İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIR ELEMAN YÖNTEMİNİN EKSENEL SİMETRİK PROBLEMLERE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İnş. Müh. Berna ALTUN

Anabilim Dalı : İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ

Programı : YAPI MÜHENDİSLİĞİ

MAYIS 2002

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIR ELEMAN YÖNTEMİNİN EKSENEL SİMETRİK PROBLEMLERE UYGULANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İnş. Müh. Berna ALTUN
(501981100)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13 MAYIS 2002
Tezin Savunulduğu Tarih : 30 MAYIS 2002

Tez Danışmanı : **Doç.Dr. Necla KADIOĞLU**
Diğer Jüri Üyeleri **Doç.Dr. Reha ARTAN (İ.T.Ü)**
Prof.Dr. Faruk YÜKSELER (Y.T.Ü.)

MAYIS 2002

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ	**iv**
SEMBOL LİSTESİ	**v**
ÖZET	**vi**
SUMMARY	**xi**
1. GİRİŞ	**1**
2. ÜÇ BOYUTLU HALDE LİNEER ELASTODİNAMİK PROBLEMİN FORMÜLASYONU	**2**
3. DÜZLEM HALDE DÖNEL SİMETRİK ELASTODİNAMİK PROBLEMİN FORMÜLASYONU	**13**
4. ÖRNEK PROBLEM	**32**
5. SONUÇLAR	**56**
KAYNAKLAR	**57**
ÖZGEÇMİŞ	**58**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 3.1 **:** Silindirik Koordinatlarda Baz Vektörleri 20
Şekil 3.2 **:** Kütle Kuvvetinin Yükleme Noktaları 21
Şekil 4.1 **:** Sonsuz Ortamda a Yarıçaplı Silindirik Boşluk 32
Şekil 4.2 **:** İntegral Denklem İçin Yaklaşım Fonksiyonu 46
Şekil 4.3 **:** Silindirik Boşluk Yüzeyindeki Boyutsuz Yerdeğiştirme 55
Şekil 4.4 **:** Silindirik Boşluk Yüzeyindeki Boyutsuz Gerilme 55

SEMBOL LİSTESİ

$\underset{\sim}{u}$: Yerdeğiştirme Vektörü

$\dot{\underset{\sim}{u}}$: Hız Vektörü

$\underset{\sim}{f}$: Kütle Kuvveti

ρ : Ortamın Yoğunluğu

$\underset{\sim}{x}$: Konum Vektörü

$\underset{\sim}{e}_k$: k Doğrultusunda Baz Vektörü

$\delta(x)$: Dirac Deltası

φ : Skaler Potansiyel

$\underset{\sim}{\psi}$: Vektörel Potansiyel

$\underset{\sim}{t}$: Gerilme Tansörü

$\underset{\sim}{T}$: Yüzey Gerilme Vektörü

$\underset{\sim}{t}^*$: Düzlem Halde Silindirik Koordinatlarda Gerilme Tansörü

$\underset{\sim}{u}^*$: Düzlem Halde Silindirik Koordinatlarda Yerdeğiştirme Vektörü

p_0 : İç Basınç

c_1 : P Dalgasının Hızı

c_2 : S Dalgasının Hızı

$\underset{\sim}{e}_R$: Silindirik Koordinatlarda R Doğrultusunda Baz Vektörü

$\underset{\sim}{e}_\theta$: Silindirik Koordinatlarda θ Doğrultusunda Baz Vektörü

υ : Poisson Oranı

$\dot{\underset{\sim}{u}}(0)$: Başlangıç Hızı

SINIR ELEMAN YÖNTEMİNİN EKSENEL SİMETRİK PROBLEMLERE UYGULANMASI

ÖZET

Bu çalışmada ilk olarak elastik, homojen ve izotrop bir ortamda belli bir $\underset{\sim}{y}$ noktasına $\underset{\sim}{e}_k$ baz vektörü doğrultusunda yüklenmiş g(t) şiddetinde tekil yükten dolayı ortamın herhangi bir $\underset{\sim}{x}$ noktasında meydana gelen gerilme ve yerdeğiştirme alanları hesaplanmıştır. Bu durumda kütle kuvveti aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x},t) = \underset{\sim}{e}_k g(t)\delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}) \tag{1}$$

Bu kütle kuvvetine bağlı olarak aşağıda verilen $\underset{\sim}{\phi}$ *ve* $\underset{\sim}{\theta}$ foksiyonları hesaplanmıştır:

$$\underset{\sim}{\phi} = \left[\frac{1}{4\pi r} \int_0^{t-\frac{r}{c_1}} sg(t - \frac{r}{c_1} - s)ds - \frac{1}{4\pi r}\int_0^t sg(t-s)ds \right] \underset{\sim}{e}_k \tag{2}$$

$$\underset{\sim}{\theta} = \left[\frac{1}{4\pi r} \int_0^{t-\frac{r}{c_2}} sg(t - \frac{r}{c_2} - s)ds - \frac{1}{4\pi r}\int_0^t sg(t-s)ds \right] \underset{\sim}{e}_k \tag{3}$$

$$r = \left[(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2 \right]^{1/2} \tag{4}$$

$\underset{\sim}{x}$ noktasındaki yerdeğiştirme vektörü $\underset{\sim}{u}^k$ ise $\underset{\sim}{\phi}$ *ve* $\underset{\sim}{\theta}$ foksiyonları kullanılarak bulunmuştur.

$$u_i^k = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x_m}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \theta_m}{\partial x_m}\right) + \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_\lambda}\right), \qquad \text{k=(1,2,3)} \tag{5}$$

Bu ortamda şekil değiştirme tansörü ve gerilme şekil değiştirme bağıntıları aşağıda verilmiştir:

$$\varepsilon_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i}\right) \tag{6}$$

$$t_{ij}^k = \lambda \delta_{ij}\varepsilon_{ll}^k + 2\mu\varepsilon_{ij}^k \tag{7}$$

İkinci adım olarak eksenel simetrik problemler için gerekli çekirdekler silindirik koordinatlarda elde edilecektir. Bu amaçla öncelikle g(t) fonksiyonu $\delta(t)$ Dirac

deltası olarak seçilmiştir. Buna bağlı olarak $\underset{\sim}{\phi}$ *ve* $\underset{\sim}{\theta}$ fonksiyonlarının yeni formu aşağıda verilmiştir:

$$\underset{\sim}{\phi} = \left[H(t-\frac{r}{c_1})(t-\frac{r}{c_1}) \right] \frac{1}{4\pi r} \underset{\sim}{e_k} \tag{8}$$

$$\underset{\sim}{\theta} = \left[H(t-\frac{r}{c_2})(t-\frac{r}{c_2}) \right] \frac{1}{4\pi r} \underset{\sim}{e_k} \tag{9}$$

Burada H(t) birim adım fonksiyonunu göstermektedir. Bundan sonra düzlem hal için gerekli $\underset{\sim}{\phi}^{D^k}$ ve $\underset{\sim}{\theta}^{D^k}$ ifadeleri elde edilecektir. Bunun için kütle kuvveti sadece $\underset{\sim}{y}(y_1, y_2, y_3)$ noktası yerine üzerinde sadece y_3 ün değiştiği bir doğru boyunca yüklenmiştir. Bu duruma karşılık gelen fonksiyonlar daha önce bulunanların $y_3 = -\infty$, $y_3 = \infty$ aralığında integre edilmesi ile bulunmuştur. Sonuçlar aşağıda verilmiştir:

$$\underset{\sim}{\phi}^{D^k} = \frac{1}{2\pi} \left\{ H(t-\frac{\rho}{c_1}) \left\{ \frac{t \ln\left(c_1 t + \sqrt{\left(c_1^2 t^2 - \rho^2\right)}\right)}{\rho} - \frac{1}{c_1} \sqrt{\left(c_1^2 t^2 - \rho^2\right)} \right\} \underset{\sim}{e_k} \right. \tag{10}$$

$$\underset{\sim}{\theta}^{D^k} = \frac{1}{2\pi} \left\{ H(t-\frac{\rho}{c_2}) \left\{ \frac{t \ln\left(c_2 t + \sqrt{\left(c_2^2 t^2 - \rho^2\right)}\right)}{\rho} - \frac{1}{c_2} \sqrt{\left(c_2^2 t^2 - \rho^2\right)} \right\} \right\} \underset{\sim}{e_k} \tag{11}$$

$$\rho^2 = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right] \tag{12}$$

Şimdi eksenel simetrik problemler için $\underset{\sim}{\phi}^*$ ve $\underset{\sim}{\theta}^*$ ifadeleri oluşturulacaktır. Silindirik koordinatlarda, $\underset{\sim}{y}_1(R_1, \theta_1)$ ve $\underset{\sim}{y}_2(R_1, \pi + \theta_1)$ noktalarına $\underset{\sim}{e}_{R_1}$ ve $\underset{\sim}{e}_{R_2}$ baz vektörleri doğrultularında herbiri $\frac{1}{2R_1}\delta(t)$ şiddetinde olan iki tekil yük olması hali göz önüne alınmıştır. Bu iki yükten dolayı $\underset{\sim}{x}(R, \theta)$ noktasında oluşan toplam $\underset{\sim}{\phi}^T = \underset{\sim}{\phi}^{R_1} + \underset{\sim}{\phi}^{R_2}$ ve $\underset{\sim}{\theta}^T = \underset{\sim}{\theta}^{R_1} + \underset{\sim}{\theta}^{R_2}$ ifadeleri bulunmuştur. Daha sonra bu ifadeler πR_1'e bölünüp R_1 yarıçaplı daire üzerinde $\theta_1 = 0$' dan $\theta_1 = \pi$ ye kadar integre edilmiştir ve $R_1 \to 0$ için limit alınmıştır.

$$\underset{\sim}{\phi}^* = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{c_1} \delta(t-\frac{R}{c_1}) \left[t \left(\ln(\frac{c_1 t + \sqrt{\left(c_1^2 t^2 - R^2\right)}}{R}) \right) - \frac{1}{c_1} \sqrt{\left(c_1^2 t^2 - R^2\right)} \right] \right.$$

$$+H(t-\frac{R}{c_1})\left[\frac{1}{c_1 R}\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}\right]\Bigg\}\underset{\sim}{e}_R \tag{13}$$

$$\underset{\sim}{\theta}^* = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{c_2}\delta(t-\frac{R}{c_2})\left[t\left(\ln(\frac{c_2t+\sqrt{(c_2^2t^2-R^2)}}{R})\right)-\frac{1}{c_2}\sqrt{(c_2^2t^2-R^2)}\right]\right.$$

$$\left.+H(t-\frac{R}{c_2})\left[\frac{1}{c_2 R}\sqrt{(c_2^2t^2-R^2)}\right]\right\}\underset{\sim}{e}_R \tag{14}$$

Bu ifadeler kullanılarak $\underset{\sim}{u}_R^*(R)$ bulunmuştur:

$$\underset{\sim}{u}_R^* = \frac{1}{4\pi}\left\{-H(t-\frac{R}{c_1})\frac{R}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}+\delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{c_1^2\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right\}\underset{\sim}{e}_R \tag{15}$$

Düzlem şekil değiştirme halinde, silindirik koordinatlarda ve eksenel simetri durumunda şekil değiştirme tansörünün sıfırdan farklı bileşenleri ve şekil değiştirme–gerilme bağıntıları aşağıda verilmiştir:

$$\varepsilon_{RR} = \frac{\partial u_R}{\partial R} \tag{16}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_R}{R} \tag{17}$$

$$t_{RR} = \lambda(\varepsilon_{RR}+\varepsilon_{\theta\theta})+2\mu\varepsilon_{RR} \tag{18}$$

$$t_{\theta\theta} = \lambda(\varepsilon_{RR}+\varepsilon_{\theta\theta})+2\mu\varepsilon_{\theta\theta} \tag{19}$$

$$t_{zz} = \lambda(\varepsilon_{RR}+\varepsilon_{\theta\theta}) \tag{20}$$

$$t_{RR}^* = \lambda\frac{1}{4\pi}\left\{H(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}-\frac{3R^2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{5/2}}\right]+\delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{Rc_1^2\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right.$$

$$\left.+\delta'(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1^3\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right]\right\}+2\mu\frac{1}{4\pi}\left\{H(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}-\frac{3R^2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{5/2}}\right]\right.$$

$$\left.+\delta'(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1^3\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right]\right\} \tag{21}$$

$$t_{\theta\theta}^* = \lambda\frac{1}{4\pi}\left\{H(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}-\frac{3R^2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{5/2}}\right]\right.$$

$$\left.+\delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{Rc_1^2\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}+\delta'(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1^3\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right]\right\}$$

$$+2\mu\frac{1}{4\pi}\left\{-H(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}+\delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{Rc_1^2\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right\} \tag{22}$$

$$t_{zz}^*=\lambda\frac{1}{4\pi}\left\{H(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}-\frac{3R^2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{5/2}}\right]\right.$$

$$\left.+\delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{Rc_1^2\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}+\delta(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1^3\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right]\right\} \tag{23}$$

$\underset{\sim}{u}^*$ ve $\underset{\sim}{T}^*$ eksenel simetrik problemlerin çözümü için gerekli temel çözümleri oluştururlar. Çözülmek istenen elastodinamik problem ile $\underset{\sim}{u}^*$ ve $\underset{\sim}{T}^*$ ' ın oluşturduğu elastodinamik hal arasında Betti – Rayleigh karşıtlık teoremi yazılarak sınır eleman yönteminin esası olan integral denklem elde edilmiştir.

Örnek problem olarak sınırına t=0 anında sabit p_0 iç basıncı yüklenen silindirik bir boşluk göz önüne alınmıştır. Boşluğun yarıçapı a dır.

Bu problemde yüzey gerilmesinin bileşenleri ve sınırda yerdeğiştirme vektörü ise

$$T_R=p_0H^+(t)\underset{\sim}{e}_R \tag{24}$$

$$T_\theta=0 \tag{26}$$

$$\underset{\sim}{u}=u_R(a,t)\underset{\sim}{e}_R \tag{27}$$

olacaktır.

Daha önce bulunan $\underset{\sim}{u}^*$, $\underset{\sim}{T}^*$, $\underset{\sim}{f}^*$ ile belirlenen elastodinamik hal ile $\underset{\sim}{u}$, $\underset{\sim}{T}$, $\underset{\sim}{f}$ takımının oluşturduğu elastodinamik hal arasında Betti – Rayleigh karşıtlık teoremi yazılarak aşağıdaki integral denklem bulunmuştur. Ayrıca daha önce verilen şekil değiştirme- gerilme bağıntıları da kullanılmıştır.

$$\int_V \underset{\sim}{f}^*(t,R)*\underset{\sim}{u}(t,R)dV+\int_S \underset{\sim}{T}^*(t,R)*\underset{\sim}{u}(r,t)ds$$

$$=\int_S \underset{\sim}{u}^*(r,t)*\underset{\sim}{T}(t,R)\,ds+\int_V \underset{\sim}{f}(t,R)*\underset{\sim}{u}^*(t,R)dV \tag{28}$$

$$-\lambda\left\{\int_0^t \varepsilon_{RR}^*(t-\tau)u_R(\tau)d\tau+\int_0^t \varepsilon_{\theta\theta}^*(t-\tau)u_R(\tau)d\tau\right\}-2\mu\int_0^t \varepsilon_{RR}^*(t-\tau)u_R(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t u_R^*(t-\tau)\,p_0H^+(\tau)d\tau \tag{29}$$

Örnek problemde ve diğer elastodinamik halde bölge içinde kütle kuvveti olmadığını ayrıca vurgulamak gerekecektir. İntegral denklemde oluşan tekillik zaman ekseninin

kaydırılması ile aşılmıştır. İntegral denklemdeki terimlere kısmi integrasyon uygulanarak diğer tekilliler integral dışına çıkarılmıştır. İntegral dışındaki tekil terimin çarpanı sıfıra eşitlenerek $\dot{u}(0)$ başlangıç hızı bulunmuştur. Kalan integral denklem boyutsuz ve sayısal olarak çözülmüş ve sınırda $u_R(a,t)$ ve $t_{\theta\theta}(a,t)$ foksiyonlarının zamanla değişimini gösteren eğriler verilmiştir.

