T.C.
TRAKYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONUMA BAĞLI EFEKTİF KÜTLELİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİNE CEBİRSEL YAKLAŞIM

Filiz ARICAK

DOKTORA TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

Danışman
Doç. Dr. Mirza KERİM

EDİRNE-2011

T.C.

TRAKYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONUMA BAĞLI EFEKTİF KÜTLELİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİNE CEBİRSEL YAKLAŞIM

FİLİZ ARICAK

DOKTORA TEZİ

FİZİK ANABİLİM DALI

Bu tez 01/07/2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Hasan AKBAŞ
Üye

Doç. Dr. Mirza KERİM
Danışman

Yrd. Doç.Dr. Cengiz DANE
Üye

Yrd.Doç. Dr. Mehmet YILMAZ
Üye

Yrd. Doç. Dr. Mehmet SEZGİN
Üye

Doktora Tezi
Konuma Bağlı Efektif Kütleli Schrödinger Denklemine Cebirsel Yaklaşım
Trakya Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada $SU(2)$ ve $SL(2,R)$ Lie gruplarının regüler temsili kullanılarak tek boyutlu konuma bağlı efektif kütleli Schrödinger denklemi için çözülebilir Hamiltonyenler kurulmuştur. Bu H Hamiltonyenleri $SU(2)$ ve $SL(2,R)$ Lie gruplarının C Casimir operatörleri ile $[C-q]=Q[H-E]$ şeklinde ilişkilendirilmiştir. Burada q, Casimir operatörünün öz değeri, Q ise x'in bir fonksiyonudur. Sistematik inceleme ile daha önce bilinen bir çok sonuç tek bir yoldan elde edilmiş ve yeni sonuçlar bulunmuştur. Bu yöntemle bulunan tüm potansiyeller için öz değer ve öz fonksiyonlar elde edilmiştir.

Yıl :2011

Sayfa: 97

Anahtar kelimeler: Schrödinger denklemi, Efektif kütle , Lie grupları, Lie cebirleri,

PhD Thesis
Trakya University
The Algebraic Approach to Schrödinger Equation with Position Dependent effective mass
Trakya University, Institute of Natural Sciences, Department of Physics

SUMMARY

In the present work we use regular representations of Lie groups $SU(2)$ and $SL(2,R)$ to construct exactly solvable Hamiltonians for Schrödinger equation with position dependent effective mass in one dimension. We assume that the Hamiltonian H is related to the (quadratic) Casimir operator C of the algebra of $SU(2)$ and $SL(2,R)$ as $[C-q]=Q[H-E]$, where q is eigenvalue of C, Q is a function of x determined by self-consistency. Our systematic study recovers a number of earlier results in a natural unified way and also leads to new findings. All the potentials obtained by this method, are determined together with eigenvalues and eigenfunctions.

Year: 2011
Pages:97
Key words: Schrödinger Equation, Effective mass, Lie algebra, Lie Group

TEŞEKKÜR

Çalışma sırasında bilimsel katkıları ile bana yardımcı olan ve sabrını benden esirgemeyen tez danışmanım, Sayın hocam Doç. Dr. Mirza Kerim' e en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Tez aşaması sürecindeki faydalı görüşleri için Fizik bölüm başkanımız Prof. Dr. Hasan Akbaş'a ve Yrd. Doç. Dr. Cengiz Dane'ye teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca tezimi tamamlamamdaki katkılarından dolayı Yrd. Doç Dr. Mehmet Sezgin'e teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olan sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET……...i
SUMMARY……ii
TEŞEKKÜR……..……..iii
İÇİNDEKİLER……..iv

GİRİŞ……..1

I.BÖLÜM: KURAMSAL TEMELLER VE YÖNTEM

I.1. Lie Cebirleri Lie Grupları ……..……...5
I.2. Grup Temsilleri……9
I.3. Konuma Bağlı Efektif kütleli Schrödinger Denklemi……12
I.4. Yöntem……...……15

II. BÖLÜM: SU(2) GRUBUNA BAĞLI ÇÖZÜLEBİLİR EFEKTİF KÜTLELİ HAMİLTONYENLER

II.1. SU(2) Grubunun İndirgenemez Temsilleri……20
II.2. SU(2) Grubunun Regüler Temsili …….....25
II.3. Kanonik baza bağlı efektif kütleli Hamiltonyenler……...28
II.4. Özel Durumlar……...34

III. BÖLÜM: SL(2,R) GRUBUNA BAĞLI ÇÖZÜLEBİLİR EFEKTİF KÜTLELİ HAMİLTONYENLER

III.1. SL(2,R) Grubunun İndirgenemez Temsili…..…….....39
III.2. SL(2,R) Grubunun Regüler Temsili…..…….……..46
III.3. Kanonik Baza Bağlı Efektif Kütleli Hamiltonyenler…….....49
III.3.1.Özel Durumlar……54
III.4 . $SO(2) \leftrightarrow E(1)$ Karışık Bazına Bağlı Efektif Kütleli Hamiltonyenler…….62
III.4.1. Özel durumlar……...67

III.5.. $SO(1,1) \leftrightarrow SO(2)$ Karışık Bazına Bağlı Efektif Kütleli Hamiltonyenler.....74

III.5.1. Özel durumlar……...78

SONUÇ……84

KAYNAKLAR…….85

ÖZGEÇMİŞ……..88

EK 1. Hipergeometrik Fonksiyonlar…….89

EK 2. $0 < z < 1$ iken $R(z)$ ifadesinin işaretinin incelenmesi……92

Ek 3. $\dfrac{\dot{z}^2 R(z)}{4z^2(1-z^2)} = 1$ denkleminin integrallenmesi……95

GİRİŞ

Cebirsel metotlar ilk olarak 1925 yılı dolaylarında yeni matris mekaniğinde kullanılmıştır. Bu sayede kuantum mekaniğindeki açısal momentumun önemi ortaya çıkmış ve gerekli formalizm Wigner, Weyl ve Racah tarafından geliştirilmiştir. Açısal momentumun cebirsel yöntemlerle ele alınması bugünlerde hemen hemen bütün kuantum kitaplarında bulunur. Fakat diğer önemli kuantum sistemi olan Hidrojen atomu için aynı şey söylenemez, çünkü söz konusu sistem genellikle diferansiyel denklem yardımıyla ele alınarak çözülür. Halbuki hidrojen atomuna Pauli tarafından yapılan cebirsel yaklaşım ile Schrödinger'in diferansiyel denklem yaklaşımı hemen hemen aynı zamanlarda ortaya çıkmıştır. Pauli (Pauli W., 1926) çalışmasında hidrojen atomunun enerji seviyelerini cebirsel olarak elde etmek için Heisenberg komütasyon bağıntılarını, açısal momentumu ve korunumlu Laplace-Runge-Lenz vektörünü de kullanarak başarılı bir şekilde Kepler probleminin spektrumunu bulmuştur.

Açısal momentum ile SO(3) grubunun Lie cebri arasındaki bağıntı kuantum mekaniği ortaya çıkmadan önce bilinmesine karşın SO(4) grubunun Kepler probleminin simetri grubu olduğu ilk kez 1935 yılında Fock tarafından kanıtlanmıştır. V. Fock çalışmasında hidrojen atomu için Schrödinger denkleminin dört boyuttaki küresel harmoniklerin sağladığı integral denkleme özdeş olduğunu ve bundan dolayı hidrojen atomu için simetri grubunun dört boyutlu dönme grubu olduğunu göstermiştir. Bu sonuç ℓ açısal kuantum sayısı ile ilgili olarak enerji seviyelerinin dejenereliğini açıklar. [Bilindiği üzere hidrojen atomunun enerji seviyeleri ℓ açısal kuantum sayısından bağımsızdır, yani verilen bir n seviyesi için $\ell = 0,1,2,...n-1$ olan tüm durumların enerjileri dejeneredir. Buna 'kazara' dejenerelik de denilir.] Daha sonra Bargmann (Bargmann V, 1936) açısal momentum ve Runge-Lenz vektörlerinin SO(4) grubunun üreteçleri olduğunu göstermiştir. Schrödingerin yaklaşımının fizikçiler tarafından daha çok kabul görmesi ve simetri konusunun mikro alemdeki önemi o zamanlarda tam

olarak değerlendirilemediğinden hidrojen atomunun spektrumunu bulmak için cebirsel yaklaşım büyük ölçüde unutulmuş ve cebirsel teknikler otuz sene uygulanmamıştır.

Cebirsel teknikler elementer parçacıklar için kuantum mekaniğin gelişmesiyle tekrar önem kazanmaya başlamıştır, çünkü bu sistemler için Hamiltonyenin açık ifadesi bilinmiyor, sadece simetrisi hakkında makul varsayımlar yapılıyordu. Bu zor problemi çözmek için yapılan çeşitli teşebbüsler arasında temel parçacık fizikçileri, ellili yılların ortalarında elementer parçacıkların sınıflandırılması umuduyla farklı non-kompakt Lie cebirlerini kullanmışlardır. Bu umut gerçekleşmese de non-kompakt gruplar atom fiziğinde dinamik gruplar olarak yerini almıştır (Barut ve Bohm 1965, Dotham ve ark. 1965). Burada belirtmek gerekir ki aslında elementer parçacıkları sınıflandıran cebir non-kompakt Lie cebirleri değil, kompakt Lie gruplarının Lie cebirleridir. Bunların içinde dikkate değer örnekler: Gell-Mann Okubo kütle formülünü (M. Gell.Mann, S. Okubo, 1962) elde etmek için yol gösteren Gell-Mann-Ne'eman SU(3) ve bunun Gürsey ve Radicati tarafından genelleştirilmesi olan SU(6) ; nükleer fizikte etkileşen bozon modelinin (Arima A., Iachello F., 1979) dinamik simetrileri, U(5), SU(3), ve SO(6); ve moleküler fizikte vibron modelinin (Iachello F. 1981; Iachello F. ,Levine R. D. 1982;O. S. Van Roosmalen, Iachello F. ,LevineR. D. 1983) simetrileri U(3) ve SO(4) dir. Bağlı durum problemlerine uygulanan dinamik simetriler kütle formülleri ve sınıflandırma şemaları üretir ve bu da genel olarak eldeki problemin daha iyi ve daha derinden anlaşılmasına imkân verir. Örneğin elementer parçacık fiziğinde düşük durumdaki Hadron spektrumunun dinamik bir simetrisi olarak SU(3)'ün keşfi kuantum kromodinamiğinin ve kuark modelinin kurulmasına yol gösterici nitelikte olmuştur. Benzer şekilde düşük durumdaki nükleer spektrumunun dinamik simetrisi olarak U(6) nın keşfi etkileşen bozon modelinin kurulmasına ve çekirdeğin özelliklerinin yorumlanmasına yol açmıştır. Yukarıda bahsedilen bu teorilerin yapısında Hamiltonyen bir G grubu ve bu grubun üreteçlerine göre ifade edilir.

Son otuz yılda grup teorik incelemeler kuantum fiziğinde gitgide daha çok önem kazanmaktadır. Grup teorik yöntemler kuantum fiziğinde fiziksel sistemin simetri özelliklerinin incelenmesinde ve ayrıca dinamiğinin betimlenmesinde önemli bir araçtır. Özellikle ele alınan kuantum sistemi için Schrödinger denklemi söz konusu ise bu sistemin sahip olduğu simetriye ait bilgi Schrödinger denkleminin cebirsel çözümlerini verir.

Standart Schrödinger denkleminin aksine konuma bağlı efektif kütleli Schrödinger denklemi, sadece son zamanlarda araştırmaların konusu olmuştur. Bu tür sistemler yarı iletkenlerin elektronik özelliklerinin (Bastard G, 1988), kuantum noktalarının (Serra L I ve Lipparani E), sıvı kristallerin (Barranco M, Pi M ve Gatica S M, Hernandez E. S., 1997), vs. kuantum mekaniksel sistemlerin incelenmesinde önem kazanmaktadır. Bu uygulamalar konuma bağlı kütleli tam çözülebilir Hamiltonyenleri araştırmaya teşvik edici olmuştur.

Konuma bağlı kütleli Schrödinger denkleminin çözümlerinin bulunması daha zor olsa da farklı teknikler kullanılarak bazı tam çözülebilir modeller bulunmuştur. Bu tekniklerden bazıları Nokta kanonik dönüşüm metotları (Levai 1989 ve Dutt, Khare, Sukhatme 1988), Süper simetrik kuantum mekaniksel yaklaşım (Plastino, Rigo, 1999; Quesne ve Tkachuk 2004), Lie Cebirsel metotlar (Roy ve Roy 2002; Koç ve Koca 2003; Kerimov G. A, 2009) ve Path integral formalizmidir (Chetouani, Dekar, ve Hammann, 1995).

Konuma bağlı efektif kütleli Schrödinger denkleminde momentum operatörü ile kütle artık sıra değiştirmez. Dolayısıyla kinetik Hamiltonyen için bir çok olasılık ortaya çıkar. Kinetik Hamiltonyen için genel bir ifade von Roos tarafından verilmiştir.

$$T = \frac{1}{4}\left(m^{\alpha} pm^{\beta} pm^{\gamma} + m^{\gamma} pm^{\beta} pm^{\alpha}\right) \quad \alpha + \beta + \gamma = -1$$

parametrelerin alacağı değerlere göre çeşitli kinetik enerji operatörleri önerilmiştir.

Bu tezde konuma bağlı efektif kütleli Schrödinger denkleminin incelenmesinde Kerimov'un (Kerimov G. A, 2009) sunduğu metot kullanılacaktır. Bu amaç doğrultusunda hazırlanan tez aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir:

Kuramsal temeller ve Yöntem başlığıyla sunulan birinci bölümün ilk kısmında Lie cebirleri ile Lie grupları, ikinci kısımda ise Grup temsilleri ile ilgili bazı bilgiler basit bir şekilde anlatıldı. Birinci bölümün üçüncü kısmında konuma bağlı efektif kütleli Schrödinger denklemine ve dördüncü kısımda yönteme yer verildi.

SU(2) grubuna bağlı çözülebilir efektif kütleli Hamiltonyenler başlığıyla sunulan ikinci bölüm de sırasıyla SU(2) grubunun indirgenemez temsilleri, regüler temsili, SU(2) grubunun kanonik bazına bağlı efektif kütleli Hamiltonyenleri ve özel durumlar incelendi.

Son olarak SL(2,R) grubuna bağlı çözülebilir efektif kütleli Hamiltonyenler başlığıyla sunulan üçüncü bölümde sırasıyla SL(2,R) grubunun indirgenemez temsilleri, regüler temsilleri, ve SL(2,R) grubunun üç farklı bazına bağlı efektif kütleli Hamiltonyenleri ve özel durumları incelenmiştir.

Ekler kısmında Hipergeometrik denklemlere, $0 < z < 1$ iken $R(z)$ ifadesinin işaretinin incelenmesine ve $\frac{\dot{z}^2 R(z)}{4z^2(1-z^2)} = 1$ denkleminin integrallenmesine yer verilmiştir.

I. BÖLÜM: KURAMSAL TEMELLER VE YÖNTEM

I.1. Lie Cebirleri ve Lie Grupları

Grup teorik metotlar her ne kadar kuantum mekaniğinin öncüleri tarafından geliştirilse de (Wigner 1931, Weyl 1931) girişte de belirttiğimiz gibi uzun bir süre kullanılmamıştır. Nitekim fizikçilerin bazıları grup teorisi kullanmadan da başarılı olabileceklerini ifade etmişlerdir. Halen Hidrojen atomu ve benzer problemler için basit ve etkili grup teorik yaklaşımlar kuantum mekaniği üzerine olan ders kitaplarında yerini alamamıştır. Bu tekniklerin bu kadar ağır bir şekilde kabul görmesinin veya grup teorik ve cebirsel metotların göz ardı edilmesinin sebeplerinden birisi kuşkusuz bu tekniklerin soyut olması ve içerdiği karmaşıklıktır.

Buna göre bu bölümde Lie grupları ve cebirleri ile ilgili bazı bilgileri basit bir biçimde aktaracağız.

Lie cebrinin tanımı esasen onun yapısını açığa vuran iki kısımdan oluşur. ilk olarak Lie cebri bir vektör uzaydır (veya lineer uzaydır), ikincisi L de ikili bir işlem, bir başka deyişle $[.,.]$ şeklinde gösterilen $LXL \to L$ bir dönüşümdür (mapping). Lie cebrinin boyutu tanıma göre onun vektör uzayının boyutu olup sonlu veya sonsuzdur. Vektör uzay ya R reel sayılar ya da C kompleks sayılar üzerinden alınır. Lie cebrinin kesin tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

L Lie cebri Lie parantezleri veya komütatör olarak isimlendirilen ve aşağıdaki özellikleri sağlayan $(x,y) \in LxL \to [x,y] \in L$ ikili işleme sahip bir vektör uzaydır.

1. $[x,y] = -[y,x]$ (antisimetri özelliği) (1.1.1)

2. $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x,z] + \beta[y,z], \quad \alpha,\beta \in F$ (bilineerlik özelliği) (1.1.2)

3. $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ (Jakobi özdeşliğ)i (1.1.3)

Örneğin; L, nxn kompleks matrislerin matris toplamına göre oluşturduğu kompleks uzay olsun. Açıktır ki L nin (kompleks) boyutu n^2 dir. $x, y \in L$ olmak üzere $[x, y]$ komütatörünü

$$[x, y] = x.y - y.x \tag{1.1.4}$$

olarak tanımlayalım. Burada '.' matrislerin çarpımı işlemini göstermektedir. Rahatça gösterilebilir ki bu şekilde tanımlanmış komütatör yukarıdaki (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3) özelliklerini sağlamaktadır. Vektör uzayının reel $(F = R)$ veya kompleks $(F = C)$ olmasına göre sırasıyla Lie cebri reel veya komplekstir denir. L, n boyutlu bir Lie cebri ve $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ de L de bir baz olsun. O halde L nin her elemanını

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i, \qquad x^i \in F \tag{1.1.5}$$

açılımı şeklinde yazabiliriz. Buna göre L nin her x ve y elemanının Lie parantezini baz elemanlarının Lie parantezleri cinsinden yazabiliriz.

$$[x, y] = \sum_{i,k=1}^{n} x^i x^k [e_i, e_k] \tag{1.1.6}$$

Ayrıca $[e_i, e_k]$ de L nin bir elemanı olduğu için $[e_i, e_k]$ da $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ bazlarının bir açılımı şeklinde yazabiliriz.

$$[e_i, e_k] = \sum_{i=1}^{n} c^i_{jk} e_i \qquad (j, k = 1, ...n) \tag{1.1.7}$$

c^i_{jk} sayılarına $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ bazına göre yapı sabitleri (structure constants) denir. Bu sabitlerin (1.1.6) tanımından ve komutatorun anti simetri ve Jakobi özelliklerinden

$$c^i_{jk} = -c^i_{kj} \tag{1.1.8}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n}\left(c^i_{jk}c^p_{im} + c^i_{km}c^p_{ij} + c^i_{mj}c^p_{ik}\right) = 0 \tag{1.1.9}$$

olarak buluruz. Bir Lie cebri onun yapı sabitleri ile kesin belirlenmektedir. Bir başka deyişle (1.1.8) ve (1.1.9) bağıntılarını sağlayan $\left\{c^i_{jk}\right\}$ sabitleri bir Lie cebrini belirler.

L ve M Lie cebirleri ve $W : L \to M$ aşağıdaki özelliklere sahip birebir örten bir dönüşüm olsun.

$$W\left(\alpha x + \beta y\right) = \alpha W(x) + \beta W(y) \tag{1.1.10}$$

ve

$$W\left(\left[x, y\right]\right) = \left[W(x), W(y)\right]. \tag{1.1.11}$$

Burada $\alpha, \beta \in F$ ve $x, y \in L$ dir. O halde W bir izomorfizmdir ve L ile M Lie cebirlerine izomorfik cebirler denir. W dönüşümünün lineer yapıyı ve Lie parantezlerini koruduğu açıktır. Diğer önemli bir kavram alt cebir kavramıdır. L cebrinin K alt cebri, L nin Lie parantezlerine göre kapalı olan bir alt uzayıdır. Daha ayrıntılı olarak eğer her $x, y \in K$ ve $\alpha, \beta \in F$ için

$$\alpha x + \beta y \in K \qquad ve \qquad \left[x, y\right] \in K \tag{1.1.12}$$

ise L Lie cebrinin K alt kümesi L nin bir alt cebridir denir. Açıktır ki L Lie cebrinin K alt cebri de bir Lie cebridir.

Ado teoremine göre (Ado, 1947) her soyut Lie cebri $g\ell(n,C),\ n = 2,3,...$ Lie cebrinin bir alt cebrine izomorfdur. Buna göre Lie cebirlerinin sınıflandırılması problemi daha kolay olan $g\ell(n,C)$ cebrinin izomorf olmayan alt cebirlerinin bulunması problemine indirgenebilir. Fiziksel uygulamalarda reel Lie cebirleri kullanıldığı için aşağıda yalnız reel Lie cebirlerinden bazılarını sıralayacağız.

- $sl(n,R)$: nxn ve izleri $Trx = 0$ olan tüm reel x matrislerin oluşturduğu Lie cebridir.

- $so(n)$: nxn tüm reel anti-simetrik matrislerin oluşturduğu Lie cebirdir. $a^{tr} = -a$

- $su(n)$: nxn $Trz = 0$ olan tüm reel anti-hermityen z matrislerinin oluşturduğu Lie cebirdir. $z^{+} = -z$

Her Lie grubu bir Lie cebrine karşılık gelmektedir. Örneğin $sl(n,R),\ so(n),\ su(n)$ Lie cebirleri sırasıyla $SL(n,R), SO(n), SU(n)$ Lie gruplarına karşılık gelmektedir.

- $SL(n,R)$: nxn, determinantı +1 olan reel matrisler grubudur.

- $SO(n)$: nxn, determinantı +1 olan ortogonal matrisler grubudur. $g^{tr}.g = 1$

- $SU(n)$: nxn, parametreli determinantı +1 olan üniter matrisler grubudur. $u^{+}.u = 1$

Lie gruplarının genel teorisine göre bir G Lie grubuna karşılık gelen **g** Lie cebrinin uzay yapısı G nin birim elemanının teğet uzayına (tangent space) izomorftur. Bir başka deyişle $g(t) \in G$ ve $g(0) = 1$ ise

$$g(t) = g(0) + at + ...$$

dir. Taylor açılımındaki $a = \left.\frac{dg(t)}{dt}\right|_{t=0}$ matrisi **g** Lie cebrinin elemanıdır. Ayrıca eğer $a \in g$ ise $g(t) = \exp\{at\}$ matrisi G nin bir elemanıdır.

