



T.C.

SELÇUK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PERİYODU VE SİSTEMİN DENGE NOKTALARI

Esra HANEDAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ağustos-2014

KONYA

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Esra HANEDAR
26-08-2014

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PERİYODU VE SİSTEMİN DENGE NOKTALARI

Esra HANEDAR
Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr.Kemal USLUI

2014, 35 Sayfa

Jüri
Yrd.Doç.Dr. Kemal USLU
Yrd.Doç.Dr. Turgay ÜSTÜNER
Yrd.Doç.Dr. Ş.Burcu BOZKURT ALTINDAĞ

Bu tez çalışmasında, lineer olmayan fark denklem sistemleri araştırılmış ve bu sistemlerin çözümleri başlangıç şartları göz önüne alınarak elde edilmiştir. Ayrıca bu sistemlerin çözümlerinin periyotları incelenmiş ve göz önüne alınan sistemlerin farklı periyotlara sahip olduğu bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Fark denklem sistemleri, Sistemin çözümünün periyodu, Sistemin çözümlerinin davranışları

ABSTRACT

MS THESIS

THE PERIOD OF SOLUTIONS OF NON-LINEAR DIFFERENCE EQUATION SYSTEM AND EQUILIBRIUM POINTS OF THIS SYSTEM

Esra HANEDAR

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCEOF SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE / DOCTOR OF PHILOSOPHY IN MECHANICAL ENGINEERING

Advisor: Asst.Prof.Dr. Kemal USLU

2014, 35Pages

Jury
Asst.Prof.Dr. Kemal USLU
Asst.Prof.Dr.Turgay ÜSTÜNER
Asst.Prof.Dr. Ş.Burcu BOZKURT ALTINDAĞ

In this thesis, non-linear difference equations were investigated and the solutions werre obtained by initial conditions. Also the period of solutions of this system have been studied and in view of the systems have been found to have different periods.

Keywords: The system of the difference equations, The period of solution of the system, The behavior of solutions of the system

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU yönetiminde yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Yüksek Lisans çalışmamı yönetmeyi kabul ederek bana yol gösteren saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Kemal USLU'ya en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Esra HANEDAR

KONYA-2014

İÇİNDEKİLER

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

1. GİRİŞ **1**

2.FARK DENKLEM SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ LİTERATÜR ÖZETİ **2**

3. FARK DENKLEMLERİ **7**

3.1. Lineer Fark Denklemleri 8

3.2. Fark Denklemleri İçin Genel Tanımlar ve Teoremler 8

4. LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PERİYODU **13**

4.1. $x_{n+1}=\frac{1}{t_n}+\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_n},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_n},\ t_{n+1}=\frac{1}{x_n-z_n}$ **FARK DENKLEM SİSTEMİ** **13**

4.2. $x_{n+1}=\frac{1}{t_{n-1}}+\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-2}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-1}},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-1}},\ t_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}-z_{n-1}}$

FARK DENKLEM SİSTEMİ **17**

4.3. $x_{n+1}=\frac{1}{t_{n-2}}+\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-2}},\ t_{n+1}=\frac{1}{x_{n-2}-z_{n-2}}$

FARK DENKLEM SİSTEMİ **23**

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER **31**

5.1. Sonuçlar 31

5.2. Öneriler 31

6. KAYNAKLAR **32**

1. GİRİŞ

Bu tezde;

$$x_{n+1}=\frac{1}{t_n}+\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_n},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_n},\ t_{n+1}=\frac{1}{x_n-z_n},n\geq 0$$

$$x_{n+1}=\frac{1}{t_{n-1}}+\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-2}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-1}},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-1}},\ t_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}-z_{n-1}},\ n\geq 0$$

$$x_{n+1}=\frac{1}{t_{n-2}}+\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-2}},\ t_{n+1}=\frac{1}{x_{n-2}-z_{n-2}},\ n\geq 0$$

fark denklem sistemlerinin çözümleri ve periyotları incelenmiştir.

2.FARK DENKLEM SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ LİTERATÜR ÖZETİ

Öncelikle fark denklem sistemlerinin çözümleri ve çözümlerinin periyotlarıile ilgili literatürde son yıllarda yapılmış olan bazı çalışmaları özetleyelim:

Henson ve ark. (1999)çalışmalarında,

$$L_{t+1} = bA_l e^{(-c_{ea}A_t - c_{el}L_t)}$$

$$P_{t+1} = (1-\mu_l)L_t$$

$$A_{t+1} = P_t e^{(-c_{pa}A_t)} + (1-\mu_a)A_t$$

otonom fark denklem modelinin dinamiğini incelemişlerdir.

Schinas (1997) çalışmasında**,**

$x_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{x_{n-1}}$ Lyness fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğinden ve denklem sabitinden hareketle,

$$x_{n+1} = \frac{ay_n + A}{x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{bx_n + A}{y_{n-1}}, \quad n \geq 0$$

$$x_{n+1} = \frac{a_n y_n + A}{x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{b_n x_n + A}{y_{n-1}}, \quad n \geq 0$$

$$x_{n+1} = \frac{\max\{a_n y_n, A\}}{x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{\max\{b_n x_n, A\}}{y_{n-1}}, \quad n \geq 0$$

denklem sistemleri ve rasyonel formdaki benzer bazı fark denklemlerinin, fark denklem sistemlerinin ve maksimumlu fark denklem sistemlerinin denklem sabitlerini ve çözümlerinin periyodikliğini incelemiştir. Çalışma sonucunda, çeşitli fark denklemlerinin ve fark denklem sistemlerinin denge noktalarını, denklemlerin katsayılarının sabit olması veya periyodik birer dizi olması gibi durumlarda katsayılara ve denklemin genel terimlerine bağlı olarak elde etmiştir.

Grove ve ark. (2001) çalışmalarında,

$$x_{n+1} = \frac{a}{x_n} + \frac{b}{y_n}, \; y_{n+1} = \frac{c}{x_n} + \frac{d}{y_n}$$

rasyonel fark sisteminin çözümlerinin davranışı ve varlığı üzerinde çalışmışlardır.

Çınar (2004) çalışmalarında,

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_n},\quad y_{n+1}=\frac{y_n}{x_{n-1}y_{n-1}}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin dört periyotlu olduğunu elde etmiştir.

Grove ve ark. (2001) çalışmalarında,

a, b, c ve d reel sayılar ve başlangıç şartları x_0 ve y_0 keyfi reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1}=\frac{a}{x_n}+\frac{b}{y_n}$, $y_{n+1}=\frac{c}{x_n}+\frac{d}{y_n}$, $n=1,2,...$

fark denklem sisteminin, her $n\geq 0$ için iyi tanımlı olduğu $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ değerlerinin kümesini ve çözümlerinin davranışlarını araştırdılar. Bu fark denklem sisteminde, $z_n=\frac{x_n}{y_n}$ dönüşümü yaparak Riccati fark denklemine ulaştılar ve bu denklemin karakteristik denkleminin çözümlerinden hareketle a, b, c ve d reel sayıları için şartlar elde ettiler. Çalışmanın sonunda denklemin çözümleri hakkında bazı şartlar altında genellemeler elde ettiler.

Çınar ve Yalçınkaya (2004) çalışmalarında,

$$x_{n+1}=\frac{1}{z_n},\quad y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}y_{n-1}},\quad z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelediler. $\{x_n\}$ ve $\{z_n\}$ çözümlerinin üç periyotlu, $\{y_n\}$ çözümlerinin ise on iki periyotlu olduğunu ispat ettiler.

Camouzis ve Papaschinopoulos (2004) çalışmalarında,

$$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{y_{n-m}},\quad y_{n+1}=1+\frac{y_n}{x_{n-m}},\quad n\geq 0$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

Şimşek ve ark. (2009) çalışmalarında,

$$x_{n+1}=\max\left\{\frac{A}{x_n},\frac{y_n}{x_n}\right\},\ y_{n+1}=\max\left\{\frac{A}{y_n},\frac{x_n}{y_n}\right\},\ n\geq 0$$

fark denklem sisteminin çözümlerini incelemişlerdir.

Taşkara N., Uslu K. Ve Tollu D.T (2001) çalışmalarında,

$$x_{n+1}=\frac{p_n x_n+x_{n-(k+1)}}{q_n+x_{n-(k+1)}},\ k\in\mathbb{N},$$

$x_{-k-1},x_{-k},\ldots\in\mathbb{R}$ başlangıç şartları olmak üzere fark denkleminin periyodikliği ve genelleştirilmiş çözümü için gerek ve yeter şartları incelemiştir. Ayrıca, genel çözümün $(k+1)$ periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

Özban (2006) çalışmasında,

$$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{y_{n-k}},\quad y_{n+1}=1+\frac{y_n}{x_{n-m}y_{n-m-k}},\quad n\geq 0$$

fark denklem sisteminin bütün pozitif çözümlerinin periyodikliğini araştırmış ve ispat etmiştir.

Henson ve ark. (1999) çalışmalarında,

$$L_{t+1}=bA_t e^{(-c_{ea}A_t-c_{el}L_t)}$$
$$P_{t+1}=(1-\mu_l)L_t$$
$$A_{t+1}=P_t e^{(-c_{pa}A_t)}+(1-\mu_a)A_t$$

otonom fark denklem sisteminin dinamiğini incelemişlerdir.