APPLICATION OF BOUNDARY ELEMENT METHOD TO AXIAL SYMMETRIC PROBLEMS

SUMMARY

In this study, at first the stress and displacement fields due to a point load with magnitude g(t), acting at a specific point $\underset{\sim}{y}$ in the direction of the $\underset{\sim}{e}_k$ base vector have been calculated at an arbitrary point $\underset{\sim}{x}$ of an elastic, isotropic, and homogeneous medium. In that case the body force can be written as follws:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x},t) = \underset{\sim}{e}_k g(t)\delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}) \tag{1}$$

Depending upon this body force, $\underset{\sim}{\phi}$ *and* $\underset{\sim}{\theta}$ functions have been calculated:

$$\underset{\sim}{\phi} = \left[\frac{1}{4\pi r} \int_0^{t-\frac{r}{c_1}} sg(t - \frac{r}{c_1} - s)ds - \frac{1}{4\pi r}\int_0^t sg(t-s)ds \right] \underset{\sim}{e}_k \tag{2}$$

$$\underset{\sim}{\theta} = \left[\frac{1}{4\pi r} \int_0^{t-\frac{r}{c_2}} sg(t - \frac{r}{c_2} - s)ds - \frac{1}{4\pi r}\int_0^t sg(t-s)ds \right] \underset{\sim}{e}_k \tag{3}$$

$$r = \left[(x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2 \right]^{1/2} \tag{4}$$

The displacement vector $\underset{\sim}{u}^k$ at $\underset{\sim}{x}$ point has been determined using $\underset{\sim}{\phi}$ *and* $\underset{\sim}{\theta}$:

$$u_i^k = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \phi_m}{\partial x_m}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \theta_m}{\partial x_m}\right) + \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial \theta_i}{\partial x_\lambda}\right), \qquad \text{k=(1,2,3)} \tag{5}$$

In this medium, strain tensor and the constituve equations have been given below:

$$\varepsilon_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i}\right) \tag{6}$$

$$t_{ij}^k = \lambda \delta_{ij}\varepsilon_{ll}^k + 2\mu\varepsilon_{ij}^k \tag{7}$$

As the second step, the necessary kernels for axial symmetric problems have been obtained in cylindrical coordinates. At first, the g(t) function has been selected to be Dirac Delta Function $\delta(t)$ for this purpose. Depending upon this, the new forms of $\underset{\sim}{\phi}$ *and* $\underset{\sim}{\theta}$ functions have been given below:

$$\underset{\sim}{\phi} = \left[H(t-\frac{r}{c_1})(t-\frac{r}{c_1}) \right] \frac{1}{4\pi r} \underset{\sim}{e}_k \tag{8}$$

$$\underset{\sim}{\theta} = \left[H(t-\frac{r}{c_2})(t-\frac{r}{c_2}) \right] \frac{1}{4\pi r} \underset{\sim}{e}_k \tag{9}$$

Here H(t) represents unit step function. After this, the necessary expressions for plane problems $\underset{\sim}{\phi}^{D^k}$ ve $\underset{\sim}{\theta}^{D^k}$ will be obtained. For these, the body force has been loaded along a line on which only y_3 can vary instead of only a point $\underset{\sim}{y}(y_1, y_2, y_3)$. The functions corresponding to this case have been found integrating the previous ones on the interval $y_3 = -\infty$, $y_3 = \infty$. The results have been given below:

$$\underset{\sim}{\phi}^{D^k} = \frac{1}{2\pi} \left\{ H(t-\frac{\rho}{c_1}) \left\{ \frac{t \ln\left(c_1 t + \sqrt{\left(c_1^2 t^2 - \rho^2\right)}\right)}{\rho} - \frac{1}{c_1} \sqrt{\left(c_1^2 t^2 - \rho^2\right)} \right\} \underset{\sim}{e}_k \right. \tag{10}$$

$$\underset{\sim}{\theta}^{D^k} = \frac{1}{2\pi} \left\{ H(t-\frac{\rho}{c_2}) \left\{ \frac{t \ln\left(c_2 t + \sqrt{\left(c_2^2 t^2 - \rho^2\right)}\right)}{\rho} - \frac{1}{c_2} \sqrt{\left(c_2^2 t^2 - \rho^2\right)} \right\} \right\} \underset{\sim}{e}_k \tag{11}$$

$$\rho^2 = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right] \tag{12}$$

Now $\underset{\sim}{\phi}^*$ and $\underset{\sim}{\theta}^*$ functions will be constructed for axial symetric problems. In cylindrical coordinates, two point loads, both with magnitude $\frac{1}{2R_1}\delta(t)$ acting on $\underset{\sim}{y}_1(R_1, \theta_1)$ and $\underset{\sim}{y}_2(R_1, \pi + \theta_1)$ points at the directions of $\underset{\sim}{e}_{R_1}$, $\underset{\sim}{e}_{R_2}$ base vectors respectively, are considered. The resulting $\underset{\sim}{\phi}^T = \underset{\sim}{\phi}^{R_1} + \underset{\sim}{\phi}^{R_2}$ and $\underset{\sim}{\theta}^T = \underset{\sim}{\theta}^{R_1} + \underset{\sim}{\theta}^{R_2}$ expressions occuring due to this two loads have been calculated. Later these, expressions have been divided by πR_1 and integrated over the circle with radius R_1 from $\theta_1 = 0$ to $\theta_1 = \pi$ and approached R_1 to zero. The results have been given below:

$$\underset{\sim}{\phi}^* = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{c_1} \delta(t-\frac{R}{c_1}) \left[t \left(\ln(\frac{c_1 t + \sqrt{\left(c_1^2 t^2 - R^2\right)}}{R}) \right) - \frac{1}{c_1} \sqrt{\left(c_1^2 t^2 - R^2\right)} \right] \right.$$

$$\left. + H(t-\frac{R}{c_1}) \left[\frac{1}{c_1 R} \sqrt{\left(c_1^2 t^2 - R^2\right)} \right] \right\} \underset{\sim}{e}_R \tag{13}$$

$$\underset{\sim}{\theta}^{*} = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{c_2}\delta(t-\frac{R}{c_2})\left[t\left(\ln(\frac{c_2 t+\sqrt{(c_2^2t^2-R^2)}}{R})\right)-\frac{1}{c_2}\sqrt{(c_2^2t^2-R^2)}\right]\right.$$

$$\left.+H(t-\frac{R}{c_2})\left[\frac{1}{c_2 R}\sqrt{(c_2^2t^2-R^2)}\right]\right\}\underset{\sim}{e}_R \tag{14}$$

Using these expressions $\underset{\sim}{u}_R^*(R)$ has been found.

$$\underset{\sim}{u}_R^{*} = \frac{1}{4\pi}\left\{-H(t-\frac{R}{c_1})\frac{R}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}+\delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{c_1^2\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right\}\underset{\sim}{e}_R \tag{15}$$

For the plane strain, in cylindrical coordinates in the case of axial symmetry the nonzero components of the strain tensor and constituve relations have been given below:

$$\varepsilon_{RR} = \frac{\partial u_R}{\partial R} \tag{16}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_R}{R} \tag{17}$$

$$t_{RR} = \lambda(\varepsilon_{RR}+\varepsilon_{\theta\theta})+2\mu\varepsilon_{RR} \tag{18}$$

$$t_{\theta\theta} = \lambda(\varepsilon_{RR}+\varepsilon_{\theta\theta})+2\mu\varepsilon_{\theta\theta} \tag{19}$$

$$t_{zz} = \lambda(\varepsilon_{RR}+\varepsilon_{\theta\theta}) \tag{20}$$

$$t_{RR}^{*} = \lambda\frac{1}{4\pi}\left\{H(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}-\frac{3R^2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{5/2}}\right]+\delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{Rc_1^2\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right.$$

$$\left.+\delta'(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1^3\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right]\right\}+2\mu\frac{1}{4\pi}\left\{H(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}-\frac{3R^2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{5/2}}\right]\right.$$

$$\left.+\delta'(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1^3\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right]\right\} \tag{21}$$

$$t_{\theta\theta}^{*} = \lambda\frac{1}{4\pi}\left\{H(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}-\frac{3R^2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{5/2}}\right]\right.$$

$$\left.+\delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{Rc_1^2\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}+\delta'(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1^3\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right]\right\}$$

$$+2\mu\frac{1}{4\pi}\left\{-H(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}+\delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{Rc_1^2\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right\} \tag{22}$$

$$t_{zz}^*=\lambda\frac{1}{4\pi}\left\{H(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}-\frac{3R^2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{5/2}}\right]\right.$$

$$\left.+\delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{Rc_1^2\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}+\delta(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1^3\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right]\right\} \tag{23}$$

$\underset{\sim}{u}^*$ and $\underset{\sim}{T}^*$ form the fundamental solutions necessary for the solution of axially symmetric elastodynamic problems. The fundamental integral equation of boundary element method is obtained writing Betti – Rayleigh reciprocal identity between the elastodynamic state which has been formed by $\underset{\sim}{u}^*$ and $\underset{\sim}{T}^*$ and the problem which is wanted to be solved.

As the sample problem a cylindrical cavity loaded with a constant pressure p_0 on its boundary at t=0 has been considered. The radius of the cylinder is a.

In this problem the components of surface traction and displacement vector on the boundary are

$$T_R=p_0H^+(t)\underset{\sim}{e}_R \tag{24}$$

$$T_\theta=0 \tag{25}$$

$$\underset{\sim}{u}=u_R(a,t)\underset{\sim}{e}_R \tag{26}$$

The integral equation given below is obtained writing Betti – Rayleigh reciprocal identity between the elastodynamic state which is formed by $\underset{\sim}{u}^*$, $\underset{\sim}{T}^*$, $\underset{\sim}{f}^*$ and the elastodynamic state which is formed by $\underset{\sim}{u}$, $\underset{\sim}{T}$, $\underset{\sim}{f}$. Besides the stres- strain relations which are given before have been used.

$$\int_V \underset{\sim}{f}^*(t,R)*\underset{\sim}{u}(t,R)dV+\int_S \underset{\sim}{T}^*(t,R)*\underset{\sim}{u}(r,t)ds$$

$$=\int_S \underset{\sim}{u}^*(r,t)*\underset{\sim}{T}(t,R)\,ds+\int_V \underset{\sim}{f}(t,R)*\underset{\sim}{u}^*(t,R)dV \tag{27}$$

$$-\lambda\left\{\int_0^t \varepsilon_{RR}^*(t-\tau)u_R(\tau)d\tau+\int_0^t \varepsilon_{\theta\theta}^*(t-\tau)u_R(\tau)d\tau\right\}-2\mu\int_0^t \varepsilon_{RR}^*(t-\tau)u_R(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t u_R^*(t-\tau)\,p_0H^+(\tau)d\tau \tag{28}$$

It will be necessary to emphasize that there is no body force in the region both in sample problem and the other elastodynamic state. The singularity arising in integral equation has been eliminated shifting the time axis. Using partial integration on the terms in the integral equation, other singularities have been carried to outside of the integral. İnitial velocity $\dot{u}(0)$ has been determined equating the multipliers of the singular term outside the integral to zero. The remaining integral equation has been solved numerically to be dimensionless and the curves, representing the variations of $u_R(a,t)$ ve $t_{\theta\theta}(a,t)$ functions with time, have been given.

1. GİRİŞ

Sınırsız bir bölgede bulunan lineer elastik, homojen, izotrop bir katı cisme dalga yayılımı şeklinde bir etki ulaştığında, oluşan gerilme ve yerdeğiştirmeler sınır değer problemlerinin bilinmeyenleri olacaktır. Problemin sınır koşulları ele alındığında, üç tip sınır değer problemi ortaya çıkacaktır:

1) Cismin sınırlarında gerilmelerin bilinip, buna bağlı olarak içindeki gerilme ve yer değiştirmelerin bulunduğu sınır değer problemi.

2) Cismin sınırlarında yerdeğiştirmelerin bilinip, buna bağlı olarak, cismin içindeki gerilme ve yerdeğiştirmelerin bulunduğu sınır değer problemi.

3) Cismin sınırlarının bir bölümünde gerilmelerin, diğer bölümünde yer değiştirmelerin bilindiği ve bunlara bağlı olarak cismin içindeki gerilme ve yer değiştirmelerin bulunduğu sınır değer problemi.

Sınır değer problemlerini çözmek için birçok yöntem kullanılır. Bunlardan biri olan sınır eleman yöntemi karşıtlık teoremi kullanılarak elde edilen bir integral denklemin sayısal çözümüne dayanır.

Bu çalışmada elastodinamik bir problemin çözümünde sınır eleman yöntemi kullanılacaktır. Örnek problem olarak sınırsız bir bölgede , iç basınca maruz silindirik bir boşluk seçilmiştir. Öncelikle elastodinamikte eksenel simetrisi olan düzlem şekil değiştirme problemleri için gerekli çekirdekler çıkartılacaktır. Sonra bu çekirdekler silindirik koordinatlarda elde edilecektir. Karşıtlık teoremi kullanılarak problem integral denkleme indirgenecek ve bu integral denklemin çözümü yapılacaktır.

2.ÜÇ BOYUTLU HALDE LİNEER ELASTODİNAMİK PROBLEMİN TEMEL FORMÜLASYONU

İlk olarak sonsuz, elastik, homojen ve izotrop bir ortamda $\underset{\sim}{y}$ noktasına $\underset{\sim}{e}_k$ baz vektörü doğrultusunda yüklenmiş g(t) şiddetinde tekil yükten dolayı bu ortamda meydana gelen gerilme ve yerdeğiştirme alanlarını bulalım. Böyle bir ortamda hareket denklemi

$$\mu \nabla^2 \underset{\sim}{u} + (\lambda + \mu)\nabla\nabla . \underset{\sim}{u} + \rho \underset{\sim}{f} = \rho \ddot{\underset{\sim}{u}} \tag{2.1}$$

şeklinde yazılır. Burada $\underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x},t)$ ortamda konumu $\underset{\sim}{x}$ ile belirtilen bir noktada t anındaki yerdeğiştirme vektörünü, λ ve μ Lamé sabitlerini, ρ ortamın yoğunluğunu, $\ddot{\underset{\sim}{u}}$ yerdeğiştirme vektörünün zamana göre ikinci türevini, $\underset{\sim}{f}$ ortamdaki kütle kuvvetini göstermektedir. Yukarıda tanımlanan problem için $\underset{\sim}{f}$ kütle kuvveti

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x},t) = \underset{\sim}{e}_k g(t)\delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}) \tag{2.2}$$

şeklindedir. Burada $\delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y})$ Dirac deltasını göstermektedir ve bir V hacminde

$$\int_V \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{x})\,\delta(\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y})\,dV(x) = \begin{cases} \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{y}) & \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \in V, \\ 0 & \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y} \notin V, \end{cases} \tag{2.3}$$

özelliğine sahiptir. Şimdi bir $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x},t)$ vektör fonksiyonuna Helmoltz ayrışımı uygulansın, $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x},t)$ ye bağlı olarak

$$\underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{1}{\left|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{\xi}\right|}\underset{\sim}{f}(\xi,t)dV_\xi \ , \qquad \underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\xi} \in \mathrm{V}, \tag{2.4}$$

şeklinde bir $\underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{x},t)$ fonksiyonu tanımlanırsa,bu fonksiyon

$$\nabla^2 \underset{\sim}{W} = \begin{cases} \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) & \underset{\sim}{x} \in V, \\ 0 & \underset{\sim}{x} \notin V, \end{cases} \tag{2.5}$$

denklemini sağlar. (2.2) ifadesi (2.4) de yerine konulup integral alınırsa $\underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{x},t)$ fonksiyonu aşağıdaki formu alır :

$$\underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{x},t) = -\frac{1}{4\pi}\underset{\sim}{e}_k \frac{g(t)}{\left|\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{y}\right|} \tag{2.6}$$

Burada r = $\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{y}$, $\underset{\sim}{x}(x_1,x_2,x_3)$ ve $\underset{\sim}{y}(y_1,y_2,y_3)$ noktaları arasındaki uzaklıktır ve

$$r = \left[(x_1-y_1)^2-(x_2-y_2)^2-(x_3-y_3)^2\right]^{1/2} \tag{2.7}$$

olarak yazılır. x_i (i=1,2,3), $\underset{\sim}{x}$ noktasının kartezyen koordinatlarını göstermektedir.

Şimdi (2.5) ifadesinde ∇^2 nin açılımı kullanılarak aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x},t) = \nabla^2 \underset{\sim}{W} = \nabla(\nabla.\underset{\sim}{W}) - \nabla\times(\nabla\times\underset{\sim}{W}) \tag{2.8}$$

(2.6), (2.8) de kullanılırsa

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x},t) = -\nabla\nabla\cdot\left(\frac{1}{4\pi r}\underset{\sim}{e}_k\, g(t)\right) + \nabla\times\nabla\times\left(\frac{1}{4\pi r}\underset{\sim}{e}_k\, g(t)\right) \tag{2.9}$$

bulunur.

Yerdeğiştirme fonksiyonu $\underset{\sim}{u}$, skaler bir φ fonksiyonunun gradyanı ve bir $\underset{\sim}{\psi}$ vektörünün rotasyoneli olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\underset{\sim}{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \underset{\sim}{\psi} \tag{2.10}$$

(2.10) daki $\underset{\sim}{\psi}$ vektörünün diverjansı sıfırdır:

$$\nabla \cdot \underset{\sim}{\psi} = 0 \tag{2.11}$$

(2.1) denkleminde (2.8), (2.9) ve (2.10) ifadeleri kullanılarak

$$\mu\left[\nabla\nabla\cdot\left(\nabla\varphi+\nabla\times\underset{\sim}{\psi}\right)-\nabla\times\nabla\times\left(\nabla\varphi+\nabla\times\underset{\sim}{\psi}\right)\right]+(\lambda+\mu)\left[\nabla\nabla\cdot\left(\nabla\varphi+\nabla\times\underset{\sim}{\psi}\right)\right]$$

$$+\rho\left[-\nabla\nabla\cdot\left(\frac{1}{4\pi r}\underset{\sim}{e_k}\,g(t)\right)+\nabla\times\nabla\times\left(\frac{1}{4\pi r}\underset{\sim}{e_k}\,g(t)\right)\right]=\rho\nabla\ddot{\varphi}+\rho\nabla\times\ddot{\underset{\sim}{\psi}} \tag{2.12}$$

bulunur. Her terim ρ' ya bölünerek sıfır olan terimler ayıklanır, gradyan ve rotasyonel alanlar ayrılırsa ,

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \tag{2.13}$$

$$c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \tag{2.14}$$

olmak üzere

$$c_1^2 \nabla^2 \varphi - \ddot{\varphi} = \nabla \cdot \left[\frac{1}{4\pi r} e_k g(t) \right] \tag{2.15}$$

$$c_2^2 \nabla^2 \underset{\sim}{\psi} - \ddot{\underset{\sim}{\psi}} = -\nabla \times \left[\frac{1}{4\pi r} e_k g(t) \right] \tag{2.16}$$

denklemleri elde edilir. Bu ifadelerdeki c_1 ve c_2 sabitleri ortamda yayılan iki farklı karakterde dalganın hızlarını gösterirler. Bu denklemleri çözmek için

$$\varphi = \nabla \cdot \underset{\sim}{\phi} \tag{2.17}$$

$$\underset{\sim}{\psi} = -\nabla \times \underset{\sim}{\theta} \tag{2.18}$$

dönüşümleri yapılırsa ve

$$\underset{\sim}{\phi} = F_1 \underset{\sim}{e_k} \tag{2.19}$$

$$\underset{\sim}{\theta} = F_2 \underset{\sim}{e_k} \tag{2.20}$$

denirse F_1 ve F_2 fonksiyonları aşağıdaki diferansiyel denklemleri sağlar:

$$\nabla^2 F_1 - \frac{1}{c_1^2} \ddot{F}_1 = \frac{1}{c_1^2} g(t) \frac{1}{4\pi r} \tag{2.21}$$

$$\nabla^2 F_2 - \frac{1}{c_2^2} \ddot{F}_2 = \frac{1}{c_2^2} g(t) \frac{1}{4\pi r} \tag{2.22}$$