I.2. Grup Temsilleri

Bir G grubunun, bir X kümesinin G' dönüşümlerinin oluşturduğu gruba olan homomorfizme G grubunun X deki dönüşümler ile temsili denir. Kuantum mekaniğinde G simetri grupları $\Im$ Hilbert uzayındaki lineer operatörler ile temsil edilmektedir. Bu durum için grup temsillerinin kesin tanımı şöyle verilebilir. G bir Lie grubu ve $\Im$ ayrılabilir (separable) kompleks Hilbert uzayı olsun. $g \in G$ olmak üzere G grubunun Hilbert uzayındaki lineer operatörlerin $L(\Im)$ grubuna olan $T : g \to T(g)$ dönüşümüne G nin $\Im$ de temsili denir eğer

$$T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2) \qquad g_1, g_2 \in G \qquad (1.2.1)$$

$$T(e) = I \qquad (1.2.2)$$

ise. Burada e, G grubunun birim elemanı, I ise $\Im$ deki birim operatördür. $T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$ koşulu T nin bir homomorfizm olduğunu göstermektedir. $T(e) = I$ ise $T(g)$ nin ters operatörünün mevcut olması için yeter koşuldur. Gerçekten

$$T(g)T(g^{-1}) = T(g^{-1})T(g) = T(e) = 1 \qquad (1.2.3)$$

ve buna göre

$$T^{-1}(g) = T(g^{-1}) \tag{1.2.4}$$

dır.

T temsilinin boyutu $\Im$ 'ın boyutu olarak alınır, yani T 'nin boyutu $\Im$ 'nin boyutuna eşittir. Eğer her $T(g), g \in G$ üniter operatör ise T temsili üniterdir denir.

Örneğin; G bir Lie grubu, dg ise G de bir invaryant hacim elemanı (invariant measure), ve $\Im = L^2(G, dg)$ G de tanımlanmış karesi integrallenebilir fonksiyonların Hilbert uzayı olsun. Ayrıca $(f_1, f_2) = \int f_1(g)^* f_2(g) dg$ $\Im$ de bir iç çarpım olsun. O halde

$$T(g_0) f(g) = f(gg_0) \tag{1.2.5}$$

G nin bir üniter temsilini tanımlamaktadır. Gerçekten

$$\begin{aligned} \big(T(g_1)T(g_2)f\big)(g) &= T(g_1) f(gg_2) = f(gg_1g_2) \\ &= T(g_1g_2) f(g) \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

ve

$$T(e) f(g) = f(ge) = f(g) \tag{1.2.7}$$

olarak buluruz. Dolayısıyla

$$T(g_1)T(g_2) = T(g_1g_2) \text{ ve } T(e) = I \tag{1.2.8}$$

dır. Ayrıca dg nın invaryantlığından

$$(T(g_0)f_1, T(g_0)f_2) = \int [T(g_0)f(g)]^* T(g_0)f_2(g)dg$$

$$= \int f_1^*(gg_0)f_2(gg_0)dg = \int f_1^*(g)f_2(g)d(gg_0) \qquad (1.2.9)$$

$$= \int f_1^*(g)f_2(g)d(g) = (f_1 f_2)$$

olarak buluruz. Dolayısıyla $T(g_0)$ üniter operatördür. Söz konusu temsile sağ regüler temsil denir. Benzer şekilde

$$T(g_0)f(g) = f(g_0^{-1}g) \qquad (1.2.10)$$

olarak $\Im$ de tanımlanmış temsile sol regüler temsil denir (Vilenkin N. Ja, Klimyk A. U. 1991, ve Barut A. O., Raczka R. 1976).

$g \to T(g)$, G Lie grubunun $\Im$ Hilbert uzayında bir temsili olsun. $\Im$ nin $\Im_1$ alt uzayına (T ye göre) invaryant alt uzay denir eğer her $g \in G$ için $f \in \Im_1$ iken $T(g)f \in \Im_1$ ise. Aşikardır ki her temsil iki invaryant uzaya sahiptir; sıfır uzay ve $\Im$ temsil uzayının kendisi. Bu alt uzaylara aşikar invaryant alt uzaylar denir. Aşikar olmayan invaryant alt uzaylara öz (proper) invaryant alt uzaylar denir. Tanıma göre eğer $g \to T(g)$ temsilinin öz invaryant alt uzayları mevcut değilse temsil indirgenemezdir.

G Lie grubunun her T temsiline G nin Lie cebrinin bir T temsili karşılık gelmektedir. Bu temsil T nin diferansiyeli olarak elde edilir. Bir başka deyişle $x \in g$ ve $g(t)$ de x'e karşı gelen bir parametreli alt grup (yani $g(t) = e^{xt}$) ise

$$T(x) = \lim_{t \to 0} \frac{T(g(t)) - I}{t} \equiv \left. \frac{dT(g(t))}{dt} \right|_{t=0} \qquad (1.2.11)$$

dir. Rahatça gösterilebilir ki

$$T([x,y]) = [T(x), T(y)], \qquad x, y \in g \tag{1.2.12}$$

dir. $T(x)$ operatörlerine G grubunun T temsilinin infinitesimal operatörleri denir.

I.3. **Konuma Bağlı Efektif kütleli Schrödinger Denklemi**

Başlangıçta kristallerdeki yabancı atomları (impurity) betimlemek amacıyla önerilen efektif kütle teorisi daha sonraları yarı iletkenlerin hetero yapılarının incelenmesinde önemli bir unsur olmuştur (Luttinger J. M. ve Kohn W, 1955; H, Slater J. C., 1949). Yarı iletken çeşidinin uzaysal değişimini göz önünde almak için Hamilton operatörünün kinetik enerji kısmında kütle konumun bir fonksiyonu olarak ele alınmıştır. Kütle konumun bir fonksiyonu olduğunda $m(x)$ kütle ile $\hat{p} = -i\hbar \dfrac{d}{dx}$ momentum operatörleri artık sıra değiştirmediklerinden (yani $[\hat{p}, m] \neq 0$) kinetik enerji operatörünün tanımlanması için birçok olasılık ortaya çıkar.

Buna göre farklı konuma bağlı kütleli Hamilton operatörleri önerilmiştir. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

- Ben Daniel-Duke Hamiltonyeni (D.J. Ben-Daniel ve C.B. Duke, 1966)

$$\hat{H}_{BDD} = \frac{1}{2}\hat{p}\frac{1}{m(x)}\hat{p} + V(x) \tag{1.3.1}$$

- Zhu- Kroemer Hamiltonyeni (Q-G. Zhu ve H. Kroemer, 1982)

$$\hat{H}_{ZK} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{m(x)}}\hat{p}^2\frac{1}{\sqrt{m(x)}} + V(x) \tag{1.3.2}$$

- Bastard veya Gora-Williams Hamiltonyeni (T. Gora ve F. Williams 1969, Bastard G., 1981)

$$\hat{H}_B = \frac{1}{4}\left[\hat{p}^2 \frac{1}{m(x)} + \frac{1}{m(x)} \hat{p}^2 \right] + V(x) \tag{1.3.3}$$

- Redistribütif Hamiltonyeni (Liu T., Kuhn K. J., 1993)

$$\hat{H}_R = \frac{1}{4}\left[\hat{p} \frac{1}{\sqrt{m(x)}} \hat{p} \frac{1}{\sqrt{m(x)}} + \frac{1}{\sqrt{m(x)}} \hat{p} \frac{1}{\sqrt{m(x)}} \hat{p} \right] + V(x) \tag{1.3.4}$$

Yukarıda yazılan bütün Hamiltonyenler hermitik olup $m(x)$ kütlesi sabit olduğunda $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x)$ standart Hamilton operatörüne dönüşür. Ayrıca yukarıdaki tüm operatörler O. von Roos tarafından verilen (von Roos, 1983)

$$\hat{H}_{vR} = \frac{1}{4}\left[m(x)^{\alpha} \hat{p}\, m(x)^{\beta} \hat{p} m(x)^{\gamma} + m(x)^{\gamma} \hat{p}\, m(x)^{\beta} \hat{p} m(x)^{\alpha} \right] \tag{1.3.5}$$

hamiltonyenin özel durumlarıdır (bkz. tablo:1). Burada α, β, γ sabitler olup

$$\alpha + \beta + \gamma = -1 \tag{1.3.6}$$

dir.

Hamiltonyen	α	β	γ
Ben Daniel-Duke	0	-1	0
Redistribütif	0	-1/2	-1/2
Bastard	-1	0	0
Zhu- Kroemer	-1/2	0	-1/2

Tablo 1. *von Roos Hamiltonyeninin özel durumları*

Levi-Leblond bu Hamiltonyenlerin Galilei dönüşümleri altında invaryant olup olmadığını incelemiş ve Ben Daniel-Duke formunda Hamilton operatörünün instance Galilei dönüşümleri altında invaryant kaldığını göstermiştir. Biz de bu çalışmamızda Ben Daniel-Duke Hamiltonyenini kullanacağız ($\alpha = \gamma = 0,\ \beta = -1$):

$$H = -\frac{1}{m(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} + V(x) \tag{1.3.7}$$

Burada $\dot{m} = \frac{dm}{dx}$ şeklinde kütlenin x'e göre türevini gösterir. Buna karşılık gelen Schrödinger denklemi

$$\left[-\frac{1}{m(x)}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \tag{1.3.8}$$

dır. Burada $V(x)$ potansiyeli, $\Psi(x)$ dalga fonksiyonunu ve E enerjiyi göstermektedir. $m(x)$ efektif kütle bazı noktalarda sıçrama süreksizliğine sahip olabilir. Bu noktalarda

$\Psi(x)$ ve $\frac{1}{m(x)}\Psi'(x)$ dalga fonksiyonları sürekli olmalıdır. Bir başka deyişle aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

$$\text{i) } \Psi(x)\Big|_{-} = \Psi(x)\Big|_{+} \tag{1.3.9}$$

$$\text{ii) } \frac{1}{m(x)}\frac{d\Psi}{dx}\Big|_{-} = \frac{1}{m(x)}\frac{d\Psi}{dx}\Big|_{+} \tag{1.3.10}$$

Burada $-,+$ indisleri sırasıyla kütlenin süreksiz olduğu noktanın sol ve sağ tarafını göstermektedir. Yukarıdaki koşullar $V(x)$ potansiyelinin söz konusu noktada sıçrama süreksizliğine sahip olduğu durumlarda da geçerlidir. Ancak eğer potansiyel delta fonksiyonu δ gibi bir x_0 noktasında süreksizliğe sahip ise yani

$$V \approx V_0\delta(x - x_0) \tag{1.3.11}$$

ise ii) koşulu yerine

$$\frac{1}{m(x)}\frac{d\Psi}{dx}\Big|_{+} - \frac{1}{m(x)}\frac{d\Psi}{dx}\Big|_{-} = \frac{2V_0}{\hbar^2}\Psi(x_0) \tag{1.3.12}$$

sağlanır.

I.4. **Yöntem**

Grup teorik yaklaşımda genelde sistemin H Hamiltonyeni bir G Lie grubunun $J_{\alpha\beta}$ infinitesimal operatörleri cinsinden yazılır. Çoğu zaman H

$$H = a + \sum_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} J_{\alpha\beta} + \sum c_{\alpha\beta\gamma\delta} J_{\alpha\beta} J_{\gamma\delta} + ... \qquad (1.4.1)$$

olarak alınır. Eğer G sistemin simetri grubu ise H Hamiltonyeni G grubunun yalnız C Casimir operatörleri cinsinden yazılır. Bu noktada altını çizerek vurgulamak gerekir ki söz konusu incelemelerde ya G grubunun indirgenemez temsilleri ya da indirgenemez temsillere açılımı belli olan indirgenebilir temsiller kullanılır. Böylece H operatörünün öz değerleri bu bilgi ışığında cebirsel işlemler sonucu rahatça elde edilir. Özellikle şunun da altını çizmek gerekir ki H Hamiltonyeninin spektrumunu elde etmek için indirgenebilir temsilin indirgenemez temsillere açılımı bilgisi yeterli olduğu halde genelde bu bilginin dalga fonksiyonlarının grup teorik yöntemlerle bulunmasına yetmez.

Konuma bağlı efektif kütleli çözülebilir Schrödinger denkleminin grup teorik incelenmesi için Kerimov'un (Kerimov G. A., 2009) sunduğu teknikte kuantum sisteminin H Hamiltonyeni bir G Lie grubunun (genelleşmiş) regüler temsilinin Casimir operatörü ile ilişkilendirilmektedir. Söz konusu temsilin kullanılmasındaki esas neden bir taraftan çok sayıda Lie gruplarının regüler temsillerinin indirgenemez temsillere açılımının iyi bilinmesi, diğer taraftan da indirgenemez temsillerin matris elemanlarının regüler temsilin etki ettiği Hilbert uzayında baz vektörlerini oluşturmasıdır. Buna göre H Hamiltonyeninin spektrumunu elde etmekle beraber, dalga fonksiyonları G nin indirgenemez temsillerinin matris elemanlarıyla ifade edilir. Biz de bu çalışmada Kerimov'un sunduğu tekniği kullanacağız.

Söz konusu yöntemi şu şekilde özetleyebiliriz:

$L^{\infty}(G)$, G grubu üzerinde tanımlanmış sonsuz türevlenebilir fonksiyonların uzayı olsun. Rahatlıkla görülebilir ki;

$$T(g_0) f(g) = \left[\frac{h(gg_0)}{h(g)} \right]^{1/2} f(gg_0) \qquad (1.4.2)$$

ifadesi G nin bir temsilidir. Burada $g, g_0 \in G$ ve $h(g)$ de g nin pozitif bir fonksiyonudur. T temsili

$$(f, f') = \int f^*(g) f'(g) d\mu \tag{1.4.3}$$

iç çarpımına göre üniterdir. Burada $d\mu = h(g)dg$ ve dg de G grubunda bir invaryant hacim elemanıdır. $h(g) = 1$ durumunda temsil operatörlerini $\breve{T}$ ile gösterirsek denklem (1.4.2) temsili aşağıdaki şekli alır:

$$\breve{T}(g_0)\breve{f}(g) = \breve{f}(gg_0)\,. \tag{1.4.4}$$

Bilindiği üzere bu ifade G grubunun (sağ) regüler temsilidir (bkz. Bölüm II.2), ve bu temsil G grubunun üniter indirgenemez temsillerine (UIRs) açılmaktadır. Ayrıca iyi bilinmektedir ki eğer G grubu non kompakt Lie grubu ise G grubunun UIRs discrete temsillerinin söz konusu açılımda bulunması için yalnız ve yalnız $Rank\, G = Rank\, K$ olması gerekir (Vilenkin N. Ja ve Klimyk A. U. Vol:1). Burada K, G grubunun maksimal kompakt grubu ve $Rank\, G$ de G grubunun rankını göstermektedir. Açıktır ki $\breve{T}$ temsili T ye eşdeğerdir. Bu eşdeğerliği gerçekleyen W dönüşümü aşağıdaki şekildedir:

$$W = f \to \breve{f} = h^{1/2} f\,. \tag{1.4.5}$$

Belirtelim ki genelde matematiksel açıdan eşdeğer olan temsiller fiziksel açıdan eşdeğer olmayıp farklı fiziksel sistemleri betimler.

Yukarıda belirtildiği gibi kuantum sisteminin H Hamiltonyeni C Casimir operatörleri ile ilişkilendirilir. Buna göre regüler temsilin C Casimir operatörünün açık ifadesini bulalım.

G grubunun **g** Lie cebri n boyutlu ve $e_1, e_2, ...e_n$ de **g** Lie cebrinin

$$[e_1, e_2] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} e_k, \qquad i, j = 1,2,...n \tag{1.4.6}$$

komutasyon bağıntılarını sağlayan baz vektörleri olsun. Burada c_{ij}^{k} yapı sabitleridir. Eğer $\omega_k(t), e_k$ baz vektörünün ürettiği grup elemanı ise e_k ya karşılık gelen J_k infinitesimal operatörü

$$J_k = -i \frac{d}{d\tau} T(\omega_k(\tau))\,|_{\tau=0} \tag{1.4.7}$$

şeklindedir (bkz. Bölüm 2.2). (1.4.7) bağıntısına göre J_k lar aşağıdaki komutasyon bağıntılarını sağlarlar,

$$[J_i, J_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} J_k \,. \tag{1.4.8}$$

Ayrıca T temsilinin ikinci mertebeden C Casimir operatörü

$$C = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik} J_i J_k \tag{1.4.9}$$

bağıntısı ile belirlenir. Burada

$$g_{ik} = \sum_{j,l=1}^{n} c_{ij}^{l} c_{kl}^{j} \tag{1.4.10}$$

dir.

Böylece (1.4.4) temsili için ikinci mertebeden Casimir operatörünü bulmak için J_k operatörlerini aşağıdaki bağıntıdan hesaplamak gerekir,

$$J_k f(g) = -i \frac{d}{d\tau} \left\{ \left[\frac{h(gg_0)}{h(g)} \right]^{1/2} f\left(g\omega_k(\tau)\right) \right\} \Bigg|_{\tau=0} \qquad (1.4.11)$$

Bunun için önce G grubunun bir parametrizasyonunu seçmek gerekir. Bilindiği gibi G grubunun **g** genel elemanının birçok parametrizasyonu mevcuttur. Ama bunların arasında bizim amacımıza uygun olanı

$$g = bad \qquad (1.4.12)$$

faktorizasyonunu veren parametrizasyondur. Burada çarpımların her biri G grubunun bir elemanıdır. Dolayısıyla **g** için bir parametrizasyon seçilmiş ise J_k infinitesimal operatörler rahatça hesaplanabilir ve daha sonra Casimir operatörü bulunabilir. C Casimir operatörünü bir H Hamiltonyeni ile ilişkilendirmek için a elemanının parçacığın x koordinatına bağlı olduğu düşünülür ve söz konusu Hamiltonyeni bulmak için aşağıdaki yol izlenir:

Temsil uzayında

$$f(g) = u_r(b) w_s(d) f(a) \qquad (1.4.13)$$

şeklinde tanımlanan $f(g)$ fonksiyonlarından oluşan $\Im$ alt uzay seçilir ve C Casimir operatörü $\Im$ alt uzayına kısıtlandırılır. Burada u_r, w_s sırasıyla b ve d elemanlarının ait olduğu alt grupların matris elemanlarıdır. Böylece C operatörü sadece x'e bağlı bir diferansiyel operatör olur. Daha sonra h uygun bir şekilde seçilerek konuma bağlı kütleli H Hamiltonyen operatörleri bulunur. Regüler temsilin indirgenemez temsillere açılımı H Hamiltonyen operatörünün spektrumunu, indirgenemez temsillerin a elemanına karşılık gelen matris elemanı $t_{rs}(a)$ ise dalga fonksiyonlarını tanımlar.

II. BÖLÜM: SU(2) GRUBUNA BAĞLI ÇÖZÜLEBİLİR EFEKTİF KÜTLELİ HAMİLTONYENLER

Bu bölümde SU(2) grubunun regüler temsiline bağlı çözülebilir efektif kütleli Hamiltonyenler incelenecektir. Bunun için önce SU(2) grubunun indirgenemez ve regüler temsillerini ele alacağız

II.1. **SU(2) Grubunun İndirgenemez Temsilleri**

$SU(2)$ grubu ikinci mertebeden

$$u=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^{*} & \alpha^{*} \end{pmatrix},\quad |\alpha|^{2}+|\beta|^{2}=1,\quad u^{+}u=uu^{+}=1 \tag{2.1.1}$$

üniter ünimodüler matrislerden oluşmaktadır. Bu matrisler φ,t,ϕ Euler açıları cinsinden aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$u=\begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2}e^{i\frac{\varphi+\phi}{2}} & i\sin\frac{t}{2}e^{i\frac{\varphi-\phi}{2}} \\ -i\sin\frac{t}{2}e^{i\frac{\varphi-\phi}{2}} & \cos\frac{t}{2}e^{-i\frac{\varphi+\phi}{2}} \end{pmatrix} \tag{2.1.2}$$

$$0\le\varphi<2\pi,\qquad 0<t<\pi,\qquad 0\le\phi<2\pi$$

Buna göre her u üniter matrisi

$$u(\varphi,t,\phi)=\begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2} \\ -i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \tag{2.1.3}$$

biçiminde faktorize edilebilir. Tek parametreli üç farklı alt grupları aşağıdaki gibi seçelim :

$$\omega_1(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\tau}{2} & i\sin\frac{\tau}{2} \\ i\sin\frac{\tau}{2} & \cos\frac{\tau}{2} \end{pmatrix} \tag{2.1.4}$$

matrislerinden oluşan Ω_1 alt grubu

$$\omega_2(\tau) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\tau}{2} & -i\sin\frac{\tau}{2} \\ \sin\frac{\tau}{2} & \cos\frac{\tau}{2} \end{pmatrix} \tag{2.1.5}$$

matrislerinden oluşan Ω_2 alt grubu ve

$$\omega_3(\tau) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\tau}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\tau}{2}} \end{pmatrix} \tag{2.1.6}$$

köşegen matrislerden oluşan Ω_3 alt grubu olsun. Bu alt gruplara a_1, a_2, a_3 teğet matrislerin aşağıdaki şekilde olacağı rahatça görülebilir.

$$a_1 = \left.\frac{d\omega_1(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \left.\frac{d\omega_2(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.1.7)$$

$$a_3 = \left.\frac{d\omega_3(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a_1, a_2, a_3 matrisleri lineer bağımsız olup $SU(2)$ nin Lie cebrinin bazını oluşturmaktadır. Dolayısıyla bu grubun Lie cebri $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$ matrislerini içermektedir. a_1, a_2, a_3 matrisleri aşağıdaki komutasyon bağıntılarını sağlamaktadır:

$$[a_1, a_2] = a_3$$

$$[a_2, a_3] = a_1 \qquad (2.1.8)$$

$$[a_3, a_1] = a_2$$

$SU(2)$ grubunun T^ℓ üniter indirgenemez temsilleri ℓ, $\left(\ell = 0, \frac{1}{2}, 1, ...\right)$ sayısıyla karakterize edilmektedir. Bu temsilin örneğin ℓ.'ci mertebeden trigonometrik polinomları $\aleph_\ell$ uzayında aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$T^\ell(u)F(e^{i\varphi}) = e^{-i\ell\varphi}(\alpha e^{i\varphi} - \overline{\beta})^\ell(\beta e^{i\varphi} + \overline{\alpha})^\ell F\left(\frac{\alpha e^{i\varphi} - \overline{\beta}}{\beta e^{i\varphi} + \overline{\alpha}}\right) \qquad (2.1.9)$$