Briggs ve Hoopes (2004) yaptıkları çalışmada,

$f(p_t)=e^{(-ap_t)}$ (Nicholson-Bailey fonksiyonu, Nicholson ve Bailey, 1935)

$f(p_t)=\left(1+\frac{ap_t}{k}\right)^{-k}$ (Negatif-Binomiyel fonksiyonu, Mayıs 1978)

$f(p_t)=e^{\left(-a(p_t)^{1-m}\right)}$ (Hassel-Varley fonksiyonu, Hassel ve Varley,1969)

parazitizim fonksiyonları olmak üzere,

$$H_{t+1} = \lambda H_t f(p_t)$$
$$p_{t+1} = cH_t\left[1 - f(p_t)\right]$$

konak-parazitoit (Host-Parasitioid) modelleri üzerine literatür eleştirisi yapmışlardır.

Elaydi ve Sacker (2006) Bu çalışmada,

$$x_{n+1} = \frac{\mu K x_n}{K + (\mu - 1)x_n}\ ,\ x_0 \geq 0\,,\ K > 0$$

Beverton-Holt denklemleri gibi otonom olmayan fark denklemleri üzerinde zaman faktörünü ele alan bir metot geliştirmişlerdir. Bu metot, Beverton-Holt denklemleri ile ilişkili Henson ve Cushing varsayımlarını kanıtlamak için uygulanmıştır.

Deghan, Nasri, Douraki (2005) Bu çalışmada ilk olarak,

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{b + cz_n}$$

$$y_{n+1} = dy_n + ex_{n+1}z_n$$

$$z_{n+1} = fz_n + y_{n+1}$$

fark denklem sistemini, sürekli HIV enfeksiyon modelinin eş fark denklem modeli olarak elde etmişlerdir. Daha sonra, fark denklem sisteminin dengesinin global ve lokal asimptotik kararlılığı, sınırlılığı, kararlılık ve dallanma olayları araştırılmıştır.

Buchanan R.J. (2005) yapmış olduğu çalışmada,

$$u_{t+1} = u_t e^{r\left(1 - \frac{u_t}{K}\right) - av_t}$$

$$v_{t+1} = u_t(1 - e^{-av_t})$$

fark denklem sisteminin dinamiğini incelemiştir.

Kang ve ark. (2008) çalışmalarında $a > 0$, $r > 0$ olmak üzere,

$$x_{n+1} = x_n e^{r[1-x_n]-ay_n}$$

$$y_{n+1} = x_n \left[1 - e^{-ay_n}\right] e^{r[1-x_n]}$$

fark denklem sistemini, belli bir bitki-otçul etkileşimini çalışmak için modellemişlerdir. Elde edilen iki boyutlu fark denklem modelinde durum değişkenleri olarak yaprak ve otçul biyokütlesi kullanmışlardır.

Kang,Chesson (2010) Bu çalışmada,

$$x_{t+1} = x_t f(x_t, y_t)$$

$$y_{t+1} = y_t g(x_t, y_t)$$

fark denklem sisteminin non-lineerliliğe ilişkin kavramlarını geliştirmişler ve bu kavramları popülasyon dalgalanmalarında türlerin uzun sürede ve düşük yoğunluktaki büyüme oranı etkisinin nasıl olacağını göstermek için kullanılmıştır.

Kang ve Armbruster (2010) Bu çalışmada,

$$P_{t+1} = F(P_t)e^{-aH_t} \qquad P_{t+1} = F(P_t)e^{-aH_t}$$
$$H_{t+1} = P_t\left[1 - e^{-aH_t}\right] \text{ ve } H_{t+1} = F(P_t)\left[1 - e^{-aH_t}\right]$$

genel bitki-otçul etkileşim modellerini incelemişler ve genel bitki-otçul modellerinin dinamikleri üzerinde monoton bitki büyüme fonksiyonlarının etkisini çalışmışlardır.

Kang ve Armbruster (2011) Bu çalışmada,

$$P^I_{n+1} = P^I_n e^{r(1-P^I_n)-a(1-l)H^I_n}$$

$$H^I_{n+1} = P^I_n e^{r(1-P^I_n)}\left[1 - e^{-a(1-l)H^I_n}\right]$$

bitki- böcek fark zaman model çiftini çalışmışlar ve bu modelin popülasyon dinamiğindeki hem lokal hem de global yayılım etkisinin nasıl yoğunluklarda olduğunu göstermişlerdir.

3. FARK DENKLEMLERİ

Bu kısımda fark denklemleri ile ilgili literatürde iyi bilinen bazı genel tanımlar verilecek ve hatırlatılacaktır.

Tanım 3.1. $n \in \mathbb{N}$ bağımsız değişken ve x bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$F(n, x(n), x(n+1), ..., x(n+k)) = 0 \qquad (3.1)$$

eşitliğine *fark denklemi* adı verilir.

Tanım 3.2. Bir fark denkleminde bilinmeyen fonksiyonun mevcut en büyük ve en küçük argümentlerinin farkına o *denklemin mertebesi* adı verilir.

Tanım 3.3. $a_1(n), a_2(n), ..., a_k(n)$ katsayıları ile $g(n)$, $n \geq n_0$ için tanımlı reel değerli fonksiyonlar ve $[n_0, \infty) = \{n_0, n_0+1, n_0+2, ...\}$ üzerinde $a_k(n) \neq 0$ olmak üzere

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = g(n) \qquad (3.2)$$

biçimindeki bir denkleme k *nıncı basamaktan lineer fark* denklemi denir. Bu denklem, $g(n) \equiv 0$ olduğu zaman *homogen*, aksi durumda *homogen olmayan lineer fark denklemi* olarak adlandırılır. Buna göre k nıncı basamaktan bir lineer homogen fark denklemi genel olarak

$$x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + ... + a_k(n)x(n) = 0 \qquad (3.3)$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, bütün $a_i(n)$ katsayıları $a_i(n) \equiv a_i$ şeklinde sabitse, (3.2) denklemine *sabit katsayılı*, aksi halde *değişken katsayılı fark denklemi* denir.

Tanım 3.4. $f_1(n), f_2(n), ..., f_r(n)$ fonksiyonları $n \geq n_0$ için tanımlı olmak üzere, her $n \geq n_0$ için,

$$c_1 f_1(n) + c_2 f_2(n) + ... + c_r f_r(n) = 0 \qquad (3.4)$$

olacak biçimde hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, ..., c_r$ sabitleri var ise, bu durumda $\{f_1(n), f_2(n), ..., f_r(n)\}$ cümlesine $[n_0, \infty)$ üzerinde *lineer bağımlıdır* denir.

(3.4) eşitliği her $n \geq n_0$ için sadece ve sadece $c_1 = c_2 = ... = c_r = 0$ durumunda sağlanıyorsa, $\{f_1(n), f_2(n), ..., f_r(n)\}$ cümlesine $[n_0, \infty)$ üzerinde *lineer bağımsızdır* denir.

3.1. Lineer Fark Denklemleri

Tanım 3.1.1. Bir fark denkleminde bağımlı değişken birinci dereceden ise bu denkleme *Lineer Fark Denklemi* denir. Genel olarak lineer fark denklemleri,

$$y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + ... + a_0 y_n = F(n)$$

şeklinde gösterilir.

Lineer fark denklemleri katsayılarının durumuna göre isimlendirilirler.

- Eğer $F(n) = 0$ ise denkleme Lineer Homojen Fark Denklemi denir.
- $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ katsayıları sabit iseler, denkleme Sabit Katsayılı Lineer Fark Denklemi denir.
- $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ katsayıları bağımsız değişkenin fonksiyonları iseler denkleme Değişken Katsayılı Lineer Fark Denklemi denir.

3.2. Fark Denklemleri İçin Genel Tanımlar ve Teoremler

Teorem 3.2.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I \times I \to I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her $x_{-1}, x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}) \quad n \geq 0 \qquad (3.2.1)$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-1}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 3.2.1. Eğer $\overline{x}$ noktası için $f(\overline{x}, \overline{x}) = \overline{x}$ ise $\overline{x}$ 'e f 'nin *denge noktası* denir. Eğer $\forall n \geq 0$ için $\overline{x} = x_n$ ise o zaman $\overline{x}$ 'e f 'nin *sabit noktası* denir.

Tanım 3.2.2. Eğer $\forall n > 0$ için $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $x_n \in J$ olacak şekilde bir $J \subset I$ alt aralığı varsa, bu aralığa (3.2.1) denkleminin *değişmez aralığı* denir.

Tanım 3.2.3. $\bar{x}$ (3.2.1) denkleminin denge noktası olmak üzere,

• Eğer $x_{-1}, x_0 \in J$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için, $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \delta$ iken her $n \geq 0$ için, $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası *kararlıdır* denir.

• Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde, $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası *lokal asimptotik kararlıdır* denir.

• Eğer her $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise, $\bar{x}$ denge noktasına *çekim noktası* denir.

• Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise, $\bar{x}$ denge noktası *global asimptotik kararlıdır* denir.

• Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise, *kararsızdır* denir.

• Eğer $x_{-1}, x_0 \in J$ iken $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| < \gamma$ ve bazı $N \geq -1$ sayıları için $|x_N - \bar{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktasına *repeller* denir.

Tanım 3.2.4. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisi *p periyotludur* denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 3.2.5. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisine *er geç p periyotludur* denir ve p sayısı bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 3.2.6. (3.2.1) denkleminde, $f(x_n, x_{n-1})$ fonksiyonunu $f(u,v)$ şeklinde alalım:

$$r = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x})}{\partial u} \text{ ve } s = \frac{\partial f(\bar{x},\bar{x})}{\partial v}$$

olmak üzere,

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1} \qquad (3.2.2)$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme (3.2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası civarındaki lineer denklemi adı verilir.

(3.2.2) denkleminin karakteristik denklemi ise,

$$\lambda^2 - r\lambda - s \qquad (3.2.3)$$

dır.

Teorem 3.2.2.(Lineer Kararlılık Teoremi)

Eğer (3.2.3) denkleminin her iki kökü de mutlak değerce 1'den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

- Eğer (3.2.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

- (3.2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart $|r| < 1 - s < 2$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

- (3.2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1' den büyük olması için gerek ve yeter şartlar $|s| > 1$ ve $|r| < |1 - s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası repellerdir.

- Her $x_{-1}, x_0 \in I$ için eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise; o zaman $\bar{x}$ denge noktası global çekimlidir denir.

- Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve global çekimli ise $\bar{x}$ 'e global asimptotik kararlıdır denir.

- (3.2.3) denkleminin, bir kökünün mutlak değerce 1'den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şartlar $r^2 + 4s > 0$ ve $|r| > |1 - s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır (Chatterjee ve ark. 2003).

Aşağıdaki lineer olmayan fark denklem sistemleri ile ilgili çalışmalar Nasri ve ark. (2005) nın yapmış oldukları çalışmalaardan alınmıştır.

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_1(x_n, y_n, z_n) \\ y_{n+1} &= f_2(x_n, y_n, z_n) \quad (3.2.4) \\ z_{n+1} &= f_3(x_n, y_n, z_n) \end{aligned}$$

Tanım 3.2.7. Eğer $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ aşağıdaki şartları sağlarsa, $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ noktasını (3.2.4) denklem sisteminin denge noktası olarak adlandırılır.

$$\begin{aligned} \overline{x} &= f_1(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \\ \overline{y} &= f_2(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \qquad (3.2.5) \\ \overline{z} &= f_3(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \end{aligned}$$

Tanım 3.2.8. $\forall \varepsilon > 0$ için $\left\|(x_0, y_0, z_0) - (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\right\| < \delta$ iken

$((x_0, y_0, z_0) \in I_1 \times I_2 \times I_3)$

$$\forall n \geq 0 \text{ için} \left\|(x_n, y_n, z_n) - (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\right\| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ mevcut ise (3.2.4) sisteminin denge noktası olan $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ kararlıdır denir. Aksi halde ise kararsızdır.

Tanım 3.2.9. Eğer sistemin denge noktası kararlı ve $\forall (x_0, y_0, z_0) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ için

$$\left\|(x_0, y_0, z_0) - (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\right\| < \gamma$$

olacak şekilde $\gamma > 0$ varsa ve

$$\lim_{x \to \infty} \left\|(x_n, y_n, z_n) - (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\right\| = 0$$

ise (3.2.4) sisteminin denge noktası asimptotik kararlıdır.

Tanım 3.2.10. Eğer sistemin denge noktası kararlı ve $\forall (x_0, y_0, z_0) \in I_1 \times I_2 \times I_3$ için $\lim_{x \to \infty} \left\|(x_n, y_n, z_n) - (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})\right\| = 0$

ise (3.2.4)sisteminin denge noktası olan $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ global asimptotik kararlıdır denir.

Teorem 3.2.3. (3.2.4) denklem sisteminin $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ denge noktasında jakobiyen matrisi

$$J(\overline{x},\overline{y},\overline{z})=\begin{vmatrix} \left(\frac{df_1}{dx}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} & \left(\frac{df_1}{dy}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} & \left(\frac{df_1}{dz}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} \\ \left(\frac{df_2}{dx}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} & \left(\frac{df_2}{dy}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} & \left(\frac{df_2}{dz}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} \\ \left(\frac{df_3}{dx}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} & \left(\frac{df_3}{dy}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} & \left(\frac{df_3}{dz}\right)_{(\overline{x},\overline{y},\overline{z})} \end{vmatrix}$$

olup, bu jakobiyen matrisinin karakteristik polinomu

$$P(\lambda)=\det\left[J(\overline{x},\overline{y},\overline{z})-\lambda I\right]=0$$

ile verilsin.

Bu polinomda aşağıdaki eşitlikler doğrudur;

- $P(\lambda)$ nın bütün kökleri 1 den küçükse denge noktası $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ kararlıdır.
- $P(\lambda)$ nın köklerinden en az biri 1 den büyükse denge noktası $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ kararsızdır.

4.LİNEER OLMAYAN FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PERİYODU

4.1. $x_{n+1}=\frac{1}{t_n}+\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_n},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_n},\ t_{n+1}=\frac{1}{x_n-z_n}$ FARK DENKLEM SİSTEMİ

Bu bölümde,

$x_0, y_{-1}, y_0, z_0, z_{-1}, t_0 \in \mathbb{R}-\{0\}$ ve $x_0 \neq z_0$ (4.1.1) olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{1}{t_n}+\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_n},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_n},\ t_{n+1}=\frac{1}{x_n-z_n}, n\geq 0 \qquad (4.1.2)$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümleri ve periyotları incelenmiştir.

Teorem 4.1.1. $x_0, y_{-1}, y_0, z_0, z_{-1}, t_0 \in \mathbb{R}-\{0\}$ ve $x_0 \neq z_0$ olmak üzere, (4.1.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n, y_n, z_n, t_n\}$ olsun. Bu durumda (4.1.2) denklem sisteminin bütün çözümleri on periyotludur.

İspat: (4.1.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{1}{t_n}+\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_n},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_n},\ t_{n+1}=\frac{1}{x_n-z_n}$$

$$x_{n+2}=x_n-z_n+y_n,\ y_{n+2}=t_n,\ z_{n+2}=x_n-z_n,\ t_{n+2}=\frac{y_n.z_{n-1}}{y_{n-1}}$$

$$x_{n+3}=\frac{y_{n-1}}{y_\eta.z_{n-1}}+\frac{1}{z_n},\ y_{n+3}=\frac{1}{x_n-z_n},\ z_{n+3}=\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-1}}, t_{n+3}=\frac{1}{y_n}$$

$$x_{n+4}=y_n+t_n, y_{n+4}=\frac{y_n.z_{n-1}}{y_{n-1}}, z_{n+4}=y_n, t_{n+4}=z_n$$

$$x_{n+5}=\frac{1}{z_n}+\frac{1}{x_n-z_n}, y_{n+5}=\frac{1}{y_n}, z_{n+5}=\frac{1}{z_n}, t_{n+5}=\frac{1}{t_n}$$

$$x_{n+6}=t_n+\frac{y_n.z_{n-1}}{y_{n-1}}, y_{n+6}=z_n, z_{n+6}=t_n, t_{n+6}=x_n-z_n$$

$$x_{n+7}=\frac{1}{x_n-z_n}+\frac{1}{y_n}, y_{n+7}=\frac{1}{t_n}, z_{n+7}=\frac{1}{x_n-z_n}, t_{n+7}=\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-1}}$$

$$x_{n+8}=\frac{y_n.z_{n-1}}{y_{n-1}}+z_n,\ y_{n+8}=x_n-z_n, z_{n+8}=\frac{y_n.z_{n-1}}{y_{n-1}}, t_{n+8}=y_n$$

$$x_{n+9}=\frac{1}{y_n}+\frac{1}{t_n},\ y_{n+9}=\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-1}}, z_{n+9}=\frac{1}{y_n}, t_{n+9}=\frac{1}{z_n}$$

$$x_{n+10}=x_n,\ y_{n+10}=y_n,\ z_{n+10}=z_n,\ t_{n+10}=t_n$$

Teorem 4.1.2. $x_0, y_{-1}, y_0, z_0, z_{-1}, t_0 \in \mathbb{R}-\{0\}$ ve $x_0 \neq z_0$,