(2.21) ve (2.22) denklemlerinin çözümleri

$$F_1 = \frac{1}{4\pi r} \int_0^{t-\frac{r}{c_1}} sg(t - \frac{r}{c_1} - s) ds - \frac{1}{4\pi r} \int_0^t sg(t-s) ds \tag{2.23}$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi r}\int_0^{t-\frac{r}{c_2}} sg(t-\frac{r}{c_2}-s)ds - \frac{1}{4\pi r}\int_0^{t} sg(t-s)ds \tag{2.24}$$

formundadır. Bu çözümler (2.19) ve (2.20) de kullanılarak

$$\underset{\sim}{\phi} = \left[\frac{1}{4\pi r}\int_0^{t-\frac{r}{c_1}} sg(t-\frac{r}{c_1}-s)ds - \frac{1}{4\pi r}\int_0^{t} sg(t-s)ds\right]\underset{\sim}{e_k} \tag{2.25}$$

$$\underset{\sim}{\theta} = \left[\frac{1}{4\pi r}\int_0^{t-\frac{r}{c_2}} sg(t-\frac{r}{c_2}-s)ds - \frac{1}{4\pi r}\int_0^{t} sg(t-s)ds\right]\underset{\sim}{e_k} \tag{2.26}$$

elde edilir. (2.25) ve (2.26), (2.17) ve (2.18) de kullanılarak

$$\varphi^k = \nabla\cdot\underset{\sim}{\phi} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{1}{4\pi r}\int_0^{t-\frac{r}{c_1}} sg(t-\frac{r}{c_1}-s)ds - \frac{1}{4\pi r}\int_0^{t} sg(t-s)ds\right], \qquad \text{k=(1,2,3)} \tag{2.27}$$

$$\underset{\sim}{\psi}^k = -\nabla\times\underset{\sim}{\theta} \rightarrow \psi_i^k = -\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{1}{4\pi r}\int_0^{t-\frac{r}{c_2}} sg(t-\frac{r}{c_2}-s)ds - \frac{1}{4\pi r}\int_0^{t} sg(t-s)ds\right] \tag{2.28}$$

ifadeleri bulunur. k (k=1,2,3) indisi $\underset{\sim}{e_k}$ baz vektörünün indisinden kaynaklanmaktadır. (2.10) ifadesinde (2.17) ve (2.18) eşitlikleri yerlerine konularak

$$\underset{\sim}{u}^k = \nabla\nabla\cdot\underset{\sim}{\phi} - \nabla\times\nabla\times\underset{\sim}{\theta} \tag{2.29}$$

$$\underset{\sim}{u}^k = \nabla\nabla\cdot\left(\underset{\sim}{\phi}-\underset{\sim}{\theta}\right)\underset{\sim}{\phi} - \nabla^2\underset{\sim}{\theta} \tag{2.30}$$

elde edilir. (2.25) ve (2.26), (2.30) denklemine yerleştirilir

$$\underset{\sim}{u}^k = \nabla\nabla\cdot\left\{\underset{\sim}{e}_k \frac{1}{4\pi r}\left[\int_0^{t-\frac{r}{c_1}} sg(t-\frac{r}{c_1}-s)ds - \int_0^{t-\frac{r}{c_2}} sg(t-\frac{r}{c_2}-s)ds\right]\right\}$$

$$+\nabla^2\left\{\left[\frac{1}{4\pi r}\int_0^{t-\frac{r}{c_2}} sg(t-\frac{r}{c_2}-s)ds - \frac{1}{4\pi r}\int_0^{t} sg(t-s)ds\right]\underset{\sim}{e}_k\right\} \qquad (2.31)$$

ve bu ifade bileşen formunda yazılırsa

$$4\pi u_i^k = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{1}{r}\left[\int_0^{t-\frac{r}{c_1}} sg(t-\frac{r}{c_1}-s)ds - \int_0^{t-\frac{r}{c_2}} sg(t-\frac{r}{c_2}-s)ds\right]\right\}$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m}\left[\frac{1}{r}\int_0^{t-\frac{r}{c_2}} sg(t-\frac{r}{c_2}-s)ds - \frac{1}{r}\int_0^{t} sg(t-s)ds\right]\delta_{ik} \qquad (2.32)$$

bulunur. Burada δ_{ik} Kronecker deltasıdır ve

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

özelliğine sahiptir.

$$\text{F(r,t)}= \left[\int_0^{t-\frac{r}{c_1}} sg(t-\frac{r}{c_1}-s)ds - \int_0^{t-\frac{r}{c_2}} sg(t-\frac{r}{c_2}-s)ds\right] \qquad (2.33)$$

$$K(r,t) = \left[\frac{1}{r}\int_0^{t-\frac{r}{c_2}} sg(t-\frac{r}{c_2}-s)ds - \frac{1}{r}\int_0^{t} sg(t-s)ds\right] \qquad (2.34)$$

kısaltmaları kullanılırsa,

$$4\pi u_i^k = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{1}{r}F(r,t)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_m}\{K(r,t)\}\delta_{ik} \tag{2.35}$$

yazılır. Bu fonksiyonların r' ye göre türevleri, g(t) fonksiyonunun argümanı sıfır olduğu zaman sıfır olduğu düşünülerek

$$\frac{\partial F(r,t)}{\partial r} = -\frac{1}{c_1}\int_0^{t-\frac{r}{c_1}} g(t-\frac{r}{c_1}-s)ds + \frac{1}{c_2}\int_0^{t-\frac{r}{c_2}} g(t-\frac{r}{c_2}-s)ds\,, \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial^2 F(r,t)}{\partial r^2} = \frac{1}{c_1^2}g(t-\frac{r}{c_1}) - \frac{1}{c_2^2}g(t-\frac{r}{c_2})\,, \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial K(r,t)}{\partial r} = -\frac{1}{c_2}\int_0^{t-\frac{r}{c_2}} g(t-\frac{r}{c_2}-s)ds - \frac{1}{r^2}\int_0^{t-r/c_2} sg(t-\frac{r}{c_2}-s)ds + \frac{1}{r^2}\int_0^{t} sg(t-s)ds\,, \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial^2 K(r,t)}{\partial r^2} = \frac{2}{r^3}\int_0^{t-r/c_2} sg(t-\frac{r}{c_2}-s)ds + \frac{1}{r^2c_2}\int_0^{t-r/c_2} g(t-\frac{r}{c_2}-s)ds\,,$$

$$+\frac{1}{rc_2^2}g(t-\frac{r}{c_2}) - \frac{2}{r^3}\int_0^t sg(t-s)ds \tag{2.39}$$

şeklinde hesaplanır. Diğer gerekli işlemler

$$x_i' = x_i - y_i\,,$$

tanımı ile aşağıda yapılmıştır:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}F(r,t)\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial x_i} + F\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i}\,, \tag{2.41}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i'}{r}, \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\delta_{ik}}{r^3} + \frac{3x_i' x_k'}{r^5}, \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m}(K(r,t)) = \frac{\partial^2 K}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\left(\frac{\partial K}{\partial r}\right) \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_m}(K(r,t)) = \frac{1}{r}\frac{1}{c_2^2} g(t - \frac{r}{c_2}) \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}(\frac{1}{r}F(r,t)) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right)\left(F - \frac{\partial F}{\partial r} r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_k}\right), \tag{2.46}$$

$$F - \frac{\partial F}{\partial r} r = \int_0^{t-\frac{r}{c_1}} g(t - \frac{r}{c_1} - s)(s + \frac{r}{c_1}) ds - \int_0^{t-\frac{r}{c_2}} g(t - \frac{r}{c_2} - s)(s + \frac{r}{c_2}) ds, \tag{2.47}$$

(2.47) de $u = s + \frac{r}{c_1}$ dönüşümü uygulanarak,

$$F - \frac{\partial F}{\partial r} r = \int_{r/c_1}^{r/c_2} s g(t - s) ds \tag{2.48}$$

bulunur. (2.48), (2.46), (2.45), (2.43), (2.42) ve (2.37) ifadeleri (2.35) denklemine yerleştirilip düzenlenirse yerdeğiştirme ifadesi

$$u_i^k = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{\delta_{ik}}{r^3} + \frac{3x_i' x_k'}{r^5}\right]\int_{r/c_1}^{r/c_2} s g(t - s) ds + \frac{1}{4\pi}\frac{x_i' x_k'}{r^3}\left[\frac{1}{c_1^2} g(t - \frac{r}{c_1}) - \frac{1}{c_2^2} g(t - \frac{r}{c_2})\right]$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\delta_{ik}\left[\frac{1}{r}\frac{1}{c_2^2} g(t - \frac{r}{c_2})\right] \tag{2.49}$$

şeklinde elde edilir. Böylece sonsuz bir ortamda $\underset{\sim}{y}(y_1, y_2, y_3)$ noktasına $\underset{\sim}{k}$ (k=1,2,3) doğrultusunda etkiyen g(t) şiddetindeki tekil yükten dolayı $\underset{\sim}{x}(x_1, x_2, x_3)$ noktasında meydana gelen yerdeğiştirme vektörünün i (i=1,2,3) bileşenini gösteren $u_i^k(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}, g(t))$ ifadesi bulunmuş olur.

Şimdi aynı problemde gerilme ifadeleri hesaplanacaktır. ε_{ij}^k şekil değiştirme tansörü lineer elastik malzemede aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\varepsilon_{ij}^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i}\right) \tag{2.50}$$

k indisi yine $\underset{\sim}{e}_k$ nın indisinden kaynaklanmaktadır. Hesabı kolaylaştırmak için

$$f_1 = \int_{r/c_1}^{r/c_2} sg(t-s)ds \tag{2.51}$$

$$f_2 = \left[\frac{1}{c_1^2} g(t-\frac{r}{c_1}) - \frac{1}{c_2^2} g(t-\frac{r}{c_2})\right] \tag{2.52}$$

$$f_3 = \frac{1}{c_2^2} g(t-\frac{r}{c_2}) \tag{2.53}$$

kısaltmaları yapılırsa (2.50) deki gerekli türevler

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_j} = \frac{\partial f_1}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{\partial f_1}{\partial r}\frac{x_j'}{r} \tag{2.54}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = \left[\frac{r}{c_2^2} g(t-\frac{r}{c_2}) - \frac{r}{c_1^2} g(t-\frac{r}{c_1})\right] = -f_2 \tag{2.55}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_j} = \frac{\partial f_2}{\partial r}\frac{x_j'}{r} \tag{2.56}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial r} = \left[-\frac{1}{c_1^3} \dot{g}(t - \frac{r}{c_1}) + \frac{1}{c_2^3} \dot{g}(t - \frac{r}{c_2}) \right] \tag{2.57}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_j} = \frac{\partial f_3}{\partial r} \frac{x_j'}{r} \tag{5.58}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial r} = -\frac{1}{c_2^3} \dot{g}(t - \frac{r}{c_2}) \tag{2.59}$$

şeklinde hesaplanarak

$$\frac{\partial u_l^k}{\partial x_l} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left(-\frac{x_k'}{r^3} \right) \left[\frac{1}{c_1^2} g(t - \frac{r}{c_1}) \right] + \left(-\frac{x_k'}{r^2} \right) \left[\frac{1}{c_1^3} \dot{g}(t - \frac{r}{c_1}) \right] \right\} \tag{2.60}$$

$$\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \left[\frac{3(\delta_{ik} x_j' + \delta_{ij} x_k' + \delta_{kj} x_i')}{r^5} - \frac{15 x_i' x_j' x_k'}{r^7} \right] \left[\int_{r/c_1}^{r/c_2} s g(t-s) ds \right] \right.$$

$$+ \left[\frac{\delta_{ik} x_j' + \delta_{kj} x_i' + \delta_{ij} x_k'}{r^3} - \frac{6 x_i' x_j' x_k'}{r^5} \right] \left[\frac{1}{c_1^2} g(t - \frac{r}{c_1}) - \frac{1}{c_2^2} g(t - \frac{r}{c_2}) \right]$$

$$+ \left[\frac{x_i' x_j' x_k'}{r^4} \right] \left[-\frac{1}{c_1^3} \dot{g}(t - \frac{r}{c_1}) + \frac{1}{c_2^3} \dot{g}(t - \frac{r}{c_2}) \right]$$

$$\left. + \left[\frac{\delta_{ik} x_j'}{r^2} \right] \left[-\frac{1}{c_2^3} \dot{g}(t - \frac{r}{c_2}) \right] + \left[-\frac{\delta_{ik} x_j'}{r^3} \right] \left[\frac{1}{c_2^2} g(t - \frac{r}{c_2}) \right] \right\} \tag{2.61}$$

bulunur. Şimdi gerilme tansörü hesaplanacaktır. Lineer elastik malzemede gerilme-şekil değiştirme bağıntıları aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$t_{ij}^k = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ll}^k + 2\mu \varepsilon_{ij}^k \tag{2.62}$$

(2.50), (2.60) ve (2.61), (2.62) de kullanılarak gerilme ifadesi

$$t_{ij}^{k} = \lambda \frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{1}{c_1^2} g(t-\frac{r}{c_1})\right)\left(-\frac{\delta_{ij}x_k'}{r^3}\right)+\left(-\frac{\delta_{ij}x_k'}{r^2}\right)\left(\frac{1}{c_1^3} g(t-\frac{r}{c_1})\right)\right]$$

$$+\mu\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\frac{6\left(\delta_{ij}x_k'+\delta_{jk}x_i'+\delta_{ik}x_j'\right)}{r^5}-\frac{30x_i'x_j'x_k'}{r^7}\right]\left(\int_{r/c_1}^{r/c_2} sg(t-s)ds\right)\right.$$

$$+\left[\frac{2\left(\delta_{ij}x_k'+\delta_{jk}x_i'+\delta_{ik}x_j'\right)}{r^3}-\frac{12x_i'x_j'x_k'}{r^5}\right]\left[\frac{1}{c_1^2} g(t-\frac{r}{c_1})-\frac{1}{c_2^2} g(t-\frac{r}{c_2})\right]$$

$$+\left(-2\frac{x_i'x_j'x_k'}{r^4}\right)\left[\frac{1}{c_1^3} g(t-\frac{r}{c_1})-\frac{1}{c_2^3} g(t-\frac{r}{c_2})\right]+\left[-\frac{\delta_{ik}x_j'+\delta_{jk}x_i'}{r^2}\right]\left[\frac{1}{c_2^3} g(t-\frac{r}{c_2})\right]$$

$$\left.+\left[-\frac{\delta_{ik}x_j'+\delta_{jk}x_i'}{r^3}\right]\left[\frac{1}{c_2^2} g(t-\frac{r}{c_2})\right]\right\} \qquad (2.63)$$

olarak bulunur. Böylece sonsuz bir ortamda $\underset{\sim}{y}(y_1, y_2, y_3)$ noktasına $\underset{\sim}{k}$ (k=1,2,3) doğrultusunda etkiyen g(t) şiddetindeki tekil yükten dolayı $\underset{\sim}{x}(x_1, x_2, x_3)$ noktasında meydana gelen gerilme tansörünün ij (i=1,2,3 ; j=1,2,3) bileşenini gösteren $t_{ij}^{k}(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}, g(t))$ ifadesi bulunmuş olur. (2.49) ve (2.63) ifadeleri Achenbach [1] tarafından bulunmuştur.

3.DÜZLEM HALDE DÖNEL SİMETRİK ELASTODİNAMİK FORMÜLASYONU

Bölüm 2' de üç boyutlu halde elastodinamik problemlerinin çözümleri için gerekli çekirdekler kartezyen koordinatlarda elde edilmişti. Bu bölümde ise düzlem halde dönel simetrik problemler için gerekli çekirdekler silindirik koordinatlarda elde edilecektir.

Bölüm 2 de $\underset{\sim}{y}(y_1, y_2, y_3)$ noktasına k (k=1,2,3) doğrultusunda etkiyen g(t) şiddetindeki kütle kuvvetinden dolayı $\underset{\sim}{x}(x_1, x_2, x_3)$ noktasında meydana gelen yerdeğiştirme vektörü $\underset{\sim}{u}^k(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}, g(t))$ ve gerilme tansörü $\underset{\sim}{t}^k(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{y}, g(t))$ bulunmuş ve ifadeleri (2.49) ve (2.63) de verilmişti. Düzlem sınır değer problemlerinde alan büyüklükleri x_3 koordinatından bağımsızdır. Bu tip problemleri sınır eleman metodu ile çözerken gereken çekirdekleri bulmak için aşağıda anlatılan yol izlenecektir. Kütle kuvveti $g(t)\underset{\sim}{e}_k$ yalnızca $\underset{\sim}{y}(y_1, y_2, y_3)$ noktasına değil sadece y_3 ün değiştiği bir doğru boyunca yüklenecektir. Sonuçta düzlem halde $\underset{\sim}{x}(x_1, x_2, x_3)$ noktasında meydana gelen yerdeğiştirme ve gerilme alanları, (2.49) ve (2.63) ün y_3 üzerinde, $[-\infty, +\infty]$ aralığında integre edilmesi ile hesaplanabilir. Ancak bu yol uzun ve hesaplar karışık olduğu için burada kütle kuvvetinin tanımı değiştirilerek 2. bölümde yapılan işlemler tekrarlanacak ve gerekli çekirdekler bu şekilde bulunacaktır.

İlk olarak kütle kuvvetinin şiddetini genel bir fonksiyon olan g(t) yerine $\delta(t)$ olarak seçelim. $\delta(t)$ nin özellikleri (2.3) de tanımlanmıştı. (2.25), (2.26) de tanımlanan $\underset{\sim}{\phi}$ ve $\underset{\sim}{\theta}$ ifadelerinde g(t) yerine $\delta(t)$ yazılırsa

$$\underset{\sim}{\phi} = \left[\frac{1}{4\pi r} \left(\int_0^{t-\frac{r}{c_1}} s\delta(t-\frac{r}{c_1}-s)ds - \int_0^{t} s\delta(t-s)ds \right) \right] \underset{\sim}{e_k} \tag{3.1}$$

$$\underset{\sim}{\theta} = \left[\frac{1}{4\pi r} \left(\int_0^{t-\frac{r}{c_2}} s\delta(t-\frac{r}{c_2}-s)ds - \int_0^{t} s\delta(t-s)ds \right) \right] \underset{\sim}{e_k} \tag{3.2}$$

bulunur. (3.2) ve (3.1) ifadelerindeki ikinci terim (2.29) da yerine konulduğunda sonuç sıfır olduğu için bundan sonraki hesaplara katılmayacaktır.

