen durumda, $\Omega/\omega_1 \; ve \; k_1/k_2$ oranlarına göre çeşitli değerler için rezonans elde edilmiştir. Ancak rezonans bölgesinde yer değiştirme sonsuz olmamaktadır. Yer değiştirme değerleri zeminin homojen olmaması durumunda beklenildiği gibi $k_1 > k_2$ için daha az, $k_1 < k_2$ için daha fazla olarak elde edilmiştir.

Bu çalışmanın devamı olarak yatak katsayısının sürekli olarak değişmesi ve/veya herhangi bir zorlama hali göz önüne alınabilir.

KAYNAKLAR

[1] **Winkler, E.,** Die Lehre von der Elastizitat und Festiget, Prague, Czechoslovakia(1867)

[2] **Kerr, A. D.,** Elastic and Viscoelastic Foundation Models, Journal of Applied Mech, September(1964)

[3] **Zimmerman, H.,** Die Berechnung des Eisenbahnaber bauses, Second Edition, Berlin, Germany, (1888)

[4] **Heteyni, M.,** Beams on Elastic Foundation, The University of Michigan Press, Ann Arbor, Michigan, (1946)

[5] **Dodge, A.,** Influence Functions for Beams on Elastic Foundations, J. Structure Div., Proceedings ASCE, August, pp.63-101,(1964)

[6] **Donalt, D., ELY, F . J., Sergev., Barbarita, B**., Influence Functions Diss. ASCE, April, pp. 187-194, (1965)

[7] **Miranda, C.K., Nair, K.,** Finite Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proceedings ASCE, Vol.92, No.ST2, April, pp.131-142, (1946)

[8] **Durelli A., Parks, V.J., Mok, C.K.C.,** Photoelastic Beams on Elastic Foundations, J. Struc. Div. Proceedings ASCE, August, pp.1713-1725, (1966)

[9] **Severn, R.T.,** The solution of Foundation Mat. Problems by Finite Elements Methods, Struc. Eng. London, June, (1966)

[10] **Munther, J.H.,** Photoelastic Study of Beams on Elastic Foundations, Discussion, Vol.96, April, ASCE, pp.864-870, (1970)

[11] **Weistman, Y.,** On Foundation That React in Compression Only , J. App. Mechanics, Trancestions ASME, Vol.37, pp.1019-1030, December, (1970

[12] **Ting, B.Y.,** Finite Beams on Elastic Foundation With Restrains, J. Struc. Div. Proceedings of ASCE, Vol.108, No.ST3, March, pp.611-621, (1982)

[13] **Özgen , K.,** Elastik Zemine Oturan Betonarme Kirişlerin Limit Analizi, Doğa Bilim Dergisi Müh./ Çevre. Cilt 6, 13-19, (1982)

[14] **Zhaohua, F., Cook. R.D.,** Beam Elements On Two-Parameter Elastics Foundations, Journal of Eng. Mech., Vol.109, No.6, December, (1983)

[15] **Katsikadelis, J.T**., **Armenakas, A.E.,** Plates On Elastic Foundations by BIE Method, Journal of Eng. Mech, Vol.110, No.7, July, (1984)

[16] **Ting, B.V., Mockry E.F.,** Beam on Elastic Foundation Finite Element, Journal of Struc. Eng., Vol.110,No.10, October, pp. 2324-2339,(1984)

[17] **Lin, L.,Adams, G.G.,** Beam on Tensionless Elastic Foundation, Journal of Eng. Mech., Vol.113, No.4, April , pp. 542-553, (1987)

[18] **Celep, Z., Malaika, A., Abu-Hussein, M.,** Forced Vibrations of a Beam on a Tensionless Foundation, J. Sound and Vibration, pp.235-246, 128/2, (1988)

[19] **Elmas, M.,** Elastoplastik Zemine Oturan Sonlu Kirişlerin Deneysel İncelenmesi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, İstanbul, (1988)

[20] **Celep, Z.,** Rectangular Plates Resting on Tensionless Elastic Foundation, Journal of Eng. Mech., Vol.114, No.12 , December , (1988)

[21] **De Rosa, M.A.,** Stability and Dynamics of Beams on Winkler Foundations, Earth. Eng. Struct. Dyn, Vol.18, pp.377-388 (1989)

[22] **Engin, H.,** Elastoplastik Zemine Oturan Kiriş ve Plaklar, İTÜ İnşaat Fak., İnşaat Mühendisliğinde Bilgisayar Kullanımı. III. Sempozyum, İstanbul, syf. 15-18, Haziran, (1992)

[23] **Özdoğan, G., M**., 1995. İki Parametreli Elastik Zemine Oturan Dairesel Plak Problemleri, *Yüksek Lisans Tezi,* İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul

[24] **Timoshenko, S., Woinows-Krieger, S.,** Theory of Plates and Shells, (1959)

[25] **Abromovitz, M., Irene, A. S.,** Handbook of Mathematical Functions, NOVEMBER 1970

ÖZGEÇMİŞ

Emin Mete ÖZTÜRK, 1978 yılında Erzurum' da doğdu. İlk öğrenimini 50. Yıl ilkokulu'nda, Orta öğrenimini Erzurum Anadolu Lise'sinde tamamladı.

1996 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümünü kazandı. 2000 yılında İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Yapı Mühendisliği Anabilim Dalı, Mekanik programında yüksek lisans öğrenimine başladı.