Bir üniter temsilde a_1, a_2, a_3'e karşılık gelen L_1, L_2, L_3 infinitesimal operatörleri hermitik olup

$$[L_1, L_2] = iL_3$$

$$[L_2, L_3] = iL_1 \qquad (2.1.10)$$

$$[L_3, L_1] = iL_2$$

komutasyon bağıntılarını sağlarlar. Ayrıca belirtmek gerekir ki $SU(2)$ grubunun $C = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ Casimir operatörü, T^ℓ temsili için $C^\ell = \ell(\ell+1)I$ dir. Burada I birim operatördür. Temsil uzayında baz vektörleri olarak genelde L_3 ün $|n\rangle$ öz vektörleri seçilmektedir,

$$L_3|n\rangle = n|n\rangle \qquad (2.1.11).$$

Burada $-\ell \le n \le \ell$ dir. Örneğin (2.1.9) temsili için

$$L_3 = i\frac{d}{d\varphi} \qquad (2.1.12)$$

ve

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{(\ell-n)!(\ell+n)!}} e^{-in\varphi} \qquad (2.1.13)$$

olarak bulunur. Ayrıca T^ℓ temsilinin $t^\ell_{mn}(u) = \langle m|T^\ell(n)|n\rangle$ matris elemanları

$$t^\ell_{mn}(u) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(\ell-m)!(\ell+m)!}{(\ell-n)!(\ell+n)!}} \int_0^{2\pi} (\alpha e^{i\varphi} - \overline{\beta})^{\ell-n} (\beta e^{i\varphi} + \overline{\alpha})^{\ell+n} e^{i(m-\ell)\varphi} d\varphi \qquad (2.1.14)$$

formülünden hesaplanabilir. $t^\ell_{mn}(g)$ matris elemanları özel fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$t_{mn}^{\ell}(u) = e^{-i(m\varphi+n\phi)} P_{mn}^{\ell}(\cos t) \tag{2.1.15}$$

burada φ, t, ϕ Euler açıları, $P_{mn}^{\ell}(z)$ ise genelleşmiş Legendre polinomlarıdır ve eğer $m \geq n$ ise

$$P_{mn}^{l}(z) = \frac{i^{m-n}}{2^m (m-n)!} \sqrt{\frac{(l-n)!(l+m)!}{(l-m)!(l+n)!}} (1+z)^{\frac{m+n}{2}} (1-z)^{\frac{m-n}{2}} {}_2F_1(l+m+1, m-l; m-n+1; \frac{1-z}{2}) \tag{2.1.16}$$

eğer $n \geq m$ ise

$$P_{mn}^{l}(z) = \frac{i^{m-n}}{2^m (n-m)!} \sqrt{\frac{(l-m)!(l+n)!}{(l-n)!(l+m)!}} (1+z)^{\frac{m+n}{2}} (1-z)^{\frac{n-m}{2}} {}_2F_1(l+n+1, n-l; n-m+1; \frac{1-z}{2}) \tag{2.1.17}$$

dir. Burada ${}_2F_1$ hipergeometrik fonksiyonlar olup aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır,

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}{k!\Gamma(\gamma+k)} z^k \tag{2.1.18}$$

Hipergeometrik fonksiyonların sağladığı bağıntıları kullanarak $P_{mn}^{\ell}(z)$ ' nin değişik ifadeleri bulunabilir. Örneğin

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = (1-z)^{-\alpha} {}_2F_1(\alpha, \gamma-\beta; \gamma; \frac{z}{z-1}) \tag{2.1.19}$$

bağıntısını kullanarak $m \geq n$ durumu için (2.1.17) ifadesinden

$$P_{mn}^{l}(z)=\frac{i^{m-n}}{2^{m}(n-m)!}\sqrt{\frac{(l+m)!(l-n)!}{(l-m)!(l+n)!}}$$

$$(1+z)^{\frac{m-n}{2}}(1-z)^{l-\frac{m-n}{2}}\,{}_2F_1(m-l,-n-l;m-n+1;\frac{z-1}{z+1}) \tag{2.1.20}$$

olarak bulunur.

II.2. **SU(2) Grubunun Regüler Temsili**

$SU(2)$ grubunun regüler temsili

$$T(u_0)f(u)=f(uu_0) \tag{2.2.1}$$

olarak tanımlanır. Tanıma göre (2.2.1) temsilinin L_k, $k=1,2,3$ infinitesimal operatörleri

$$L_k=-i\frac{d}{d\tau}T(\omega_k(\tau))\Big|_{\tau=0},\ k=1,2,3 \tag{2.2.2}$$

bağıntısından hesaplanır. Bu operatörler arasındaki bağıntı

$$L_k f(u)=-i\frac{d}{d\tau}T(\omega_k(\tau))f(u)\Big|_{\tau=0} \tag{2.2.3}$$

şeklindedir. Burada (2.2.1) bağıntısı göz önüne alınırsa (2.2.3) bağıntısı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$L_k f(u)=-i\frac{d}{d\tau}f(u\omega_k(\tau))\Big|_{\tau=0} \tag{2.2.4}$$

$u\omega_k(\tau)$ matrisinin (bkz.denklem 2.1.2) Euler açılarını $\varphi(\tau), t(\tau), \phi(\tau)$ olarak gösterelim. O halde

$$\frac{d}{d\tau} f(u\omega_k(\tau)\Big|_{\tau=0} = \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{dt}{d\tau} + \frac{\partial f}{\partial \phi}\cdot\frac{d\phi}{d\tau}\right]\Bigg|_{\tau=0} \qquad (2.2.5)$$

yazabiliriz. Bu bağıntı (2.2.4) da yerine yazılırsa

$$iL_k = \varphi'(0)\frac{\partial}{\partial \varphi} + t'(0)\frac{\partial}{\partial t} + \phi'(0)\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad (2.2.6)$$

olarak buluruz. Burada $\varphi'(0) \equiv \left.\frac{\partial \varphi(\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}$ v.b. Dolayısıyla L_k ları bulmak için $\varphi'(\tau), t'(\tau), \phi'(\tau)$ türevlerini $\tau = 0$ için hesaplamak yeterlidir.

ω_3' e karşılık gelen infinitesimal operatörü hesaplayalım. Euler açıları φ, t, ϕ olan $u = u(\varphi, t, \phi)$ üniter matris (bkz. Bölüm II.1) $\omega_3(\tau)$ matrisi ile sağdan çarpılırsa elde edilen $u\omega_3(\tau)$ matrisinin Euler açılarının sırasıyla $\varphi, t, \phi + \tau$ olacağını görmek zor değildir. Dolayısıyla $\varphi'(0) = 0, t'(0) = 0, ve\ \phi'(0) = 1$ dir. Böylece

$$L_3 = -i\frac{\partial}{\partial \phi} \qquad (2.2.7)$$

olarak bulunur. L_1'i bulmak için $u\omega_1(\tau)$ matrisinin Euler açılarını hesaplayalım. Biraz işlemle

$$\cos t(\tau) = \cos t \cos \tau - \sin t \sin \tau \cos \phi$$

$$e^{i\varphi(\tau)} = e^{i\varphi}\,\frac{\sin t\cos\tau + \cos t\sin\tau\cos\phi + i\sin\tau\sin\phi}{\sin t(\tau)}$$

$$e^{\frac{i\varphi(\tau)+\phi(\tau)}{2}} = e^{\frac{i\varphi}{2}}\,\frac{\cos\frac{t}{2}\cos\frac{\tau}{2}e^{\frac{i\phi}{2}} - \sin\frac{t}{2}\sin\frac{\tau}{2}e^{-i\frac{\phi}{2}}}{\cos\frac{t(\tau)}{2}} \tag{2.2.8}$$

olarak bulunur. $\varphi'(\tau), t'(\tau), \phi'(\tau)$ türevlerini $\tau = 0$ da hesaplamak için (2.2.28) bağıntılarının her iki yanının τ ya göre türevi hesaplanır ve daha sonra τ yerine sıfır yazılır. $\varphi(0) = 0, t(0) = t,\ ve\ \phi(0) = \phi$ olduğu göz önüne alınırsa

$$t'(0) = \cos\phi, \quad \varphi'(0) = \frac{\sin\phi}{\sin t}, \qquad \phi'(0) = -\frac{\sin\phi}{\tan t} \tag{2.2.9}$$

olarak bulunur. Buna göre

$$iL_1 = \cos\phi\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sin\phi}{\sin t}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\sin\phi}{\tan t}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{2.2.10}$$

dir. Benzer şekilde $\omega_2(\tau)$ matrisine karşılık gelen L_2 operatörü için

$$iL_2 = -\sin\phi\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\cos\phi}{\sin t}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\cos\phi}{\tan t}\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{2.2.11}$$

bulunur.

Ayrıca regüler temsilin $C = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ Casimir operatörü için de

$$C = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \cot t\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\sin^2 t}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - 2\cos t\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\phi} + \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \tag{2.2.12}$$

bulunur. (2.2.1) temsili, SU(2) grubunun T^l, $l = 0,1,..$ indirgenemez temsiline göre aşağıdaki şekilde seriye açılmaktadır.

$$T(g)=\sum_{l=0}^{\infty}\oplus T_l\ . \tag{2.2.13}$$

Buna göre $f(g)$ fonksiyonları T^l temsilinin t^l_{mn} matris elemanlarına göre aşağıdaki şekilde seriye açılmaktadır:

$$\begin{aligned} f(g) &= \sum_{l=0}^{\infty}\ \sum_{m=-l}^{l}\ \sum_{n=-l}^{l} \alpha^{\ l}_{mn}\ t^{\ l}_{mn}\ (g) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\ \sum_{m=-l}^{l}\ \sum_{n=-l}^{l} \alpha^{\ l}_{mn}\ e^{\,-i(m\varphi+n\phi)} P^{\ l}_{mn}\ (\cos\ t) \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

burada α^l_{mn} Fourier katsayılarıdır. Ayrıca belirtelim ki $t^l_{mn}(g)$ matris elemanları (2.2.12) Casimir operatörü için öz değer denkleminin çözümleridir, yani

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\cot t\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{\sin^2 t}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-2\cos t\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\phi}+\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\right]t^l_{mn}(g)=l(l+1)t^l_{mn}(g) \tag{2.2.15}$$

denklemini sağlarlar.

II.3. **Kanonik baza bağlı efektif kütleli Hamiltonyenler**

Bu bölümde $\widetilde{C}=\widetilde{L}_1^2+\widetilde{L}_2^2+\widetilde{L}_3^2$, $SU(2)$ grubunun $\widetilde{T}$ genelleştirilmiş regüler temsilinin Casimir operatörü olmak üzere

$$\left[\widetilde{C}-\ell(\ell+1)\right]\Big|_{\Im}=Q\left[H-E\right] \tag{2.3.1}$$

bağıntısını sağlayan konuma bağlı efektif kütleli H Hamiltonyenlerin öz değer ve öz fonksiyonlarını bulacağız. Burada $\ell(\ell+1)$ Casimir operatörünün öz değerleri, Q,

konuma bağlı bir fonksiyon , $\Im$ temsil uzayındaki bir alt uzay, $|_{\Im}$ de operatörün alt uzaya kısıtlamasını göstermektedir.

$SU(2)$ grubunun genelleştirilmiş sağ regüler temsili

$$\widetilde{T}(u_0)f(u)=\left[\frac{h(uu_0)}{h(u)}\right]^{1/2}f(uu_0) \tag{2.3.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f(u),u\in SU(2)$, $SU(2)$ grubunun manifoldunda tanımlanan fonksiyonlar, h'da u'ya bağlı herhangi bir fonksiyondur. Daha önce söylediğimiz gibi u matrislerinin Euler açılımındaki yalnız ikinci matrisin x konumuna bağlı olduğunu düşüneceğiz. Bir başka deyişle t açısının, görüntü kümesi $(0,\pi)$ aralığı olan konuma bağlı bir fonksiyon olduğunu farz edeceğiz.

$$0<t(x)<\pi \tag{2.3.3}$$

(2.3.2) temsilinin ω_k ya karşılık gelen infinitesimal operatörleri

$$\begin{aligned}
i\widetilde{L}_1&=\frac{\cos\phi}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\sin\phi}{\sin t}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{\sin\phi}{\tan t}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\dot{h}}{2h}\\
i\widetilde{L}_2&=-\frac{\sin\phi}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\cos\phi}{\sin t}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{\cos\phi}{\tan t}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\dot{h}}{2h}\\
i\widetilde{L}_3&=\frac{\partial}{\partial\phi}
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

olarak bulunur. Burada $\dot{t}=\frac{dt}{dx},\dot{h}=\frac{dh}{dx}$ dir. Buna göre $\widetilde{C}=\widetilde{L}_1^2+\widetilde{L}_2^2+\widetilde{L}_3^2$ Casimir operatörü için

$$\widetilde{C} = -\frac{1}{\dot{t}^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\dot{t}^2}\left(\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \frac{\dot{t}}{\tan t}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\sin^2 t}\left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - 2\cos t\frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \phi} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\dot{h}}{2h\dot{t}^2}\left(-\frac{\ddot{h}}{\dot{h}} + \frac{\dot{h}}{2h} + \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} - \frac{\dot{t}}{\tan t}\right) \tag{2.3.5}$$

bulunur. Casimir operatörü

$$f(g) = e^{-in\phi - ik\varphi} f(x) \tag{2.3.6}$$

biçimindeki fonksiyonların oluşturduğu $\Im_{nk}$ alt uzayına kısıtlanırsa

$$\left[\widetilde{C} - \ell(\ell+1)\right]_{\Im_{nk}} = \frac{m}{\dot{t}^2}\left[-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{m}\left(\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \frac{\dot{t}}{\tan t}\right)\frac{d}{dx} + \dot{t}^2\frac{n^2 + k^2 - 2nk\cos t}{m\sin^2 t} + \frac{\dot{h}}{2mh}\left(\frac{\dot{h}}{2h} - \frac{\ddot{h}}{\dot{h}} + \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} - \frac{\dot{t}}{\tan t}\right) - \frac{\dot{t}^2}{m}\ell(\ell+1)\right] \tag{2.3.7}$$

olur. Bu bağıntı

$$\left[\widetilde{C} - \ell(\ell+1)\right]_{\Im_{nk}} = Q(x)\left[-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} + V(x) - E\right] \tag{2.3.8}$$

bağıntısı ile karşılaştırılırsa (bkz denklem 2.3.1) h fonksiyonu için aşağıdaki koşul bulunur,

$$\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \frac{\dot{t}}{\tan t} = -\frac{\dot{m}}{m}. \tag{2.3.9}$$

(2.3.9) daki diferansiyel denklemi çözülürse h için

$$h = \frac{\dot{t}}{m \sin t} \tag{2.3.10}$$

bulunur. h'ın bu ifadesi (2.3.7) de yerine yazılırsa

$$\left[\widetilde{C} - \ell(\ell+1)\right]_{\Im_{nk}} = \frac{m}{\dot{t}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} + \dot{t}^2\,\frac{n^2 + k^2 - 2nk\cos t}{m\sin^2 t}\right.$$
$$\left. - \frac{\dddot{t}}{2m\dot{t}} + \frac{3}{4m}\frac{\ddot{t}^2}{\dot{t}^2} - \frac{\dot{t}^2}{4m}\left(1 + \frac{1}{\sin^2 t}\right) - \frac{\dot{t}^2}{m}l(l+1) + \frac{\dot{m}}{2m^2} - \frac{3\dot{m}^2}{4m^3}\right\} \tag{2.3.11}$$

olur. Burada ifadeyi basitleştirmek amacıyla $t(x)$ fonksiyonu yerine

$$u(x) = \sin^2\frac{t(x)}{2} \tag{2.3.12}$$

fonksiyonunu kullanırsak (2.3.11) denklemi

$$\left[C - \ell(\ell+1)\right]\Big|_{\Im_{nk}} = \frac{mu(1-u)}{\dot{u}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} + \frac{\dot{u}^2}{4mu^2(1-u)^2}\left[(n-k)^2 + 4nku\right]\right.$$
$$\left. - \frac{\dddot{u}}{2m\dot{u}^2} + \frac{3}{4m}\frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^2} - \frac{\dot{u}^2}{4mu^2(1-u)^2} - \frac{3\dot{m}^2}{4m^3} + \frac{\dot{m}}{2m^2} - \frac{\dot{u}^2}{mu(1-u)}\ell(\ell+1)\right\} \tag{2.3.13}$$

şeklini alır. Hatırlatalım ki $SU(2)$ grubunun matris elemanları $u = \sin^2\frac{t(x)}{2}$ olmak üzere ${}_2F_1(u)$ hiper geometrik fonksiyonları ile ifade edilir (bkz. denklem 2.1.18). Şimdi n, k, ℓ sayılarının E enerjinin bir fonksiyonu olduğunu varsayalım,

$$(n-k)^2 = b - aE$$

$$4nk = c - dE \tag{2.3.14}$$

$$\ell(\ell+1) = f - gE$$

Bu ifadeleri (2.3.13) de göz önüne alırsak

$$\left[\widetilde{C} - \ell(\ell+1)\right]\Big|_{\Im_{nk}} = \frac{mu(1-u)}{\dot{u}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} + \frac{\dot{u}^2}{4mu^2(1-u)^2}\left[4gu(1-u) - a - du\right]E\right.$$

$$\left. -\frac{\ddot{u}}{2m\dot{u}^2} + \frac{3}{4m}\frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^2} - \frac{\dot{u}^2}{4mu^2(1-u)^2}\left[b + cu - 4fu(1-u) - 1\right] - \frac{3\dot{m}^2}{4m^3} + \frac{\ddot{m}}{2m^2}\right\} \tag{2.3.15}$$

olur. (2.3.1) bağıntısına göre E nin katsayısı -1 olmalıdır. Dolayısıyla

$$\frac{\dot{u}^2}{4mu^2(1-u)^2}R = 1 \tag{2.3.16}$$

eşitliği sağlanmalıdır. Burada R

$$R(u) = 4gu^2 + (d-4g)u + a \tag{2.3.17}$$

O halde (2.3.15) denklemi

$$\left[\widetilde{C} - \ell(\ell+1)\right]\Big|_{\Im_{nk}} = \frac{mu(1-u)}{\dot{u}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} - E\right.$$

$$\left. -\frac{\ddot{u}}{2m\dot{u}^2} + \frac{3}{4m}\frac{\ddot{u}^2}{\dot{u}^2} + \frac{1}{R}\left[4fu^2 + (c-4f)u + b - 1\right] - \frac{3\dot{m}^2}{4m^3} + \frac{\ddot{m}}{2m^2}\right\} \tag{2.3.18}$$

olur. (2.3.18) düzenlendiğinde

$$\left[\widetilde{C}-\ell(\ell+1)\right]_{\Im} = Q(x)\left[H-E\right] \tag{2.3.19}$$

şekline getirilmiş olur. Burada

$$Q(x) = \frac{mu(1-u)}{\dot{u}^2} \tag{2.3.20}$$

ve Hamiltonyen

$$H = -\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} + \frac{u^2(1-u)^2}{R^2}\left\{-\frac{5\Delta}{4R} + \frac{d(1-2u)-4g}{u(1-u)} - 12g\right\}$$
$$+ \frac{1}{R}\left[4fu^2 + (c-4f)u + b - 1\right] - \frac{7\dot{m}^2}{16m^3} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} \tag{2.3.21}$$

dir. Burada Δ, $R(u)$ nun diskriminantı olup

$$\Delta = (d-4g)^2 - 16ga \tag{2.3.22}$$

dır. En genel halde potansiyel

$$V(x) = \frac{u^2(1-u)^2}{R^2}\left\{-\frac{5\Delta}{4R} + \frac{d(1-2u)-4g}{u(1-u)} - 12g\right\}$$
$$+ \frac{1}{R}\left[4fu^2 + (c-4f)u + b - 1\right] - \frac{7\dot{m}^2}{16m^3} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} \tag{2.3.23}$$

dir. Enerji ise en genel halde

$$(n-k)^2 = b - aE$$

$$4nk = c - dE$$

$$\ell(\ell+1) = f - gE$$

denklemlerinden bulunur. Dalga fonksiyonu ise en genel halde

$$\Psi(u) \propto \left[2mu(1-u^2)\right]^{\frac{1}{2}} (1+u)^{\frac{k+n}{2}} (1-u)^{\frac{k-n}{2}} \, {}_2F_1(l+k+1, k-l; k-n+1; \frac{1-u}{2})$$

şeklindedir.