$z = t - \frac{r}{c_1} - s$ dönüşümü yapılırsa

(3.1) ve (3.2) ifadeleri aşağıdaki gibi yazılırlar:

$$\underset{\sim}{\phi} = \left[\frac{1}{4\pi r} \left(\int_0^{t-\frac{r}{c_1}} (t-\frac{r}{c_1}-z)\delta(z)dz \right) \right] \underset{\sim}{e_k} \tag{3.3}$$

$$\underset{\sim}{\theta} = \left[\frac{1}{4\pi r} \left(\int_0^{t-\frac{r}{c_2}} \delta(t-\frac{r}{c_2}-z)\delta(z)dz \right) \right] \underset{\sim}{e_k} \tag{3.4}$$

(3.3) ve (3.4) ifadelerindeki integraller birim adım fonksiyonu kullanılarak $[-\infty,+\infty]$ aralığına taşınırlarsa

$$\underset{\sim}{\phi} = \left[\left(\frac{1}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \left(H(t-\frac{r}{c_1}-z) - H(-z) \right) (t-\frac{r}{c_1}-z)\delta(z)dz \right] \underset{\sim}{e_k} \right. \tag{3.5}$$

$$\underset{\sim}{\theta} = \left[\frac{1}{4\pi r} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \left(H(t-\frac{r}{c_2}-z) - H(-z) \right) (t-\frac{r}{c_2}-z)\delta(z)dz \right) \right] \underset{\sim}{e_k} \tag{3.6}$$

olacaktır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a) \qquad a \in [-\infty, +\infty] \tag{3.7}$$

özelliği kullanılarak (3.5) ve (3.6) düzenlenirse

$$\underset{\sim}{\phi} = \left[H(t - \frac{r}{c_1})(t - \frac{r}{c_1}) \right] \frac{1}{4\pi r} \underset{\sim}{e_k} \tag{3.8}$$

$$\underset{\sim}{\theta} = \left[H(t - \frac{r}{c_2})(t - \frac{r}{c_2}) \right] \frac{1}{4\pi r} \underset{\sim}{e_k} \tag{3.9}$$

bulunur [2,3]. Şimdi düzlem halde $\underset{\sim}{\phi}^{D^k}$ ve $\underset{\sim}{\theta}^{D^k}$ ifadelerini elde etmek için (3.8) ve (3.9) $y_3 = -\infty,\ y_3 = \infty$ arasında integre edileceklerdir.

$$\underset{\sim}{\phi}^{D^k} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[H(t - \frac{r}{c_1})(t - \frac{r}{c_1}) \right] \frac{1}{4\pi r} \right\} dy_3 \underset{\sim}{e_k} \tag{3.10}$$

$$\underset{\sim}{\theta}^{D^k} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[H(t - \frac{r}{c_2})(t - \frac{r}{c_2}) \right] \frac{1}{4\pi r} \right\} dy_3 \underset{\sim}{e_k} \tag{3.11}$$

Ancak bu ifadeler tam anlamı ile doğru değildir. y_3 ün üzerinde bulunduğu doğru üzerindeki herhangi bir $\underset{\sim}{y}(y_1, y_2, y_3)$ noktasından $\underset{\sim}{x}(x_1, x_2, x_3)$ noktasına bir t anında P dalgasının gelebilmesi için $t \geq \frac{r}{c_1}$ ve S dalgasının gelebilmesi için $t \geq \frac{r}{c_2}$ olmalıdır. Burada r'nin $\underset{\sim}{x}$ ve $\underset{\sim}{y}$ noktaları arasındaki uzaklığı gösterdiği anımsanmalıdır. c_1 dalga hızıyla gelen dalga (P dalgası), c_2 dalga hızıyla gelen dalgadan (S dalgası) daha önce $\underset{\sim}{x}$ noktasına ulaşır.

$$\rho^2 = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right] \tag{3.12}$$

tanımı yapılırsa

$$r^2 = \rho^2 + (x_3 - y_3)^2 \tag{3.13}$$

$$c_1^2 t^2 = \rho^2 + (x_3 - y_3)^2$$

olacaktır. Buradan (3.10) ifadesindeki integral sınırları

$$(y_3)_1 = x_3 - \sqrt{\left(c_1^2 t^2 - \rho^2\right)},\ (y_3)_2 = x_3 + \sqrt{\left(c_1^2 t^2 - \rho^2\right)}$$

olarak belirlenir. Aynı işlemler (3.11) için de tekrarlanırsa (3.10) ve (3.11)

$$\underset{\sim}{\phi}^{D^k} = \left\{ \int_{x_3 - \sqrt{(c_1^2 t^2 - \rho^2)}}^{x_3 + \sqrt{(c_1^2 t^2 - \rho^2)}} \frac{1}{4\pi r} \left[H(t - \frac{r}{c_1})(t - \frac{r}{c_1}) dy_3 \right] \right\} \underset{\sim}{e_k} \tag{3.14}$$

$$\underset{\sim}{\theta}^{D^k} = \left\{ \int_{x_3 - \sqrt{(c_2^2 t^2 - \rho^2)}}^{x_3 + \sqrt{(c_2^2 t^2 - \rho^2)}} \frac{1}{4\pi r} \left[H(t - \frac{r}{c_2})(t - \frac{r}{c_2}) dy_3 \right] \right\} \underset{\sim}{e_k} \tag{3.15}$$

formlarını alırlar. Bu ifadeleri hesaplamak için gerekli ara işlemler aşağıda yapılmıştır:

$$\bar{I} = \int_{x_3 - \sqrt{(c_i^2 t^2 - \rho^2)}}^{x_3 + \sqrt{(c_i^2 t^2 - \rho^2)}} \frac{1}{4\pi r} \left[H(t - \frac{r}{c_i})(t - \frac{r}{c_i}) dy_3 \right] \qquad \text{(i=1,2)} \tag{3.16}$$

kısaltıcı tanımı yapılırsa

$$x_3 - y_3 = \xi \tag{3.17}$$

$$dy_3 = -d\xi$$

yeni integral sınırları ξ_1 ve ξ_2

$$\xi_1 = \sqrt{\left(c_i^2 t^2 - \rho^2\right)}$$

$$\xi_2 = -\sqrt{\left(c_i^2 t^2 - \rho^2\right)}$$

alınarak

$$\bar{I} = \int_{\sqrt{(c_i^2 t^2 - \rho^2)}}^{-\sqrt{(c_i^2 t^2 - \rho^2)}} -\frac{1}{4\pi r}\left[H(t-\frac{r}{c_i})(t-\frac{r}{c_i}) \right] d\xi \tag{3.18}$$

bulunur. Bu integral iki ayrı integralin toplamı olarak aşağıdaki gibi yazılır:

$$\bar{I} = \int_{0}^{\sqrt{(c_i^2 t^2 - \rho^2)}} \frac{1}{4\pi r}\left[H(t-\frac{r}{c_i})(t-\frac{r}{c_i}) \right] d\xi + \int_{0}^{-\sqrt{(c_i^2 t^2 - \rho^2)}} -\frac{1}{4\pi r}\left[H(t-\frac{r}{c_i})(t-\frac{r}{c_i}) \right] d\xi \tag{3.19}$$

(3.13) ve (3.17) kullanılırsa

$$r^2 = \rho^2 + \xi^2$$

bulunur ve yeni bir

$$\lambda = t - \frac{r}{c_i} \tag{3.20}$$

değişkeni tanımlanırsa

$$d\lambda = -\frac{1}{c_i}\frac{\xi}{\sqrt{(\rho^2 + \xi^2)}} d\xi$$

$$d\xi = -\frac{c_i \sqrt{(\rho^2 + \xi^2)}}{\xi} d\lambda \tag{3.21}$$

$$\xi = \sqrt{(c_i^2 (t-\lambda)^2 - \rho^2)}$$

yeni integral sınırları

$$\lambda_1 = t - \frac{\rho}{c_i},\ \lambda_2 = 0$$

olur. (3.19) ifadesindeki $\bar{I}$ integrali

$$\bar{I} = 2\int_{o}^{t-\frac{\rho}{c_i}} \frac{1}{4\pi} H(\lambda)\left[\frac{c_i t}{\sqrt{\left(c_i^2(t-\lambda)^2-\rho^2\right)}} - \frac{c_i\,(t-\lambda)}{\sqrt{\left(c_i^2(t-\lambda)^2-\rho^2\right)}}\right] d\lambda \tag{3.22}$$

halini alır.

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = f'(\lambda) = \left[\frac{c_i t}{\sqrt{\left(c_i^2(t-\lambda)^2-\rho^2\right)}} - \frac{c_i\,(t-\lambda)}{\sqrt{\left(c_i^2(t-\lambda)^2-\rho^2\right)}}\right] \tag{3.23}$$

kısaltması yapılırsa

$$f(\lambda) = \int\left[\frac{c_i t}{\sqrt{\left(c_i^2(t-\lambda)^2-\rho^2\right)}} - \frac{c_i\,(t-\lambda)}{\sqrt{\left(c_i^2(t-\lambda)^2-\rho^2\right)}}\right] d\lambda$$

$$f(\lambda) = -t\ln\left(\frac{c_i\,(t-\lambda)+\sqrt{\left(c_i^2(t-\lambda)^2-\rho^2\right)}}{\rho}\right) + \frac{1}{c_i}\sqrt{\left(c_i^2(t-\lambda)^2-\rho^2\right)} \tag{3.24}$$

bulunur. Şimdi $\bar{I}$ integraline kısmi integrasyon uyguluyalım:

$$\bar{I} = \frac{2}{4\pi}\int_{0}^{t-\frac{\rho}{c_i}} H(\lambda)\,f'(\lambda)d\lambda = \frac{2}{4\pi}\left[H(\lambda)\,f(\lambda)\Big|_{o}^{t-\frac{\rho}{c_i}} - \int_{0}^{t-\frac{\rho}{c_i}} \delta(\lambda)\,f(\lambda)d\lambda\right] \tag{3.25}$$

(3.25) ifadesinde

$$X = \int_{0}^{t-\frac{\rho}{c_i}} \delta(\lambda)\,f(\lambda)d\lambda \tag{3.26}$$

denirse ve integral sınırları $[-\infty,+\infty]$ aralığına taşınırsa

$$X = \int_{-\infty}^{\infty}\left[H(t-\frac{\rho}{c_i}-\lambda) - H(-\lambda)\right] f(\lambda)\delta(\lambda)d\lambda \tag{3.27}$$

(3.7) eşitliği de kullanılarak

$$X = \left[H(t - \frac{\rho}{c_i}) f(0) \right] \tag{3.28}$$

bulunur. (3.24) de $\lambda = 0$ yazılırsa (3.28)

$$X = \left[H(t - \frac{\rho}{c_i}) \left\{ \frac{-t \ln\left(c_i t + \sqrt{\left(c_i^2 t^2 - \rho^2\right)}\right)}{\rho} + \frac{1}{c_i} \sqrt{\left(c_i^2 t^2 - \rho^2\right)} \right\} \right] \tag{3.29}$$

şeklini alır.

(3.25) de (3.29) kullanılarak

$$\bar{I} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[H(0) f(0) - \delta(t - \frac{\rho}{c_i}) f(t - \frac{\rho}{c_i}) \right] \right.$$

$$\left. - H(t - \frac{\rho}{c_i}) \left\{ \frac{-t \ln\left(c_i t + \sqrt{\left(c_i^2 t^2 - \rho^2\right)}\right)}{\rho} + \frac{1}{c_i} \sqrt{\left(c_i^2 t^2 - \rho^2\right)} \right\} \right\} \tag{3.30}$$

ve $\delta(t)$ fonksiyonunun argümanı sıfır olduğu zaman sıfır olduğu düşünülerek

$$\bar{I} = -\frac{1}{2\pi} H(t - \frac{\rho}{c_i}) \left\{ \frac{-t \ln\left(c_i t + \sqrt{\left(c_i^2 t^2 - \rho^2\right)}\right)}{\rho} + \frac{1}{c_i} \sqrt{\left(c_i^2 t^2 - \rho^2\right)} \right\} \tag{3.31}$$

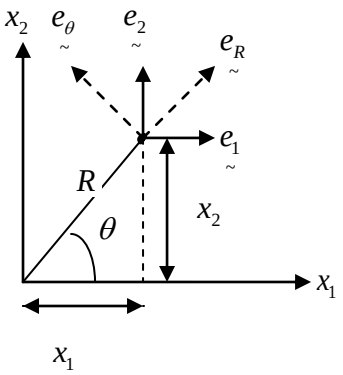
bulunur. (3.16) ve (3.31), (3.14) ve (3.15) de kullanılarak düzlem halde $\underset{\sim}{\phi}^{D^k}$ ve $\underset{\sim}{\theta}^{D^k}$ ifadeleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\underset{\sim}{\phi}^{D^k} = \frac{1}{2\pi} \left\{ H(t - \frac{\rho}{c_1}) \left\{ \frac{t \ln\left(c_1 t + \sqrt{\left(c_1^2 t^2 - \rho^2\right)}\right)}{\rho} - \frac{1}{c_1} \sqrt{\left(c_1^2 t^2 - \rho^2\right)} \right\} \underset{\sim}{e}_k \right. \tag{3.32}$$

$$\underset{\sim}{\theta}^{D^k} = \frac{1}{2\pi}\left\{ H(t-\frac{\rho}{c_2})\left\{ \frac{t\ln\left(c_2 t + \sqrt{\left(c_2^2 t^2 - \rho^2\right)}\right)}{\rho} - \frac{1}{c_2}\sqrt{\left(c_2^2 t^2 - \rho^2\right)} \right\} \right\} \underset{\sim}{e}_k \qquad (3.33)$$

Böylece sonsuz bir ortamda $\underset{\sim}{y}(y_1, y_2)$ noktasına $\underset{\sim}{e}_k$ (k=1,2) kartezyen baz vektörü doğrultusunda etkiyen $\delta(t)$ şiddetindeki kütle kuvvetinden dolayı bir t anında $\underset{\sim}{x}(x_1, x_2)$ noktasında meydana gelen yerdeğiştirme ve gerilme alanlarını bulmak için gerekli $\underset{\sim}{\phi}^{D^k}$ ve $\underset{\sim}{\theta}^{D^k}$ ifadeleri düzlem halde kartezyen koordinatlarda elde edilmiş olur. $\underset{\sim}{\phi}^{D^k}$ ve $\underset{\sim}{\theta}^{D^k}$ ifadeleri (2.30) de yerlerine konup gerekli türevler alınarak bölüm 2 de yapılan işlemler tekrarlanırsa düzlem halde temel çekirdekler elde edilebilir. Ama burada bu çekirdekler bulunmayacak, düzlem halde dönel simetrik problemlerin çözümü için gerekli çekirdekler silindirik koordinatlarda elde edilecektir.

İlk olarak silindirik koordinatlar tanımlanacaktır.



Şekil 3.1 Silindirik koordinatlarda baz vektörleri

Burada $\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2$ kartezyen koordinatlarda baz vektörlerini, $\underset{\sim}{e}_R$, $\underset{\sim}{e}_\theta$ silindirik koordinatlardaki baz vektörlerini göstermektedirler. Kartezyen koordinatlar (x_1, x_2, x_3) silindirik koordinatlara (R, θ, z) aşağıdaki gibi bağlanırlar:

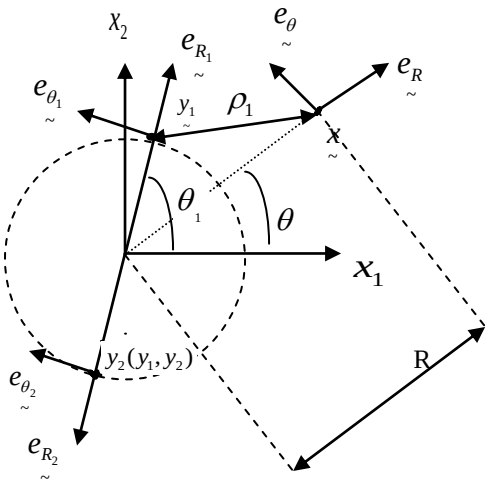
$$x_1 = R\cos\theta \tag{3.34}$$

$$x_2 = R\sin\theta \tag{3.35}$$

$$x_3 = z \tag{3.36}$$

Şimdi $\underset{\sim}{y}_1(R_1,\theta_1)$ noktasına $\underset{\sim}{e}_{R_1}$ doğrultusunda ve $\delta(t)$ şiddetinde kütle kuvveti yüklendiğinde $\underset{\sim}{x}(R,\theta)$ noktasına ait $\underset{\sim}{\phi}^{R_1}$ ve $\underset{\sim}{\theta}^{R_1}$ ifadelerini silindirik koordinatlarda bulalım.

Şekil 2 de $\underset{\sim}{x}(x_1,x_2)$ V hacmi içerisindeki herhangi bir noktanın, $\underset{\sim}{y}_1(y_1,y_2)$ sabit bir noktanın konum vektörlerini, $\underset{\sim}{e}_R, \underset{\sim}{e}_\theta$ ve $\underset{\sim}{e}_{R_1}, \underset{\sim}{e}_{\theta_1}$ ise sırası ile silindirik koordinatlarda bu noktalardaki baz vektörlerini göstermektedir.



Şekil 3.2 Kütle kuvvetinin yükleme noktaları

$\underset{\sim}{y}$ ve $\underset{\sim}{x}$ noktaları arasındaki uzaklığın ρ ile gösterildiği (3.12) ifadesinden anımsanırsa, $\underset{\sim}{y}_1(R_1,\theta_1)$ ve $\underset{\sim}{x}(R,\theta)$ noktaları arasındaki uzaklık ρ_1

$$\rho_1^{\,2} = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2\right]$$

$$\rho_1 = \sqrt{\left(R_1^2 + R^2 - 2RR_1\cos(\theta - \theta_1)\right)} \tag{3.37}$$

olarak bulunur.

Bir $\underset{\sim}{y_1}(R_1,\theta_1)$ noktasında $\underset{\sim}{e_{R_1}}$ baz vektörü, kartezyen baz vektörleri $\underset{\sim}{e_1},\underset{\sim}{e_2}$ ye

$$\underset{\sim}{e_{R_1}} = \underset{\sim}{e_1}\cos\theta_1 + \underset{\sim}{e_2}\sin\theta_1 \tag{3.38}$$

şeklinde bağlanır.

$\underset{\sim}{e_{R_1}}$ de sabit bir vektör olduğundan kartezyen koordinatlar için bulunan (3.32) ve (3.33) ifadelerinde $\underset{\sim}{e_k}$ yerine $\underset{\sim}{e_{R_1}}$ yazılarak $\underset{\sim}{y_1}(r_1,\theta_1)$ noktasına $\underset{\sim}{e_{R_1}}$ doğrultusunda ve $\delta(t)$ şiddetinde kütle kuvveti yüklendiğinde $\underset{\sim}{\phi}^{R_1}$ ve $\underset{\sim}{\theta}^{R_1}$ ifadeleri

$$\underset{\sim}{\phi}^{R_1} = \frac{1}{2\pi}\left\{H(t-\frac{\rho_1}{c_1})\left\{\frac{t\ln\left(c_1t + \sqrt{\left(c_1^2t^2 - \rho_1^{\,2}\right)}\right)}{\rho_1} - \frac{1}{c_1}\sqrt{\left(c_1^2t^2 - \rho_1^{\,2}\right)}\right\}\underset{\sim}{e_{R_1}}\right. \tag{3.39}$$

$$\underset{\sim}{\theta}^{R_1} = \frac{1}{2\pi}\left\{H(t-\frac{\rho_1}{c_2})\left\{\frac{t\ln\left(c_2t + \sqrt{\left(c_2^2t^2 - \rho_1^{\,2}\right)}\right)}{\rho_1} - \frac{1}{c_2}\sqrt{\left(c_2^2t^2 - \rho_1^{\,2}\right)}\right\}\right\}\underset{\sim}{e_{R_1}} \tag{3.40}$$

bulunur.