$x_0=p,\ y_{-1}=q,\ y_0=r,\ z_0=s,\ z_{-1}=u,\ t_0=v$ başlangıç şartları altında (4.1.2) denklem sisteminin çözümleri $\{x_n, y_n, z_n, t_n\}$ olsun. Bu durumda, $n \geq 0$ için (4.1.2) denklem sisteminin bütün çözümleri;

$$x_{10n+1}=\frac{1}{v}+\frac{q}{r.u},\ y_{10n+1}=\frac{1}{s},\ z_{10n+1}=\frac{1}{v},\ t_{10n+1}=\frac{1}{p-s}$$

$$x_{10n+2}=p-s+r,\ y_{10n+2}=v,\ z_{10n+2}=p-s,\ t_{10n+2}=\frac{r.u}{q}$$

$$x_{10n+3}=\frac{q}{r.u}+\frac{1}{s}, y_{10n+3}=\frac{1}{p-s},\ z_{10n+3}=\frac{q}{r.u},\ t_{10n+3}=\frac{1}{r}$$

$$x_{10n+4}=r+v,\ y_{10n+4}=\frac{r.u}{q},\ z_{10n+4}=r,\ t_{10n+4}=s$$

$$x_{10n+5}=\frac{1}{s}+\frac{1}{p-s},\ y_{10n+5}=\frac{1}{r},\ z_{10n+5}=\frac{1}{s},\ t_{10n+5}=\frac{1}{v}$$

$$x_{10n+6}=v+\frac{r.u}{q},\ y_{10n+6}=s,\ z_{10n+6}=v, t_{10n+6}=p-s$$

$$x_{10n+7}=\frac{1}{p-s}+\frac{1}{r},\ y_{10n+7}=\frac{1}{v},\ z_{10n+7}=\frac{1}{p-s}, t_{10n+7}=\frac{q}{r.u}$$

$$x_{10n+8}=\frac{r.u}{q}+s, y_{10n+8}=p-s,\ z_{10n+8}=\frac{r.u}{q}, t_{10n+8}=r$$

$$x_{10n+9}=\frac{1}{r}+\frac{1}{v}, y_{10n+9}=\frac{q}{r.u}, z_{10n+9}=\frac{1}{r}, t_{10n+9}=\frac{1}{s}$$

$$x_{10n+10}=p,\ y_{10n+10}=r,\ z_{10n+10}=s,\ \ t_{10n+10}=v$$

şeklindedir.

İspat: $n=0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin doğru olduğunu yani yukarıda verilen eşitliklerin sağlandığını varsayalım ve $(n+1)$ için doğruluğunu gösterelim.

$$x_{10n+11}=\frac{1}{t_{10n+10}}+\frac{y_{10n+9}}{y_{10n+10}.z_{10n+9}}=\frac{1}{v}+\frac{q}{r.u},\ y_{10n+11}=\frac{1}{z_{10n+10}}=\frac{1}{s},$$

$$z_{10n+11}=\frac{1}{t_{10n+10}}=\frac{1}{v}, t_{10n+11}=\frac{1}{x_{10n+10}-z_{10n+10}}=\frac{1}{p-s}$$

$$x_{10n+12}=x_{10n+10}-z_{10n+10}+y_{10n+10}=p-s+r,\ \ y_{10n+12}=t_{10n+10}=v$$

$$z_{10n+12}=x_{10n+10}-z_{10n+10}=\ p-s\ ,\ t_{10n+12}=\frac{y_{10n+10}.z_{10n+9}}{y_{10n+9}}=\frac{r.u}{q}$$

$$x_{10n+13}=\frac{y_{10n+9}}{y_{10n+10}.z_{10n+9}}+\frac{1}{z_{10n+10}}=\frac{q}{r.u}+\frac{1}{s}, y_{10n+13}=\frac{1}{x_{10n+10}-z_{10n+10}}=\frac{1}{p-s}$$

$$z_{10n+13}=\frac{y_{10n+9}}{y_{10n+10}.z_{10n+9}}=\frac{q}{r.u},\ \ t_{10n+13}=\frac{1}{y_{10n+10}}=\frac{1}{r}$$

$$x_{10n+14}=y_{10n+10}+t_{10n+10}=r+v,\ y_{10n+14}=\frac{y_{10n+10}.z_{10n+9}}{y_{10n+9}}=\frac{r.u}{q}$$

$$z_{10n+14}=y_{10n+10}=r, t_{10n+14}=z_{10n+10}=s$$

$$x_{10n+15}=\frac{1}{z_{10n+10}}+\frac{1}{x_{10n+10}-z_{10n+10}}=\frac{1}{s}+\frac{1}{p-s},\ y_{10n+15}=\frac{1}{y_{10n+10}}=\frac{1}{r}$$

$$z_{10n+15}=\frac{1}{z_{10n+10}}=\frac{1}{s}, t_{10n+15}=\frac{1}{t_{10n+10}}=\frac{1}{v}$$

$$x_{10n+16} = t_{10n+10} + \frac{y_{10n+10}.z_{10n+9}}{y_{10n+9}} = v + \frac{r.u}{q}, \quad y_{10n+16} = z_{10n+10} = s$$

$$z_{10n+16} = t_{10n+10} = v, t_{10n+16} = x_{10n+10} - z_{10n+10} = p - s$$

$$x_{10n+17} = \frac{1}{x_{10n+10} - z_{10n+10}} + \frac{1}{y_{10n+10}} = \frac{1}{p-s} + \frac{1}{r}, \quad y_{10n+17} = \frac{1}{t_{10n+10}} = \frac{1}{v},$$

$$z_{10n+17} = \frac{1}{x_{10n+10} - z_{10n+10}} = \frac{1}{p-s}, t_{10n+17} = \frac{y_{10n+9}}{y_{10n+10}.z_{10n+9}} = \frac{q}{r.u}$$

$$x_{10n+18} = \frac{y_{10n+10}.z_{10n+9}}{y_{10n+9}} + z_{10n+10} = \frac{r.u}{q} + s, \quad y_{10n+18} = x_{10n+10} - z_{10n+10} = p - s$$

$$z_{10n+18} = \frac{y_{10n+10}.z_{10n+9}}{y_{10n+9}} = \frac{r.u}{q}, \quad t_{10n+18} = y_{10n+10} = r$$

$$x_{10n+19} = \frac{1}{y_{10n+10}} + \frac{1}{t_{10n+10}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{v}, \quad y_{10n+19} = \frac{y_{10n+9}}{y_{10n+10}.z_{10n+9}} = \frac{q}{r.u}$$

$$z_{10n+19} = \frac{1}{y_{10n+10}} = \frac{1}{r}, \quad t_{10n+19} = \frac{1}{z_{10n+10}} = \frac{1}{s}$$

$$x_{10n+20} = x_{10n+10} = p, \quad y_{10n+20} = y_{10n+10} = r$$

$$z_{10n+20} = z_{10n+10} = s, t_{10n+20} = t_{10n+10} = v$$

Böylece tümevarım metodu ile ispat tamamlanmış olur.

$$x_{n+1}=\frac{1}{t_{n-1}}+\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-2}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-1}},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-1}},\ t_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}-z_{n-1}}$$

4.2. FARK DENKLEM SİSTEMİ

Bu bölümde;

$$x_{-1},x_0,y_{-1},y_0,z_{-2},z_{-1},z_0,t_{-1},t_0\in\mathbb{R}-\{0\}\text{ ve }x_{-1}\neq z_{-1},x_0\neq y_0 \qquad (4.2.1)$$

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{1}{t_{n-1}}+\frac{y_{n-1}}{y.z_{n-2}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-1}},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-1}},\ t_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}-z_{n-1}}\ n\geq 0 \quad (4.2.2)$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümleri ve periyotları incelenmiştir.

Teorem4.2.1. $x_{-1},x_0,y_{-1},y_0,z_{-2},z_{-1},z_0,t_{-1},t_0\in\mathbb{R}-\{0\}$ ve $x_{-1}\neq z_{-1},x_0\neq y_0$ o lmak üzere, (4.2.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n,y_n,z_n,t_n\}$ olsun. Bu durumda (4.2.2) denklem sisteminin bütün çözümleri on altı periyotludur.

İspat: (4.2.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{1}{t_{n-1}}+\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-2}},\quad y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-1}},\quad z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-1}},\quad t_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}-z_{n-1}}$$

$$x_{n+2}=\frac{1}{t_n}+y_n,\quad y_{n+2}=\frac{1}{z_n},\quad z_{n+2}=\frac{1}{t_n},\quad t_{n+2}=\frac{1}{x_n-z_n}$$

$$x_{n+3}=x_{n-1}-z_{n-1}+\frac{1}{z_{n-1}},\quad y_{n+3}=t_{n-1},\quad z_{n+3}=x_{n-1}-z_{n-1},\ t_{n+3}=\frac{y_n.z_{n-2}}{y_{n-1}}$$

$$x_{n+4}=x_n-z_n+\frac{1}{z_n},\ y_{n+4}=t_n,\quad z_{n+4}=x_n-z_n,\quad t_{n+4}=\frac{1}{y_n}$$

$$x_{n+5}=\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-2}}+t_{n-1},\quad y_{n+5}=\frac{1}{x_{n-1}-z_{n-1}},\quad z_{n+5}=\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-2}},\ t_{n+5}=z_{n-1}$$

$$x_{n+6}=y_n+t_n,\quad y_{n+6}=\frac{1}{x_n-z_n},\quad z_{n+6}=y_n,\quad t_{n+6}=z_n$$

$$x_{n+7}=\frac{1}{z_{n-1}}+\frac{1}{x_{n-1}-z_{n-1}},\ y_{n+7}=\frac{y_n.z_{n-2}}{y_{n-1}},\ z_{n+7}=\frac{1}{z_{n-1}},\ \ t_{n+7}=\frac{1}{t_{n-1}}$$