II.4. **Özel Durumlar**

Pöschl-Teller tipi potansiyel

(2.3.18) denkleminde katsayılardan $a = d = 0$ seçilirse $R(u) = 4u(1-u)$, $\Delta = 16$ olur. O halde (2.3.16) denklemi

$$\dot{u} = \sqrt{m(x)}\sqrt{u(1-u)} \qquad (2.4.1)$$

veya

$$\int \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = \int \sqrt{m(x)}dx \qquad (2.4.2)$$

şeklini alır. Eşitliğin sol tarafındaki integrali tam kare şekline getirirsek

$$\int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2}} = \upsilon(x) \qquad (2.4.3)$$

olur. Burada

$$\upsilon(x) = \int \sqrt{m(x)}dx \qquad (2.4.4)$$

dir.(2.4.3) denklemindeki integralin çözümü

$$\int \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(u - \frac{1}{2}\right)^2}} = Arc\sin(2u-1) + C \qquad (2.4.5)$$

dir (bkz. Gradsteyn Ryzhık, 1965, say 56, no: 2.02-21). Dolayısıyla

$$Arc\sin(2u-1) + C = \upsilon(x) \qquad (2.4.6)$$

veya

$$u = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\upsilon(x) - C\right) + 1\right] \qquad (2.4.7)$$

bulunur. Eğer $C = \pi/2$ alınırsa (2.4.7) denklemi

$$u = \sin^2 \frac{\upsilon(x)}{2} \qquad (2.4.8)$$

olur. Burada

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \qquad (2.4.9)$$

bağıntısını kullandık (bkz.Spiegel Murray R., 1968, say:15 no 5.34). Ayrıca $a = d = 0$ katsayılarını (2.3.14) deki denklem sisteminde yazarsak b ve c katsayılarını n,k cinsinden

$$(n-k)^2 = b$$

$$4nk = c \qquad (2.4.10)$$

$$l(l+1) = f - gE$$

şeklinde buluruz. (2.4.8) denklemindeki u ifadesi de kullanılarak (2.3.23) deki potansiyel

$$V_{PT}(x) = \frac{(n+k)^2 - \frac{1}{4}}{4\cos^2\frac{\upsilon(x)}{2}} + \frac{(n-k)^2 - \frac{1}{4}}{4\sin^2\frac{\upsilon(x)}{2}} - f + \frac{1}{4} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \qquad (2.4.11)$$

şeklini alır. (2.4.11) ifadesinde sabit terimi yok etmek için $-f + \frac{1}{4} = 0$ alalım. Buna göre (2.4.11)

$$V_{PT}(x) = \frac{(n+k)^2 - \frac{1}{4}}{4\cos^2\frac{\upsilon(x)}{2}} + \frac{(n-k)^2 - \frac{1}{4}}{4\sin^2\frac{\upsilon(x)}{2}} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \qquad (2.4.12)$$

olur. Enerji spektrumu $K = \max(|n|,|k|)$ olmak üzere

$$E = -\frac{1}{g}\left[(2\ell+1)^2 - 1\right], \qquad \ell = K, K+1, K+2, \ldots, \qquad (2.4.13)$$

dır. Dalga fonksiyonunu ise (2.3.10) ve (2.1.20) denklemlerini göz önüne alınarak

$$\Psi(x) \propto \left(2mu(1-u^2)\right)^{1/2}\left(\sqrt{u}\right)^{k-n}\left(\sqrt{1-u}\right)^{k+n} \\ xF\left(\ell+k+1,-\ell+k;k-n+1;u\right) \tag{2.4.15}$$

bulunur. Kütleyi özel olarak $\alpha \geq 1$ olmak üzere

$$m(x) = \left(\frac{\alpha + x^2}{1+x^2}\right)^2 \tag{2.4.16}$$

seçelim. O zaman (2.4.4) denkleminde

$$\upsilon(x) = x + (\alpha - 1)\arctan x \qquad x \in (0, \pi/2)$$

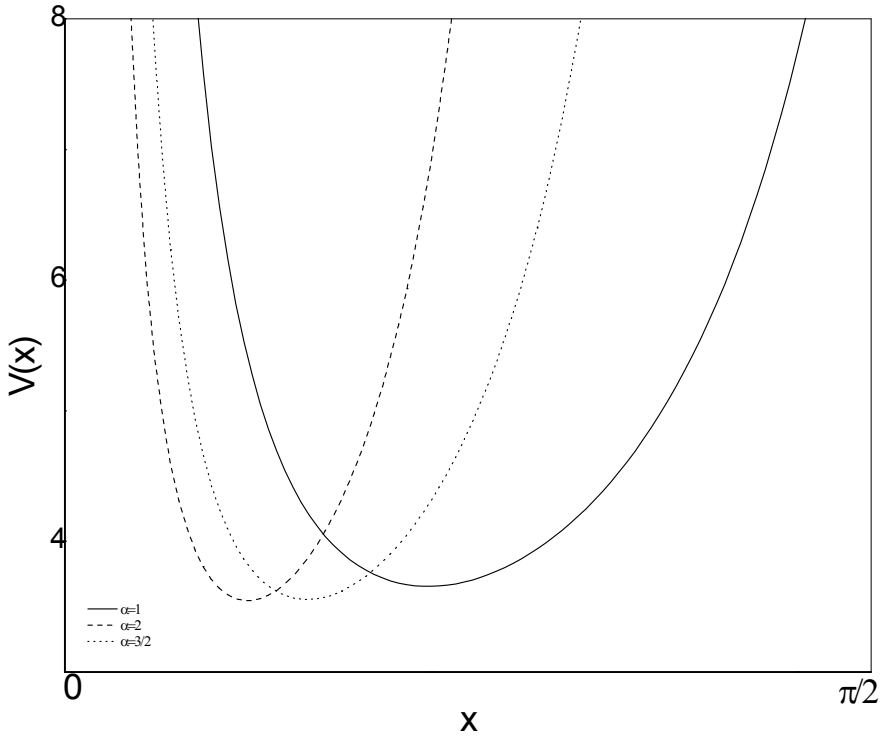
olur. Ayrıca

$$\frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} = \frac{(1-\alpha)}{\left(\alpha + x^2\right)^4}\left[-3x^4 + (2\alpha - 4)x^2 + \alpha\right] \tag{2.4.17}$$

bulunur. Potansiyel ifadesi de

$$V_{PT}(x) = \frac{(n+k)^2 - \frac{1}{4}}{4\cos^2\frac{\upsilon(x)}{2}} + \frac{(n-k)^2 - \frac{1}{4}}{4\sin^2\frac{\upsilon(x)}{2}} + \frac{(1-\alpha)}{\left(\alpha + x^2\right)^4}\left[-3x^4 + (2\alpha - 4)x^2 + \alpha\right] \tag{2.4.18}$$

olur.



Şekil 1 $n = 2, k = 1$ **için Pöschl-Teller tipi potansiyel-kütle grafiği**

III. BÖLÜM: SL(2,R) GRUBUNA BAĞLI ÇÖZÜLEBİLİR EFEKTİF KÜTLELİ HAMİLTONYENLER

Bu bölümün birinci kısmında $SL(2,R)$ grubunun indirgenemez temsilleri, ikinci kısımda $SL(2,R)$ grubunun regüler temsilleri anlatıldı. Üçüncü kısımda $SL(2,R)$ grubu çerçevesinde Kanonik baza bağlı efektif kütleli Hamiltonyenler, dördüncü kısımda $SO(2) \leftrightarrow E(1)$ karışık bazına bağlı efektif kütleli Hamiltonyenler ve son olarak beşinci bölümde $SO(1,1) \leftrightarrow SO(2)$ karışık bazına bağlı efektif kütleli Hamiltonyenler incelenmiştir.

III.1. SL(2,R) Grubunun İndirgenemez Temsilleri

$SL(2,R)$ grubu

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \ \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \qquad \alpha,\delta,\beta,\gamma \in R \tag{3.1.1}$$

şeklindeki g reel matrislerin oluşturduğu matrisler grubudur. $SL(2,R)$ grubu üç farklı alt gruba sahiptir. Bunlardan biri

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & -\sin\frac{t}{2} \\ \sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix} \tag{3.1.2}$$

şeklindeki matrislerin oluşturduğu $SO(2)$ (eliptik) grubudur. Bu alt grup $SL(2,R)$ grubunun maksimal kompakt alt grubudur. Diğerleri de sırasıyla

$$\begin{pmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.1.3}$$

matrislerinin oluşturduğu $SO(1,1)$ (hiperbolik) ve $E(1)$ (parabolik) alt gruplarıdır.

$SL(2,R)$ grubunda üç farklı bir parametreli $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ alt grupları aşağıdaki şekilde seçelim;

$$\Omega_1 \ni \omega_1 = \begin{pmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix}, \qquad \Omega_2 \ni \omega_2 = \begin{pmatrix} \cosh t/2 & \sinh t/2 \\ \sinh t/2 & \cosh t/2 \end{pmatrix}, \tag{3.1.4}$$

ve

$$\Omega_3 \ni \omega_3 = \begin{pmatrix} \cos t/2 & -\sin t/2 \\ \sin t/2 & \cos t/2 \end{pmatrix}. \tag{3.1.5}$$

Bu matrisler yardımıyla $SL(2,R)$ grubunun Lie cebrinin a_1, a_2 ve a_3 baz elemanlarını

$$a_k = \frac{d}{dt}\omega_k(t)\big|_{t=0}, \qquad k = 1,2,3. \tag{3.1.6}$$

bağıntısından bulabiliriz. O halde

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1.7}$$

bulunur. a_1, a_2 ve a_3 aşağıdaki sıra değiştirme bağıntılarını sağlarlar:

$$[a_1, a_2] = a_3, \qquad [a_2, a_3] = -a_1, \qquad [a_3, a_1] = -a_2. \tag{3.1.8}$$

Buna göre a_1, a_2 ve a_3 operatörlerine karşılık gelen J_1, J_2 ve J_3 infinitesimal operatörleri de

$$[J_1, J_2] = J_3, \qquad [J_2, J_3] = -J_1, \qquad [J_3, J_1] = -J_2 \tag{3.1.9}$$

bağıntılarını sağlarlar.

$SL(2, R)$ grubunun üniter indirgenemez T^j temsilleri sonsuz boyutlu olup $C = J_1^2 + J_2^2 - J_3^2$ Casimir operatörünün öz değerleri ile sınıflandırılır. Ayrıca üniter indirgenemez temsilin J_i^j, $i = 1,2,3.$ infinitesimal operatörleri hermitik operatör, C^j Casimir operatörü de birim operatörden sabit ile farklanmaktadır $C^j = -j(j+1)I$.

Eğer temsil uzayındaki baz vektörler J_3 ün öz vektörleri ise, söz konusu baza $SO(2)$ bazı denir. Bu bazı $|n\rangle$ şeklinde göstereceğiz, yani

$$J_3|n\rangle = n|n\rangle \tag{3.1.10}$$

dir. Üniter indirgenemez temsillerde J_3 operatörünün n öz değerleri ve j nin spektrumu aşağıda verilmiştir.

1. $T^{-\frac{1}{2}+i\rho}$ Principal (temel) seriler:

$$j = -\frac{1}{2} + i\rho, \qquad 0 \le \rho < \infty, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad ya\, da \quad m = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \ldots \tag{3.1.11}$$

2. T^j Kesikli (Discrete) seriler: n'in işaretine göre iki seriye ayrılır:

a) T^{j+} Pozitif kesikli seriler (n özdeğerleri pozitiftir)

$$j = -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, 2, ..., \qquad n = -j, -j+1, -j+2, ..., \tag{3.1.12}$$

b) T^{j-} Negatif kesikli seriler (n öz değerleri negatiftir)

$$j = -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, 2, ..., \qquad n = j, j-1, j-2, ..., \tag{3.1.13}$$

3. T^{τ} Bütünleyici (Supplementary) seriler

$$j = \tau, \quad -1 < \tau < -\frac{1}{2}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ... \tag{3.1.14}$$

T^j temsilinin $SO(2)$ bazında $t^j_{mn}(g) = \langle m | T^j | n \rangle$ matris elemanları ilk kez Bargmann tarafından hesaplanmıştır. Örneğin discrete seri için söz konusu matris elemanlar aşağıdaki şekildedir:

a) Negatif kesikli seri:

$$t^{j,-}_{mn}(g)=\left[\frac{\Gamma(j-m+1)\Gamma(-j-n)}{\Gamma(j-n+1)\Gamma(-j-m)}\right]^{1/2} e^{-im\varphi-in\theta}\;\; P^{j}_{mn}(\cosh t), \qquad -\infty < m,\, n < j$$

(3.1.15)

b) Pozitif kesikli seri:

$$t^{j,-}_{mn}(g)=\left[\frac{\Gamma(-j+n)\Gamma(j+m+1)}{\Gamma(-j+m)\Gamma(j+m+1)}\right]^{1/2} e^{-im\varphi-in\theta}\;\; P^{j}_{mn}(\cosh t), \qquad -j < m,\, n < \infty$$

(3.1.16)

Burada

$$P^{j}_{mn}(\cosh t)=\frac{\Gamma(j-n+1)}{(m-n)!\Gamma(j-m+1)}\left(\cosh\frac{t}{2}\right)^{2l}\left(\tanh\frac{t}{2}\right)^{m-n}$$

$$ {}_2F_1\left(-j-n,-j+m;m-n+1;\tanh^2\frac{t}{2}\right) \qquad m\geq n \;\; ise$$

(3.1.17)

$m<n$ için ifade sağ tarafta m yerine $-n$ ve n yerine $-n$ yazılarak elde edilir. ${}_2F_1$ (bkz. denklem 2.1.18) ise hipergeometrik fonksiyon olup

$${}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{n!\Gamma(c+n)}z^n \qquad (3.1.18)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. (Hipergeometrik denklemler ile ilgili bazı bilgilere Ek-1 kısmında yer verilmiştir.) Ayrıca burada g matrisinin kanonik bazdaki parametrizasyonu kullanılmıştır:

$$g(\varphi,t,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2}\\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t/2} & 0\\ 0 & e^{-t/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}. \tag{3.1.19}$$

$$0\le\varphi<2\pi,\ \ 0\le t<\infty,\quad -2\pi\le\theta<2\pi$$

Diğer sık kullanılan bazlar J_1 ve $N_+=\frac{1}{2}(J_2-J_3)$ öz fonksiyonlarının oluşturduğu bazlardır ve sırasıyla $SO(1,1)$ ve $E(1)$ bazları olarak isimlendirilir. $SL(2,R)$ grubunun her üniter indirgenemez temsili için J_1 ve N_+ operatörlerinin öz değerleri reel sayılardır,

$$\begin{aligned}&J_1|v\rangle=v|v\rangle\\ &N_+|\lambda\rangle=\lambda|\lambda\rangle,\qquad v,\lambda\in R\ .\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

Bu bazlarda da T^j temsilinin matris elemanları ve karışık matris elemanları literatürde iyi bilinmektedir (N.Ja. Vilenkin,A. U. Klimyk, 1991) . Aşağıda pozitif kesikli seri için $SO(2)\leftrightarrow E(1)$ ve $SO(1,1)\leftrightarrow SO(2)$ karışık bazlardaki matris elemanları verilmiştir.

a) $SO(2)\leftrightarrow E(1)$ **karışık bazı**

$$t^{j+}_{n\lambda}(g)=\frac{1}{\Gamma(-2j)}\left[\frac{2\Gamma(-j+n)}{(n+j)!}\right]^{1/2}e^{-in\varphi-i\lambda u}\exp\left(-\frac{\lambda e^{-t}}{2}\right)L^{-2j-1}_{n+j}\left(\lambda^2e^{-t}\right),\qquad n>-j \tag{3.1.21}$$

Burada

$$g(\varphi,t,u)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2}\\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t/2} & 0\\ 0 & e^{-t/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{3.1.22}$$

$$0\le\varphi<2\pi,\ -\infty\le t<\infty,\quad -\infty\le u<\infty,$$

ve L^k_n, Laguerre polinomlarıdır.

b) $SO(1,1)\leftrightarrow SO(2)$ **karışık bazı**

$$t^{j+}_{\nu n}(g)=(-1)^{n+j}2^{n-i\nu}\left[2\pi(n+j)!\Gamma(j+n)\right]^{-1/2}\Gamma(n-i\mu)e^{-i\nu u-in\varphi}(\cosh t)^{-n}(1-i\sinh t)^{i\nu} \tag{3.1.23}$$

$$\times{}_2F_1\left(-n-j,1+j-n;1-n+i\nu;\frac{1}{2}(1-i\sinh t)\right),\qquad n>-j$$

Burada

$$g(u,t,\varphi)=\begin{pmatrix}e^{u/2} & 0\\ 0 & e^{-u/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cosh\frac{t}{2} & \sinh\frac{t}{2}\\ -\sinh\frac{t}{2} & \cosh\frac{t}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2}\\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2}\end{pmatrix} \tag{3.1.24}$$

$$0\le\varphi<2\pi,\ -\infty\le t<\infty,\quad -\infty\le u<\infty,$$

dir.

Son olarak belirtelim ki $f(g)$ fonksiyonunun ister $SO(2) \leftrightarrow E(1)$ karışık bazlarındaki matris elemanlarına açılımında isterse de $SO(1,1) \leftrightarrow SO(2)$ karışık bazlarındaki matris elemanlarına açılımındaki kesikli serilerin bulunması koşulu $SO(2)$ ye karşılık gelen infinitesimal operatörün n öz değerine bağlıdır:

$$j = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, ..., -|n| \quad \text{eğer } n \text{ tek ise}$$

ya da

$$j = -1, -2, ..., -|n| \quad \text{eğer } n \text{ çift ise.}$$

III.2. **SL(2,R) Grubunun Regüler Temsilleri**

$SL(2,R)$ grubunun sağ regüler temsili

$$T(g_0) f(g) = f(g g_0) \tag{3.2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada (3.1.19) parametrizasyonu için $\omega_k(t)$ elemanlarına karşılık gelen J_k infinitesimal operatörlerini

$$iJ_1 = \cos\theta \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\sin\theta}{\sinh t} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin\theta \coth t \frac{\partial}{\partial \theta} \tag{3.2.2}$$

$$iJ_2 = \sin\theta\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\cos\theta}{\sinh t}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \cos\theta\coth t\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{3.2.3}$$

$$iJ_3 = -\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{3.2.4}$$

ve Casimir operatörünü

$$C = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\sinh^2 t}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 2\cosh t\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta}\right)$$

olarak buluruz. (3.2.1) temsili indirgenebilir olup $SL(2,R)$ grubunun temel ve kesikli serilerine açılmaktadır. Buna göre

$$f(g) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty} c(\rho)t_{mn}^{-\frac{1}{2}+i\rho}(g)\tan\pi(\rho+i\varepsilon)d\rho + \sum_{j=-1-\varepsilon}^{-N}(-j-\frac{1}{2})c(\rho)t_{mn}^{j,\pm}(g)\right\} \tag{3.2.5}$$

şeklindedir. Burada $N = \min(|m|,|n|)$ eğer $mn > 0$ ($mn < 0$ ise j' ye göre toplam yoktur), $\varepsilon = 0$ için m ve n tam değerler alırken, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için m ve n yarı tam değerler alır. Dolayısıyla yalnız $mn > 0$ olduğu durumda kesikli seriler Fourier açılımında bulunur. Ayrıca belirtelim ki $SL(2,R)$ grubunun $SO(2)$ bazındaki $t_{m,n}^{j,\pm}(g)$ matris elemanları Casimir öz değer denklemini sağlamaktadır, yani

$$\left[-\frac{1}{t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\sinh^2 t}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + 2\cosh t\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta}\right)\right]t_{mn}^{j,\pm}(g) = -j(j+1)t_{mn}^{j,\pm}(g) \tag{3.2.6}$$

dir.

(3.1.22) ve (3.1.24) parametrizasyonları için sağ regüler temsilin infinitesimal operatörleri hesaplanırsa

$$iJ_1 = -\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial u} \tag{3.2.7}$$

$$iJ_2 = u\frac{\partial}{\partial t} - e^{-t}\frac{\partial}{\partial \varphi} + (1-u^2+e^{-2t})\frac{\partial}{\partial u} \tag{3.2.8}$$

$$iJ_3 = u\frac{\partial}{\partial t} - e^{-t}\frac{\partial}{\partial \varphi} - (1+u^2-e^{-2t})\frac{\partial}{\partial u} \tag{3.2.9}$$

$$C = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2e^{-t}\frac{\partial^2}{\partial u \partial \varphi} - e^{-2t}\frac{\partial^2}{\partial u^2}$$

ve

$$iJ_1 = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\cos\varphi}{\cosh t}\frac{\partial}{\partial u} + \tanh t\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{3.2.10}$$

$$iJ_2 = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sin\varphi}{\cosh t}\frac{\partial}{\partial u} - \tanh t\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{3.2.11}$$

$$iJ_3 = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{3.2.12}$$

$$C = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\cosh^2 t}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\sinh t\frac{\partial^2}{\partial u \partial \varphi} - \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)$$

olarak bulunur. Ayrıca $t_{n\lambda}^{j,+}(g)$ ve $t_{vn}^{j,+}(g)$ matris elemanları [bkz.3.1.21 ve 3.1.23 bağıntılarına]

$$\left[-\frac{1}{t^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2e^{-t}\frac{\partial^2}{\partial u \partial \varphi} - e^{-2t}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\right] t_{n\lambda}^{j,+}(g) = -j(j+1)t_{n\lambda}^{j,+}(g) \tag{3.2.13}$$

ve

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{\cosh^2 t}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\sinh ht\frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial u} - \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\right] t_{vn}^{j,+}(g) = -j(j+1)t_{vn}^{j,+}(g) \tag{3.2.14}$$

Casimir öz değer denklemlerini sağlarlar

III.3. **Kanonik Baza Bağlı Efektif Kütleli Hamiltonyenler**

$SL(2,R)$ grubunun kanonik bazdaki parametrizasyonu

$$g(\varphi,t,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\varphi/2 & \sin\varphi/2\\ -\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t/2} & 0\\ 0 & e^{-t/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta/2 & \sin\theta/2\\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2\end{pmatrix} \tag{3.3.1}$$

yapısındadır ve $0\le\varphi<2\pi, 0\le\theta<2\pi$, ve $t=t(x), 0\le t(x)<\infty$ dur. İnfinitesimal operatörlerin tanımı (bkz. Bölüm I.4) bu parametrizasyonda kullanılırsa J_1, J_2, J_3 için

$$iJ_1=-\frac{\cos\theta}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\sin\theta}{\sinh t}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\sin\theta\coth t}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\dot{h}}{2h\dot{t}}\cos\theta \tag{3.3.2}$$

$$iJ_2=\frac{\sin\theta}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\cos\theta}{\sinh t}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\cos\theta\coth t\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\dot{h}}{2h\dot{t}}\sin\theta \tag{3.3.3}$$

$$iJ_1=-\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{3.3.4}$$

ve Casimir operatörü için de

$$C=-\frac{1}{\dot{t}^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{\dot{t}^2}\left(\frac{\dot{h}}{h}-\frac{\ddot{t}}{\dot{t}}+\dot{t}\coth t\right)\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{\sinh^2 t}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-2\cosh t\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\theta}+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)$$
$$+\frac{\dot{h}}{2h}\left(\frac{\dot{h}}{2h}-\frac{\ddot{h}}{\dot{h}}+\frac{\ddot{t}}{\dot{t}}-\dot{t}\coth t\right) \tag{3.3.5}$$

bulunur. Şimdi $C+j(j+1)$ operatörünü n ve k sabit tam sayı veya yarı tam sayılar olmak üzere

$$f(g)=e^{-i(n\varphi+k\theta)}f(x) \tag{3.3.6}$$

fonksiyonlarından oluşan $\Im_{nk}$ alt uzayına kısıtlayalım ve aşağıdaki şekilde düzenleyelim,

$$\left[C+j(j+1)\right]_{\Im_{nk}}=\frac{m}{\dot{t}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{m}\left(\frac{\dot{h}}{h}-\frac{\ddot{t}}{\dot{t}}+\dot{t}\coth t\right)\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\dot{t}^2}{m\sinh^2 t}\left(-n^2+2nk\cosh t-k^2\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\dot{h}}{2mh}\left(\frac{\dot{h}}{2h}-\frac{\ddot{h}}{\dot{h}}+\frac{\ddot{t}}{\dot{t}}-\dot{t}\coth t\right)+\frac{\dot{t}^2}{m}j(j+1)\right\} \tag{3.3.7}$$