Şimdi ikinci bir kuvvet de Şekil 2 de gösterilen $\underset{\sim}{y_2}(R_1,\pi+\theta_1)$ noktasına $\underset{\sim}{e_{R_2}}$ doğrultusunda ve $\delta(t)$ şiddetinde yüklensin. (3.38) ifadesinden $\underset{\sim}{y_2}(R_1,\pi+\theta_1)$ noktasında baz vektörü

$$\underset{\sim}{e}_{R_2} = \underset{\sim}{e}_1 \cos(\pi + \theta_1) + \underset{\sim}{e}_2 \sin(\pi + \theta_1) \tag{3.41}$$

$$\underset{\sim}{e}_{R_2} = -\underset{\sim}{e}_{R_1} \tag{3.42}$$

olur. $\underset{\sim}{y}_2(R_1, \pi + \theta_1)$ ve $\underset{\sim}{x}(R, \theta)$ noktaları arasındaki uzaklığa ρ_2 denirse (3.12), (3.34) ve (3.35) kullanılarak

$$\rho_2 = \sqrt{\left(R_1^2 + R^2 + 2RR_1 \cos(\theta - \theta_1)\right)} \tag{3.43}$$

bulunur. (3.39) ve (3.40) ifadelerinde $\underset{\sim}{e}_{R_1}$ yerine $\underset{\sim}{e}_{R_2}$, ρ_1 yerine ρ_2 yazarak $\underset{\sim}{\phi}^{R_2}$ ve $\underset{\sim}{\theta}^{R_2}$ ifadeleri

$$\underset{\sim}{\phi}^{R_2} = \frac{1}{2\pi}\left\{H(t - \frac{\rho_2}{c_1})\left\{\frac{t \ln\left(c_1 t + \sqrt{\left(c_1^2 t^2 - \rho_2^2\right)}\right)}{\rho_2} - \frac{1}{c_1}\sqrt{\left(c_1^2 t^2 - \rho_2^2\right)}\right\}\underset{\sim}{e}_{R_2}\right. \tag{3.44}$$

$$\underset{\sim}{\theta}^{R_2} = \frac{1}{2\pi}\left\{H(t - \frac{\rho_2}{c_2})\left\{\frac{t \ln\left(c_2 t + \sqrt{\left(c_2^2 t^2 - \rho_2^{\,2}\right)}\right)}{\rho_2} - \frac{1}{c_2}\sqrt{\left(c_2^2 t^2 - \rho_2^{\,2}\right)}\right\}\right\}\underset{\sim}{e}_{R_2} \tag{3.45}$$

bulunur. $\underset{\sim}{y}_1(R_1, \theta_1)$ ve $\underset{\sim}{y}_2(R_2, \theta_2)$ noktalarına sırası ile $\underset{\sim}{e}_{R_1}$ ve $\underset{\sim}{e}_{R_2}$ doğrultularında yüklenen kütle kuvvetinin şiddetini $\frac{1}{2R_1}\delta(t)$ alalım. R_1 sabit olduğu için işlemler değişmez ve (3.39), (3.40), (3.44) ve (3.45) ifadeleri $2R_1$' e bölünmüş olur. $\underset{\sim}{y}_1$ ve $\underset{\sim}{y}_2$ noktalarına $\underset{\sim}{e}_{R_1}$ ve $\underset{\sim}{e}_{R_2}$ doğrultularında $\frac{1}{2R_1}\delta(t)$ şiddetinde yüklenen iki tekil kütle kuvvetinden dolayı $\underset{\sim}{\phi}^T = \underset{\sim}{\phi}^{R_1} + \underset{\sim}{\phi}^{R_2}$ ve $\underset{\sim}{\theta}^T = \underset{\sim}{\theta}^{R_1} + \underset{\sim}{\theta}^{R_2}$ toplam fonksiyonları (3.39), (3.40), (3.44), (3.45) kullanılarak bulunur ve bulunan ifadeler (2.17), (2.18) de yerleştirilirse

$$\varphi^T = \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2R_1} \left\{ H(t-\frac{\rho_1}{c_1}) \left\{ \frac{t \ln\left(c_1 t + \sqrt{\left(c_1^2 t^2 - \rho_1^{\,2}\right)}\right)}{\rho_1} - \frac{1}{c_1}\sqrt{\left(c_1^2 t^2 - \rho_1^{\,2}\right)} \right\} e_{\underset{\sim}{R_1}} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2R_1} \left\{ H(t-\frac{\rho_2}{c_1}) \left\{ \frac{t \ln\left(c_1 t + \sqrt{\left(c_1^2 t^2 - \rho_2^2\right)}\right)}{\rho_2} - \frac{1}{c_1}\sqrt{\left(c_1^2 t^2 - \rho_2^2\right)} \right\} e_{\underset{\sim}{R_2}} \right\} \right. \qquad (3.46)$$

$$\underset{\sim}{\psi}^T = -\nabla \times \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2R_1} \left\{ H(t-\frac{\rho_1}{c_2}) \left\{ \frac{t \ln\left(c_2 t + \sqrt{\left(c_2^2 t^2 - \rho_1^{\,2}\right)}\right)}{\rho_1} - \frac{1}{c_2}\sqrt{\left(c_2^2 t^2 - \rho_1^{\,2}\right)} \right\} \right\} e_{\underset{\sim}{R_1}} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2R_1} \left\{ H(t-\frac{\rho_2}{c_2}) \left\{ \frac{t \ln\left(c_2 t + \sqrt{\left(c_2^2 t^2 - \rho_2^{\,2}\right)}\right)}{\rho_2} - \frac{1}{c_2}\sqrt{\left(c_2^2 t^2 - \rho_2^{\,2}\right)} \right\} \right\} e_{\underset{\sim}{R_2}} \right\} \qquad (3.47)$$

elde edilir. Böylece $\underset{\sim}{y}_1(R_1,\theta_1)$ ve $\underset{\sim}{y}_2(R_1,\pi+\theta_1)$ noktalarına $e_{\underset{\sim}{R_1}}$ ve $e_{\underset{\sim}{R_2}}$ doğrultularında $\frac{1}{2R_1}\delta(t)$ şiddetinde uygulanan iki tekil kütle kuvvetinden dolayı $\underset{\sim}{x}(R,\theta)$ noktasındaki φ^T ve $\underset{\sim}{\psi}^T$ toplam potansiyelleri bulunmuş olur. φ^T ve $\underset{\sim}{\psi}^T$ ifadeleri $\frac{1}{\pi R_1}$' e bölünür ve daire yüzeyi üzerinde $\theta_1 = 0$' dan $\theta_1 = \pi$ ye kadar integre edilirlerse, kütle kuvveti R_1 yarıçaplı silindir üzerinde her noktada $e_{\underset{\sim}{R}}$ doğrultusunda yayılı bir kütle kuvveti olarak düşünülmüş olur.

$$\underset{\sim}{\phi}^* = \int_0^{\pi} \frac{1}{2R_1}(\underset{\sim}{\phi}^{R_1} + \underset{\sim}{\phi}^{R_2}) \frac{1}{\pi R_1} R_1 d\theta_1 = \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi R_1}(\underset{\sim}{\phi}^{R_1} + \underset{\sim}{\phi}^{R_2}) d\theta_1 \qquad (3.48)$$

$$\underset{\sim}{\theta}^* = \int_0^{\pi} \frac{1}{2R_1}(\underset{\sim}{\theta}^{R_1} + \underset{\sim}{\theta}^{R_2}) \frac{1}{\pi R_1} R_1 d\theta_1 = \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi R_1}(\underset{\sim}{\theta}^{r_1} + \underset{\sim}{\theta}^{r_2}) d\theta_1 \qquad (3.49)$$

(3.42) kullanılarak ifadeler düzenlenirse

$$\underset{\sim}{\phi}^{*} = \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi R_1} (\underset{\sim}{\phi}^{R_1} - \underset{\sim}{\phi}^{R_2}) \underset{\sim}{e}_{R_1} \, d\theta_1 \tag{3.50}$$

$$\underset{\sim}{\theta}^{*} = \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi R_1} (\underset{\sim}{\theta}^{R_1} - \underset{\sim}{\theta}^{R_2}) \underset{\sim}{e}_{R_1} \, d\theta_1 \tag{3.51}$$

bulunur. Şimdi $R_1 \to 0$ için limit alalım.

$$\lim_{R_1 \to o} \underset{\sim}{\phi}^{*} = \lim_{R_1 \to o} \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi R_1} (\underset{\sim}{\phi}^{R_1} - \underset{\sim}{\phi}^{R_2}) \underset{\sim}{e}_{R_1} \, d\theta_1 \tag{3.52}$$

(3.52) ifadesinde $R_1 \to 0$ için $\frac{0}{0}$ belirsizliği ortaya çıkmaktadır. L'Hospital kuralı uygulanırsa:

$$\frac{\partial \phi^{R_i}}{\partial R_i} = \frac{\partial \phi^{R_i}}{\partial \rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial R_i} \qquad \text{(i=1,2)}$$

$$\frac{\partial \phi^{R_i}}{\partial \rho_i} = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ -\frac{1}{c_1} \delta(t - \frac{\rho_i}{c_1}) \left[t \left(\ln\left(c_1 t + \sqrt{(c_1^2 t^2 - \rho_i^2)} \right) - \ln \rho_i \right) - \frac{1}{c_1} \sqrt{(c_1^2 t^2 - \rho_i^2)} \right] \right.$$

$$\left. + H(t - \frac{\rho_i}{c_1}) \left[-\frac{1}{c_1 \rho_i} \sqrt{(c_1^2 t^2 - \rho_i^2)} \right] \right\} \qquad \text{(i=1,2)} \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial R_1} = \frac{R_1 - R\cos(\theta - \theta_1)}{\sqrt{\left(R_1^2 + R^2 - 2RR_1\cos(\theta - \theta_1)\right)}} \tag{3.54}$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial R_1} = \frac{R_1 + R\cos(\theta - \theta_1)}{\sqrt{\left(R_1^2 + R^2 + 2RR_1\cos(\theta - \theta_1)\right)}} \tag{3.55}$$

$$\lim_{R_1 \to 0} \frac{\partial \rho_1}{\partial R_1} = -\cos(\theta - \theta_1) \tag{3.56}$$

$$\lim_{R_1 \to 0} \frac{\partial \rho_2}{\partial R_1} = \cos(\theta - \theta_1) \tag{3.57}$$

ifadelerinden

$$\lim_{R_1\to 0}\frac{\partial \phi^{R_2}}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial R_1}=\lim_{R_1\to 0}\frac{\partial \phi^{R_1}}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial R_1} \tag{3.58}$$

$$\underset{\sim}{\phi}^{*}=\lim_{R_1\to 0}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial \phi^{R_1}}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial R_1}-\frac{\partial \phi^{R_2}}{\partial \rho_2}\frac{\partial \rho_2}{\partial R_1}\right)d\theta_1\,\underset{\sim}{e}_{R_1}$$

$$\underset{\sim}{\phi}^{*}=\lim_{R_1\to 0}\int_0^{\pi}\frac{1}{2\pi}\left(2\frac{\partial \phi^{R_1}}{\partial \rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial R_1}\right)d\theta_1\,\underset{\sim}{e}_{R_1} \tag{3.59}$$

(3.56) ifadesi kullanılarak

$$\underset{\sim}{\phi}^{*}=\lim_{R_1\to 0}\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial \phi^{R_1}}{\partial \rho_1}\right)(-\cos(\theta-\theta_1))d\theta_1\,\underset{\sim}{e}_{R_1} \tag{3.60}$$

elde edilir. (3.38) (3.60) da yerine konulursa

$$\underset{\sim}{\phi}^{*}=\lim_{R_1\to 0}\left(-\frac{\partial \phi^{R_1}}{\partial \rho_1}\int_0^{\pi}\frac{1}{\pi}\left(\cos(\theta-\theta_1)(\underset{\sim}{e}_1\cos\theta_1+\underset{\sim}{e}_2\sin\theta_1)\right)d\theta_1\right) \tag{3.61}$$

ve integral hesaplanarak

$$\underset{\sim}{\phi}^{*}=\lim_{R_1\to 0}\left[-\frac{\partial \phi^{R_1}}{\partial \rho_1}(\underset{\sim}{e}_1\cos\theta+\underset{\sim}{e}_2\sin\theta)\right] \tag{3.62}$$

bulunur.

$$\underset{\sim}{e}_R=\underset{\sim}{e}_1\cos\theta+\underset{\sim}{e}_2\sin\theta$$

olduğu düşünülür, (3.53) ifadesi i=1 yazılarak (3.62) de kullanılır ve $R_1\to 0$ için limit alınırsa

$$\underset{\sim}{\phi}^{*}=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{c_1}\delta(t-\frac{R}{c_1})\left[t\left(\ln(\frac{c_1t+\sqrt{\left(c_1^2t^2-R^2\right)}}{R})\right)-\frac{1}{c_1}\sqrt{\left(c_1^2t^2-R^2\right)}\right]\right.$$

$$\left.+H(t-\frac{R}{c_1})\left[\frac{1}{c_1R}\sqrt{\left(c_1^2t^2-R^2\right)}\right]\right\}\underset{\sim}{e}_R \qquad (3.63)$$

elde edilir. Aynı şekilde $\underset{\sim}{\theta}^{*}$ ı bulmak için (3.52) den itibaren işlemler tekrarlanırsa (3.63) de c_1 yerine c_2 yazılarak

$$\underset{\sim}{\theta}^{*}=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{c_2}\delta(t-\frac{R}{c_2})\left[t\left(\ln(\frac{c_2t+\sqrt{\left(c_2^2t^2-R^2\right)}}{R})\right)-\frac{1}{c_2}\sqrt{\left(c_2^2t^2-R^2\right)}\right]\right.$$

$$\left.+H(t-\frac{R}{c_2})\left[\frac{1}{c_2R}\sqrt{\left(c_2^2t^2-R^2\right)}\right]\right\}\underset{\sim}{e}_R \qquad (3.64)$$

bulunur. Şimdi (3.63) ve (3.64) ifadeleri (2.29) da kullanılarak yerdeğiştirme vektörü hesaplanırsa

$$\underset{\sim}{u}^{k}=\nabla\nabla\cdot\underset{\sim}{\phi}-\nabla\times\nabla\times\underset{\sim}{\theta}$$

$$\underset{\sim R}{u}^{*}=\nabla\nabla\cdot\left(\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{c_1}\delta(t-\frac{R}{c_1})\left[t\left(\ln(\frac{c_1t+\sqrt{\left(c_1^2t^2-R^2\right)}}{R})\right)-\frac{1}{c_1}\sqrt{\left(c_1^2t^2-R^2\right)}\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.+H(t-\frac{R}{c_1})\left[\frac{1}{c_1R}\sqrt{\left(c_1^2t^2-R^2\right)}\right]\right\}\underset{\sim}{e}_R\right)$$

$$-\nabla\times\nabla\times\left(\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{c_2}\delta(t-\frac{R}{c_2})\left[t\left(\ln(\frac{c_2t+\sqrt{\left(c_2^2t^2-R^2\right)}}{R})\right)-\frac{1}{c_2}\sqrt{\left(c_2^2t^2-R^2\right)}\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.+H(t-\frac{R}{c_2})\left[\frac{1}{c_2R}\sqrt{\left(c_2^2t^2-R^2\right)}\right]\right\}\underset{\sim}{e}_R\right) \qquad (3.65)$$

olacaktır. (3.65) de rotasyoneli hesaplanan ifade sadece R' nin fonksiyonu ve R bileşeni olan bir vektör olduğu için silindirik koordinatlarda rotasyoneli sıfır olur. Böylece dönel simetrik alanlarda S dalgasının (c_2 hızı ile yayılan kayma dalgasının) oluşmayacağı kanıtlanmış olur. $\underset{\sim}{u}_R^*$ yerdeğiştirme vektörü

$$\underset{\sim R}{u^*} = \nabla\nabla\cdot\left(\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{c_1}\delta(t-\frac{R}{c_1})\left[t\left(\ln(\frac{c_1t+\sqrt{\left(c_1^2t^2-R^2\right)}}{R})\right)-\frac{1}{c_1}\sqrt{\left(c_1^2t^2-R^2\right)}\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.+H(t-\frac{R}{c_1})\left[\frac{1}{c_1R}\sqrt{\left(c_1^2t^2-R^2\right)}\right]\right\}\underset{\sim}{e}_R\right) \tag{3.66}$$

olarak bulunur.