$$x_{n+8}=\frac{1}{z_n}+\frac{1}{x_n-z_n},\ \ y_{n+8}=\frac{1}{y_n},\ \ z_{n+8}=\frac{1}{z_n},\ t_{n+8}=\frac{1}{t_n}$$

$$x_{n+9}=t_{n-1}+\frac{y_n.z_{n-2}}{y_{n-1}},\ \ y_{n+9}=z_{n-1},\ \ z_{n+9}=t_{n-1},\ t_{n+9}=x_{n-1}-z_{n-1}$$

$$x_{n+10}=t_n+\frac{1}{y_n},\ \ y_{n+10}=z_n,\ \ z_{n+10}=t_n,\ \ t_{n+10}=x_n-z_n$$

$$x_{n+11}=\frac{1}{x_{n-1}-z_{n-1}}+z_{n-1},\ \ y_{n+11}=\frac{1}{t_{n-1}},\ z_{n+11}=\frac{1}{x_{n-1}-z_{n-1}},\ \ t_{n+11}=\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-2}}$$

$$x_{n+12}=\frac{1}{x_n-z_n}+z_n,\ y_{n+12}=\frac{1}{t_n},\ z_{n+12}=\frac{1}{x_n-z_n},\ t_{n+12}=y_n$$

$$x_{n+13}=\frac{y_n.z_{n-2}}{y_{n-1}}+\frac{1}{t_{n-1}},y_{n+13}=x_{n-1}-z_{n-1},z_{n+13}=\frac{y_n.z_{n-2}}{y_{n-1}},t_{n+13}=\frac{1}{z_{n-1}}$$

$$x_{n+14}=\frac{1}{y_n}+\frac{1}{t_n},\ \ y_{n+14}=x_n-z_n,\ z_{n+14}=\frac{1}{y_n},\ \ t_{n+14}=\frac{1}{z_n}$$

$$x_{n+15}=x_{n-1},\ \ y_{n+15}=\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-2}},\ \ z_{n+15}=z_{n-1},\ \ t_{n+15}=t_{n-1}$$

$$x_{n+16}=x_n,\ \ y_{n+16}=y_n,\ \ z_{n+16}=z_n,\ \ t_{n+16}=t_n$$

şeklindedir.

Teorem4.2.2.

$x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0, z_{-2}, z_{-1}, z_0, t_{-1}, t_0 \in \mathbb{R}-\{0\}$ ve $x_{-1}\neq z_{-1}, x_0\neq y_0, x_{-1}=a,$ $x_0=b, y_{-1}=c, y_0=d, z_{-2}=m, z_{-1}=n, z_0=p, t_{-1}=q, t_0=r$ başlangıç şartları altında (4.2.2) denklem sisteminin çözümleri $\{x_n, y_n, z_n, t_n\}$ olsun. Bu durumda $n\geq 0$ için (4.2.2) denklem sisteminin bütün çözümleri,

$$x_{16n+1}=\frac{1}{q}+\frac{c}{d.m},\ \ y_{16n+1}=\frac{1}{n},\ \ \ z_{16n+1}=\frac{1}{q},\ \ \ t_{16n+1}=\frac{1}{a-n}$$

$$x_{16n+2} = \frac{1}{r} + d, \quad y_{16n+2} = \frac{1}{p}, \quad z_{16n+2} = \frac{1}{r}, \quad t_{16n+2} = \frac{1}{b-p}$$

$$x_{16n+3} = a - n + \frac{1}{n}, \quad y_{16n+3} = q, \quad z_{16n+3} = a - n, \quad t_{16n+3} = \frac{d.m}{c}$$

$$x_{16n+4} = b - p + \frac{1}{p}, \quad y_{16n+4} = r, \quad z_{16n+4} = b - p, \quad t_{16n+4} = \frac{1}{d}$$

$$x_{16n+5} = \frac{c}{d.m} + q, \quad y_{16n+5} = \frac{1}{a-n}, \quad z_{16n+5} = \frac{c}{d.m}, \quad t_{16n+5} = n$$

$$x_{16n+6} = d + r, \quad y_{16n+6} = \frac{1}{b-p}, \quad z_{16n+6} = d, \quad t_{16n+6} = p$$

$$x_{16n+7} = \frac{1}{n} + \frac{1}{a-n}, \quad y_{16n+7} = \frac{d.m}{c}, \quad z_{16n+7} = \frac{1}{n}, \quad t_{16n+7} = \frac{1}{q}$$

$$x_{16n+8} = \frac{1}{p} + \frac{1}{b-p}, \quad y_{16n+8} = \frac{1}{d}, \quad z_{16n+8} = \frac{1}{p}, \quad t_{16n+8} = \frac{1}{r}$$

$$x_{16n+9} = q + \frac{d.m}{c}, \quad y_{16n+9} = n, \quad z_{16+9} = q, \quad t_{16n+9} = a - n$$

$$x_{16n+10} = r + \frac{1}{d}, y_{16n+10} = p, \quad z_{16n+10} = r, \quad , t_{16n+10} = b - p$$

$$x_{16n+11} = \frac{1}{a-n} + n, y_{16n+11} = \frac{1}{q}, z_{16n+11} = \frac{1}{a-n}, t_{16n+11} = \frac{c}{d.m}$$

$$x_{16n+12} = \frac{1}{b-p} + p, \quad y_{16n+12} = \frac{1}{r}, \quad z_{16n+12} = \frac{1}{b-p}, \quad t_{16n+12} = d$$

$$x_{16n+13} = \frac{d.m}{c} + \frac{1}{q}, \quad y_{16n+13} = a - n, \quad z_{16n+13} = \frac{d.m}{c}, t_{16n+13} = \frac{1}{n}$$

$$x_{16n+14} = \frac{1}{d} + \frac{1}{r}, \quad y_{16n+14} = b - p, \quad z_{16n+14} = \frac{1}{d}, \quad t_{16n+14} = \frac{1}{p}$$

$$x_{16n+15} = a, y_{16n+15} = \frac{c}{d.m}, z_{16n+15} = n, t_{16n+15} = q$$

$$x_{16n+16} = b, \quad y_{16n+16} = d, \quad z_{16n+16} = p, \quad t_{16n+16} = r$$

$$y_{n+1} = ry_n + sy_{n-1} \qquad (3.2.2)$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme (3.2.1) denkleminin $\bar{x}$ denge noktası civarındaki lineer denklemi adı verilir.

(3.2.2) denkleminin karakteristik denklemi ise,

$$\lambda^2 - r\lambda - s \qquad (3.2.3)$$

dır.

Teorem 3.2.2.(Lineer Kararlılık Teoremi)

Eğer (3.2.3) denkleminin her iki kökü de mutlak değerce 1'den küçük ise, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

- Eğer (3.2.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

- (3.2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şart $|r| < 1 - s < 2$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

- (3.2.3) denkleminin her iki kökünün de mutlak değerce 1' den büyük olması için gerek ve yeter şartlar $|s| > 1$ ve $|r| < |1 - s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası repellerdir.

- Her $x_{-1}, x_0 \in I$ için eğer $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise; o zaman $\bar{x}$ denge noktası global çekimlidir denir.

- Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve global çekimli ise $\bar{x}$ 'e global asimptotik kararlıdır denir.

- (3.2.3) denkleminin, bir kökünün mutlak değerce 1'den büyük, diğer kökünün mutlak değerce 1'den küçük olması için gerek ve yeter şartlar $r^2 + 4s > 0$ ve $|r| > |1 - s|$ olmasıdır. Bu durumda, $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır (Chatterjee ve ark. 2003).

$$x_{16n+23}=\frac{1}{z_{16n+15}}+\frac{1}{x_{16n+15}-z_{16n+15}}=\frac{1}{n}+\frac{1}{a-n},\ y_{16n+23}=\frac{y_{16n+16}.z_{16n+14}}{y_{16n+15}}=\frac{d.m}{c}$$

$$z_{16n+23}=\frac{1}{z_{16n+15}}=\frac{1}{n},\quad t_{16n+23}=\frac{1}{t_{16n+15}}=\frac{1}{q}$$

$$x_{16n+24}=\frac{1}{z_{16n+16}}+\frac{1}{x_{16n+16}-z_{16n+16}}=\frac{1}{p}+\frac{1}{b-p},\quad y_{16n+24}=\frac{1}{y_{16n+16}}=\frac{1}{d}$$

$$z_{16n+24}=\frac{1}{z_{16n+16}}=\frac{1}{p},\quad t_{16n+24}=\frac{1}{t_{16n+16}}=\frac{1}{r}$$

$$x_{16n+25}=t_{16n+15}+\frac{y_{16n+16}.z_{16n+14}}{y_{16n+15}}=q+\frac{d.m}{c},\ y_{16n+25}=z_{16n+15}=n$$

$$z_{16n+25}=t_{16n+15}=q, t_{16n+25}=x_{16n+15}-z_{16n+15}=a-n$$

$$x_{16n+26}=t_{16n+16}+\frac{1}{y_{16n+16}}=r+\frac{1}{d}, y_{16n+26}=z_{16n+16}=p$$