Bu bağıntıyı denklem

$$\left[C+j(j+1)\right]_{\Im_{nk}}=Q\left[H-E\right] \tag{3.3.8}$$

ile karşılaştırdığımız zaman h ın sağlaması gereken denklem

$$\frac{\dot{m}}{m}=-\frac{\dot{h}}{h}+\frac{\ddot{t}}{\dot{t}}+\dot{t}\coth t$$

eşitliğinden

$$h = \frac{\dot{t}}{m \sinh \frac{t}{2} \cosh \frac{t}{2}} \tag{3.3.9}$$

olarak bulunur. $\left[C + j(j+1)\right]\big|_{\Im_{nk}}$ ifadesini yazmadan önce Natanzon (Natanzon G. A. 1971) potansiyelleri ile karşılaştırabilmek amacıyla

$$z = \tanh^2 \frac{t}{2} \tag{3.3.10}$$

kullanacağız. Belirtelim ki $0 < z < 1$ dir. Buna göre (3.3.10) ifadesi kullanılarak $\left[C + j(j+1)\right]\big|_{\Im_{nk}}$ z cinsinden

$$\left[C+j(j+1)\right]\big|_{\Im_{nk}} = \frac{z(1-z)^2 m}{\dot{z}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\dot{z}^2}{4mz^2}\left(-n^2+2nk\frac{1+z}{1-z}-k^2+1\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\dddot{z}}{2m\dot{z}}+\frac{3}{4}\frac{\ddot{z}^2}{m\dot{z}^2}-\frac{\dot{z}^2}{4mz^2}+\frac{\ddot{m}}{2m^2}-\frac{3}{4}\frac{\dot{m}^2}{m^3}+\frac{\dot{z}^2}{mz(1-z)^2}j(j+1)\right\} \tag{3.3.11}$$

veya,

$$\left[C+j(j+1)\right]\big|_{\Im_{nk}} = \frac{z(1-z)^2\ m}{\dot{z}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2}-\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx}-\frac{\dot{z}^2}{4mz^2}\left[\frac{1-(n-k)^2-z\left(1-(n+k)^2\right)}{1-z}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{z\left[1-(2j+1)^2\right]}{(1-z)^2}-\frac{\dddot{z}}{2m\dot{z}}+\frac{3}{4}\frac{\ddot{z}^2}{m\dot{z}^2}-\frac{\dot{z}^2}{4mz^2}+\frac{\ddot{m}}{2m^2}-\frac{3}{4}\frac{\dot{m}^2}{m^3}\right\} \tag{3.3.12}$$

bulunur. Şimdi n, k ve j sayılarının aşağıdaki şekilde E enerjinin lineer bir fonksiyonu olduğunu varsayalım,

$$1-(n-k)^2 = c_0 E - h_0$$

$$1-(n+k)^2 = aE - f \tag{3.3.13}$$

$$1-(2j+1)^2 = c_1 E - h_1 .$$

O halde (3.3.12) nolu denklem

$$\left[C+j(j+1)\right]\Big|_{\Im_{nk}} = \frac{z(1-z)^2\, m}{\dot{z}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} - \frac{\dot{z}^2}{4mz^2}\left[\frac{c_0 - az}{1-z} + \frac{c_1 z}{(1-z)^2}\right]E\right. \tag{3.3.14}$$
$$\left. - \frac{\dot{z}^2}{4mz^2}\left[\frac{-h_0 + fz}{1-z} - \frac{h_1 z}{(1-z)^2}\right] - \frac{\dddot{z}}{2m\dot{z}} + \frac{3}{4}\frac{\ddot{z}^2}{m\dot{z}^2} - \frac{\dot{z}^2}{4mz^2} + \frac{\ddot{m}}{2m^2} - \frac{3}{4}\frac{\dot{m}^2}{m^3}\right\}$$

olur. (3.3.14) ile $\left[C+j(j+1)\right]_{\Im_{nk}} = Q\left[H-E\right]$ denklem karşılaştırıldığında E nin katsayısının 1 olması gerektiğinden z

$$\frac{\dot{z}^2}{4mz^2(1-z)^2} R(z) = 1 \tag{3.3.15}$$

denklemini sağlamalıdır. Burada $R(z)$

$$R(z) = az^2 + (c_1 - c_0 - a)z + c_0 \tag{3.3.16}$$

dir. (3.3.14) ifadesini $R(z)$ e bağlı olarak düzenlediğimizde Hamiltonyen için

$$H = -\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} + \frac{h_0(1-z) + fz(z-1) + h_1 + 1}{R}$$

$$+ \frac{z^2(1-z)^2}{R^2}\left\{-\frac{5\Delta}{4R} + a + \frac{a + (c_1 - c_0)(2z-1)}{z(1-z)}\right\} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \tag{3.3.17}$$

bulunur. Burada $\Delta = (a - c_1 - c_0)^2 - 4c_1c_0$ dır. Görüldüğü üzere (3.3.17) nolu Hamiltonyende potansiyel terim Natanzon potansiyeli (G. A. Natanzon, 1971) tipindedir. En genel halde potansiyel

$$V(x) = \frac{h_0(1-z) + fz(z-1) + h_1 + 1}{R} + \frac{z^2(1-z)^2}{R^2}\left\{-\frac{5\Delta}{4R} + a + \frac{a + (c_1 - c_0)(2z-1)}{z(1-z)}\right\}$$

$$+ \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \tag{3.3.18}$$

tir. (3.3.18) denkleminden görüldüğü gibi $V(x)$ potansiyeli $R(z) = 0$ iken sonsuz oluyor. Bunun için $R(z)$'in sıfırdan farklı olduğu durumlara bakılmalıdır. Ek-2 de $R(z) > 0$ koşulunu sağlayan katsayılar incelenmiştir sonuç olarak $c > 0,\ a + b + c > 0$ ve ayrıca katsayılar

1) $\Delta < 0 \quad ise \quad a > 0$

2) $\Delta = 0 \quad ise \quad a > 0,\ \ b > -2c$,

3) $\Delta > 0 \qquad ise \qquad a < 0$ veya $a > 0,\ b(b + 2a) > 0$.

koşullarını sağlar.

Enerji spektrumu

$$1-(n-k)^2 = c_0 E - h_0$$

$$1-(n+k)^2 = aE - f$$

$$1-(2j+1)^2 = c_1 E - h_1.$$

denklemlerinden bulunur. Dalga fonksiyonu ise

$$\Psi(x) \propto \left[\frac{m(1-z)}{z^2}\right]\left(\frac{1}{1-z}\right)^j (z)^{k-n}\, {}_2F_1(-j-n,-j+k;k-n+1;z)$$

dır. (3.3.18) denklemindeki parametrelerin özel değerleri için farklı potansiyeller elde edilir.

III.3.1. ÖZEL DURUMLAR:

Poschl-Teller tipi potansiyel:

Denklem (3.3.16) da $a = c_0 = 0$ seçilirse ve $R(z) = 4z$, $\Delta = 16$ olur. (3.3.15) denklemi çözdüğümüzde $z(x)$'in x e bağlılığı

$$z = \tanh^2 \frac{s(x)}{2} \qquad (3.3.1.1)$$

şeklindedir. Burada

$$s(x) = \int \sqrt{m(x)}dx \qquad (3.3.1.2)$$

dir. $a = c_0 = 0$ katsayılarını (3.3.13) denklem sisteminde yerine yazılırsa h_0 ve f nin n,k cinsinden ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} 1-(n-k)^2 &= -h_0 \\ 1-(n+k)^2 &= -f. \end{aligned} \qquad (3.3.1.3)$$

Bu durumda (3.3.18) denklemindeki potansiyel ifadesi n,k ile

$$V_{PT}(x) = \frac{1}{c_1}\left\{ h_1 + 1 + \frac{(n-k)^2 - \frac{1}{4}}{4\sinh^2\frac{s(x)}{2}} - \frac{(n+k)^2 - \frac{1}{4}}{4\cosh^2\frac{s(x)}{2}} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \right\} \qquad (3.3.1.4)$$

şeklinde ifade edilir. (3.3.1.4) denkleminde geçen sabit terimin yer almaması için

$$h_1 + 1 = 0$$

alalım. Bu durumda (3.3.1.4)

$$V_{PT}(x) = \frac{1}{c_1}\left\{ \frac{(n-k)^2 - \frac{1}{4}}{4\sinh^2\frac{s(x)}{2}} - \frac{(n+k)^2 - \frac{1}{4}}{4\cosh^2\frac{s(x)}{2}} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \right\}$$

olur. Enerji öz değeri

$$E = -\frac{1}{c_1}(2j+1)^2 \qquad j = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots -N, \; veya \;\; j = -1, -2 \ldots, -N \qquad (3.3.1.5)$$

bulunur. Dalga fonksiyonu ise

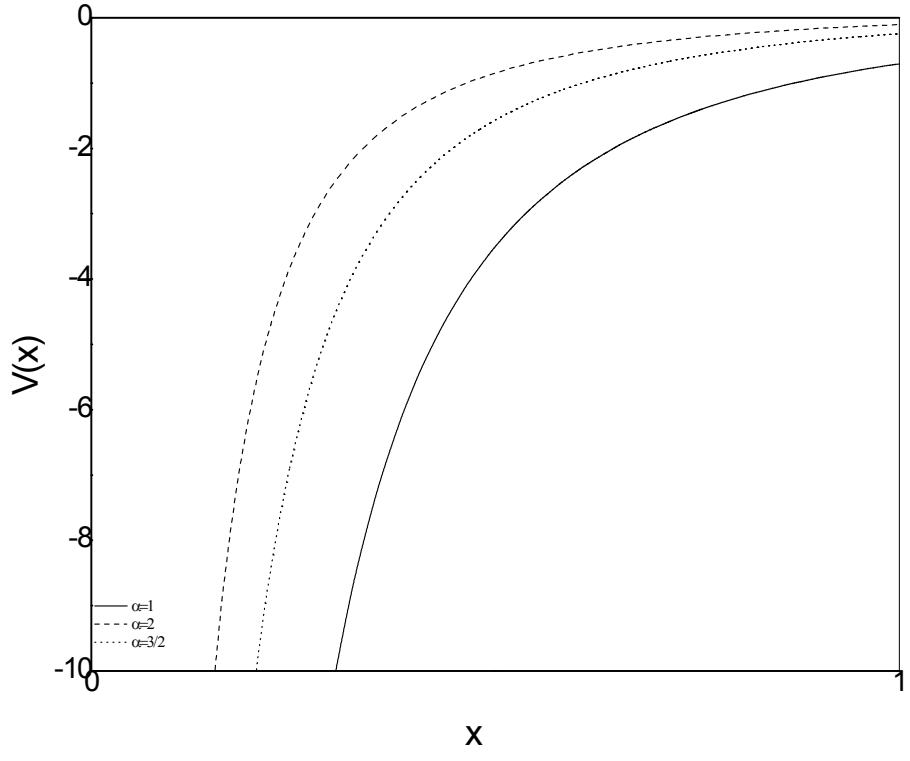
$$\Psi(x) \propto \left(\frac{2mz}{1-z}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{1-z}\right)^{j} (z)^{\frac{k-n}{2}} F(-j+k,-j-n;k-n+1;z) \tag{3.3.1.6}$$

dır. Şimdi üç farklı konuma bağlı kütle için (3.3.14) ifadesine bakalım.

$$-m(x) = \left(\frac{\alpha + x^2}{1+x^2}\right)^2 \text{ için} \tag{3.3.1.7}$$

$$s(x) = x + (\alpha - 1)\arctan x, \quad 0 \le x < \infty$$

$$V_{PT}(x) = \frac{(n-k)^2 - \frac{1}{4}}{4\sinh^2\frac{s(x)}{2}} - \frac{(n+k)^2 - \frac{1}{4}}{4\cosh^2\frac{s(x)}{2}} + \frac{(1-\alpha)}{(\alpha+x^2)^4}\left[-3x^4 + (2\alpha-4)x^2 + \alpha\right] \tag{3.3.1.8}$$



Şekil 2: $n = k = 1$ **için Pöschl-Teller tipi potansiyel**

- $m(x)=\dfrac{1}{1+\delta x^2}$ alınırsa

$$s(x)=\frac{1}{\sqrt{\delta}}\ln\left(\sqrt{\delta}x+\sqrt{1+\delta x^2}\right)$$

$$V_{PT}(x)=\frac{(n-k)^2-\dfrac{1}{4}}{4\sinh^2\dfrac{s(x)}{2}}-\frac{(n+k)^2-\dfrac{1}{4}}{4\cosh^2\dfrac{s(x)}{2}}-\frac{\delta}{2}+\frac{\delta^2x^2}{1+\delta x^2}$$

- $m(x)=\left(\dfrac{1}{1+\delta e^{-x}}\right)^2$ alınırsa

$$s(x)=\ln\left(\frac{e^x+\delta}{1+\delta}\right)$$

$$V_{PT}(x)=\frac{(n-k)^2-\dfrac{1}{4}}{4\sinh^2\dfrac{s(x)}{2}}-\frac{(n+k)^2-\dfrac{1}{4}}{4\cosh^2\dfrac{s(x)}{2}}-\frac{1}{2}\delta e^{-x}-\frac{3}{4}\delta^2e^{-2x}$$

bulunur.

***Manning-Rosen tipi potansiyel**:*

Denklem (3.3.16) te $a=c_1,\quad c_0=0$ için $R(z)=az^2$ ve $\Delta=0$ olur. (3.3.15) nolu denklemden bu parametrelere göre z nin x e bağlılığı

$$z=1-e^{\frac{2s(x)}{\sqrt{a}}} \qquad (3.3.1.9)$$

şeklindedir. $c_1 = a, \quad c_0 = 0$ katsayıları (3.3.13) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$1-(n-k)^2 = -h_0$$

$$1-(n+k)^2 = aE - f \qquad (3.3.1.10)$$

$$1-(2j+1)^2 = aE - h_1$$

olur. (3.3.18) ifadesindeki potansiyel yukarıdaki eşitliklere göre yazılırsa

$$V_{MR}(x) = \frac{1}{a}\left\{\frac{f+h_1+2}{2} + \frac{(f-h_1)}{2}\coth s(x) + \frac{1-(n-k)^2}{4\sinh^2 s(x)}\right\} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \qquad (3.3.1.11)$$

bulunur. (3.3.1.11) denkleminde geçen sabit terimi sıfır kabul edersek f ile h_1 arasındaki bağıntı

$$f = -2 - h_1$$

dır. (3.3.1.10) denklemleri de f ile h_1 arasındaki bağıntıya göre yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} 1-(n+k)^2 &= aE + 2 + h_1 \\ 1-(2j+1)^2 &= aE - h_1 \end{aligned} \qquad (3.3.1.12)$$

olur. O halde $V(x)$

$$V_{MR}(x) = \frac{1}{a}\left\{-(1+h_1)\coth\frac{s(x)}{\sqrt{a}} + \frac{1-(n-k)^2}{4\sinh^2\frac{s(x)}{\sqrt{a}}}\right\} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \qquad (3.3.1.13)$$

olur. Enerji öz değeri için (3.3.1.12) denklemlerinden

$$E = -\frac{1}{2a}\left[(n+k)^2 - [2(K+p)+1]^2\right], \qquad p = 0,1,2,..., K = mak(|n|,|k|)$$

ve dalga fonksiyonu için (3.1.17) (3.3.9) denklemleri göz önüne alınarak

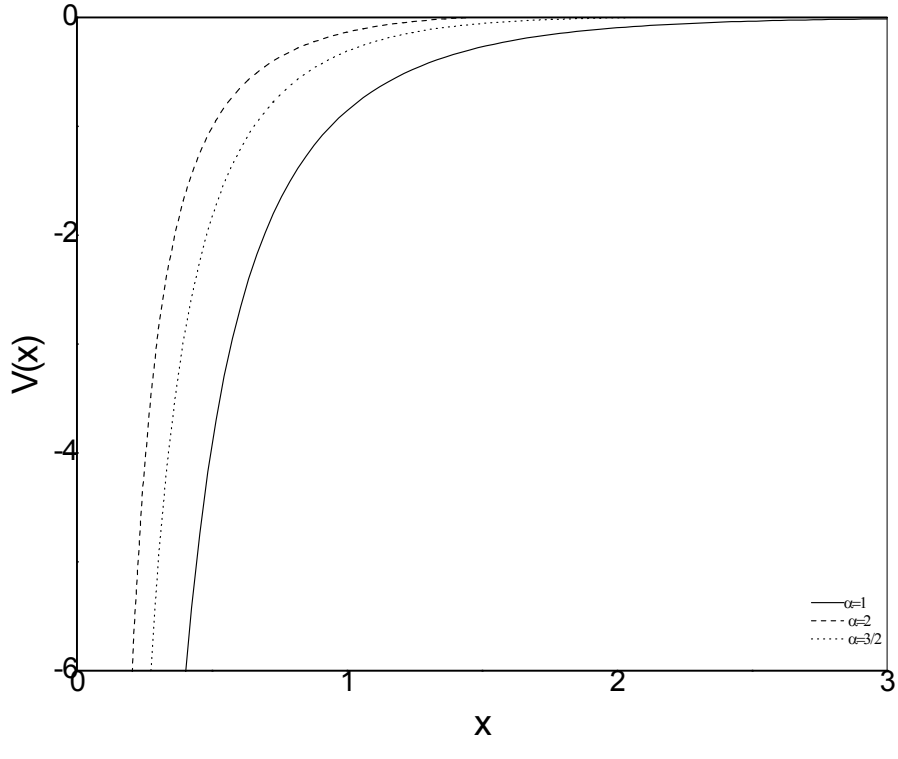
$$\Psi(x) \propto \left(\frac{mz(z-2)}{4(1-z)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{z-2}{2\sqrt{1-z}}\right)^{2j}\left(\frac{z}{z-2}\right)^{k-n} F\left(-j-n,-j+k;k-n+1;\frac{z^2}{(z-2)^2}\right)$$

$$j = K + p \tag{3.3.1.13}$$

(3.3.1.7) kütlesi için $V(x)$

$$V_{MR}(x) = \frac{1}{a}\left\{-(1+h_1)\coth\frac{s(x)}{\sqrt{a}} + \frac{1-(n-k)^2}{4\sinh^2\frac{s(x)}{\sqrt{a}}}\right\} + \frac{(1-\alpha)}{(\alpha+x^2)^4}\left[-3x^4 + (2\alpha-4)x^2 + \alpha\right]$$

şeklindedir.



Şekil 3: $a = 1,\ h_1 = 1/2\ ,\ n = 3, k = 1$ için **Maning-Rosen tipi potansiyel-kütle grafiği**

Rosen-Morse tipi potansiyel:

Denklem (3.3.16) de parametrelerden $c_0 = c_1,\ a = 0$ alınırsa $R(z) = c_0$ ve $\Delta = 0$ olur ve z için

$$z = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\frac{s(x)}{\sqrt{c_0}}\right) \qquad (3.3.1.14)$$

bulunur. $c_0 = c_1,\ a = 0$ parametreleri (3.3.13) denklem sisteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 1-(n-k)^2 &= c_0E - h_0 \\ 1-(n+k)^2 &= -f \\ 1-(2j+1)^2 &= c_0E - h_0 \end{aligned} \qquad (3.3.1.15)$$

bulunur. O halde (3.3.18) potansiyeli (3.3.1.15) e göre yazılırsa

$$V_{RM}(x) = \frac{1-(n+k)^2}{4\cosh^2\dfrac{s(x)}{\sqrt{c_0}}} + \frac{h_0+h_1+2}{2} + \frac{h_1-h_0}{2}\tanh\frac{s(x)}{\sqrt{c_0}} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \qquad (3.3.1.16)$$

olur. (3.3.1.16) da geçen $\dfrac{h_0+h_1+2}{2}$ terimi 0 alınırsa h_0 ile h_1 arasındaki bağıntı $h_0 = -2 - h_1$ bulunur. $V(x)$ i yeniden yazarsak

$$V_{RM}(x) = \frac{1-(n+k)^2}{4\cosh^2\dfrac{s(x)}{\sqrt{c_0}}} + (1+h_1)\tanh\frac{s(x)}{\sqrt{c_0}} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3}$$

olur. h_0 ile h_1 arasındaki bağıntı ile (3.3.1.15) denklemlerini yeniden düzenlendiğinde

$$1-(n-k)^2 = c_0 E + 2 + h_1$$

$$1-(2j+1)^2 = c_0 E - h_1$$

olmak üzere enerji spektrumu için

$$E = -\frac{1}{2c_0}\left[(n-k)^2 + (2j+1)^2\right] \tag{3.3.1.17}$$

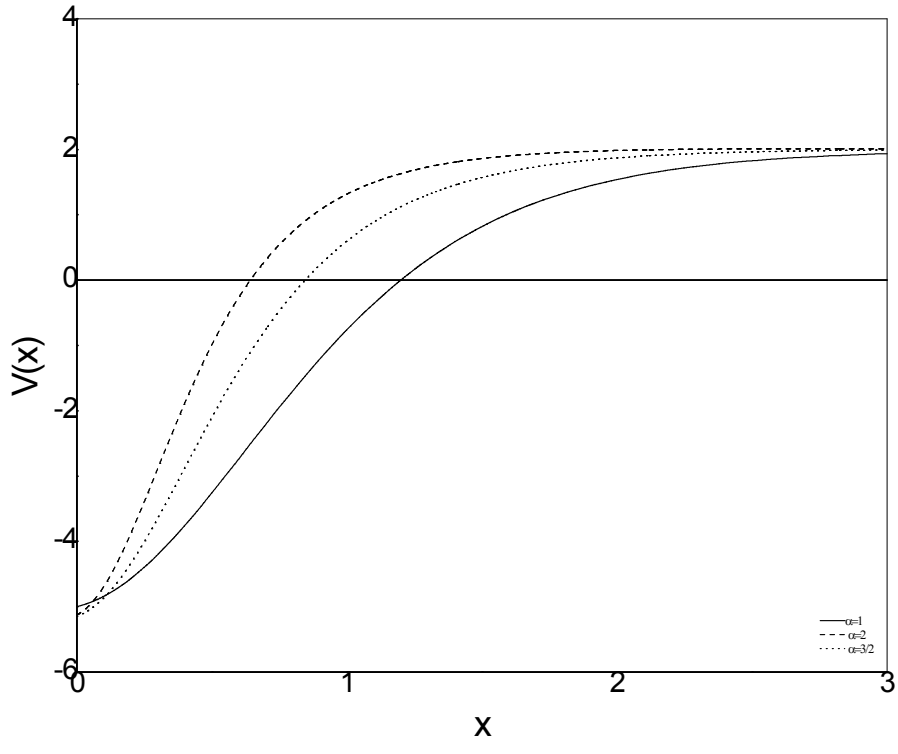
dalga fonksiyonu için de (3.1.17), (3.3.9) denklemleri göz önüne alınarak

$$\Psi(x) \propto \left(\frac{2z-1}{4z(1-z)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{z(1-z)}}\right)^{2j}(2z-1)^{k-n} \\ F\left(-j-n,-j+k,k-n+1;(2z-1)^2\right) \tag{3.3.1.18}$$

bulunur. Kütle (3.3.1.7) olduğu durumda potansiyel

$$V_{RM}(x) = \frac{1-(n+k)^2}{4\cosh^2\dfrac{s(x)}{\sqrt{c_0}}} + (1+h_1)\tanh\frac{s(x)}{\sqrt{c_0}} + \frac{(1-\alpha)}{(\alpha+x^2)^4}\left[-3x^4 + (2\alpha-4)x^2 + \alpha\right] \tag{3.3.1.19}$$

olur.