(3.7) de tanımlanan özellik a=0 için

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,f(x)dx = 0 \tag{3.67}$$

formunu alır [6]. Bu nedenle (3.66) ifadesindeki birinci terim bundan sonra gözönüne alınmayacaktır. Bu durumda $\underset{\sim}{u}_R^*$ yerdeğiştirme vektörü

$$\underset{\sim}{u}_R^* = \nabla\nabla\cdot\underset{\sim}{\phi}^* = \nabla\nabla\cdot\left(\frac{1}{4\pi}\left\{H(t-\frac{R}{c_1})\left[\frac{1}{c_1R}\sqrt{\left(c_1^2t^2-R^2\right)}\right]\right\}\underset{\sim}{e}_R\right) \tag{3.68}$$

şeklini alır. Gerekli ara işlemler yapılırsa

$$\varphi^* = \nabla\cdot\underset{\sim}{\phi}^* = \frac{\partial\phi^*}{\partial R}+\frac{\phi^{*r}}{R} \tag{3.69}$$

$$\frac{\partial\phi^*}{\partial R} = -\frac{c_1t^2}{R^2\sqrt{\left(c_1^2t^2-R^2\right)}} \tag{3.70}$$

(3.70) ifadesi (3.69) da kullanılarak

$$\varphi^* = \frac{1}{4\pi}\left\{ H(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1\sqrt{\left(c_1^2t^2-R^2\right)}} \right] + \delta(t-\frac{R}{c_1})\left[\frac{-\sqrt{\left(c_1^2t^2-R^2\right)}}{c_1^2R} \right] \right\} \underset{\sim}{e}_R \tag{3.71}$$

bulunur. (3.67) de tanımlanan özellik (3.71) deki ikinci terim için de kullanılır

$$\varphi^* = \frac{1}{4\pi}\left\{ H(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1\sqrt{\left(c_1^2t^2-R^2\right)}} \right] \right\} \underset{\sim}{e}_R \tag{3.72}$$

ve (3.72) (3.68) de yerine konulursa

$$u_R^* = \nabla\varphi^* = \frac{\partial\varphi^*}{\partial R}\left(\frac{1}{4\pi}\left\{ -H(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{c_1\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}} \right\} \right) \tag{3.73}$$

gerekli türevler alınarak

$$u_R^* = \frac{1}{4\pi}\left\{ -H(t-\frac{R}{c_1})\frac{R}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}} + \delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{c_1^2\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}} \right\} \underset{\sim}{e}_R \tag{3.74}$$

elde edilir. Şimdi gerilme ifadesini hesaplayalım. Düzlem şekil değiştirme halinde ve silindirik koordinatlarda şekil değiştirme tansörünün bileşenleri yerdeğiştirme vektörünün sadece R' nin fonksiyonu olan $u_R(R)$ bileşeninin olması durumunda aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$\varepsilon_{RR} = \frac{\partial u_R}{\partial R} \tag{3.75}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_R}{R} \tag{3.76}$$

$$\varepsilon_{R\theta} = \varepsilon_{Rz} = \varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{zz} = 0 \tag{3.77}$$

(3.74), (3.75) ve (3.76) ifadelerinde kullanılarak gerekli türevler alınırsa

$$\varepsilon^*_{RR}=\frac{1}{4\pi}\left\{H(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}-\frac{3R^2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{5/2}}\right]+\delta(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1^3\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right]\right.$$

$$\left.\delta(t-\frac{R}{c_1})\left[\frac{2R}{c_1^2(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}\right]\right\}\underset{\sim}{e}_R \tag{3.78}$$

$$\varepsilon^*_{\theta\theta}=\frac{1}{4\pi}\left\{-H(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}+\delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{Rc_1^2\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right\}\underset{\sim}{e}_r \tag{3.79}$$

elde edilir. Bu problem için düzlem halde ve silindirik koordinatlarda gerilme tansörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$t_{RR}=\lambda(\varepsilon_{RR}+\varepsilon_{\theta\theta})+2\mu\varepsilon_{RR} \tag{3.80}$$

$$t_{\theta\theta}=\lambda(\varepsilon_{RR}+\varepsilon_{\theta\theta})+2\mu\varepsilon_{\theta\theta} \tag{3.81}$$

$$t_{zz}=\lambda(\varepsilon_{RR}+\varepsilon_{\theta\theta}) \tag{3.82}$$

olacaktır. (3.78) ve (3.79), (3.80), (3.81) ve (3.82) de yerlerine konulurlarsa gerilme tansörünün sıfırdan farklı bileşenleri

$$t^*_{RR}=\lambda\frac{1}{4\pi}\left\{H(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}-\frac{3R^2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{5/2}}\right]+\delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{Rc_1^2\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right.$$

$$\left.+\delta(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1^3\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right]\right\}+2\mu\frac{1}{4\pi}\left\{H(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}}-\frac{3R^2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{5/2}}\right]\right.$$

$$\left.+\delta(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1^3\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}}\right]\right\} \tag{3.83}$$

$$t^*_{\theta\theta} = \lambda \frac{1}{4\pi}\left\{ H(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}} - \frac{3R^2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{5/2}} \right] \right.$$

$$\left. + \delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{Rc_1^2\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}} + \delta(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1^3\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}} \right] \right\}$$

$$+ 2\mu \frac{1}{4\pi}\left\{ -H(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}} + \delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{Rc_1^2\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}} \right\} \qquad (3.84)$$

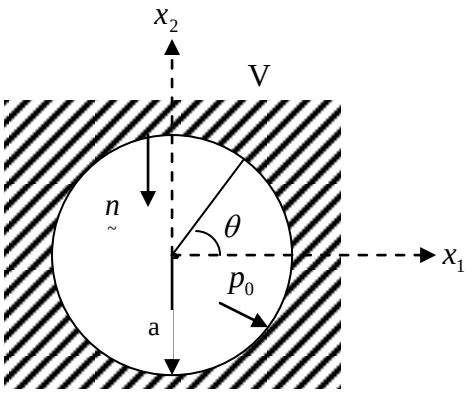
$$t^*_{zz} = \lambda \frac{1}{4\pi}\left\{ H(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{3/2}} - \frac{3R^2}{c_1(c_1^2t^2-R^2)^{5/2}} \right] \right.$$

$$\left. + \delta(t-\frac{R}{c_1})\frac{1}{Rc_1^2\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}} + \delta(t-\frac{R}{c_1})\left[-\frac{1}{c_1^3\sqrt{(c_1^2t^2-R^2)}} \right] \right\} \qquad (3.85)$$

bulunur. Böylece sonsuz bir ortamda t=0 anında $R_1 = 0$ noktasına her $\underset{\sim}{e}_R$ doğrultusunda ve $\delta(t)$ şiddetinde yüklenen yayılı kütle kuvvetinden dolayı $\underset{\sim}{x}(R,\theta)$ noktasında meydana gelen yerdeğiştirme vektörü $u^*_R(R)$ ve gerilme tansörünün sıfırdan farklı bileşenleri $t^*_{RR}, t^*_{\theta\theta}, t^*_{zz}$ silindirik koordinatlarda bulunmuş olur.

4. ÖRNEK PROBLEM

3. Bölümde düzlem halde dönel simetrik problemler için gerekli çekirdekler silindirik koordinatlarda elde edilmişti. Bu bölümde örnek problem olarak başlangıçta sukunette olan sonsuz bir ortamda, a yarıçaplı silindirik bir boşluk sınırında t=0 anında yüklenip kalan sabit p_0 iç basıncı etkisi altında meydana gelen yerdeğiştirme ve gerilme alanları bulunmaya çalışılacaktır.



Şekil 4.1 Sonsuz ortamda a yarıçaplı silindirik boşluk

Düzlem halde dönel simetrik problemler için kullanılacak olan $\underset{\sim}{u}^*(R)$ ve $\underset{\sim}{t}^*(R)$ çekirdekleri 3. bölüm de bulunmuş, ifadeleri (3.74) ve (3.83) de verilmiştir. $\underset{\sim}{t}^*(R)$, $\underset{\sim}{f}^*(R)$, $\underset{\sim}{u}^*(R)$ takımı bir elastodinamik hal oluşturmaktadır. Bu hal ile ilgili malzeme sabitleri bizim çözeceğimiz problemle aynıdır. Örnek problem içinde $\underset{\sim}{t}(R)$, $\underset{\sim}{f}(R)$, $\underset{\sim}{u}(R)$ takımının oluşturduğu yeni bir elastodinamik hal tanımlanacak ve iki elastodinamik hal arasında Betti – Rayleigh karşıtlık teoremi yazılacaktır.

İlk olarak Betti – Rayleigh karşıtlık teoremini tanımlayalım. Betti – Rayleigh karşıtlık teoremi, iki farklı elastodinamik hal arasındaki bağıntıyı gösterir ve uzayda S ile sınırlı V bölgesinde her t>0 için

$$\int_V \underset{\sim}{f}^*(t,R) * \underset{\sim}{u}(t,R)dV + \int_S \underset{\sim}{T}^*(t,R) * \underset{\sim}{u}(r,t)ds$$

$$= \int_S \underset{\sim}{u}^*(r,t) * \underset{\sim}{T}(t,R)\,ds + \int_V \underset{\sim}{f}(t,R) * \underset{\sim}{u}^*(t,R)dV \tag{4.1}$$

olarak tanımlanır. Burada * ifadesi Riemann konvolüsyonunu belirtir ve $\underset{\sim}{a}(\underset{\sim}{x},t)$ ve $\underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x},t)$ vektör fonksiyonları için

$$\underset{\sim}{a}(\underset{\sim}{x},t) * \underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x},t) = \int_0^t \underset{\sim}{a}(\underset{\sim}{x},t-\tau)\cdot \underset{\sim}{b}(\underset{\sim}{x},\tau)d\tau = \int_0^t a_i(\underset{\sim}{x},t-\tau)\cdot b_i(\underset{\sim}{x},\tau)d\tau \tag{4.2}$$

olarak tanımlanır.

Örnek problemde silindirik koordinatlar (R,θ,z) kullanılacaktır. Yerdeğiştirme vektörünün sadece R bileşeni $\underset{\sim}{u}(R)$ bulunmaktadır ve kütle kuvveti $\underset{\sim}{f}$ ihmal edilmiştir. Sınır $R=a$ ve sınırın normali de

$$\underset{\sim}{n} = -e_R \tag{4.3}$$

ile belirlenir. Gerilme tansörü ise

$$\underset{\sim}{t} = \begin{Bmatrix} t_{RR} & 0 & 0 \\ 0 & t_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & t_{zz} \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

şeklindedir . Bu problem için sınırda yüzey gerilmesi (4.3) ifadesi de kullanılarak

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{t}(a)\cdot \underset{\sim}{n} = -t_{RR}(a)\,\underset{\sim}{e}_R \tag{4.5}$$

$$t_{RR}(a) = -p_0 \tag{4.6}$$

$$T_R = p_0 H^+(t)\,\underset{\sim}{e}_R \tag{4.7}$$

olacaktır. Burada

$$H^{+}(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$$

alınacaktır . Sınırda yerdeğiştirme vektörü ise

$$\underset{\sim}{u}=u_r(R)\underset{\sim}{e}_R \tag{4.8}$$

şeklindedir.

$\underset{\sim}{u}^*$, $\underset{\sim}{T}^*$ ve $\underset{\sim}{u}$, $\underset{\sim}{T}$ arasında (3.73), (3.81), (4.7) ve (4.8) kullanılarak Betti – Rayleigh karşıtlık teoremi yazılırsa, 3. bölümde tanımlanan kütle kuvveti $\underset{\sim}{f}^*(R)$ V hacminin dışında olduğundan ve örnek problemde kütle kuvveti $\underset{\sim}{f}$ ihmal edildiğinden (4.1) ifadesi

$$\int_S T_R^*(t,a)*u_R(t,a)ds=\int_S u_R^*(t,a)*T_R(t,a)\,ds \tag{4.9}$$

şeklini alır. S yüzeyi Şekil 3 de gösterilen daire sınırına indirgenir ve

$$ds=ad\theta \tag{4.10}$$

olarak tanımlanır. (4.9) ifadesindeki $T_R^*(t,a)$ de (4.5) kullanılarak

$$T_R^*(t,a)=t_{RR}^*(t,a)\cdot\underset{\sim}{n}=-t_{RR}^*(t,a)\underset{\sim}{e}_R \tag{4.11}$$

olarak ifade edilir. (4.2), (4.10) ve (4.11) kullanılarak (4.9)

$$-\int_0^{2\pi} ad\theta\int_0^t t_{RR}^*(t-\tau,a)\underset{\sim}{u}_R(\tau,a)d\tau=\int_0^{2\pi} ad\theta\int_0^t u_R^*(t-\tau,a)t_{RR}(\tau,a)d\tau \tag{4.12}$$

olarak yazılır. (4.7) (4.12) de yerine konur ve θ üzerinde integral alınırsa

$$-\int_0^t t_{RR}^*(t-\tau,a)\underset{\sim}{u}_R(\tau,a)d\tau=\int_0^t u_R^*(t-\tau,a)\,p_0H^+(\tau)d\tau \tag{4.13}$$

bulunur.

3. Bölümde $\underset{\sim}{u}^*$, $\underset{\sim}{t}^*$ ile tanımlanan elastodinamik hal için merkeze yapılan yükleme de zaman eksenini değiştirilip t=0 yerine $t=\frac{a}{c_1}$ de yükleme yapılırsa hesaplarda ortaya çıkacak tekilliğin önüne geçilebilir. Bunun için $\underset{\sim}{u}^*$, $\underset{\sim}{t}^*$ ifadelerinde $t=t+\frac{a}{c_1}$ ve $R=a$ alınırsa yerdeğiştirme vektörü ve şekil değiştirme tansörünün bileşenleri

$$\underset{\sim}{u}_R^*=\frac{1}{4\pi}\left\{-H(t)\frac{a}{c_1(c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2)^{3/2}}+\delta(t)\frac{1}{c_1^2\sqrt{(c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2)}}\right\}\underset{\sim}{e}_r \tag{4.14}$$

$$\varepsilon_{RR}^*=\frac{1}{4\pi}\left\{H(t)\left[-\frac{1}{c_1(c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2)^{3/2}}-\frac{3a^2}{c_1(c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2)^{5/2}}\right]\right.$$

$$\left.+\dot{\delta}(t)\left[-\frac{1}{c_1^3\sqrt{(c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2+a^2)}}\right]+\delta(t)\left[\frac{2a}{c_1^2(c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2+a^2)^{3/2}}\right]\right\}\underset{\sim}{e}_R \tag{4.15}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^*=\frac{1}{4\pi}\left\{-H(t)\frac{1}{c_1(c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2)^{3/2}}+\delta(t)\frac{1}{ac_1^2\sqrt{(c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2)}}\right\}\underset{\sim}{e}_r \tag{4.16}$$

olacaktır. (3.80) de şekil değiştirme tansörünün bileşenleri kullanılarak tanımlanan gerilme tansörü bileşeni $\underset{\sim}{t}_{RR}^*$ (4.12) de yerine konup düzenlenirse

$$-\lambda\left\{\int_0^t \varepsilon_{RR}^*(t-\tau)u_R(\tau)d\tau+\int_0^t \varepsilon_{\theta\theta}^*(t-\tau)u_R(\tau)d\tau\right\}-2\mu\int_0^t \varepsilon_{RR}^*(t-\tau)u_R(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t u_R^*(t-\tau)\,p_0H^+(\tau)d\tau \qquad (4.17)$$

bulunur. Hesabı kolaylaştırmak için (4.17) ifadesinde aşağıdaki kısaltmalar yapılacaktır:

$$I_1=\int_0^t \varepsilon_{RR}^*(t-\tau)u_R(\tau)d\tau \qquad (4.18)$$

$$I_2=\int_0^t \varepsilon_{\theta\theta}^*(t-\tau)u_R(\tau)d\tau \qquad (4.19)$$

$$I_3=\int_0^t u_R^*(t-\tau,a)\,p_0H^+(\tau)d\tau \qquad (4.20)$$

(4.16), (4.15) ve (4.14) ifadeleri (4.18), (4.19) ve (4.20) de yerlerine konularak

$$I_1=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\left\{H(t-\tau)\left[-\frac{1}{c_1(c_1^2(t+\frac{a}{c_1}-\tau)^2-a^2)^{3/2}}-\frac{3a^2}{c_1(c_1^2(t+\frac{a}{c_1}-\tau)^2-a^2)^{5/2}}\right]\right.$$

$$\left.+\delta(t-\tau)\left[\frac{-1}{c_1^3\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1}-\tau)^2-a^2}}\right]+\delta(t-\tau)\left[\frac{2a}{c_1^2(c_1^2(t+\frac{a}{c_1}-\tau)^2-a^2)^{3/2}}\right]\right\}u_R(\tau)d\tau \qquad (4.21)$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \left\{ -H(t-\tau)\frac{1}{c_1(c_1^2(t+\frac{a}{c_1}-\tau))^2 - a^2)^{3/2}} \right.$$

$$\left. + \delta(t-\tau)\frac{1}{ac_1^2\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1}-\tau)^2 - a^2}} \right\} u_R(\tau)d\tau \qquad (4.22)$$

$$I_3 = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \left\{ -H(t-\tau)\frac{a}{c_1(c_1^2(t+\frac{a}{c_1}-\tau)^2 - a^2)^{3/2}} \right.$$

$$\left. + \delta(t-\tau)\frac{1}{c_1^2\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1}-\tau)^2 - a^2}} \right\} p_0 H^*(\tau)d\tau \qquad (4.23)$$

ifadeleri elde edilir. (4.21), (4.22), (4.23) ifadelerine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$4\pi I_1 = -\delta(t-\tau)\left(-\frac{1}{c_1^3\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}\right)u(\tau)\Bigg|_0^t$$

$$-H(t-\tau)\left[\left(\frac{2a}{c_1^2\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)^{3/2}}-\frac{(t-\tau+\frac{a}{c_1})}{c_1\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)^{3/2}}\right)u(\tau)\right.$$

$$\left.\left(\frac{-1}{c_1^3\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}\right)\dot{u}(\tau)\right]\Bigg|_0^t+\int_0^t H(t-\tau)\left[\left(\frac{-1}{c_1^3\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}\right)\ddot{u}(\tau)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{-2c_1(t-\tau)}{c_1^2\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)^{3/2}}\right)\dot{u}(\tau)+\left(\frac{-3c_1^2(t-\tau)^2}{c_1\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)^{5/2}}\right)u(\tau)\right]d\tau \qquad (4.24)$$

$$4\pi I_3 = -H(t-\tau)\left(\frac{1}{c_1^2\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}\,p_0H^+(\tau)\right)\Bigg|_0^t$$

$$+\int_0^t H(t-\tau)\left[\left(\frac{c_1(t-\tau)}{c_1\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)^{3/2}}\right)p_0H^+(\tau)\right]d\tau \qquad (4.25)$$

$$4\pi I_2 = -H(t-\tau)\left(\frac{1}{ac_1^2\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}u(\tau)\right)\Bigg|_0^t$$

$$+\int_0^t H(t-\tau)\left[\left(\frac{c_1(t-\tau)}{ac_1\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)^{3/2}}\right)u(\tau)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{ac_1^2\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}\right)\dot{u}(\tau)\right]d\tau \qquad (4.26)$$

bulunur. (4.18), (4.19), (4.20) ifadeleri kullanılarak (4.17) ifadesi

$$-\lambda I_1 - \lambda I_2 - 2\mu I_1 = I_3 \qquad (4.27)$$

şeklinde yazılır. (4.26), (4.25) ve (4.24) (4.27) de yerlerine konularak

$$-(\lambda+2\mu)\left[-\delta(t-\tau)\left(-\frac{1}{c_1^3\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}\right)u(\tau)\right]_0^t$$

$$-H(t-\tau)\left[\left(-\frac{(t-\tau-\frac{a}{c_1})}{c_1\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)^{3/2}}\right)u(\tau)+\left(\frac{-1}{c_1^3\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}\right)\dot{u}(\tau)\right]_0^t$$

$$+\left[H(t-\tau)\left(\frac{\lambda}{ac_1^2\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}\right)u(\tau)+\left(\frac{1}{c_1^2\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}p_0H^+(\tau)\right)\right]_0^t$$

$$+\int_0^t H(t-\tau)\left[\left(\frac{(\lambda+2\mu)}{c_1^3\sqrt{\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)}}\right)\ddot{u}(\tau)\right.$$

$$+\left(\frac{2c_1(t-\tau)(\lambda+2\mu)}{c_1^2\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)^{3/2}}-\frac{\lambda}{ac_1^2\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}\right)\dot{u}(\tau)$$

$$+\left(\frac{3c_1^2(t-\tau)^2(\lambda+2\mu)}{c_1\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)^{5/2}}-\frac{\lambda c_1(t-\tau)}{ac_1\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)^{3/2}}\right)u(\tau)$$