$$z_{16n+26}=t_{16n+16}=r,\quad t_{16n+26}=x_{16n+16}-z_{16n+16}=b-p$$

$$x_{16n+27}=\frac{1}{x_{16n+15}-z_{16n+15}}+z_{16n+15}=\frac{1}{a-n}+n,\quad y_{16n+27}=\frac{1}{t_{16n+15}}=\frac{1}{q}$$

$$z_{16n+27}=\frac{1}{x_{16n+15}-z_{16n+15}}=\frac{1}{a-n},\quad t_{16n+27}=\frac{y_{16n+15}}{y_{16n+16}.z_{16n+14}}=\frac{c}{d.m}$$

$$x_{16n+28}=\frac{1}{x_{16n+16}-z_{16n+16}}+z_{16n+16}=\frac{1}{b-p}+p,\quad y_{16n+28}=\frac{1}{t_{16n+16}}=\frac{1}{r}$$

$$z_{16n+28}=\frac{1}{x_{16n+16}-z_{16n+16}}=\frac{1}{b-p},\quad t_{16n+28}=y_{16n+16}=d$$

$$x_{16n+29}=\frac{y_{16n+16}.z_{16n+14}}{y_{16n+15}}+\frac{1}{t_{16n+15}}=\frac{d.m}{c}+\frac{1}{q}, y_{16n+29}=x_{16n+15}-z_{16n+15}=a-n$$

$$z_{16n+29}=\frac{y_{16n+16}.z_{16n+14}}{y_{16n+15}}=\frac{d.m}{c},\ t_{16n+29}=\frac{1}{z_{16n+15}}=\frac{1}{n}$$

$$x_{16n+30} = \frac{1}{y_{16n+16}} + \frac{1}{t_{16n+16}} = \frac{1}{d} + \frac{1}{r}, y_{16n+30} = x_{16n+16} - z_{16n+16} = b - p$$

$$z_{16n+30} = \frac{1}{y_{16n+16}} = \frac{1}{d},\ t_{16n+30} = \frac{1}{z_{16n+16}} = \frac{1}{p}$$

$$x_{16n+31} = x_{16n+15} = a,\ y_{16n+31} = \frac{y_{16n+15}}{y_{16n+16}.z_{16n+14}} = \frac{c}{d.m}$$

$$z_{16n+31} = z_{16n+15} = n, t_{16n+31} = t_{16n+15} = q$$

$$x_{16n+32} = x_{16n+16} = b, y_{16n+32} = y_{16n+16} = d$$

$$z_{16n+32} = z_{16n+16} = p, t_{16n+32} = t_{16n+16} = r$$

Böylece tümevarım metodu ile ispat tamamlanmış olur.

4.3. $x_{n+1}=\frac{1}{t_{n-2}}+\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-2}},\ t_{n+1}=\frac{1}{x_{n-2}-z_{n-2}}$ FARK DENKLEM SİSTEMİ

Bu bölümde,

$$x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-1},y_0,z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0,t_{-2},t_{-1},t_0\in\mathbb{R}-\{0\} \text{ ve } x_{-2}\neq z_{-2},x_{-1}\neq z_{-1},$$

$$x_0\neq z_0 \qquad (4.3.1)$$

olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{1}{t_{n-2}}+\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-2}},\ t_{n+1}=\frac{1}{x_{n-2}-z_{n-2}},n\geq 0 \qquad (4.3.2)$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin çözümleri ve periyotları incelenmiştir.

Teorem 4.3.1. $x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-1},y_0,z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0,t_{-2},t_{-1},t_0\in\mathbb{R}-\{0\}$ $x_{-2}\neq z_{-2}$, $x_{-1}\neq z_{-1}$, $x_0\neq z_0$ olmak üzere, (4.3.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n,y_n,z_n,t_n\}$ olsun. Bu durumda (4.3.2) denklem sisteminin bütün çözümleri yirmi iki periyotludur.

İspat: (4.3.2) denklem sisteminden yararlanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x_{n+1}=\frac{1}{t_{n-2}}+\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-3}},\ y_{n+1}=\frac{1}{z_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{1}{t_{n-2}},\ t_{n+1}=\frac{1}{x_{n-2}-z_{n-2}}$$

$$x_{n+2}=\frac{1}{t_{n-1}}+y_n,\ y_{n+2}=\frac{1}{z_{n-1}},\ z_{n+2}=\frac{1}{t_{n-1}},\ t_{n+2}=\frac{1}{x_{n-1}-z_{n-1}}$$

$$x_{n+3}=\frac{1}{t_n}+\frac{1}{z_{n-2}},\ y_{n+3}=\frac{1}{z_n},\ z_{n+3}=\frac{1}{t_n},t_{n+3}=\frac{1}{x_n-z_n}$$

$$x_{n+4}=x_{n-2}-z_{n-2}+\frac{1}{z_{n-1}},\ y_{n+4}=t_{n-2},\ z_{n+4}=x_{n-2}-z_{n-2},t_{n+4}=\frac{y_n.z_{n-3}}{y_{n-1}}$$

$$x_{n+5} = x_{n-1} - z_{n-1} + \frac{1}{z_n},\ \ y_{n+5} = t_{n-1},\ z_{n+5} = x_{n-1} - z_{n-1},\ t_{n+5} = \frac{1}{y_n}$$

$$x_{n+6} = x_n - z_n + t_{n-2},\ \ y_{n+6} = t_n,\ \ z_{n+6} = x_n - z_n,\ t_{n+6} = z_{n-2}$$

$$x_{n+7} = \frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-3}} + t_{n-1},\ y_{n+7} = \frac{1}{x_{n-2} - z_{n-2}},\ \ z_{n+7} = \frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-3}},\ t_{n+7} = z_{n-1}$$

$$x_{n+8} = y_n + t_n,\ y_{n+8} = \frac{1}{x_{n-1} - z_{n-1}},\ \ z_{n+8} = y_n,\ t_{n+8} = z_n$$

$$x_{n+9} = \frac{1}{z_{n-2}} + \frac{1}{x_{n-2} - z_{n-2}},\ \ y_{n+9} = \frac{1}{x_n - z_n},\ \ z_{n+9} = \frac{1}{z_{n-2}},\ \ t_{n+9} = \frac{1}{t_{n-2}}$$

$$x_{n+10} = \frac{1}{z_{n-1}} + \frac{1}{x_{n-1} - z_{n-1}},\ \ y_{n+10} = \frac{y_n.z_{n-3}}{y_{n-1}},\ \ z_{n+10} = \frac{1}{z_{n-1}},\ \ t_{n+10} = \frac{1}{t_{n-1}}$$

$$x_{n+11} = \frac{1}{z_n} + \frac{1}{x_n - z_n},\ \ y_{n+11} = \frac{1}{y_n},\ \ z_{n+11} = \frac{1}{z_n},\ \ t_{n+11} = \frac{1}{t_n}$$

$$x_{n+12} = t_{n-2} + \frac{y_n.z_{n-3}}{y_{n-1}},\ y_{n+12} = z_{n-2},\ z_{n+12} = t_{n-2}, t_{n+12} = x_{n-2} - z_{n-2}$$

$$x_{n+13} = t_{n+1} + \frac{1}{y_n},\ \ y_{n+13} = z_{n-1},\ z_{n+13} = t_{n-1}, t_{n+13} = x_{n-1} - z_{n-1}$$

$$x_{n+14} = t_n + z_{n-2},\ \ y_{n+14} = z_n,\ z_{n+14} = t_n,\ \ t_{n+14} = x_n - z_n$$

$$x_{n+15} = \frac{1}{x_{n-2} - z_{n-2}} + z_{n-1},\ \ y_{n+15} = \frac{1}{t_{n-2}},\ \ z_{n+15} = \frac{1}{x_{n-2} - z_{n-2}},\ \ t_{n+15} = \frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-3}}$$

$$x_{n+16} = \frac{1}{x_{n-1} - z_{n-1}} + z_n,\ \ y_{n+16} = \frac{1}{t_{n-1}},\ \ z_{n+16} = \frac{1}{x_{n-1} - z_{n-1}}, t_{n+16} = y_n$$

$$x_{n+17} = \frac{1}{x_n - z_n} + \frac{1}{t_{n-2}},\ \ y_{n+17} = \frac{1}{t_n},\ \ z_{n+17} = \frac{1}{x_n - z_n},\ \ t_{n+17} = \frac{1}{z_{n-2}}$$

$$x_{n+18} = \frac{y_n.z_{n-3}}{y_{n-1}} + \frac{1}{t_{n-1}},\ \ y_{n+18} = x_{n-2} - z_{n-2}, z_{n+18} = \frac{y_n.z_{n-3}}{y_{n-1}},\ \ t_{n+18} = \frac{1}{z_{n-1}}$$

$$x_{n+19}=\frac{1}{y_n}+\frac{1}{t_n},\ y_{n+19}=x_{n-1}-z_{n-1},\ z_{n+19}=\frac{1}{y_n},\ t_{n+19}=\frac{1}{z_n}$$

$$x_{n+20}=x_{n-2},\ y_{n+20}=x_n-z_n,\ z_{n+20}=z_{n-2},\ t_{n+20}=t_{n-2}$$

$$x_{n+21}=x_{n-1},\ y_{n+21}=\frac{y_{n-1}}{y_n.z_{n-3}},\ z_{n+21}=z_{n-1},\ t_{n+21}=t_{n-1}$$

$$x_{n+22}=x_n,\ y_{n+22}=y_n,\ z_{n+22}=z_n,\ t_{n+22}=t_n$$

Teorem4.3.2.