Şekil 4: $h_0 = -1, n = 2$, $k = 3$ **için Rosen-Morse tipi potansiyel-kütle grafiği**

III.4. $SO(2) \leftrightarrow E(1)$ **Karışık Bazına bağlı efektif kütleli Hamiltonyenler**

Bu indirgemedeki parametrizasyon

$$g(\varphi, z, u) = \begin{pmatrix} \cos\varphi/2 & \sin\varphi/2 \\ -\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t(x)/2} & 0 \\ 0 & e^{-t(x)/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.4.1)$$

şeklindedir. Burada φ, z ve u'nun tanımlı olduğu aralıklar sırasıyla $0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < t < \infty$ ve $-\infty < u < \infty$ dır. Bu parametrizasyonda infinitesimal operatörler için

$$
\begin{aligned}
iJ_1 &= -\frac{1}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\dot{h}}{2h\dot{t}}, \\
iJ_2 &= \frac{u}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial \varphi} + (1 - u^2 + e^{-2t})\frac{\dot{h}}{2h\dot{t}}u \\
iJ_3 &= -\frac{uz}{\dot{z}}\frac{\partial}{\partial x} - z\frac{\partial}{\partial \varphi} - (1 + u^2 - e^{-2t})\frac{\dot{h}}{2h\dot{t}}u
\end{aligned}
\tag{3.4.2}
$$

buluruz. Casimir operatörü de

$$
C = -\frac{1}{\dot{t}^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\dot{t}^2}\left(\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \dot{t}\right)\frac{\partial}{\partial x} + 2e^{-t}\frac{\partial^2}{\partial u \partial \varphi} - e^{-2t}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\dot{h}}{2h\dot{t}^2}\left(\frac{\dot{h}}{2h} - \frac{\ddot{h}}{\dot{h}} + \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} - \dot{t}\right) \tag{3.4.3}
$$

olur. Şimdi $C + j(j+1)$ operatörünü n ve λ sabit tam sayı veya yarı tam sayılar olmak üzere

$$
f(g) = e^{-i(n\varphi + \lambda u)} f(x) \tag{3.4.4}
$$

fonksiyonlarından oluşan $\Im_{n\lambda}$ alt uzayına kısıtlayalım ve aşağıdaki şekilde düzenleyelim,

$$
\begin{aligned}
\left[C + j(j+1)\right]_{\Im_{n\lambda}} = \frac{m}{\dot{t}^2}\Bigg\{ & -\frac{1}{m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{m}\left(\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \dot{t}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\dot{t}^2}{m}\left(-2e^{-t}n\lambda + \lambda^2 e^{-2t}\right) \\
& + \frac{\dot{h}}{2mh}\left(\frac{\dot{h}}{2h} - \frac{\ddot{h}}{\dot{h}} + \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} - \dot{t}\right) + \frac{\dot{t}^2}{m}j(j+1)\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{3.4.5}
$$

(3.4.5) nolu denklem $\left[C+j(j+1)\right]_{\Im_{nk}}=Q\left[H-E\right]$ denklemi ile karşılaştırdığımız zaman h ın sağlaması gereken denklem

$$\frac{\dot{m}}{m}=-\frac{\dot{h}}{h}+\frac{\ddot{t}}{\dot{t}}-\dot{t} \tag{3.4.6}$$

eşitliğinden

$$h=\frac{\dot{t}}{m}e^{-t} \tag{3.4.7}$$

bulunur. (3.4.7) ifadesini $\left[C+j(j+1)\right]_{\Im_{n\lambda}}$ ifadesinde yerine koymadan önce

$$z=e^{-t} \tag{3.4.8}$$

dönüşümü yapacağız. Bu dönüşüm altında (3.4.7) ifadesini de kullanarak

$$\begin{aligned}\left[C+j(j+1)\right]_{\Im_{n\lambda}}=\frac{mz^2}{\dot{z}^2}\Bigg\{&-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx}+\frac{\dot{z}^2}{4mz^2}\left[4\lambda^2z^2-8n\lambda z+4\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-1\right]\\&-\frac{\dddot{z}}{2m\dot{z}}+\frac{3}{4m}\frac{\ddot{z}^2}{\dot{z}^2}+\frac{\ddot{m}}{2m^2}-\frac{3}{4}\frac{\dot{m}^2}{m^3}\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

buluruz. Şimdi $n,\lambda \ ve \ j$ yi E nin lineer bir fonksiyonu olarak

$$-8n\lambda = g_1 - \sigma_1 E$$

$$4\lambda^2 = g_2 - \sigma_2 E \tag{3.4.10}$$

$$1 - 4\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 = c_0 E - h_0$$

şeklinde ele alalım. O halde (3.4.9) denklemini (3.4.10) denklemlerine göre düzenlendiğinde

$$\left[C + j(j+1)\right]_{n\lambda} = \frac{m\dot{z}^2}{\dot{z}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} - \frac{\dot{z}^2}{4m\dot{z}^2}\left(\sigma_2 z^2 + \sigma_1 z + c_0\right)E + \frac{\dot{z}^2}{4m\dot{z}^2}\left(g_2 z^2 + g_1 z + h_0\right)\right.$$

(3.4.11)

$$\left. - \frac{\ddot{z}}{2m\dot{z}} + \frac{3}{4m}\frac{\ddot{z}^2}{\dot{z}^2} + \frac{\ddot{m}}{2m^2} - \frac{3}{4}\frac{\dot{m}^2}{m^3}\right\}$$

bulunur. Bu sonucu $\left[C + j(j+1)\right]_{\Im_{n\lambda}} = Q\left[H - E\right]$ denklemle karşılaştırdığımız zaman z nin sağlaması gereken denklem

$$\frac{\dot{z}^2 R(z)}{4mz^2} = 1 \tag{3.4.12}$$

dir. Burada

$$R(z) = \sigma_2 z^2 + \sigma_1 z + c_0 \tag{3.4.13}$$

dir. Buna göre (3.4.11) ifadesi $R(z)$ e bağlı olarak düzenlenirse Hamiltonyen için

$$H = -\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} + \frac{g_2 z^2 + g_1 z + h_0}{R} + \frac{z^2}{R^2}\left[-\frac{5\Delta}{4R} - \sigma_2 + \frac{\sigma_1}{z}\right] + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \tag{3.4.14}$$

bulunur.. Burada

$$\Delta = \sigma_1^2 - 4\sigma_1 c_0 \tag{3.4.15}$$

dir. Enerji özdeğerleri en genel durumda

$$\begin{aligned} -8n\lambda &= g_1 - \sigma_1 E \\ 4\lambda^2 &= g_2 - \sigma_2 E \\ 1 - 4\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 &= c_0 E - h_0 \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

denklemlerinden bulunur. Dalga fonksiyonu ise

$$\Psi(x) = \left(\frac{m}{z}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-\lambda z}{2}\right) L_{n+j}^{-2j-1}\left(\lambda^2 z\right)$$

dir. En genel haldeki potansiyel ifadesi

$$V(x) = \frac{g_2 z^2 + g_1 z + h_0}{R} + \frac{z^2}{R^2}\left[-\frac{5\Delta}{4R} - \sigma_2 + \frac{\sigma_1}{z}\right] + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \tag{3.4.17}$$

olup parametrelere özel değerler vererek bunlara karşılık gelen potansiyeller bulunabilir.

III:4.1. ÖZEL DURUMLAR:

***Küresel Simetrik Osilatör kuyusu**:*

Parametrelerden $\sigma_2 = c_0 = 0 \quad \sigma_1 = 1$ alırsak denklem (3.4.13) de $R = \sigma_1 z$ olur ve denklem (3.4.12) yi buna göre çözdüğümüzde z için

$$z = \frac{1}{\sigma_1} s^2(x) \tag{3.4.1.1}$$

buluruz. Burada

$$s(x) = \int \sqrt{m(x)}\, dx \tag{3.4.1.2}$$

dir. $\sigma_2 = c_0 = 0$ sayılarını (3.4.16) denklemlerinde yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} -8n\lambda &= g_1 - \sigma_1 E \\ 4\lambda^2 &= g_2 \\ 1 - 4\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 &= h_0 \end{aligned} \tag{3.4.1.3}$$

olur. Buna göre potansiyel için

$$V_{KSO}(x) = \frac{4\lambda^2 s^2(x)}{\sigma_1^2} + \frac{g_1}{\sigma_1} + \frac{4(j+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}{s^2(x)} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \tag{3.4.1.4}$$

bulunur. Potansiyel ifadesinde geçen $\frac{g_1}{\sigma_1}$ terimi sıfır alınırsa (3.4.1.3) denklemlerinde

$$-8n\lambda = -\sigma_1 E$$

$$4\lambda^2 = g_2$$

$$1-4\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 = h_0$$

olur ve potansiyel

$$V_{KSO}(x) = \frac{4\lambda^2 s^2(x)}{\sigma_1^2} + \frac{4(j+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}{s^2(x)} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3}$$

şeklini alır. Enerji öz değeri $\omega = \frac{\lambda}{\sigma_1}$ olmak üzere

$$E = 2\omega(p+j+1), \quad p = 0,1,2... \tag{3.4.1.4}$$

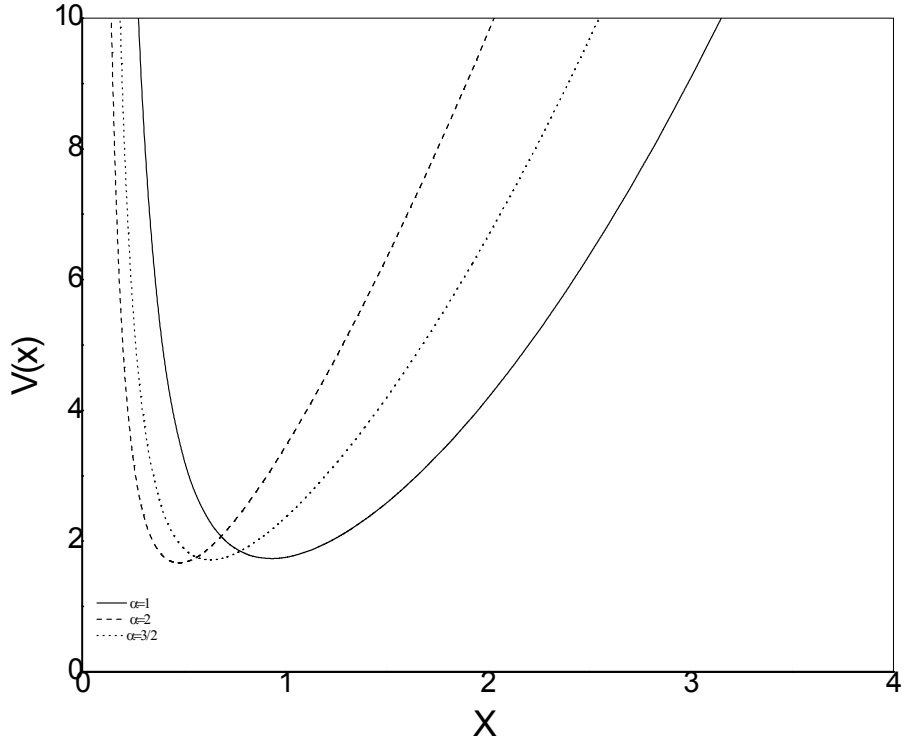
dır.. Dalga fonksiyonu da (3.4.7) ve (3.1.21) denklemleri göz önüne alınarak

$$\Psi(x) \propto \left(\frac{\sqrt{m}}{z}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2z}\right) L_{n+j}^{-2j-1}\left(\lambda^2 z\right) \tag{3.4.1.5}$$

dır. Kütle (3.3.1.7) için potansiyel

$$V_{KSO}(x) = \frac{4\lambda^2 s^2(x)}{\sigma_1^2} + \frac{4(j+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}{s^2(x)} + \frac{(1-\alpha)}{(\alpha+x^2)^4}\left[-3x^4 + (2\alpha-4)x^2 + \alpha\right]$$

şeklindedir.



Şekil 5: $\lambda = 1/2 \quad , j = 0$ **için Küresel simetrik osilator tipi potansiyel-kütle grafiği**

Morse tipi potansiyel*:*

Parametrelerden $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ seçilirse (3.4.13) de $R(z) = c_0$ olur ve (3.4.12) denkleminde z için

$$z = e^{-\frac{2s(x)}{\sqrt{c_0}}} \qquad (3.4.1.6)$$

bulunur.(3.4.16) denklem sisteminde $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ yazılırsa

$$-8n\lambda = g_1$$

$$4\lambda^2 = g_2$$

$$1-4(j+\frac{1}{2})^2 = c_0E - h_0$$

olur. Buna göre (3.4.17) deki potansiyel

$$V_M(x) = \frac{4}{c_0}\left\{\lambda^2 e^{-2s(x)} - 2n\lambda e^{-s(x)} + h_0 + 1\right\} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3}$$

bulunur. Burada $h_0 = -1$ alınırsa potansiyel ifadesi sabit terim içermez. O halde (3.4.1.7)

$$V_M(x) = \frac{4}{c_0}\left\{\lambda^2 e^{-2s(x)} - 2n\lambda e^{-s(x)}\right\} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \qquad (3.4.1.7)$$

olur. Enerji spektrumu

$$E = -\frac{4}{c_0}\left(j+\frac{1}{2}\right)^2, \quad j = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, \ldots -|n|, \ \ veya \quad j = -1, -2, \ldots -|n| \qquad (3.4.1.8)$$

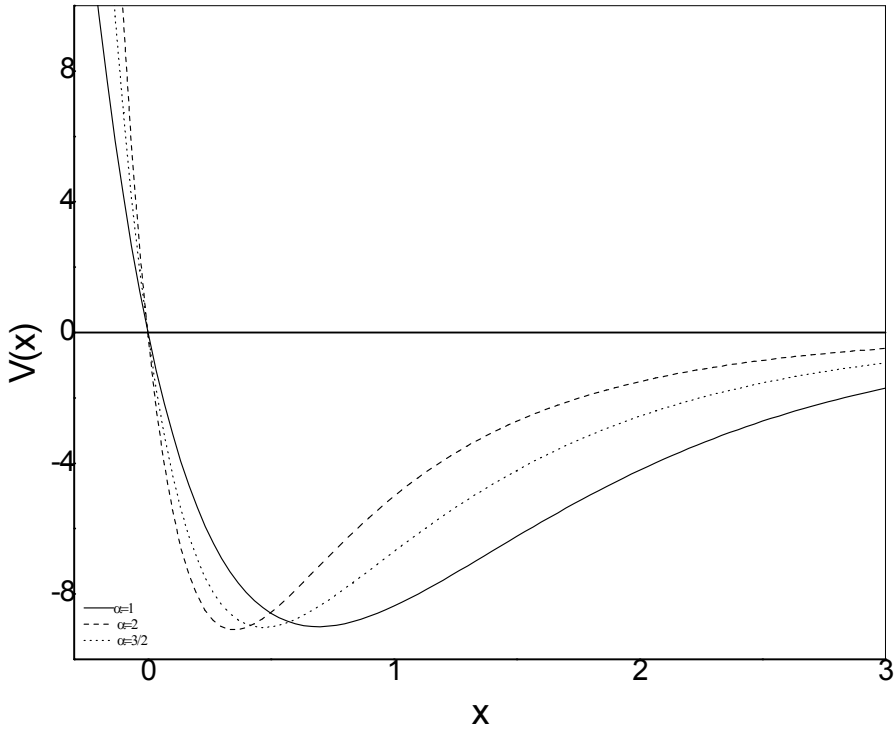
olur. Dalga fonksiyonu ise

$$\psi(x) \propto \left(\frac{\sqrt{m}}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\lambda z}{2}\right) L_{n+j}^{-2j-1}\left(\frac{\lambda^2}{z}\right) \qquad (3.4.1.9)$$

bulunur. Kütlenin (3.3.17) olduğu durumda

$$V_M(x) = \frac{4}{c_0}\left\{\lambda^2 e^{-2s(x)} - 2n\lambda e^{-s(x)}\right\} + \frac{(1-\alpha)}{(\alpha + x^2)^4}\left[-3x^4 + (2\alpha - 4)x^2 + \alpha\right]$$

olur.



Şekil 6: $\lambda = 6$, $n = 3, c_0 = 4$ **için Morse tipi potansiyel kütle grafiği**

Kratzer tipi potansiyeli

Parametrelerden $\sigma_1 = c_0 = 0$ iken denklem (3.4.13) de $R(z) = \sigma_2 z^2$ ve denklem (3.4.12) de z için

$$z = \frac{2s(x)}{\sqrt{\sigma_2}} \qquad (3.4.1.10)$$

bulunur. .(3.4.16) denklem sistemi $\sigma_1 = c_0 = 0$ için

$$-8n\lambda = g_1$$

$$4\lambda^2 = g_2 - \sigma_2 E$$

$$1 - 4(j + \frac{1}{2})^2 = -h_0$$

olur. Buna göre potansiyel

$$V_K(x) = \frac{4\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{4s^2(x)} + \frac{g_2}{\sigma_2} - \frac{4n\lambda}{2\sqrt{\sigma_2}s(x)} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3}$$

olur. $\frac{g_2}{\sigma_2} = 0$ alınırsa potansiyel ifadesi sabit terim içermez. Dolayısıyla

$$V_K(x) = \frac{4\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{4s^2(x)} - \frac{4n\lambda}{2\sqrt{\sigma_2}s(x)} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \qquad (3.4.1.11)$$

olur. Enerji öz değeri için

$$E = -\frac{n^2\lambda^2}{4}(\upsilon + j + 1)^{-2}, \quad \upsilon = 0,1,2..., \quad n = -j, -j+1, -j+2, ... \; j = -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, ... \qquad (3.4.1.12)$$

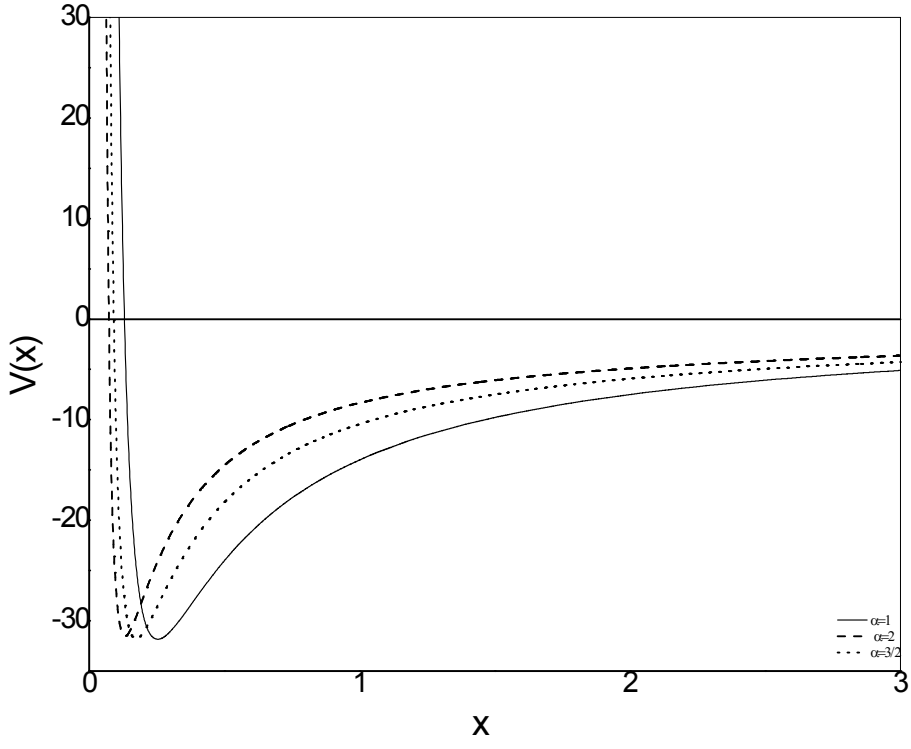
ve dalga fonksiyonu için

$$\psi(x) \propto \left(\sqrt{m}z\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{\lambda z}{2}\right) L_{n+j}^{-2j-1}\left(\lambda^2 z\right) \qquad (3.4.1.14)$$

bulunur. (3.4.1.11) potansiyel ifadesinde (3.3.1.7) kütlesi alınarak düzenlenirse

$$V_K(x) = \frac{4\left(j+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{4s^2(x)} - \frac{4n\lambda}{2\sqrt{\sigma_2}s(x)} + \frac{(1-\alpha)}{(\alpha+x^2)^4}\left[-3x^4 + (2\alpha-4)x^2 + \alpha\right]$$

olur.