$$\left.-\left(\frac{c_1(t-\tau)}{c_1\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)^{3/2}}\right)p_0H^+(\tau)\right]d\tau=0 \qquad (4.28)$$

bulunur. (4.28) ifadesinde integral dışındaki terimlerin toplamı

$$K = -(\lambda + 2\mu)\left[-\delta(t-\tau)\left(-\frac{1}{c_1^3\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}} \right) u(\tau) \right|_0^t$$

$$- H(t-\tau)\left[\left(-\frac{(t-\tau-\frac{a}{c_1})}{c_1\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2 - a^2 \right)^{3/2}} \right) u(\tau) + \left(\frac{-1}{c_1^3\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}} \right) \dot{u}(\tau) \right]\Bigg|_0^t \Bigg]$$

$$- \lambda\left[- H(t-\tau)\left(\frac{1}{ac_1^2\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}} \right) u(\tau) \right]$$

$$+ \left[H(t-\tau)\left(\frac{1}{c_1^2\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}} p_0 H^+(\tau) \right) \right|_0^t \Bigg] \qquad (4.29)$$

olur ve ara işlemler yapılarak

$$K = -(\lambda + 2\mu)\left[-\delta(0)\left(-\frac{1}{c_1^3}\frac{1}{0} \right)u(t) + \delta(t)\left(\frac{-1}{c_1^3\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}} \right)u(0) \right.$$

$$- H(0)\left[\frac{a}{c_1^2}\left(\frac{1}{0}u(t) \right) + \frac{-1}{c_1^3}\left(\frac{1}{0}\dot{u}(t) \right) \right] + H(t)\left[\left(\frac{-(t-\frac{a}{c_1})}{c_1\left(c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2 \right)^{3/2}} \right)u(0) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{-1}{c_1^3\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}} \right)\dot{u}(0) \right] - \lambda\left[-H(0)\frac{1}{ac_1^2}\left(\frac{1}{0}u(t) \right) \right.$$

$$\left. + H(t)\left(\frac{1}{c_1^3\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}} \right)u(0) \right]$$

$$+ \left[H(0)\frac{1}{c_1^2}\left(\frac{1}{0}p_0H^+(t) \right) - H(t)\left(\frac{1}{c_1^2\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2 - a^2}}p_0H^+(0) \right) \right] \qquad (4.30)$$

u(0)=0, $H^+(0)=1$ ve H(0)=0 olduğu anımsanarak ve $\frac{0}{0}$ belirsizliği olan terimlerde L'Hospital kuralı uygulanarak (4.30) ifadesi

$$K = -(\lambda+2\mu)\left[-\dot{\delta}(t-\tau)\left(\frac{1}{c_1^3}\frac{\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})}u(\tau) \right) \right.$$

$$-\left(\frac{1}{c_1^2}\frac{\left(\delta(t-\tau)(t-\tau+\frac{a}{c_1})+H(t-\tau)\right)\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)^{5/2}}{3c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})}u(\tau) \right)$$

$$\left. +\left(-\delta(t-\tau)\frac{1}{c_1^3}\frac{\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})}\dot{u}(\tau) \right) \right]$$

$$-\lambda\left[\left(\delta(t-\tau)\frac{1}{ac_1^2}\frac{\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})} \right)u(\tau) \right]$$

$$\left. +\left(-\delta(t-\tau)\frac{1}{c_1^2}\frac{\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})}p_0H^+(\tau) \right) \right]\Bigg|_0^t$$

$$+H(t)\left[\frac{1}{c_1^3}\frac{(\lambda+2\mu)}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}\dot{u}(0)-\frac{1}{c_1^2}\frac{1}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}p_0 \right] \qquad (4.31)$$

olur. (4.31) ifadesinde gerekli işlemler yapılarak sıfır olan terimler ayıklanırsa

$$K = H(t)\left[\frac{1}{c_1^3}\frac{(\lambda+2\mu)}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}\dot{u}(0)-\frac{1}{c_1^2}\frac{1}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}p_0\right] \tag{4.32}$$

bulunur. (4.32) ifadesi (4.28) de yerine konularak

$$H(t)\left[\frac{1}{c_1^3}\frac{(\lambda+2\mu)}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}\dot{u}(0)-\frac{1}{c_1^2}\frac{1}{\sqrt{c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}p_0\right]$$

$$+\int_0^t H(t-\tau)\left[\left(\frac{(\lambda+2\mu)}{c_1^3\sqrt{\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)}}\right)\ddot{u}(\tau)\right.$$

$$+\left(\frac{2c_1(t-\tau)(\lambda+2\mu)}{c_1^2\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)^{3/2}}-\frac{\lambda}{ac_1^2\sqrt{c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2}}\right)\dot{u}(\tau)$$

$$+\left(\frac{3c_1^2(t-\tau)^2(\lambda+2\mu)}{c_1\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)^{5/2}}-\frac{\lambda c_1(t-\tau)}{ac_1\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)^{3/2}}\right)u(\tau)$$

$$\left.-\left(\frac{c_1(t-\tau)}{c_1\left(c_1^2(t-\tau+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)^{3/2}}\right)p_0H^+(\tau)\right]d\tau=0 \tag{4.33}$$

elde edilir. (4.33) de integral dışındaki ifade de H(t) $\frac{1}{\sqrt{\left(c_1^2(t+\frac{a}{c_1})^2-a^2\right)}}$' nin

çarpanı sıfıra eşitlenerek

$$\frac{1}{c_1^3}(\lambda+2\mu)\dot{u}(0)-\frac{1}{c_1^2}p_0=0 \tag{4.34}$$

$$\dot{u}(0)=\frac{c_1 p_0}{(\lambda+2\mu)} \tag{4.35}$$

olarak başlangıç hızı bulunur. (4.33) de geriye kalan terimler düzenlenirse

$$\int_0^t H(t-\tau)\left[\left(\frac{(\lambda+2\mu)}{c_1^3\sqrt{c_1^2(t-\tau)^2+2ac_1(t-\tau)}}\right)\ddot{u}(\tau)\right.$$

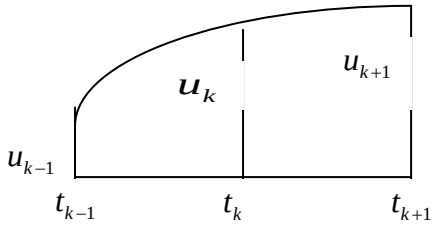
$$+\left(\frac{2(t-\tau)(\lambda+2\mu)}{c_1\left(c_1^2(t-\tau)^2+2ac_1(t-\tau)\right)^{3/2}}-\frac{\lambda}{ac_1^2\sqrt{c_1^2(t-\tau)^2+2ac_1(t-\tau)}}\right)\dot{u}(\tau)$$

$$+\left(\frac{3c_1(t-\tau)^2(\lambda+2\mu)}{\left(c_1^2(t-\tau)^2+2ac_1(t-\tau)\right)^{5/2}}-\frac{\lambda(t-\tau)}{a\left(c_1^2(t-\tau)^2+2ac_1(t-\tau)\right)^{3/2}}\right)u(\tau)$$

$$\left.-\left(\frac{(t-\tau)}{\left(c_1^2(t-\tau)^2+2ac_1(t-\tau)\right)^{3/2}}\right)p_0H^+(\tau)\right]d\tau=0 \tag{4.36}$$

ifadesi elde edilir.

(4.36) ifadesindeki integral denklem aşağıdaki yaklaşımla çözülecektir. Bunun için t zamanı $\Delta t=t_{i+1}-t_i$ zaman aralıklarına bölünerek her aralıkta $u_R(t,a)$ fonksiyonu ikinci derece bir parabol seçilmiştir.



Şekil 4.2 İntegral denklem için yaklaşım fonksiyonu

$$u_R(t,a) = A_1 + A_2 t + A_3 t^2 \tag{4.37}$$

$$\dot{u}_R(t,a) = A_2 + 2A_3 t \tag{4.38}$$

$$\ddot{u}_R(t,a) = 2A_3 \tag{4.39}$$

Bir aralıktan diğerine geçişte u_R nin ve türevinin değerleri sürekli alınmıştır.

$t = t_{n-1}$ $\qquad u_R = u_{n-1}$

$t = t_n$ $\qquad u_R = u_n,\ \dot{u}_R = \dot{u}_n$

$t = t_{n+1}$ $\qquad u_R = u_{n+1}$

Bu durumda fonksiyon $[t_k, t_{k+1}]$ aralığında

$$u_R(t,a) = u_k\left[1 - \left(\frac{t-t_k}{\Delta t}\right)^2\right] + \dot{u}_k\left[(t-t_n) - \frac{(t-t_k)^2}{\Delta t}\right] + u_{k+1}\left[\left(\frac{t-t_k}{\Delta t}\right)^2\right] \tag{4.40}$$

$$\dot{u}_R(t,a) = u_k\left[-2\frac{t-t_k}{\Delta t^2}\right] + \dot{u}_k\left[1 - \frac{2(t-t_k)}{\Delta t}\right] + u_{k+1}\left[\frac{2(t-t_k)}{\Delta t^2}\right] \tag{4.41}$$

$$\ddot{u}_R(t,a) = u_k\left[-\frac{2}{\Delta t^2}\right] + \dot{u}_k\left[-\frac{2}{\Delta t}\right] + u_{k+1}\left[\frac{2}{\Delta t^2}\right] \tag{4.42}$$

olacaktır.

Problemi boyutsuz olarak çözmek için

$$t = \frac{at'}{c_1} \tag{4.43}$$

$$u = \frac{ap_0}{\mu} u' \tag{4.44}$$

dönüşümleri ile boyutsuzlaştırma yapılırsa

$$\bar{u}_R(t,a) = \frac{c_1 p_0}{\mu} \bar{u} \tag{4.45}$$

$$\bar{\sigma}_R(t,a) = \frac{c_1^2 p_0}{a\mu} \bar{\sigma} \tag{4.46}$$

olur. (4.35) da bulduğumuz başlangıç hızı için de (4.43), (4.44) dönüşümleri uygulanırsa, E elastiklik modülü , υ poisson oranı olmak üzere

$$\lambda = \frac{E\upsilon}{(1-2\lambda)(1+\upsilon)}, \qquad \mu = \frac{2(1+\upsilon)}{E} \tag{4.47}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\bar{u}(0) = \frac{\mu}{(\lambda+2\mu)} = \frac{(1-2\upsilon)}{(1-\upsilon)} \tag{4.48}$$

bulunur. (4.36) ifadesinde (4.43), (4.44), (4.45) ve (4.46) kullanılarak

$$\int_0^t H(t'-\tau')\frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{(\lambda+2\mu)}{\sqrt{(t'-\tau'+1)^2-1}}\right)\dot{u}(\tau')\right.$$

$$+\left(\frac{2(t'-\tau')(\lambda+2\mu)}{\left((t'-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}-\frac{\lambda}{\sqrt{(t'-\tau'+1)^2-1}}\right)u(\tau')$$

$$\left.+\left(\frac{3(t'-\tau')(\lambda+2\mu)}{\left((t'-\tau'+1)^2-1\right)^{5/2}}-\frac{\lambda(t'-\tau')}{\left((t'-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)u'(\tau')\right]d\tau'$$

$$-\int_0^t\left[\left(\frac{(t'-\tau')}{\left((t'-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)H^+(\tau')\right]d\tau'=0 \qquad (4.49)$$

bulunur. (4.40), (4.41) ve (4.42) ifadeleri (4.49) de yerlerine konursa integral aşağıdaki formda yazılır:

$$\sum_{k=1}^{N}\left\{\int_{t_k}^{t_{k+1}} H(t'_{k+1}-\tau')\left\{\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{(t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1}}\right)\left(\frac{2}{\Delta t'^2}\right)\left(-u'_k-u'_k\Delta t'+u'_{k+1}\right)\right.\right.\right.$$

$$+\left(\frac{2(t'_{k+1}-\tau')}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)\left(u'_k\left[-2\frac{\tau'-t'_k}{\Delta t'^2}\right]+u'_k\left[1-\frac{2(\tau'-t'_k)}{\Delta t'}\right]+u'_{k+1}\left[\frac{2(\tau'-t'_k)}{\Delta t'^2}\right]\right)$$

$$\left.+\left(\frac{3(t'_{k+1}-\tau')}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{5/2}}\right)\left(u'_k\left[1-\left(\frac{\tau'-t'_k}{\Delta t'}\right)^2\right]+u'_k\left[(\tau'-t'_n)-\frac{(\tau'-t'_k)^2}{\Delta t'}\right]+u'_{k+1}\left[\left(\frac{\tau'-t'_k}{\Delta t'}\right)^2\right]\right)\right]$$

$$+\frac{\lambda}{\mu}\left[\left(-\frac{\lambda}{\sqrt{(t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1}}\right)\left(u'_k\left[-2\frac{\tau'-t'_k}{\Delta t'^2}\right]+u'_k\left[1-\frac{2(\tau'-t'_k)}{\Delta t'}\right]+u'_{k+1}\left[\frac{2(\tau'-t'_k)}{\Delta t'^2}\right]\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{-(t'_{k+1}-\tau')}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)\left(u'_k\left[1-\left(\frac{\tau'-t'_k}{\Delta t'}\right)^2\right]+u'_k\left[(\tau'-t'_n)-\frac{(\tau'-t'_k)^2}{\Delta t'}\right]+u'_{k+1}\left[\left(\frac{\tau'-t'_k}{\Delta t'}\right)^2\right]\right)\right]$$

$$\left.-\left[\left(\frac{(t'_{k+1}-\tau')}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)H^+(\tau')\right]\right\}d\tau'=0 \qquad (4.50)$$

Hesabı kolaylaştırmak için

$$Au'_k+Bu'_{k+1}+Cu'_k+F_3=0 \qquad (4.51)$$

$$B=\int_{t'_k}^{t'_{k+1}}\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\left[\left\{\left(\frac{2}{\Delta t'^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{(t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1}}\right)+\left(\frac{4}{\Delta t'^2}\right)\left(\frac{(t'_{k+1}-\tau')(\tau'-t'_k)}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3}{\Delta t'^2}\right)\left(\frac{(t'_{k+1}-\tau')^2(\tau'-t'_k)^2}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{5/2}}\right)\right\}$$

$$\left.+\frac{\lambda}{\mu}\left\{\left(\frac{-2}{\Delta t'^2}\right)\left(3\frac{(\tau'-t'_k)}{\sqrt{(t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1}}\right)+\left(\frac{-1}{\Delta t'^2}\right)\left(\frac{(t'_{k+1}-\tau')(\tau'-t'_k)^2}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)\right\}\right]d\tau' \qquad (4.52)$$

$$A=\int_{t'_k}^{t'_{k+1}}\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\left[\left\{\left(\frac{-2}{\Delta t'^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{(t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1}}\right)+\left(\frac{-4}{\Delta t'^2}\right)\left(\frac{(t'_{k+1}-\tau')(\tau'-t'_k)}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3(t'_{k+1}-\tau')^2}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{5/2}}\right)+\left(\frac{-3}{\Delta t'^2}\right)\left(\frac{(t'_{k+1}-\tau')^2(\tau'-t'_k)^2}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{5/2}}\right)\right\}$$

$$+\frac{\lambda}{\mu}\left\{\left(\frac{2}{\Delta t'^2}\right)\left(\frac{(\tau'-t'_k)}{\sqrt{(t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1}}\right)+(-1)\left(\frac{(t'_{k+1}-\tau')}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{1}{\Delta t'^2}\right)\left(\frac{(t'_{k+1}-\tau')(\tau'-t'_k)^2}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)\right\}\right]d\tau' \qquad (4.53)$$

$$C=\int_{t'_k}^{t'_{k+1}}\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\left[\left\{\left(\frac{-2}{\Delta t'}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{(t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1}}\right)+2\left(\frac{(t'_{k+1}-\tau')}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)\right.\right.$$

$$+\left(\frac{-4}{\Delta t'}\right)\left(\frac{(t'_{k+1}-\tau')(\tau'-t'_k)}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)+3\left(\frac{(t'_{k+1}-\tau')^2(\tau'-t'_k)}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{5/2}}\right)$$

$$\left.+\left(\frac{-3}{\Delta t'}\right)\left(\frac{(t'_{k+1}-\tau')^2(\tau'-t'_k)^2}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{5/2}}\right)\right\}+\frac{\lambda}{\mu}\left\{(-1)\left(\frac{1}{\sqrt{(t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1}}\right)\right.$$

$$+\left(\frac{2}{\Delta t'}\right)\left(\frac{(\tau'-t'_k)}{\sqrt{(t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1}}\right)+(-1)\left(\frac{(\tau'-t'_k)(t'_{k+1}-\tau)}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)$$

$$\left.\left.\left(\frac{1}{\Delta t'}\right)\left(\frac{(\tau'-t'_k)^2(t'_{k+1}-\tau)}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)\right\}\right]d\tau' \qquad (4.54)$$

$$F_3=\int_{t'_k}^{t'_{k+1}}\left(\frac{(t'_{k+1}-\tau')}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)d\tau' \qquad (4.55)$$

kısaltmaları yapılacaktır.