$x_{-2},x_{-1},x_0,y_{-1},y_0,z_{-3},z_{-2},z_{-1},z_0,t_{-2},t_{-1},t_0\in\mathbb{R}-\{0\}$ ve $x_{-2}\neq z_{-2}$,

$x_{-1}\neq z_{-1},x_0\neq z_0,x_{-2}=a,x_{-1}=b,\ x_0=c,\ y_{-1}=d,\ y_0=e,z_{-3}=m,\ z_{-2}=n,$

$z_{-1}=p,\ z_0=q,\ t_{-2}=r,\ t_{-1}=s,\ t_0=u$ başlangıç şartları altında (4.3.2) denklem sisteminin çözümleri $\{x_n,y_n,z_n,t_n\}$ olsun. Bu durumda $n\geq 0$ için (4.3.2) denklem sisteminin bütün çözümleri;

$$x_{22n+1}=\frac{1}{r}+\frac{d}{e.m},\ y_{22n+1}=\frac{1}{n},\ z_{22n+1}=\frac{1}{r},\ t_{22n+1}=\frac{1}{a-n}$$

$$x_{22n+2}=\frac{1}{s}+e,\ y_{22n+2}=\frac{1}{p},\ z_{22n+2}=\frac{1}{s},\ t_{22n+2}=\frac{1}{b-p}$$

$$x_{22n+3}=\frac{1}{u}+\frac{1}{n},\ y_{22n+3}=\frac{1}{q},\ z_{22n+3}=\frac{1}{u},\ t_{22n+3}=\frac{1}{c-q}$$

$$x_{22n+4}=a-n+\frac{1}{p},\ y_{22n+4}=r,\ z_{22n+4}=a-n,\ t_{22n+4}=\frac{e.m}{d}$$

$$x_{22n+5}=b-p+\frac{1}{q},y_{22n+5}=s,z_{22n+5}=b-p,t_{22n+5}=\frac{1}{e}$$

$$x_{22n+6}=c-q+r,\ y_{22n+6}=u,\ z_{22n+6}=c-q,\ t_{22n+6}=n$$

$$x_{22n+7}=\frac{d}{e.m}+s,\ y_{22n+7}=\frac{1}{a-n},\ z_{22n+7}=\frac{d}{e.m},\ t_{22n+7}=p$$

$$x_{22n+8}=e+u,\ y_{22n+8}=\frac{1}{b-p},\ z_{22n+8}=e,\ t_{22n+8}=q$$

$$x_{22n+9}=\frac{1}{n}+\frac{1}{a-n},\quad y_{22n+9}=\frac{1}{c-q},\quad z_{22n+9}=\frac{1}{n},t_{22n+9}=\frac{1}{r}$$

$$x_{22n+10}=\frac{1}{p}+\frac{1}{b-p},\quad y_{22n+10}=\frac{e.m}{d},\quad z_{22n+10}=\frac{1}{p},\quad t_{22n+10}=\frac{1}{s}$$

$$x_{22n+11}=\frac{1}{q}+\frac{1}{c-q},\quad y_{22n+11}=\frac{1}{e},\quad z_{22n+11}=\frac{1}{q},\quad t_{22n+11}=\frac{1}{u}$$

$$x_{22n+12}=r+\frac{e.m}{d},\quad y_{22n+12}=n,\quad z_{22n+12}=r,\quad t_{22n+12}=a-n$$

$$x_{22n+13}=s+\frac{1}{e},\quad y_{22n+13}=p,\quad z_{22n+13}=s,\quad t_{22n+13}=b-p$$

$$x_{22n+14}=u+n,y_{22n+14}=q,z_{22n+14}=u,t_{22n+14}=c-q$$

$$x_{22n+15}=\frac{1}{a-n}+p,\quad y_{22n+15}=\frac{1}{r},z_{22n+15}=\frac{1}{a-n},t_{22n+15}=\frac{d}{e.m}$$

$$x_{22n+16}=\frac{1}{b-p}+q,\quad y_{22n+16}=\frac{1}{s},\quad z_{22n+16}=\frac{1}{b-p},\quad t_{22n+16}=e$$

$$x_{22n+17}=\frac{1}{c-q}+\frac{1}{r},\quad y_{22n+17}=\frac{1}{u},\quad z_{22n+17}=\frac{1}{c-q},\quad t_{22n+17}=\frac{1}{n}$$

$$x_{22n+18}=\frac{e.m}{d}+\frac{1}{s},\quad y_{22n+18}=a-n,\quad z_{22n+18}=\frac{e.m}{d},\quad t_{22n+18}=\frac{1}{p}$$

$$x_{22n+19}=\frac{1}{e}+\frac{1}{u},\quad y_{22n+19}=b-p,\quad z_{22n+19}=\frac{1}{e},\quad t_{22n+19}=\frac{1}{q}$$

$$x_{22n+20}=a,y_{22n+20}=c-q,z_{22n+20}=n,t_{22n+20}=r$$

$$x_{22n+21}=b,y_{22n+21}=\frac{d}{e.m},z_{22n+21}=p,t_{22n+21}=s$$

$$x_{22n+22}=c,\quad y_{22n+22}=e,\quad z_{22n+22}=q,\quad t_{22n+22}=u$$

şeklindedir.

İspat: $n=0$ için bu çözümün sağlandığı açıktır. Şimdi n için teoremin doğru olduğunu yani yukarıda verilen eşitliklerin sağlandığını varsayalım ve (n+1) için doğruluğunu gösterelim.

$$x_{22n+23}=\frac{1}{t_{22n+20}}+\frac{y_{22n+21}}{y_{22n+22}.z_{22n+19}}=\frac{1}{r}+\frac{d}{e.m}, y_{22n+23}=\frac{1}{z_{22n+20}}=\frac{1}{n}$$

$$z_{22n+23}=\frac{1}{t_{22n+20}}=\frac{1}{r},\ t_{22n+23}=\frac{1}{x_{22n+20}-z_{22n+20}}=\frac{1}{a-n}$$

$$x_{22n+24}=\frac{1}{t_{22n+21}}+y_{22n+22}=\frac{1}{s}+e, y_{22n+24}=\frac{1}{z_{22n+21}}=\frac{1}{p}$$

$$z_{22n+24}=\frac{1}{t_{22n+21}}=\frac{1}{s}, t_{22n+24}=\frac{1}{x_{22n+21}-z_{22n+21}}=\frac{1}{b-p}$$

$$x_{22n+25}=\frac{1}{t_{22n+22}}+\frac{1}{z_{22n+20}}=\frac{1}{u}+\frac{1}{n},\quad y_{22n+25}=\frac{1}{z_{22n+22}}=\frac{1}{q}$$

$$z_{22n+25}=\frac{1}{t_{22n+22}}=\frac{1}{u},\quad t_{22n+25}=\frac{1}{x_{22n+22}-z_{22n+22}}=\frac{1}{c-q}$$

$$x_{22n+26}=x_{22n+20}-z_{22n+20}+\frac{1}{z_{22n+21}}=a-n+\frac{1}{p},\quad y_{22n+26}=t_{22n+20}=r$$

$$z_{22n+26}=x_{22n+20}-z_{22n+20}=a-n,\quad t_{22n+26}=\frac{y_{22n+22}.z_{22n+19}}{y_{22n+21}}=\frac{e.m}{d}$$

$$x_{22n+27}=x_{22n+21}-z_{22n+21}+\frac{1}{z_{22n+22}}=b-p+\frac{1}{q},\quad y_{22n+27}=t_{22n+21}=s$$

$$z_{22n+27}=x_{22n+21}-z_{22n+21}=b-p,\quad t_{22n+27}=\frac{1}{y_{22n+22}}=\frac{1}{e}$$

$$x_{22n+28}=x_{22n+22}-z_{22n+22}+t_{22n+20}=c-q+r,\quad y_{22n+28}=t_{22n+22}=u$$

$$z_{22n+28}=x_{22n+22}-z_{22n+22}=c-q,\quad t_{22n+28}=z_{22n+20}=n$$

$$x_{22n+29}=\frac{y_{22n+21}}{y_{22n+22}.z_{22n+19}}+t_{22n+21}=\frac{d}{e.m}+s, y_{22n+29}=\frac{1}{x_{22n+20}-z_{22n+20}}=\frac{1}{a-n}$$

$$z_{22n+29} = \frac{y_{22n+21}}{y_{22n+22}.z_{22n+19}} = \frac{d}{e.m},\ t_{22n+29} = z_{22n+21} = p$$

$$x_{22n+30} = y_{22n+22} + t_{22n+22} = e + u,\ \ y_{22n+30} = \frac{1}{x_{22n+21} - z_{22n+21}} = \frac{1}{b-p}$$