Şekil 7: $n = 2$, $\lambda = 4$, $j = -2$ **için Kratzer tipi potansiyel kütle grafiği**

III.5.. $SO(1,1) \leftrightarrow SO(2)$ **Karışık Bazına bağlı efektif kütleli Hamiltonyenler**

Bu indirgemeye ait parametrizasyon

$$g(u,t,\varphi)=\begin{pmatrix} e^{u/2} & 0 \\ 0 & e^{-u/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cosh t/2 & \sinh t/2 \\ \sinh t/2 & \cosh t/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi/2 & \sin\varphi/2 \\ -\sin\varphi/2 & \cos\varphi/2 \end{pmatrix} \qquad (3.5.1)$$

şeklindedir. Burada $-\infty < u < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ dir. Bu parametrizasyonda infinitesimal operatörler

$$\begin{aligned} iJ_1 &= \frac{\sin\varphi}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\cos\varphi}{\cosh t}\frac{\partial}{\partial u} + \tanh t\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\dot{h}}{2h\dot{t}}\sin\varphi, \\ iJ_2 &= \frac{\cos\varphi}{\dot{t}}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sin\varphi}{\cosh t}\frac{\partial}{\partial u} - \tanh t\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\dot{h}}{2h\dot{t}}\cos\varphi \qquad (3.5.2) \\ iJ_3 &= -\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{aligned}$$

buluruz. Casimir operatörü de

$$\begin{aligned} C = &-\frac{1}{\dot{t}^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{\dot{t}^2}\left(\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \dot{t}\tanh t\right)\frac{\partial}{\partial x} \\ &-\frac{1}{\cosh^2 t}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2\sinh t\frac{\partial^2}{\partial u\partial\varphi} - \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) + \frac{\dot{h}}{2h\dot{t}^2}\left(\frac{\dot{h}}{2h} - \frac{\ddot{h}}{\dot{h}} + \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} - \dot{t}\tanh t\right) \end{aligned} \qquad (3.5.3)$$

olarak bulunur. $C + j(j+1)$ operatörünü v ve n sabit tam sayı veya yarı tam sayılar olmak üzere

$$f(g) = e^{-i(vu+n\varphi)}f(x) \qquad (3.5.4)$$

fonksiyonlarından oluşan $\Im_{vu}$ alt uzayına kısıtlayalım ve aşağıdaki şekilde düzenleyelim,

$$\left[C + j(j+1)\right]_{\Im_{vu}} = \frac{m}{\dot{t}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{m}\left(\frac{\dot{h}}{h} - \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \dot{t}\tanh t\right)\frac{d}{dx}\right.$$

$$\left. - \frac{\dot{t}^2}{m\cosh^2 t}\left(-v^2 + 2vn\sinh t + n^2\right) + \frac{\dot{h}}{2mh}\left(\frac{\dot{h}}{2h} - \frac{\ddot{h}}{\dot{h}} + \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} - \dot{t}\right) + \frac{\dot{t}^2}{m}j(j+1)\right\} \tag{3.5.5}$$

Bu (3.5.5) bağıntısını $\left[C + j(j+1)\right]_{\Im_{nk}} = Q\left[H - E\right]$ ile karşılaştırdığımız zaman h ın sağlaması gereken denklem

$$\frac{\dot{m}}{m} = -\frac{\dot{h}}{h} + \frac{\ddot{t}}{\dot{t}} - \dot{t}\tanh t \tag{3.5.6}$$

eşitliğinden

$$h = \frac{\dot{t}}{m\cosh t} \tag{3.5.7}$$

olur. (3.5.7) ifadesini (3.5.5) te yerine yazmadan önce ifadeyi basitleştirmek amacıyla

$$z = \sinh t \tag{3.5.8}$$

dönüşümü yapacağız. Buna göre $\left[C + j(j+1)\right]_{\Im_{vn}}$

$$\left[C+j(j+1)\right]_{\Im_{vn}} = \frac{m\left(1+z^2\right)}{\dot{z}^2}\left\{-\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} - \frac{\dot{z}^2}{m\left(1+z^2\right)^2}\left(-v^2 + 2vnz + n^2 - 1 - (1+z^2)j(j+1)\right)\right.$$

$$\left. - \frac{\ddot{z}}{2m\dot{z}} + \frac{3}{4m}\frac{\ddot{z}^2}{\dot{z}^2} + \frac{\ddot{m}}{2m^2} - \frac{3\dot{m}^2}{4m^3}\right\} \tag{3.5.9}$$

olur. Eğer v, n ve j yi enerjinin lineer bir fonksiyonu olarak aşağıdaki gibi ele alırsak

$$\begin{aligned} -\nu^2 + n^2 - 1 &= -a_1 E - b_1 \\ 2\nu n &= a_3 E + b_3 \\ j(j+1) &= -a_2 E - b_2 \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

Bu durumda denklem (3.5.9) aşağıdaki şekli alır:

$$\begin{aligned} \left[C + j(j+1)\right]_{\mathfrak{I}} = \frac{m\left(1+z^2\right)}{\dot{z}^2}\Bigg\{ & -\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} - \frac{\dot{z}^2}{m\left(1+z^2\right)^2}\left(-a_1 + a_3 z + a_2 + a_2 z^2\right)E \\ & - \frac{\dot{z}^2}{m\left(1+z^2\right)^2}\left(-b_1 + b_3 z + b_2 + b_2 z^2\right) - \frac{\dddot{z}}{2m\dot{z}} + \frac{3}{4m}\frac{\ddot{z}^2}{\dot{z}^2} + \frac{\ddot{m}}{2m^2} - \frac{3}{4}\frac{\dot{m}^2}{m^3}\Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

Bu sonucu $\left[C + j(j+1)\right]_{\mathfrak{I}_{nk}} = Q\left[H - E\right]$ ile karşılaştırdığımızda z nin sağlaması gereken denklem

$$\frac{\dot{z}^2 R}{m(1+z^2)^2} = 1 \tag{3.5.12}$$

şeklinde olup $R(z)$ in açık ifadesi

$$R(z) = a_2 z^2 + a_3 z + a_2 - a_1 \tag{3.5.13}$$

dir. (3.5.11) denklemini $R(z)$ e göre düzenlediğimizde Hamiltonyen için

$$H = -\frac{1}{m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\dot{m}}{m^2}\frac{d}{dx} - \frac{b_2 z^2 + b_3 z + b_2 - b_1 + 1}{R} + \frac{\left(1+z^2\right)^2}{2R^2}\left\{-\frac{5\Delta}{8R} - \frac{3}{2}a_2 + \frac{z(2a_2 z + a_3)}{1+z^2}\right\} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \tag{3.5.14}$$

buluruz. Burada $\Delta = a_3^2 + 4a_2(a_1 - a_2)$ dır. Enerji spektrumu en genel halde

$$\begin{aligned} -\nu^2 + n^2 - 1 &= -a_1 E - b_1 \\ 2\nu n &= a_3 E + b_3 \\ j(j+1) &= -a_2 E - b_2 \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

denklemlerinden bulunur. Genel haldeki

$$V(x) = -\frac{b_2 z^2 + b_3 z + b_2 - b_1 + 1}{R} + \frac{\left(1+z^2\right)^2}{2R^2}\left\{-\frac{5\Delta}{8R} - \frac{3}{2}a_2 + \frac{z(2a_2 z + a_3)}{1+z^2}\right\} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \tag{3.5.16}$$

potansiyel ifadesinde parametrelerin farklı değerlerinde elde ettiğimiz potansiyeller şöyledir:

III.5.1. ÖZEL DURUMLAR:

Pöshl-Teller Potansiyeli:

Denklem (3.5.13) de $a_1 = a_3 = 0$ iken $R = a_2(z^2 + 1)$ ve $\Delta = -4a_2^2$ olur. Buna göre denklem (3.5.12) çözülürse z

$$z = \sinh \frac{s(x)}{\sqrt{a_2}} \tag{3.5.1.1}$$

olur.. Aldığımız parametreleri (3.5.10) denklem sisteminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} -\upsilon^2 + n^2 - 1 &= -b_1 \\ 2n\upsilon &= b_3 \\ j(j+1) &= -a_2 E - b_2 \end{aligned} \tag{3.5.1.2}$$

olur. O halde (3.5.14) den potansiyel

$$V(x) = \frac{1}{a_2}\left\{ \frac{\upsilon^2 - n^2 + \frac{1}{4}}{\cosh^2 \frac{s(x)}{\sqrt{a_2}}} - 2\upsilon n \operatorname{sech} \frac{s(x)}{\sqrt{a_2}} \tanh \frac{s(x)}{\sqrt{a_2}} + b_2 - \frac{1}{4} \right\} + \frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3} \tag{3.5.1.3}$$

bulunur. $b_2 - \frac{1}{4} = 0$ alınırsa potansiyel ifadesinde sabit terim kalmaz. Dolayısıyla

$$V(x)=\frac{1}{a_2}\left\{\frac{\upsilon^2-n^2+\frac{1}{4}}{\cosh^2\frac{s(x)}{\sqrt{a_2}}}-2\upsilon n\,\mathrm{sech}\frac{s(x)}{\sqrt{a_2}}\tanh\frac{s(x)}{\sqrt{a_2}}\right\}+\frac{\ddot{m}}{4m^2}-\frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3}$$

olur. Enerji spektrumu için

$$E=-\frac{1}{a_2}(N+p+\frac{1}{2})^2,\quad j=N+p,\qquad p=0,1,2,... \tag{3.5.1.4}$$

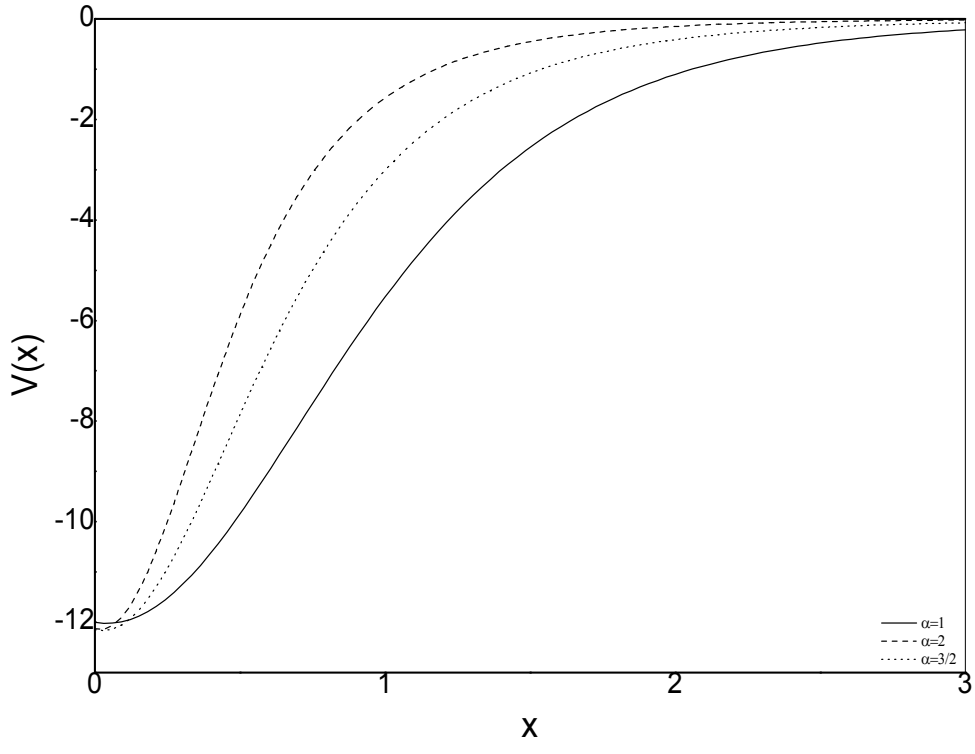
ve dalga fonksiyonu için

$$\Psi(x)\propto\left(m(1+z^2)\right)^{\frac{1}{4}}\left(1+z^2\right)^{-\frac{n}{2}}(1-z)^{\upsilon}F\left(-n-j,1+j-n;1-n+\upsilon;\frac{1}{2}(1-z)\right) \tag{3.5.1.5}$$

bulunur. Kütlenin (3.3.1.7) olduğu durumda potansiyel

$$V(x)=\frac{1}{a_2}\left\{\frac{\upsilon^2-n^2+\frac{1}{4}}{\cosh^2\frac{s(x)}{\sqrt{a_2}}}-2\upsilon n\,\mathrm{sech}\frac{s(x)}{\sqrt{a_2}}\tanh\frac{s(x)}{\sqrt{a_2}}\right\}+\frac{(1-\alpha)}{(\alpha+x^2)^4}\left[-3x^4+(2\alpha-4)x^2+\alpha\right]$$

olur.



Şekil 8: $v = 1/7$, $n = 7/2$ **için Genelleşmiş Pöschl-Teller tipi potansiyel -kütle grafiği**

***Ginocchio potansiyeli**:*

Şimdi katsayıları

$$a_1 = \frac{1}{\gamma^4} - \frac{1}{\gamma^2}, \quad a_2 = \frac{1}{\gamma^4}, \quad a_3 = 0$$

$$b_1 = -\delta(\delta+1) + \frac{3}{4}, \; b_2 = \frac{1}{4}, \; b_3 = 0 \qquad (3.5.1.6)$$

olarak seçelim.Ayrıca aşağıdaki şekilde değişken değiştirmesi yapalım

$$z^2 = \frac{\gamma^2 y^2}{1-y^2} \tag{3.5.1.7}$$

dir. Denklem (3.5.1.6) deki parametrelere göre (3.5.13) denkleminde $R = \frac{1}{\gamma(1-y^2)}$ ve $\Delta = -\frac{4}{\gamma^6}$ olur. Ayrıca (3.5.10) denklem sistemi

$$-\upsilon^2 + n^2 - 1 = \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma^4}\right)E + \delta(\delta+1) + \frac{3}{4}$$
$$2\upsilon n = 0$$
$$j(j+1) = -\frac{1}{\gamma^4}E - \frac{1}{4}$$

şeklini alır. Burada belirtmeliyiz ki discrete seride n, sıfırdan farklı değerler aldığı için $\upsilon = 0$ olmalıdır. Potansiyel için

$$V_G(x) = -\delta(\delta+1)\gamma^2(1-y^2) + \frac{(1-\gamma^2)}{4}\left[5(1-\gamma^2)y^4 - y^2(7-\gamma^2) + 2\right](1-y^2) \tag{3.5.1.8}$$
$$+\frac{\ddot{m}}{4m^2} - \frac{7}{16}\frac{\dot{m}^2}{m^3}$$

bulunur. Enerji spektrumu için

$$E_n = -\gamma^2\left[-n^2 + \left(j+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\delta+\frac{1}{2}\right)^2\right], j = -1,-2,\ldots-|n| \;\; veya \;\; j = -\frac{3}{2},-\frac{5}{2},\ldots-|n| \tag{3.5.1.9}$$

ve dalga fonksiyonu için de

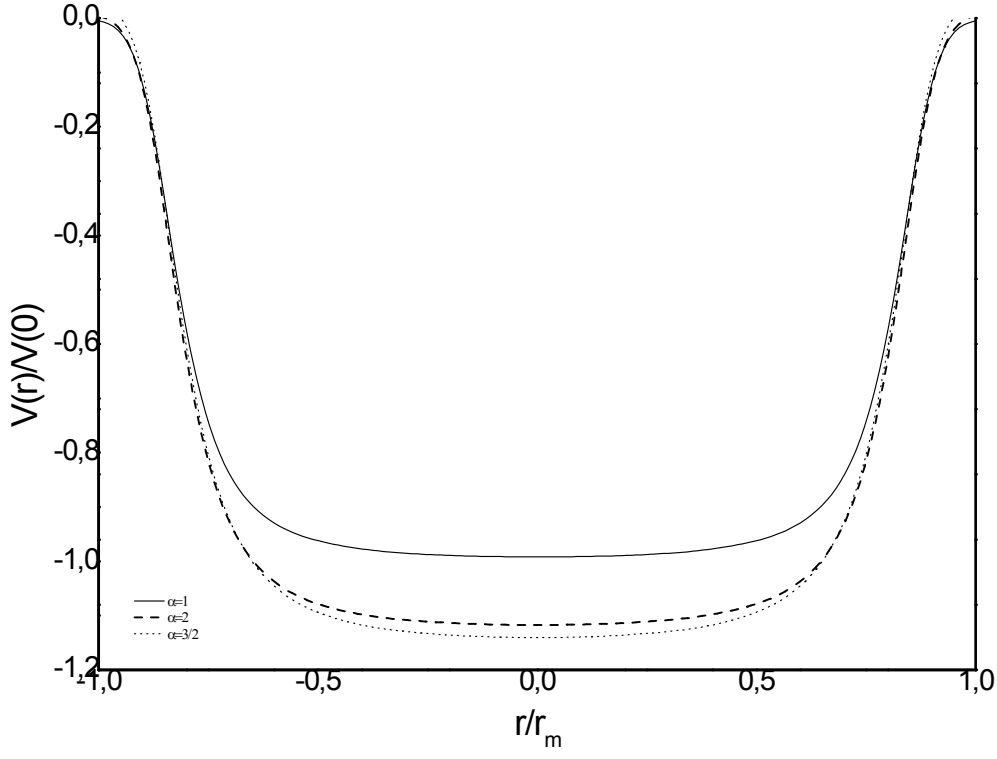
$$\Psi(x) \propto \left[m(x)(1+z^2)\right]^{\frac{1}{2}}\left(1+z^2\right)^{-\frac{n}{2}}(1-z)^j F\left(-n-j,1+j-n;1-n+v;\frac{1}{2}(1-z)\right) \quad (3.5.1.10)$$

bulunur. Kütlenin (3.3.1.7) olduğu durumda potansiyel

$$V_G(x) = -\delta(\delta+1)\gamma^2(1-y^2) + \frac{(1-\gamma^2)}{4}\left[5(1-\gamma^2)y^4 - (7-\gamma^2)y^2 + 2\right](1-y^2)$$

$$+\frac{(1-\alpha)}{(\alpha+x^2)^4}\left[-3x^4 + (2\alpha-4)x^2 + \alpha\right]$$

olur.



Şekil 9: $\gamma = 6{,}25$, $\delta = 5{,}5$ **için Ginocchio potansiyel-kütle grafiği**

SONUÇ

Bu tezde tek boyutta konuma bağlı efektif kütleli Schrödinger denklemi grup teorik yöntemle incelendi. $SU(2)$ ve $SL(2,R)$ gruplarının regüler temsillerinin Casimir operatörleri C ile H Hamiltonyeni arasında (2.3.1) ve (3.3.8) bağıntılarını sağlayan Hamiltonyenler kuruldu. Bu Hamiltonyenlerdeki potansiyeller genelde konuma kapalı şekilde olup altı parametre içermektedir. Parametrelerin bazı özel değerlerinde potansiyeller konumun bir fonksiyonu olarak açık şekilde ifade edilir. Örneğin $SU(2)$ grubu çerçevesinde elde edilen potansiyelde trigonometrik Pöschl-Teller tipi potansiyel elde edildi.. $SL(2,R)$ grubunda ise üç farklı faktorizasyon ele alındı bunlardan kanonik bazda hiperbolik Pöschl-Teller, Manning-Rosen, Hulthen ve Rosen-Morse tipi potansiyelleri, $SO(2) \leftrightarrow E(1)$ Karışık Bazında Küresel simetrik osilatör, Morse ve Kratzer tipi potansiyelleri, $SO(1,1) \leftrightarrow SO(2)$ Karışık Bazında da genelleşmiş Pöschl-Teller ve Ginocchio potansiyelleri elde edildi. Bu potansiyeller için öz değer ve öz fonksiyonlar da elde edilmiştir. Ayrıca konuma bağlı $m(x)$ kütlesinin farklı ifadeleri için bu potansiyellerin grafikleri çizilmiştir

KAYNAKLAR

Bargmann V., 1936, *On the Theory of the Hydrogen Atom,* Z. Für Physik 99, 576.

Bargmann V., 1945, *Irreducible Unitary Representations of the Lorentz Group*, Annals of Mathematics, Volume 48, No 1

Barranco M. ve Pi M, Gatica S. M. ve Hernandez E. S., Navarro J., 1997, *Structure and energetics of mixed 4He-3He drops,* Phys. Rev B, vol 56, Number 14.

Barut A. O. , Raczka R. 1986, *Theory of Group Representations and Applications,* World Scientific Publishing Co Pte Ltd.

BenDaniel D. J., Duke C. B., 1966, *Space-Charge Effects on Electron Tunneling*, Phys. Rev. Vol 152, Number 2.

Bohm A., Neman Y., Barut A. O. 1988, *Dynamical Groups and Spectrum Generating Algebras* Volumes 1-2,

Chetouani L. , Dekar L. , Hammann T. F. , 1995, *Greens functions via path integrals for systems with position dependent masses*, Phys. Rev. A 52, 82-91

Cordero P., Ghirardi G. C., 1972, *Realizations of Lie algebras and the Algebraic Treatment of Quantum Problems*, Fortschritte Physik 20, 105-133

Dutt R., Khare A., Sukhatme U D., 1988, *Supersymmetry, Shape invariance, and exactly solvable potentials*, American Journal of Physics, Volume 56, Issue 2, pp. 163-168

Fock V., 1935*, On the Theory of the Hydrogen Atom, Zur Theorie des Wasserstoffatoms*, Z. Für Physik 98, 145

Geller M. R., Kohn W., 1993, *Quantum Mechanics of Electrons in Crystals with Graded Composition*, Phys. Rev. Lett. Vol 70, Number 20

Ghirardi G. C. , *On the Algebraic Structure of class of Solvable Quantum Problems*, II. Nuovo Cimento, Vol 10 A, N 1

Ginocchio Joseph N., 1985, *A Class of Exactly Solvable Potentials II. The Three-Dimensional Schrödinger Equation*, Annals of Physics 159, 467-480

Ginocchio Joseph N., 1984, *A Class of Exactly Solvable Potentials I. One-Dimensional Schrödinger Equation*, Annals of Physics 152, 203-219

Gora T., Williams F., 1968, *Theory of Electronic States and Transport in Graded Mixed Semiconductors*, Phys. Rev, Vol 177, Number 3.