$$z = t' - \tau + 1 \tag{4.56}$$

dönüşümü yapılırsa (4.50) deki integral sınırları

$$z_1 = t'_{k+1} - t'_k + 1 = \Delta t' + 1, \quad z_2 = 1 \tag{4.57}$$

olarak belirlenir. Gerekli integraller aşağıda hesaplanmıştır:

$$A_{11} == \int_{t'_k}^{t'_{k+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{(t'_{k+1} - \tau' + 1)^2 - 1}} \right) d\tau' = \int_1^{\Delta t'+1} \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \right) dz \tag{4.58}$$

$$A_{11} = \ln(\Delta t' + 1 + \sqrt{\Delta t' + 2\Delta t'}) \tag{4.59}$$

$$A_{12} = \int_{t'_k}^{t'_{k+1}} \left(\frac{(t'_{k+1} - \tau')(\tau' - t'_k)}{\left((t'_{k+1} - \tau' + 1)^2 - 1\right)^{3/2}} \right) d\tau' \tag{4.60}$$

$$A_{12} = -\ln(\Delta t' + 1 + \sqrt{\Delta t' + 2\Delta t'}) + \sqrt{\Delta t' + 2\Delta t'} \tag{4.61}$$

$$A_{13} = \int_{t'_k}^{t'_{k+1}} \left(\frac{(t'_{k+1} - \tau')^2}{\left((t'_{k+1} - \tau' + 1)^2 - 1\right)^{5/2}} \right) d\tau' = \int_1^{\Delta t'+1} \left(\frac{(z-1)^2}{\left(z^2 - 1\right)^{5/2}} \right) dz \tag{4.62}$$

$$A_{13} = \frac{\left(\Delta t'^3 - 3\Delta t'^2\right)}{3\left(\Delta t'^2 + 2\Delta t'\right)^{3/2}} \tag{4.63}$$

$$A_{14} = \int_{t'_k}^{t'_{k+1}} \left(\frac{(\tau' - t'_k)^2 (t'_{k+1} - \tau')^2}{\left((t'_{k+1} - \tau' + 1)^2 - 1\right)^{5/2}} \right) d\tau' = \int_1^{\Delta t'+1} \left(\frac{(\Delta t' + 1 - z)^2 (z-1)^2}{\left(z^2 - 1\right)^{5/2}} \right) dz \tag{4.64}$$

$$A_{14} = \frac{1}{3} \left\{ (\Delta t' + 1)^2 \left[\frac{\Delta t' + 1}{\sqrt{\Delta t'^2 + 2\Delta t'}} - \frac{2\Delta t'}{\left(\Delta t'^2 + 2\Delta t'\right)^{3/2}} \right] - 2(\Delta t' + 1) \left[\frac{-1}{\sqrt{\Delta t'^2 + 2\Delta t'}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{2(\Delta t' + 1)}{\sqrt{\Delta t'^2 + 2\Delta t'}} + \frac{2(\Delta t' + 1)\Delta t'}{\left(\Delta t'^2 + 2\Delta t'\right)^{3/2}} \right] + \left[\frac{-4\Delta t'}{\sqrt{\Delta t'^2 + 2\Delta t'}} + \frac{-(\Delta t' + 1)^3 + 2(\Delta t' + 1)^2 - (\Delta t' + 1)}{\left(\Delta t'^2 + 2\Delta t'\right)^{3/2}} \right] \right\}$$

$$+ \ln(\Delta t' + 1 + \sqrt{\Delta t' + 2\Delta t'}) \tag{4.65}$$

$$A_{21}=\int_{t'_k}^{t'_{k+1}}\left(\frac{(\tau'-t'_k)}{\sqrt{(t'-\tau'+1)^2-1}}\right)d\tau'=\int_{1}^{\Delta t'+1}\left(\frac{(t'_{k+1}+1-z-t'_k)}{\sqrt{z^2-1}}\right)dz \tag{4.66}$$

$$A_{21}=(\Delta t'+1)\ln(\Delta t'+1+\sqrt{(\Delta t'+1)^2-1})+\sqrt{\Delta t'^2+2\Delta t'} \tag{4.67}$$

$$A_{22}=\int_{t'_k}^{t'_{k+1}}\left(\frac{(t'_{k+1}-\tau')}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)d\tau'=\int_{1}^{\Delta t'+1}\left(\frac{(z-1)}{\left(z^2-1\right)^{3/2}}\right)dz \tag{4.68}$$

$$A_{22}=\left(\frac{\Delta t'}{\sqrt{\Delta t'^2+2\Delta t'}}\right) \tag{4.69}$$

$$A_{23}=\int_{t'_k}^{t'_{k+1}}\left(\frac{(\tau'-t'_k)^2(t'_{k+1}-\tau')}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)d\tau'=\int_{1}^{\Delta t'+1}\left(\frac{(\Delta t'+1-z)^2(z-1)}{\left(z^2-1\right)^{3/2}}\right)dz \tag{4.70}$$

$$A_{23}=\left(-2\Delta t'-3\right)\ln(\Delta t'+1+\sqrt{(\Delta t'+1)^2-1})+\frac{\Delta t'\left[\Delta t'+2\right]^2}{\sqrt{\Delta t'^2+2\Delta t'}}+\sqrt{\Delta t'^2+2\Delta t'} \tag{4.71}$$

$$C_{14}=\int_{t'_k}^{t'_{k+1}}\left(\frac{(\tau'-t'_k)(t'_{k+1}-\tau')^2}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{5/2}}\right)d\tau'=\int_{1}^{\Delta t'+1}\left(\frac{(\Delta t'+1-z)(z-1)^2}{\left(z^2-1\right)^{5/2}}\right)dz \tag{4.72}$$

$$C_{14}=\frac{\sqrt{\left(\Delta t'^2+2\Delta t'\right)}}{3}-\frac{2\Delta t'}{3\sqrt{\left(\Delta t'^2+2\Delta t'\right)}} \tag{4.73}$$

$$F_3=\int_{t'_k}^{t'_{k+1}}\left(\frac{(t'_{k+1}-\tau')}{\left((t'_{k+1}-\tau'+1)^2-1\right)^{3/2}}\right)d\tau'=\int_{1}^{\Delta t'+1}\left(\frac{(z-1)}{\left(z^2-1\right)^{3/2}}\right)dz \tag{4.74}$$

$$F_3=\left(-\frac{\sqrt{\Delta t'}}{\sqrt{\Delta t'+2}}\right) \tag{4.75}$$

(4.53), (4.54) ve (4.55) ifadeleri kısaltmalar kullanılarak aşağıdaki gibi yazılırlar:

$$A=\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\left[\left(\frac{-2}{\Delta t'^2}\right)A_{11}+\left(\frac{-4}{\Delta t'^2}\right)A_{12}+3A_{13}+\left(\frac{-3}{\Delta t'^2}\right)A_{14}\right]$$

$$+\frac{\lambda}{\mu}\left[\left(\frac{2}{\Delta t'^2}\right)A_{21}+(-1)A_{22}+\left(\frac{1}{\Delta t'^2}\right)A_{23}\right] \tag{4.76}$$

$$B=\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\left[\left(\frac{2}{\Delta t'^2}\right)A_{11}+\left(\frac{4}{\Delta t'^2}\right)A_{12}+\left(\frac{3}{\Delta t'^2}\right)A_{14}\right]$$

$$+\frac{\lambda}{\mu}\left[\left(\frac{-2}{\Delta t'^2}\right)A_{21}+\left(\frac{-1}{\Delta t'^2}\right)A_{23}\right] \tag{4.77}$$

$$C=\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\left[\left(\frac{-2}{\Delta t'}\right)A_{11}+2A_{22}+\left(\frac{-4}{\Delta t'}\right)A_{12}+3C_{14}+\left(\frac{-3}{\Delta t'}\right)A_{14}\right]$$

$$+\frac{\lambda}{\mu}\left[(-1)A_{11}+\left(\frac{2}{\Delta t'}\right)A_{21}+(-1)A_{12}+\left(\frac{1}{\Delta t'}\right)A_{23}\right] \tag{4.78}$$

(4.78), (4.79), (4.80), (4.51) ifadeleri (4.50) de yerlerine konulursa

$$\sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\left[\left(\frac{-2}{\Delta t'^2}\right)A_{11}+\left(\frac{-4}{\Delta t'^2}\right)A_{12}+3A_{13}+\left(\frac{-3}{\Delta t'^2}\right)A_{14}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{\mu}\left[\left(\frac{2}{\Delta t'^2}\right)A_{21}+(-1)A_{22}+\left(\frac{1}{\Delta t'^2}\right)A_{23}\right]\right\}\bar{u}_k$$

$$+\left\{\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\left[\left(\frac{2}{\Delta t'^2}\right)A_{11}+\left(\frac{4}{\Delta t'^2}\right)A_{12}+\left(\frac{3}{\Delta t'^2}\right)A_{14}\right]+\frac{\lambda}{\mu}\left[\left(\frac{-2}{\Delta t'^2}\right)A_{21}+\left(\frac{-1}{\Delta t'^2}\right)A_{23}\right]\right\}\bar{u}_{k+1}$$

$$+\left\{\frac{(\lambda+2\mu)}{\mu}\left[\left(\frac{-2}{\Delta t'}\right)A_{11}+2A_{22}+\left(\frac{-4}{\Delta t'}\right)A_{12}+3C_{14}+\left(\frac{-3}{\Delta t'}\right)A_{14}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda}{\mu}\left[(-1)A_{11}+\left(\frac{2}{\Delta t'}\right)A_{21}+(-1)A_{12}+\left(\frac{1}{\Delta t'}\right)A_{23}\right]\right\}\dot{\bar{u}}_k+F_3=0 \tag{4.79}$$

bulunur.

(4.79) eşitliği her aralık için sağlanmalıdır. Birinci aralıkta $\bar{u}_k$ ve $\dot{\bar{u}}_k$ bilinmektedir. Buradan $\bar{u}_{k+1}$ değeri hesaplanır. Aynı işlemler her aralık için tekrarlanarak her aralıktaki $\bar{u}_k$ ve $\dot{\bar{u}}_k$ değerleri belirlenir. Örnek problem için υ=0.25, $\Delta t' = 0.1$ alınarak çözüm yapılmış bulunan sonuç Şekil 4.3 de verilmiştir.

Silindirik boşluk sınırında $t_{\theta\theta}$ gerilmesini bulabilmek için öncelikle (4.6) ifadesinde belirtilen sınırda yüzey gerilmesi t_{RR} , (3.80) ifadesinde yerine konularak

$$t_{RR}(a,t) = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{RR}(a,t) + \lambda\varepsilon_{\theta\theta}(a,t) = -p_0 \tag{4.80}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}(a,t) = \frac{u_R(a,t)}{a} \tag{4.81}$$

$$\varepsilon_{RR}(a,t) = \left(- p_0 - \lambda \frac{u_R(a,t)}{a} \right) \frac{1}{(\lambda + 2\mu)} \tag{4.82}$$

bulunur. (3.81) ifadesi anımsanır ve (4.82) kullanılırsa

$$t_{\theta\theta}(a,t) == \lambda\left(\varepsilon_{RR}(a,t) + \varepsilon_{\theta\theta}(a,t)\right) + 2\mu\varepsilon_{\theta\theta}(a,t)$$

$$t_{\theta\theta}(a,t) = \left(- p_0 - \lambda \frac{u_R(a,t)}{a} \right) \frac{1}{(\lambda + 2\mu)} + (\lambda + 2\mu)\frac{u_R(a,t)}{a} \tag{4.83}$$

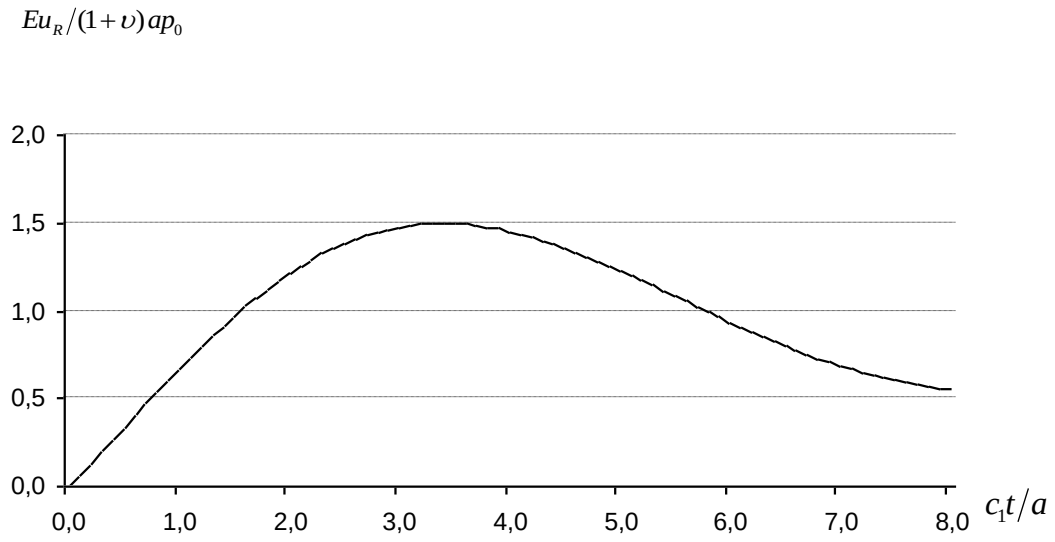
elde edilir. (4.83) ifadesini boyutsuzlaştırmak için

$$t'_{\theta\theta}(a,t) = \frac{t_{\theta\theta}(a,t)}{p_0} \tag{4.84}$$

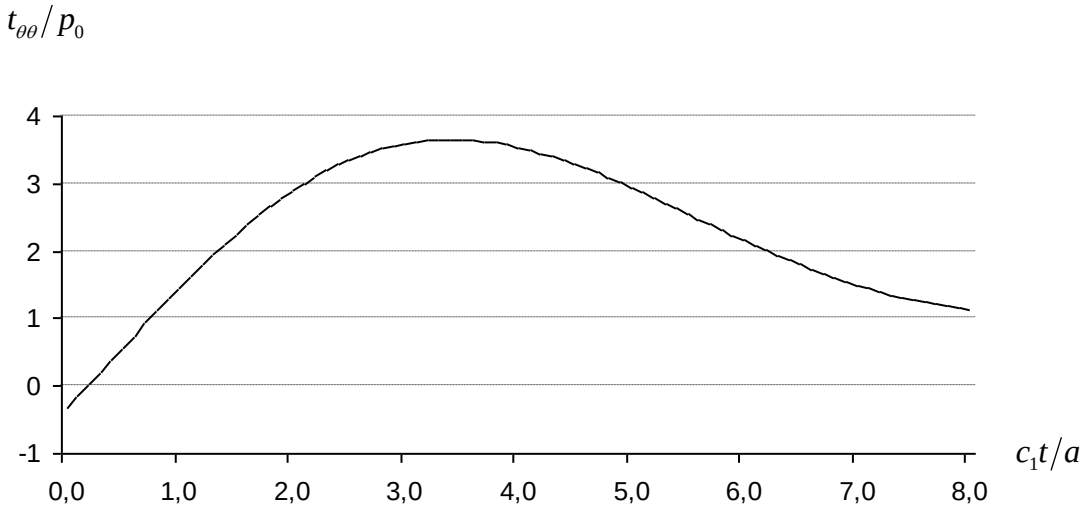
dönüşümü kullanılırsa (4.44) ve (4.47) kullanılarak

$$t'_{\theta\theta}(a,t) = -\frac{\upsilon}{(1-\upsilon)} + \frac{2u_{RR}(a,t)}{(1-\upsilon)} \tag{4.85}$$

bulunur. Böylece sınırda yüzey gerilmesi $t'_{\theta\theta}$ ifadesi bulunmuş ve zamana göre değişimi Şekil 4.4 de çizilmiştir.



Şekil 4.3 Silindirik boşluk yüzeyindeki boyutsuz yerdeğiştirme



Şekil 4.4 Silindirik boşluk yüzeyindeki boyutsuz gerilme

5.SONUÇLAR

Bu çalışmada öncelikle sınır eleman yönteminin esasını oluşturan temel çözümlerin nasıl elde edildiği üç boyutlu problemler için açıklanmıştır. Sınır eleman yönteminin esası, temel çözümleri ile çözülmek istenen problem arasında karşıtlık teoreminin yazılması ile ortaya çıkan integral denklemin çözülmesidir.

3 boyutlu elastodinamik problemlerinde bu integral denklemdeki integraller üç katlıdır. Temel çözüm integral denklemin çekirdeklerini oluşturmaktadır. Düzlem problemler için iki boyutlu çekirdekleri elde etmek zamandan ve hesaplardan tasarruf sağlar. Burada düzlem problemler için çekirdeklerin nasıl elde edileceği de açıklanmıştır. Ancak burada hedef eksenel simetrik problemler için geçerli bir temel çözüm elde etmektir. Bu çözümün elde edilmesi için izlenen yol açıklanmış ve temel çözümün gerilme ve yerdeğiştirme alanları bulunmuştur. Bulunan bu fonksiyonları denemek için örnek bir problem çözülmüştür. Elde edilen integral denklemdeki integraller tek katlıdır. İntegral denklemdeki tekillikler kısmi integrasyonla ortadan kaldırılmış bu arada başlangıç hızı bulunmuştur. Literatürde aynı problemin düzlem gerilme hali için analitik çözümü bulunmaktadır [5,6]. Başlangıç hızı her iki metotta da elastik katsayıların dönüşümü yapıldığında aynı çıkmaktadır. Dolayısıyla bulunan çekirdeklerin tüm dönel simetrik problemler için uygun olduğu kanıtlanmış olmaktadır. Aynı metot kullanılarak küresel simetrik problemler için bir çekirdek fonksiyonu Kadıoğlu-Kolgu tarafından hesaplanmış ve bu fonksiyon sınır eleman formülasyonunda kullanılarak Timoshenko tarafından analitik olarak çözülen bir problem için çözülmüş ve Timoshenko tarafından verilen aynı sonuçlar bulunmuştur [7]. Üç boyutlu formülasyonla Wang-Banarjee tarafından da aynı problem çözülmüştür [8].

KAYNAKLAR

[1] **ACHENBACH, J. D.,** 1973. Wave Propagation in Elastic Solids, North Holland.

[2] **KOLGU, S.,** 1997. Sınır Eleman Yönteminin Eğri Sınırlı Problemlere Uygulanması,Yüksek Lisans Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul

[3] **KADIOĞLU, N. and ATAOĞLU, Ş.,** 1998. A Simplification of The Boundary Element Method for Spherically Symmetric Problems, Proceedings of the Europen Boundary Element Method Symposium, Southamton, UK. pp. 179-188 , Computational Mechanics Publ., Ashurts, England.

[4] **IVOR STAKGOLD,** 1970. Boundary Value Problems of Mathematical Physıcs, Vol.1, The Macmillan Company, London.

[5] **JULIUS MIKLOWITZ,** 1960. Plane – Stress Unbounding Waves Emanating from a Suddenly Punched Hole in a Stretched, Journal of Applied Mechanics, Vol. 27, pp. 165-171.

[6] **A. KRROMM,** 1948. Zur Ausbreltung Von Stosswellen in Kreislochscheiben, Zeitschrift for Angewandte Mathematik und Mechanic, Vol. 28, pp. 104-114, pp. 297-303.

[7] **TIMOSHENKO AND GOODIER**, 1970. Theory of Elasticity, McGraw-Hill.

[8] **WANG,HUI-CHING and BANARJEE,** 1990. Axisymetric Transient Elastodynamic Analysis by Boundary Element Method, Int.J., Solids Structures, Volume 26. No:4, pp. 401-415.

ÖZGEÇMİŞ

Berna Altun 19.11.1976 tarihinde İstanbul'da doğmuştur. İlkokulu İstanbul Şişli 19 Mayıs İlköğretim okulunda bitirdikten sonra orta ve lise eğitimini İstanbul Nişantaşı Kız Lisesi'nde tamamlamıştır. 1993 yılında girmiş olduğu İstanbul Teknik Üniversitesi İnşaat Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden 1998 yılında mezun olmuştur. Aynı sene İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı Yapı Mühendisliği Programı Mekanik Kürsüsü'nde yüksek lisans çalışmalarına başladı.