$$z_{22n+30} = y_{22n+22} = e,\ \ t_{22n+30} = z_{22n+22} = q$$

$$x_{22n+31} = \frac{1}{z_{22n+20}} + \frac{1}{x_{22n+20} - z_{22n+20}} = \frac{1}{n} + \frac{1}{a-n}, y_{22n+31} = \frac{1}{x_{22n+22} - z_{22n+22}} = \frac{1}{c-q}$$

$$z_{22+31} = \frac{1}{z_{22n+20}} = \frac{1}{n}, t_{22n+31} = \frac{1}{t_{22n+20}} = \frac{1}{r}$$

$$x_{22n+32} = \frac{1}{z_{22n+21}} + \frac{1}{x_{22n+21} - z_{22n+21}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{b-p}$$

$$y_{22n+32} = \frac{y_{22n+22}.z_{22n+19}}{y_{22n+20}} = \frac{e.m}{d},\ z_{22n+32} = \frac{1}{z_{22n+21}} = \frac{1}{p}$$

$$t_{22n+32} = \frac{1}{t_{22n+21}} = \frac{1}{s}$$

$$x_{22n+33} = \frac{1}{z_{22n+22}} + \frac{1}{x_{22n+22} - z_{22n+22}} = \frac{1}{q} + \frac{1}{c-q}$$

$$y_{22n+33} = \frac{1}{y_{22n+22}} = \frac{1}{e},\ z_{22n+33} = \frac{1}{z_{22n+22}} = \frac{1}{q},\ t_{22n+33} = \frac{1}{t_{22n+22}} = \frac{1}{u}$$

$$x_{22n+34} = t_{22n+20} + \frac{y_{22n+22}.z_{22n+19}}{y_{22n+21}} = r + \frac{e.m}{d},\ y_{22n+34} = z_{22n+20} = n$$

$$z_{22n+34} = t_{22n+20} = r,\ t_{22n+34} = x_{22n+20} - z_{22n+20} = a - n$$

$$x_{22n+35} = t_{22n+21} + \frac{1}{y_{22n+22}} = s + \frac{1}{e},\ \ y_{22n+35} = z_{22n+21} = p$$

$$z_{22n+35} = t_{22n+21} = s,\ \ t_{22n+35} = x_{22n+21} - z_{22n+21} = b - p$$

$$x_{22n+36} = t_{22n+22} + z_{22n+20} = u + n,\ \ y_{22n+36} = z_{22n+22} = q,$$

$$z_{22n+36} = t_{22n+22} = u,\ \ t_{22n+36} = x_{22n+22} - z_{22n+22} = c - q$$

$$x_{22n+37} = \frac{1}{x_{22n+20} - z_{22n+20}} + z_{22n+21} = \frac{1}{a-n} + p,$$

$$y_{22n+37} = \frac{1}{t_{22n+20}} = \frac{1}{r},\ \ z_{22n+37} = \frac{1}{x_{22n+20} - z_{22n+20}} = \frac{1}{a-n}$$

$$t_{22n+37} = \frac{y_{22n+21}}{y_{22n+22}.z_{22n+19}} = \frac{d}{e.m}$$

$$x_{22n+38} = \frac{1}{x_{22n+21} - z_{22n+21}} + z_{22n+22} = \frac{1}{b-p} + q,\ \ y_{22n+38} = \frac{1}{t_{22n+21}} = \frac{1}{s}$$

$$z_{22n+38} = \frac{1}{x_{22n+21} - z_{22n+21}} = \frac{1}{b-p},\ \ \ t_{22n+38} = y_{22n+22} = e$$

$$x_{22n+39} = \frac{1}{x_{22n+22} - z_{22n+22}} + \frac{1}{t_{22n+20}} = \frac{1}{c-q} + \frac{1}{r}$$

$$y_{22n+39} = \frac{1}{t_{22n+22}} = \frac{1}{u},\ \ z_{22n+39} = \frac{1}{x_{22n+22} - z_{22n+22}} = \frac{1}{c-q}$$

$$t_{22n+39} = \frac{1}{z_{22n+20}} = \frac{1}{n}$$

$$x_{22n+40} = \frac{y_{22n+22}.z_{22n+19}}{y_{22n+21}} + \frac{1}{t_{22n+21}} = \frac{e.m}{d} + \frac{1}{s}$$

$$y_{22n+40} = x_{22n+20} - z_{22n+20} = a - n$$

$$z_{22n+40} = \frac{y_{22n+22}.z_{22n+19}}{y_{22n+21}} = \frac{e.m}{d},\ \ \ t_{22n+40} = \frac{1}{z_{22n+21}} = \frac{1}{p}$$

$$x_{22n+41} = \frac{1}{y_{22n+22}} + \frac{1}{t_{22n+22}} = \frac{1}{e} + \frac{1}{u}, y_{22n+41} = x_{22n+21} - z_{22n+21} = b - p$$

$$z_{22n+41} = \frac{1}{y_{22n+22}} = \frac{1}{e}, t_{22n+41} = \frac{1}{z_{22n+22}} = \frac{1}{q}$$

$$x_{22n+42} = x_{22n+20} = a,\ \ \ y_{22n+42} = x_{22n+22} - z_{22n+22} = c - q$$

$$z_{22n+42} = z_{22n+20} = n,\ \ t_{22n+42} = t_{22n+20} = r$$

$$x_{22n+43} = x_{22n+21} = b,\ \ y_{22n+43} = \frac{y_{22n+21}}{y_{22n+22}.z_{22n+19}} = \frac{d}{e.m}$$

$$z_{22n+43} = z_{22n+21} = p,\ \ t_{22n+43} = t_{22n+21} = s$$

$$x_{22n+44} = x_{22n+22} = c,\ \ y_{22n+44} = y_{22n+22} = e$$

$$z_{22n+44} = z_{22n+22} = q,\ \ t_{22n+44} = t_{22n+22} = u$$

Böylece tümevarım metodu ile ispat tamamlanmış olur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada, daha önce literatürde çalışılmış olan pek çok fark denklem sistemi ele alınmış, özellikle lineer olmayan fark denklem sistemleri ve bu sistemlerin periyotları incelenmiştir.

5.2. Öneriler

Bu çalışmada göz önüne alınan fark denklem sistemleri bir araya getirilerek daha genel bir fark modeli oluşturulabilir. Ayrıca elde edilen bu fark denklem sisteminin davranışları, kararlılığı ve denge noktaları incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

Camouzis E.,Papaschinopoulos G., 2004, Global asymptotic behaviour of positive solutions on the system of rational difference equations $x_{n+1}=1+\frac{x_n}{y_{n-m}}$, $y_{n+1}=1+\frac{y_n}{x_{n-m}}$, *Applied Mathematics Letters,* vol.117, no.6, 733-737.

Çınar C., Yalçınkaya İ., 2004, On the positive solutions of difference equation system $x_{n+1}=\frac{1}{z_n}$, $y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}y_{n-1}}$, $z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}}$, *International Mathematical Journal,*vol5, no 5.

Dehghan M.,Nasri M., Douraki M. J., Study of a system of non-linear difference equation sarising in a deterministic model for HIV infection, *Applied Mathematics and Computation,* Iran, 1306-1330.

Elaydi S., 1995, An Introduction to difference equations, Springer.

Henson S. M.,Constantino R. F., Cushing J. M., Dennis B., Desharnais R. A., 1999, Multiple Attractors, Saddles and Population Dynamics in Periodic Habitats, *Bulletin of Mathematican Biology*, USA, 1121-1149.

Kang Y.,Armbruster D., 2011, Dispersal effects on a discrete two patch model for plant-insectinter actions, *Journal of Therotical Biology*, USA, 84-97.

Özban A. Y., 2006, On the positive solutions of the system of rational difference *and Applications,* vol. 323, 126-132.

Schinas C., 1997, Invariants for difference equation sand systems of difference equations of rational form, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 216, 164-179.

Taskara N., Uslu K., Tollu D. T., 2010, The periodicity and solutions of therational difference equation with periodic coefficients, *Computers&Mathematics with Applications,* vol. 62 (4), 1807-1813.

Yalcinkaya İ.,Cinar C., Simsek D., 2008, Global asymptotic stability of a system of difference equations, *Applicable Analysis,* vol 87(6), 677-687.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

AdıSoyadı	**:**	Esra HANEDAR
Uyruğu	**:**	T.C.
DoğumYeriveTarihi	**:**	Akdağmadeni – 19.12.1986
Telefon	**:**	0 5064388393
Faks	**:**	-
e-mail	**:**	arsemath@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**BitirmeYılı**
Lise	:		
Üniversite	:	SelçukÜniversitesi, Selçuklu, Konya	2008
YüksekLisans	:	SelçukÜniversitesi, Selçuklu, Konya	**-**
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2011-	Form KampüsDershanesi	Öğretmen

YABANCI DİLLER

İngilizce

YAYINLAR

Esra H., Uslu K., 2014, The stability conditions related to the equilibrium points of a difference systems and the period of solutions of this system, Far East Journal of Applied Mathematics, volume 85, numbers 1-2, pp 69-74, 2013.