Gradshteyn I. S., Ryzhık I. M., 1965, *Table of Integrals Series and Products*, Academic Pres, New york and London

Iachello F., 1986, *Dynamic Symmetries in Scattering*, A.W. Wright Nuclear Structure Laboratory, Yale University, New Haven, Connecticut 06511

Iachello F., *The Role of Spectrum Generating Algebras and Dynamic Symmetries in Molecular Physics*, Center for Theoretical Physics Laboratory, Yale University, New Haven, Connecticut 06511

Kerimov G A., 2009, *Exactly solvable position-dependent mass Hamiltonians related ton on-compact semi simple Lie groups*, J. Phys. A: Math. Theor. 42

Koç R., Koca M., 2003, *A systematic study on the exact solution of the position dependent mass Schrödinger equation*, J. Phys. A:Math. Gen. 36, 8105-8112

Leblond Levy J. M., 1995, *Position Dependent effective mass and Galilean invariance*, Phys. Rev A, Vol 52, Number 3

Levai G. , 1989, *A search for shape-invariant solvable potentials,* J. Phys. A: Math. Gen 22 689

Luttinger J. M. , Kohn W., 1955, *Motion of Electrons and Holes in perturbed Periodic Fields*, Phys. Rev. Volume 97, Number 4

Manning M.F, Rosen N., Phys. Rev. 44, 953 (1933)

Morse M. P., 1929, *Diatomic Molecules According to the wave Mechanics. II. Vibrational Levels*, Phys. Rev, Volume 34

Natanzon G. A. , 1971, *Study of the one dimensional Schrödinger equation generated from the hypergeometric equation,* Vestnik Leningradskogo Universiteta, No 10, 22-28

Oldwig Von R., 1983, *Position dependent effective masses in semiconductor theory*, Phys. rev. Vol 27, Number 12

Pauli W., 1926, *On the hydrogen spectrum from the standpoint of the new quantum mechanics,* Z. Phys. 36, 336–363

Plastino A. R., Rigo A., Casas M., Garcias F., Plastino A., 1999, *Supersymmetric approach to quantum systems with position dependent effective mass*, Phys. Rev. A 60, 4318-4325

Quesne C., Tkachuk V. M., 2004, *Deformed Algebras, position dependent effective masses and curved spaces : an exactly solvable Coulomb problem,* Journal Physics A: Mathematical and General, Volume 37, Number 14

Rosen N., Morse M., 1932, *On the Vibrations of Polyatomic Molecules,* Phys. Rev. Volume 42, 210-217

Roy B, Roy P. , 2002, *A Lie algebraic approach to effective mass Schrödinger equations*, J. Phys. A:Math. Gen. 35, 3961-3969

Schiff L. I., 1968, *Quantum mechanics*, Third Edition, McGraw-Hill, Inc.

Serra L., Lipparani E., 1997, *Spin response of unpolarized quantum dots*, Europhys. Lett., 40(6), pp. 667-672

Slater J. C, 1949, *Electrons In Perturbed Periodic Lattices*, Physical Review, vol 76, issuel pp. 1592-1601, Technical Report No. 113

Spiegel Murray R. , 1968, *Mathematical Handbook of formulas and tables, Schaum's Series,* McGraw-HILL, Inc.

Vilenkin N. Ja, Klimyk A. U., 1993, *Representation of Lie Groups and Special Functions*, Volume I, Kluwer Academic Publishers

Wu J., Alhassid Y., Gürsey F., 1989, *Group Theory Approach to Scattering. IV. Solvable Potentials Associated with SO(2,2)*, Annals of Physics 196, 163-181

Zhu Q-G, Kroemer H., 1983, *Interface connection rules for effective mass wave functions at an abrupt heterojunction between two different semiconductors*, Phys. Rev B, Volume 27, Number 6

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Siirt'te doğdum. Liseyi 1994 yılında Of Şehit Ahmet Türkan lisesinde bitirdim. Daha sonra aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi S.H.M.Y.O Hemşirelik önlsans programını kazandım ve 1996 yılında bitirdim. 1997 yılında Trakya Üniversitesi Fizik bölümünü kazandım ve 2001 yılında mezun oldum . Aynı yıl Yüksek lisans eğitimine başladım. 2005 ocak ayında yüksek lisans programından mezun oldum ve aynı yıl doktora programına girdim. 2002 yılından beri Trakya Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.

EK 1. **Hipergeometrik Fonksiyonlar**

Eğer ikinci mertebeden lineer homojen bir diferansiyel denklemin tekil noktaları $(0,1,\infty)$ ise ve bu tekil noktalar düzgün tekil noktalar ise denklem

$$x(1-x)\frac{d^2y(x)}{dx^2}+[c-(a+b+1)x]\frac{dy(x)}{dx}-aby(x)=0 \qquad \text{(A.1)}$$

formuna indirgenir. Burada a,b,c sayıları x den bağımsız keyfi sabitlerdir ve denklemin parametreleri olarak tanımlanır. (A.1) denklemi Hipergeometrik denklem, denklemin çözümleri de Hipergeometrik fonksiyon olarak tanımlanır.

Lineer diferansiyel denklemlerin genel teorisinden (A.1) denklemi $x=0$ noktası civarında

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_r x^{s+r}$$

formunda belirli bir seri çözüme sahip olur. Bu çözümü (A.1) denkleminde yerine yazarsak indis denklemi için $s(s-1)+sc=0$, tekrarlama bağıntısı için de

$$a_r=\frac{(s+r-1+a)(s+r-1+b)}{(s+r)(sr-1+c)}a_{r-1}, \quad r\geq 1$$

bulunur. İndis denkleminin kökleri sırasıyla $s_1=0,\ s_2=1-c$ olmak üzere

$s_1=0$ için serinin çözümü

$$y_1(x)=a_0\left[1+\frac{ab}{c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!}x^2+\ldots\right] \qquad c\neq 0,-1,-2,\ldots$$

olur. Benzer şekilde $s_2=1-c$ için serinin çözümü

$$y_2(x)=a_0x^{1-c}\left[1+\frac{(a+1-c)(b-c+1)}{(2-c)}x+\ldots\right]$$

şeklindedir. $y_1(x)$ fonksiyonunda a_0 değerini 1 alırsak (A-1) denkleminin çözümü hipergeometrik fonksiyon olarak

$y_1(x)=F(a,b,c,x) \qquad c\neq 0,-1,-2,\ldots$

şeklinde tanımlanır. Bu çözüm $|x|<1$ aralığında yakınsaktır. $x=1$ noktasında yakınsak olması için $c>a+b$, $x=-1$ noktasında yakınsak olması için ise $c>a+b+1$ olmalıdır. Aynı şekilde $y_2(x)$ çözümünü de hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$y_2(x)=F(a-c+1,b-c+1,2-c,x) \qquad c\neq 2,3,4\ldots$

şeklinde yazılabilir.

$$F(a,b;c;x)={}_2F_1(a,b;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{n!(c)_n}x^n=1+\frac{ab}{1.c}x+\frac{a(a+1)b(b+1)}{1.2.c(c+1)}x^2+...$$

fonksiyonu x değişkenli a,b,c parametreli hipergeometrik seri olarak da tanımlanır ve $|x|<1$ için yakınsaktır. Genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon

$${}_pF_q(a_1,....,a_p,b_1,,,,,,b_q;x)={}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,.....,a_p;\\ \\ b_1,.....,b_q;\end{matrix}\ x\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n....(a_p)_n}{n!(b_1)_n...(b_q)_n}x^n$$

şeklinde verilir. Burada

$$(a)_n=\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(n)},\ (a)_0=1,(a)_n=a(a+1)....(a+n-1),\quad n=1,2,...,$$

dir.

Bir çok fonksiyon Hipergeometrik fonksiyonla ifade edilebilir örneğin;

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=F(1,b;b;x)$$

$$(1+z)^x=F(-n,b;b;-z)$$

$$\log(1+z)=zF(1,1;2;-z)$$

$$e^x=\lim_{x\to\infty}F(1,b;1;\frac{x}{b})$$

Hipergeometrik fonksiyonların bazı özelliklerini verelim:

Hipergeometrik seride a ile b parametrelerinin yerleri değişirse serinin karakteri değişmez. Buradan

- $F(a,b;c;x)=F(b,a;c;x)$ simetri özelliğini alırız.

Hipergeometrik fonksiyonun türevi

$$-\frac{d^n}{dx^n}F(a,b;c;x)=\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}F(a+n,b+n;c+n;x)$$

şeklindedir.

$$-F(a-1,b;c;x)-F(a,b-1;c;x)=\frac{(a-b)x}{c}F(a,b;c+1;x)$$

Hipergeometrik fonksiyonun integral temsili $c > b > 0$ olmak üzere

$$F(a,b;c;x)={}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,dt,$$
$$\mathrm{Re}\,c > 0, \mathrm{Re}\,cb > 0, \left|\arg(1-z)\right| < \pi$$

şeklindedir.

Hipergeometrik fonksiyonlar ile bazı özel fonksiyonlar arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir:

i) $P_n(x)={}_2F_1\left(-n,n+1;1;\frac{1-x}{2}\right)$ (Legendre polinomu)

ii) $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}{}_2F_1\left(-n,\alpha+\beta+n+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right)$ (Jakobi Polinomu)

vi) $L_n(x)={}_1F_1(-n;1;x)$ (Laguerre polinomu)

vii) $L^k{}_n(x) = \frac{\Gamma(n+k+1)}{n!\Gamma(k+1)}{}_1F_1(-n;k+1;x)$ (Genelleştirilmiş Laguerre polinomu)

EK 2. $0 < z < 1$ **iken** $R(z)$ **ifadesinin işaretinin incelenmesi**

$R(z) = az^2 + bz + c$ olmak üzere $0 < z < 1$ aralığında $R(z) > 0$ koşulunu incelemeden önce z üzerinde herhangi bir kısıtlama olmadığı durumda $R(z)$ in durumuna bakalım.

$R(z)$ ifadesi $R(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ şeklinde de yazılabilir. Burada Δ diskriminant olup $\Delta = b^2 - 4ac$ dir. Δ nin işaretlerine bakalım;

1) $\Delta < 0$ ise $z \in (-\infty, \infty)$ durumunda $R(z)$ in işareti a ya bağlıdır. Yani;

$$a > 0 \quad ise \quad R(z) > 0 \quad z \in (-\infty, \infty)$$

$$a < 0 \quad ise \quad R(z) < 0 \quad z \in (-\infty, \infty)$$

dır. Belirtelim ki $a = 0$ durumu $\Delta > 0$ olmasını gerektireceğinden söz konusu değildir.

2) $\Delta = 0$ ise $R(z) = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$ olacağından yine a nın işareti $R(z)$ in işaretini belirler yani;

$$a > 0 \quad ise \quad R(z) > 0, \quad z \in (-\infty, \infty) / \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$$

$$a < 0 \quad ise \quad R(z) < 0, \quad z \in (-\infty, \infty) / \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$$

dır. $z = -\frac{b}{2a}$ noktasında $R(z) = 0$ dır. $a = 0$ durumu $\Delta > 0$ olmasını gerektireceğinden söz konusu değildir.

3) $\Delta > 0$ durumunda sayı ekseni üç bölgeye ayrılır. z_1, z_2 kökler ve $z_1 < z_2$ olsun.

$\lim_{z \to \mp\infty} R(z) = az^2$ olduğundan $(-\infty, z_1)$ ve (z_2, ∞) aralıklarında $R(z)$'in işareti a nın işareti ile aynı, (z_1, z_2) aralığında a nın işaretinin zıttı olacaktır.

Şimdi $0 < z < 1$ aralığında $R(z)$ ifadesini pozitif yapan a, b, c sayılarını belirlemek için gerekli koşulları bulalım. $z = 0$ ve $z = 1$ değerleri için

$$R(0) = c, \qquad R(1) = a + b + c$$

olacağından genel olarak $c \geq 0$ ve $a + b + c \geq 0$ olmalıdır. Diğer koşullara bakalım:

1) $\Delta < 0$ ve $a > 0$ iken $R(z)$ $(-\infty, \infty)$ aralığında pozitif olacağından

$$a > 0 \text{ ise } 0 < z < 1 \text{ aralığında } R(z) > 0$$

dır.

2) $\Delta = 0$ ve $a > 0$ iken $z = -\frac{b}{2a}$ noktası dışında $R(z) > 0$ dır. O halde $z = -\frac{b}{2a}$ noktasının hangi durumlarda $(0,1)$ aralığında olduğuna bakarsak yani $0 < -\frac{b}{2a} < 1$ ifadesine göre $b < 0$ ve $2a + b > 0$ bulunur. Bu iki koşuldan b ve $2a + b$ nin zıt işaretli olduğu görülmektedir. Buna göre $b(2a + b) < 0$ ise z $(0,1)$ aralığında olur. Burada $b^2 = 4ac$ olduğundan $b < -2c$ dir. Dolayısıyla $2c + b > 0$ iken $z = -\frac{b}{2a}$ noktası $(0,1)$ aralığında olduğundan $b > -2c$ olmalıdır. O halde

$$\Delta = 0, a > 0 \text{ ve } b > -2c \text{ ise } R(z) > 0$$

dir.

3) $\Delta > 0$ iken toplamları $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$, ve çarpımları $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ olmak üzere iki tane z vardır. a nın durumlarını inceleyelim;

3a) $a < 0$ ise $c > 0$ koşulu da bilindiğine göre $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ bağıntısından $z_1 z_2 < 0$ olduğundan kökler zıt işaretli olur. $z_1 < z_2$ olduğuna göre

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} > 0$$

dır.

3b) $a > 0$ durumunda ise $z_1 z_2 > 0$ olup köklerin her ikisi de ya pozitif ya negatiftir.

Ayrıca $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ bağıntısı göz önüne alınırsa

$$b > 0 \text{ ise } z_1 < 0, z_2 < 0$$

$$b < 0 \text{ ise } z_1 > 0, z_2 > 0$$

bulunur.

i) $b > 0$ iken $z_1 < z_2 < 0$ dır. Dolayısıyla $(0,1) \in (z_2, \infty)$ olduğundan (z_2, ∞) için $R(z) > 0$ olur.

ii) $b < 0$ iken $z_1 > 1$ olması gerekeceğinden $0 < z_1 < z_2$ yazılabilir. Bu durumda $(0,1) \in (-\infty, z_1)$ olduğundan $(-\infty, z_1)$ aralığında $R(z) > 0$ olur. $z_1 > 1$ koşulundan $b + 2a > 0$ olmalıdır.

i) ve ii) durumlarını bir arada yazacak olursak $\Delta > 0,\ a > 0,\ c > 0,\ b(b+2a) < 0,\ a+b+c > 0$ ise $R(z) > 0$ dir.

Sonuç olarak

$\Delta = (a - c_1 - c_0)^2 - 4c_1c_0$ olmak üzere şu koşulları sağlamalıdır;

1) $\Delta < 0;\quad a > 0$

2) $\Delta = 0;\quad a > 0,\ \ b > -2c$,

3) $\Delta > 0;\quad a < 0$ veya $a > 0,\ b(b+2a) > 0$.

EK.3. $\dfrac{\dot{z}^2 R(z)}{4z^2(1-z^2)} = 1$ **Denkleminin integrallenmesi**

$R(z)$ ifadesi

$R(z) = az^2 + b_0 z + c_0 = a(z-1)^2 + b_1(z-1) + c_1$ şeklinde veya daha genel halde

$$R(z) = a(z-p)^2 + b_p(z-p) + c_p = \begin{cases} az^2 + b_0 z + c_0, & p = 0 \\ a(z-1)^2 + b_1(z-1) + c_1, & p = 1 \end{cases}$$

formunda yazılabilir. Burada b_0, b_1, c_0, c_1 sayıları arasında $b_0 = b_1 - 2a, \quad c_0 = a - b_1 - c_1$ bağıntısı vardır.

$R(z) > 0$ ve $1 > z > 0$ ise $\dfrac{\dot{z}^2 R(z)}{4z^2(1-z^2)} = 1$ denkleminden

$$\pm \dot{z} = 2\frac{z(1-z)}{\sqrt{R}}; \quad \dot{z} = \frac{dz}{dx}$$

bulunur.. Bu integral çözümlendiğinde x in z cinsinden ifadesi

$$\pm 2x = \sum_{p=0}^{1} (-1)^p \int \frac{\sqrt{R}}{z-p}\, dz \qquad \textbf{(C-1)}$$

olarak bulunur. Şimdi $\int \dfrac{\sqrt{R}}{z-p} dz$ integralini hesaplayalım. $R(z) = az^2 + bz + c$ ifadesini $(z-p)$ ye böldüğümüzde integrali

$$\int \frac{\sqrt{R}}{z-p} dz = a\int \frac{z}{\sqrt{R}} dz + (b+ap)\int \frac{dz}{\sqrt{R}} + (ap^2 + bp + c)\int \frac{dz}{(z-p)\sqrt{R}} \qquad \textbf{(C-2)}$$

şeklinde düzenleyebiliriz. Burada

$$\int \frac{z}{\sqrt{R}} dz = \frac{1}{a}\sqrt{R} - \frac{b}{2a}\int \frac{dz}{\sqrt{R}}$$

dır. Dolayısıyla

$$\int \frac{\sqrt{R}}{z-p} dz = \sqrt{R} + \left(\frac{b}{2} + ap\right)\int \frac{dz}{\sqrt{R}} + (ap^2 + bp + c)\int \frac{dz}{(z-p)\sqrt{R}}$$

olur. $p=0$ ve $p=1$ durumlarında katsayıları dikkate alarak (C-1) denklemindeki toplam ifadesinde yerine yazalım

$$\sum_{p=0}^{1}(-1)^p\int\frac{\sqrt{R}}{z-p}dz=-a\int\frac{dz}{\sqrt{R}}+c_0\int\frac{dz}{z\sqrt{R}}-(a+b_1+c_1)\int\frac{dz}{(z-1)\sqrt{R}}.$$

Şimdi yukarıdaki eşitliğin sağındaki ilk integrale bakalım, önce $R(z)$ i $R(z)=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ formunda yazalım ve $t=z+\frac{b}{2a}$ değişken değişimi yapalım.

i) $a>0$ durumunda ,

$$\int\frac{dz}{\sqrt{R}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2az+b}{2a}+\sqrt{\frac{R}{a}}\right|$$

olur.

ii) $a<0$, $b^2-4ac>0$ durumunda $R(z)=-a\left[\left(\frac{b^2+4ac}{4a^2}\right)-\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2\right]$ olacağından

$$\int\frac{dz}{\sqrt{R}}=-\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2az+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$$

dır. Ayrıca $c>0$, $a+b+c>0$ olduğu hatırlatılırsa (bkz Ek-2) $a<0$ için $b^2-4ac<0$ ve $b^2-4ac=0$ durumları söz konusu olamaz.

iii) $a>0$, $b^2-4ac=0$ durumunda $R(z)=a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2$ olur dolayısıyla,

$$\int\frac{dz}{\sqrt{R}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2az+b}{2a}\right|$$

olur.

Şimdi $\int \frac{dz}{(z-p)\sqrt{R}}$ yi hesaplayalım. Bu integral $p=0$ ve $p=1$ durumlarının toplamında $c_0 \int \frac{dz}{z\sqrt{R}} - (a+b_1+c_1)\int \frac{dz}{(z-1)\sqrt{R}}$ şeklindedir. $z-p=\frac{1}{t}$ değişken değiştirmesi yapılırsa $R(z)=a(p+\frac{1}{t})^2+b(p+\frac{1}{t})+c$ olur. İntegral ifadesi için ise

$(ap^2+bp+c)>0$ ise

$$\int \frac{dz}{(z-p)\sqrt{R}} = \frac{1}{2(ap^2+bp+c)^{1/2}} \ln \left| \frac{(ap^2+bp+c)^{1/2}-\sqrt{R}}{z-p} + \frac{b+2ap}{2(ap^2+bp+c)^{1/2}} \right|$$

$(ap^2+bp+c)<0, \quad b^2>4ac$ ise

$$\int \frac{dz}{(z-p)\sqrt{R}} = \frac{1}{(bp-ap^2-c)^{1/2}} \arcsin \frac{(b+2ap)z+bp+c}{(z-p)(b^2-4ac)^{1/2}}$$

$(ap^2+bp+c)=0$ ise

$$\int \frac{dz}{(z-p)\sqrt{R}} = -\frac{2\sqrt{R}}{(b+2ap)(z-p)}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak;

$a>0, \quad ap^2+bp+c>0$ ise

$$\sum_{p=0}^{1}(-1)^p \int \frac{\sqrt{R}}{z-p}dz = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2az+b+2\sqrt{\frac{R}{a}} \right| + \frac{1}{2c_0} \ln \left| \frac{\sqrt{c_0}-\sqrt{R}}{z} + \frac{b}{2\sqrt{c_0}} \right| +$$
$$\frac{1}{2\sqrt{a+b_1+c_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+b_1+c_1}-\sqrt{R}}{(z-1)} + \frac{b_1}{2\sqrt{a+b_1+c_1}} \right|$$

$a<0, \quad b^2-4ac>0, ap^2+bp+c>0$ ise

$$\sum_{p=0}^{1}(-1)^p \int \frac{\sqrt{R}}{z-p}dz = -\frac{1}{\sqrt{-a}} Arc\sin \frac{2az+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + \frac{1}{2c_0} \ln \left| \frac{\sqrt{c_0}-\sqrt{R}}{z} + \frac{b}{2\sqrt{c_0}} \right| +$$
$$\frac{1}{2\sqrt{a+b_1+c_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+b_1+c_1}-\sqrt{R}}{(z-1)} + \frac{b_1}{2\sqrt{a+b_1+c_1}} \right|$$

$a>0, \quad b^2-4ac=0, ap^2+bp+c>0$ ise

$$\sum_{p=0}^{1}(-1)^p\int\frac{\sqrt{R}}{z-p}dz=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|2az+b\right|+\frac{1}{2c_0}\ln\left|\frac{\sqrt{c_0}-\sqrt{R}}{z}+\frac{b}{2\sqrt{c_0}}\right|+$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a+b_1+c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+b_1+c_1}-\sqrt{R}}{(z-1)}+\frac{b_1}{2\sqrt{a+b_1+c_1}}\right|$$

$a>0,\quad ap^2+bp+c<0,\ b^2>4ac$ ise

$$\sum_{p=0}^{1}(-1)^p\int\frac{\sqrt{R}}{z-p}dz=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2az+b}{2a}+\sqrt{\frac{R}{a}}\right|+\frac{1}{\sqrt{-c_0}}\arcsin\frac{b_0+c_0}{z\sqrt{b_0^2-4ac_0}}+$$

$$\frac{1}{\sqrt{b_1-a-c_1}}\arcsin\frac{(b_1+2a)z+b_1+c_1}{(z-1)\sqrt{b_1^2-4ac_1}}$$

$a>0,\quad ap^2+bp+c=0,$ ise

$$\sum_{p=0}^{1}(-1)^p\int\frac{\sqrt{R}}{z-p}dz=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{2az+b}{2a}+\sqrt{\frac{R}{a}}\right|-\frac{2\sqrt{R}}{b_0z}-\frac{2\sqrt{R}}{(b_1+2a)(z-1)}$$